arXiv:2603.08502v1 [math.AC] 9 Mar 2026

伪Gorenstein* 图

TAKAYUKI HIBI、SELVI KARA 和 DALENA VIEN

ABSTRACT. 受 Herzog 等人在交换代数中引入的伪戈伦斯坦环启发，我们定义了伪 Gorenstein* 图，并利用独立集多项式对若干自然的图族进行分类。

INTRODUCTION

设 $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ 是一个标准分次的 K-代数。其希尔伯特级数为

$$H_A(t) = \sum_{n\geq 0} (\dim_K A_n) t^n,$$

并且可以唯一地写成以下形式

$$H_A(t) = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s}{(1-t)^d},$$

其中 $d =$ 维数 A 且 $h_s \neq 0$。分子

$$h_A(t) = h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s$$

称为 h多项式，即 A。 $\mathfrak{a}$不变量由 A在 [9] 中引入，定义如下：

$$\mathfrak{a}(A) = \deg h_A(t) - d = s - d.$$

希尔伯特函数和 h-向量在交换代数和组合学中发挥着核心作用；参见 [21]。如果 A 是科恩–麦考利的，那么 $h_A(t)$ 的系数为正；而如果 A 是戈伦斯坦的，那么 h-向量是对称的，特别是 $h_s = 1$。受 [8], 中研究的伪Gorenstein条件以及Stanley早期关于 h-多项式 [11, 20, 22], 最高次系数的组合学研究启发，我们考察这一极值行为的图论类比。

本文中，图均为有限简单图。设 $G = (V(G)\ E(G))$ 是一个以$V(G) = [n]$为顶点的图，设 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$，并设 $I(G) \subset S$为 G的边理想，由单项式 $x_i x_j$ 生成，其中 $\{i, j\} \in E(G)$。记

$$h_{S/I(G)}(t) = h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s.$$

我们称 G为伪***Gorenstein*** ，如果 $h_s = 1$；若此外还满足$\mathfrak{a}(S/I(G)) = 0$，则称伪 ***Gorenstein**** 。因此，伪Gorenstein* 条件要求 h-多项式的最高次项系数为 1，且次数达到最大可能值。与交换代数的情形不同，我们不假设 $S/I(G)$是科恩–麦考利的。

2020 数学主题分类。05C38。关键词和短语。伪Gorenstein* 图。本文完成于第一作者在宾夕法尼亚州布林莫尔学院访问期间，即2026年2月28日至3月21日。第二作者Kara获得了美国国家科学基金会DMS–2418805号资助。

独立集多项式为我们研究的问题提供了自然框架。尽管这一视角直到最近才被引入对 h边理想和覆盖理想的-多项式的研究中，但本文表明，它是理解伪Gorenstein* 图的强大而有效的工具。设 $\alpha(G)$表示 G的独立数，并设

$$P_G(x) = \sum_{i=0}^{\alpha(G)} g_i x^i$$

G的独立集多项式为 G，其中 g_i 是 G中大小为 i的独立集数量。由于 $S/I(G)$ 是 G的独立复形的 Stanley–Reisner 环，因此有

$$h_{S/I(G)}(t) = (1-t)^{\alpha(G)} P_G\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

特别地， $P_G(x)$ 在 $x = -1$ 处的取值决定了 h-多项式的最高次项系数。此外， [1] 中证明，若 $M(G)$ 表示 $x = -1$ 作为独立集多项式 $P_G(x)$ 的根的重数，则

$$\deg h_{S/I(G)}(t) = \alpha(G) - M(G).$$

因此，

$$\mathfrak{a}(G) = 0 \iff P_G(-1) \neq 0.$$

因此

$$G \text{ is pseudo-Gorenstein}^* \iff P_G(-1) = (-1)^{\alpha(G)}.$$

因此，识别伪Gorenstein* 图的问题就转化为研究独立集多项式在 $x = -1$处的取值。

独立集多项式由 Gutman 和 Harary 提出，是匹配多项式的一种推广。它已从多个角度得到广泛研究，包括实根性、单峰性、系数性质和特殊取值 [4, 6, 10]。独立集多项式甚至在图论以外也有应用，例如音乐领域 [3]。它还与其他经典图多项式密切相关：它通过线图出现在匹配理论中，也可视为广义色多项式的一个特化 [7]。在其特殊取值中， $P_G(1)$ 统计了 G 的所有独立集，通常称为 G 的斐波那契数（见 [15, 18, 19]）；而 $P_G(-1)$ 则是独立集大小的交错和（见 [2, 16, 17]）。对我们的研究而言，后一个取值极为重要。

本文对若干自然图族中的伪Gorenstein* 图进行了分类。我们证明，圈 C_n 是伪Gorenstein* 当且仅当 $n \equiv 1$，2，5，10（模12）；路径 P_n 是伪Gorenstein* 当且仅当 $n \equiv 0$，2，9，11（模12）。我们还证明，完全多部图是伪Gorenstein* 当且仅当它是完全二部图，且其最大的部具有奇数个顶点；此外，我们为 Cameron–Walker 图给出了一个简单的奇偶判据。最后，我们研究伪Gorenstein* 性质在C-悬挂下的行为：证明该性质在顶点覆盖上的悬挂下保持不变，精确确定圈和路径的完全悬挂何时为伪Gorenstein*，并对圈和路径的极大独立集上的悬挂进行分类。全文的主要工具是独立集多项式的删边–缩边递推，以及$P_G(-1)$、根 -1的重数与 h-多项式次数之间的关系。

1. Preliminaries

我们保留 引言中的记号。对于图 G，记 $h_G(t) := h_{S/I(G)}(t)$，并且

$$h_G(t) = \sum_{i=0}^{\alpha(G)} h_i(G)t^i$$

其中 $h_i(G) = 0$ 对于 $i > \deg h_G(t)$。我们还使用记号 $\mathfrak{a}(G) := \mathfrak{a}(S/I(G))$ 表示 G 的$\mathfrak{a}$-不变量，其中

$$\mathfrak{a}(G) = \deg h_G(t) - \alpha(G),$$

and

$$M(G) := \operatorname{ord}_{x=-1} P_G(x),$$

-1 作为独立集多项式 $P_G(x)$ 的根的重数。

下面的恒等式将 $S/I(G)$的 h-多项式中 $t^{\alpha(G)}$ 的系数表示为 G的独立集多项式的形式。

命题 1.1. 设 $\alpha = \alpha(G)$。有 $h_\alpha(G) = (-1)^\alpha P_G(-1)$。

证明。由于 $S/I(G)$ 是 G 的独立复形的 Stanley–Reisner 环， f-向量与 h-向量之间的标准关系给出

$$h_G(t) = (1-t)^\alpha P_G\left(\frac{t}{1-t}\right) = \sum_{i=0}^{\alpha} g_i t^i (1-t)^{\alpha-i},$$

其中 g_i 是 G 中大小为 i的独立集数量。取 t^α 的系数可得

$$h_\alpha(G) = \sum_{i=0}^{\alpha} g_i(-1)^{\alpha-i} = (-1)^\alpha P_G(-1). \qquad \square$$

下一个定理在 [1, 定理 4。4], 中证明，它将 h-多项式的次数与独立集多项式的根 -1联系起来。

定理 1.2。 *[1, 定理 4.4]* 对于每个有限简单图 G，

$$\deg h_G(t) = \alpha(G) - M(G).$$

以下结论是上述结果的直接推论，见 [1]。

推论 1.3 。 对于每个有限简单图 G，都有 $\mathfrak{a}(G) = -M(G)$。特别地 ，

$$\mathfrak{a}(G) = 0 \iff P_G(-1) \neq 0.$$

结合引言中伪Gorenstein* 的定义与命题 1.1和推论 1.3，我们得到以下判据。

推论 1.4。 有限简单图 G 是伪*Gorenstein** 当且仅当 $P_G(-1) = (-1)^{\alpha(G)}$。

最后，我们回顾独立多项式的以下标准顶点删除递推。

引理 1.5。 设 G 是一个有限简单图，并令 $v \in V(G)$。那么

$$P_G(x) = P_{G-v}(x) + x\, P_{G-N[v]}(x).$$

2. Pseudo-Gorenstein* Cycles and Paths

本节聚焦于路径和圈，并探究这些基本图族何时是伪Gorenstein*。根据推论1.4，只需确定独立集多项式在 $x = -1$ 处的值。

下面两个引理给出了路和圈的独立集多项式在 $x = -1$处的取值，后文将反复使用这些结果。它们可以由 [14, 推论 4.8 和 56], 导出，因此省略证明。为方便起见，令 P_0 表示空图，则$P_{P_0}(x) = 1$。

引理 2.1。 令 $p_n := P_{P_n}(-1)$ 对于 $n \geq 0$。则

$$p_0 = 1, \qquad p_1 = 0, \qquad p_n = p_{n-1} - p_{n-2} \quad for\ n \geq 2.$$

因此， p_n 的周期为6，并且

$$p_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0, 5 \pmod 6, \\ 0, & n \equiv 1, 4 \pmod 6, \\ -1, & n \equiv 2, 3 \pmod 6. \end{cases}$$

引理 2.2。 令 $c_n := P_{C_n}(-1)$ 对于 $n \geq 3$。则

$$c_n = p_{n-1} - p_{n-3},$$

其中 p_n 如引理 *2.1*中所述。特别地， c_n 的周期为 6，并且

$$c_n = \begin{cases} 2, & n \equiv 0 \pmod 6, \\ 1, & n \equiv 1, 5 \pmod 6, \\ -1, & n \equiv 2, 4 \pmod 6, \\ -2, & n \equiv 3 \pmod 6. \end{cases}$$

结合推论1.4，这些计算将伪戈伦斯坦*圈和路的分类归结为模 12 的有限同余检验。

定理 2.3。 圈 C_n 是伪戈伦斯坦* 当且仅当 $n \equiv 1$、2、5、10（模 12）。

证明。 令 $\alpha = \alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$。由推论 1.4， C_n 是伪戈伦斯坦* 当且仅 if

$$P_{C_n}(-1) = (-1)^{\alpha}.$$

由引理 2.2， $P_{C_n}(-1)$ 模 6 周期，而 $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 模 4 周期。因此，比较结果以 12 为周期。检验 $n = 0$、1、.....、11，可得

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_{C_n}(-1)$	2	1	−1	−2	−1	1	2	1	−1	−2	−1	1
$(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1

因此 $P_{C_n}(-1) = (-1)^{\alpha(C_n)}$ 恰当且仅当 $n \equiv 1$、2、5、10（模 12）。 □

定理 2 .4. 路径 P_n 是伪*Gorenstein** 当且仅当 $n \equiv 0$，2，9，11（模 12).

证明。 设 $\alpha = \alpha(P_n) = \lceil n/2 \rceil$。根据推论 1.4， P_n 是伪Gorenstein* 当且仅当

$$P_{P_n}(-1) = (-1)^{\alpha}.$$

由引理 2.1， $P_{P_n}(-1)$ 模 6 是周期的，而 $(-1)^{\lceil n/2 \rceil}$ 模 4 是周期的。因此，比较结果模 12 是周期的。检查 $n = 0, 1, \ldots\ldots, 11$，可得

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_{P_n}(-1)$	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1
$(-1)^{\lceil n/2 \rceil}$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

因此，只有当 $n \equiv 0, 2, 9, 11$（模 12）时， $P_{P_n}(-1) = (-1)^{\alpha(P_n)}$ 才成立。 □

记号 2.5。 为便于后文使用，定义

$$a_n := (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} P_{C_n}(-1), \qquad b_n := (-1)^{\lceil n/2 \rceil} P_{P_n}(-1).$$

推论 2.6。 两个数列 (a_n) 和 (b_n) 模 12 都是周期的，其中

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 2, 5, 10 \pmod{12}, \\ -1, & n \equiv 4, 7, 8, 11 \pmod{12}, \\ 2, & n \equiv 0, 3 \pmod{12}, \\ -2, & n \equiv 6, 9 \pmod{12}, \end{cases} \quad \textit{and} \quad b_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}, \\ -1, & n \equiv 3, 5, 6, 8 \pmod{12}, \\ 0, & n \equiv 1, 4, 7, 10 \pmod{12}. \end{cases}$$

接下来我们转向另一类自然的图，即完全多部图，并准确确定它们何时是伪戈伦斯坦*。

3. Pseudo-Gorenstein* Multipartite Graphs

设 $G = K_{m_1, m_2, \ldots\ldots, m_k}$ 为顶点划分为以下形式的完全多部图

$$V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_k, \qquad |V_i| = m_i \geq 1,$$

和边集

$$E(G) = \{\{a, b\} : a \in V_i,\ b \in V_j,\ i \neq j\}.$$

设 $\alpha := \alpha(G)$，并注意到 $\alpha(G) = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$。那么 $\dim S/I(G) = \alpha$。

引理 3.1. G 的独立集多项式为

$$P_G(x) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_i} \binom{m_i}{r} x^r = \sum_{i=1}^{k} (1+x)^{m_i} - (k-1).$$

证明。 完全多部图中的独立集不能包含来自两个不同部分的顶点，因为当 $i \neq j$ 时， V_i 中的每个顶点都与 V_j 中的每个顶点相邻。因此，每个独立集要么是空集，要么是恰好来自一个部分 V_i 的非空子集。因此，对每个 $r \geq 1$，大小为 r 的独立集数量为 $\sum_{i=1}^{k} \binom{m_i}{r}$，其中当 $r > m_i$ 时 $\binom{m_i}{r} = 0$。由此可得

$$P_G(x) = 1 + \sum_{r \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{m_i}{r} \right) x^r = 1 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_i} \binom{m_i}{r} x^r = \sum_{i=1}^{k} (1+x)^{m_i} - (k-1)$$

其中最后一个等式由二项式定理得出。 □

推论 3.2. 完全多部图 G 是伪*Gorenstein** 当且仅当 $k = 2$且 α 为奇数。

证明。我们首先注意到，当 $k \geq 2$ 时， $\mathfrak{a}(G) = 0$ ；否则， $\mathfrak{a}(G) = -m_1$。为此，在 $x = -1$ 处计算引理 3.1 中的 $P_G(x)$。由于每个 $m_i \geq 1$，我们有 $P_G(-1) = 1 - k$。若 $k \geq 2$，则 $P_G(-1) \neq 0$，因此 -1不是根，且 $M(G) = 0$。于是 $\mathfrak{a}(G) = -M(G) = 0$。若 $k = 1$，则在此情形下， $M(G) = m_1$ 且 $\mathfrak{a}(G) < 0$ 。因此，当且仅当$k \geq 2$时， $\mathfrak{a}(G) = 0$ 。

要完成证明，还需要弄清楚何时

$$h_\alpha(G) = (-1)^\alpha P_G(-1) = (-1)^\alpha (1 - k) = 1.$$

当 $k = 2$ 且 α 为奇数时，就会出现这种情况。 □

4. Pseudo-Gorenstein* Cameron–Walker Graphs

本节考虑既不是星图也不是星三角图的连通 Cameron–Walker 图。根据 [5], 的结构定理，每个这样的图都可由一个二分划分为 $X \sqcup Y$ 的连通二分图构造而成：在 X 的每个顶点上至少连接一条悬挂边，并在 Y的每个顶点上连接任意数量的悬挂三角形。我们证明，对于这些图，值 $P_G(-1)$ 恒为 ± 1，因此伪Gorenstein* 性质由一个简单的奇偶条件决定。

本节中我们采用以下记号。

记号 4.1. 设 G 是一个二分核为 $X \sqcup Y$ 的 Cameron–Walker 图，其中 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 且 $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$。假设每个 x_i 都连有 $f_i \geq 1$ 个叶邻点，每个 y_j 都连有 $t_j \geq 0$ 个悬挂三角形。对于每个 i，令 L_i 表示连到 x_i的$f_i \geq 1$ 个叶邻点构成的集合。记

$$F := \sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad T := \sum_{j=1}^{m} t_j, \qquad m_0 := |\{\, j \in [m] : t_j = 0 \,\}|.$$

注 4.2. 设 G 是一个如记号4.1中所述的 Cameron-Walker 图。的独立数为 G 等于

$$\alpha(G) = F + T + m_0.$$

对于下界，取所有连到 x_i 的 F 个叶邻点；对于每个满足 $t_j = 0$ 的 y_j ，取 y_j；对于每个满足 $t_j \geq 1$ 的 y_j ，从其 t_j 个悬挂三角形中各取一个非y_j 顶点。这样便得到一个大小为 $F + T + m_0$ 的独立集。现在我们来证明上界。对于每个i，任一独立集在块 $\{x_i\} \cup L_i$ 中至多包含 f_i 个顶点。对于每个 j，任一独立集在 y_j-块中至多包含 1 个顶点（若 $t_j = 0$），若 $t_j \geq 1$ 则至多包含 t_j 个顶点。因此，我们有

$$\alpha(G) \leq \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{j} \max\{1, t_j\} = F + T + m_0.$$

以下定理恢复了 [13, 定理 1。1] 并运用我们的独立性多项式方法给出了一个更简短的证明。

定理 4.3。 设 G 是一个 *Cameron-Walker* 图。那么 $P_G(-1) = (-1)^{n+T} \in \{\pm 1\}$。特别地， $\mathfrak{a}(G) = 0$。

证明。 注意， G 的每个独立集 I 都有唯一的核交集 $S = I \cap (X \sqcup Y)$。该集合 S 在核中是独立的。对于二分核中的每个独立集 $S \subseteq X \sqcup Y$，令 $C_S(x)$ 表示所有满足 $I \cap (X \sqcup Y) = S$ 的 G 的独立集 I 对 $P_G(x)$ 的总贡献。那么

$$P_G(x) = \sum_I x^{|I|} = \sum_S C_S(x),$$

其中，第一个求和遍历 G 的所有独立集 I，第二个求和遍历核的所有独立集 S。

现在我们计算 $C_S(x)$。固定这样一个 S。若 $x_i \in S$，则 L_i 中没有顶点可以属于 I。若$x_i \notin S$，则可以任意选取 L_i 的子集，因此在L_i 上的选择总贡献为 $(1+x)^{f_i}$。类似地，若 $y_j \in S$，则与 y_j 相连的任何悬挂三角形中都没有顶点可以属于 I。若 $y_j \notin S$，则对于与 y_j 相连的每个悬挂三角形，我们可以选择不额外选取顶点，或恰好选取两个不同于 y_j的顶点之一。因此，每个这样的三角形贡献一个因子 $1+2x$，与 y_j 相连的 t_j 个悬挂三角形贡献 $(1+2x)^{t_j}$。因此

$$C_S(x) = x^{|S|} \cdot \prod_{x_i \notin S} (1+x)^{f_i} \cdot \prod_{y_j \notin S} (1+2x)^{t_j}.$$

现在代入 $x = -1$求值。我们得到

$$C_S(-1) = (-1)^{|S|} \cdot \prod_{x_i \notin S} (1-1)^{f_i} \cdot \prod_{y_j \notin S} (1-2)^{t_j}.$$

由于每个 $f_i \geq 1$，若某个 $x_i \notin S$，则因子 $(1-1)^{f_i} = 0$ 会出现。因此 $C_S(-1) = 0$。于是，只有当对每个 i都有 $x_i \in S$ 时， $C_S(-1) \neq 0$ 才可能成立，也就是说，只有当 $X \subseteq S$时才可能成立。但 S 是二分核中的一个独立集。由于核是连通的，每个 $y_j \in Y$在X中都有一个邻居，因此任何包含所有 X的独立集都不能包含 y_j。所以，满足 $C_S(-1) \neq 0$ 的唯一独立集 $S \subseteq X \sqcup Y$是 $S = X$。

由此可得

$$P_G(-1) = C_X(-1) = (-1)^{|X|} \prod_{j=1}^{m} (1-2)^{t_j} = (-1)^n \prod_{j=1}^{m} (-1)^{t_j} = (-1)^{n+T}.$$

特别地， $P_G(-1) \neq 0$，因此 $M(G) = 0$，这等价于 $\alpha(G) = 0$。 □

推论4.4。 一个 *Cameron-Walker* 图 G是伪*Gorenstein**当且仅当 $n+F+m_0$ 为偶数。

证明。 根据推论 1.4， G 是伪Gorenstein* 当且仅当 $(-1)^{n+T} = (-1)^{\alpha(G)}$。根据注 4.2，这等价于

$$(-1)^{n+T} = (-1)^{F+T+m_0},$$

也就是说， $n+F+m_0$ 为偶数。 □

在对若干自然图族中的伪Gorenstein* 图进行分类后，我们现在研究该性质在图操作下如何变化，首先考察 C-悬挂。

5. 悬挂于顶点覆盖之上

本节研究伪Gorenstein* 性质在顶点覆盖上的悬挂操作下的变化。这种图操作及其对正则性和投射维数的影响已在 [12] 和 [14]中得到研究。

我们先回顾悬挂的定义。

定义 5.1. 设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个有限简单图，且 $\varnothing \neq C \subseteq V(G)$。$G$ 的 C-悬挂 记作 $G(C)$，是由 G 添加一个新顶点 z 得到的图，该新顶点恰好与 C 的顶点相邻，即

$$E(G(C)) = E(G) \cup \{\{z, c\} : c \in C\}.$$

记 $G \setminus C$ 为 $V(G) \setminus C$ 上的诱导子图。

注 5.2. 令 z 为悬接顶点。则 $G(C) - z = G$ 且 $G(C) - N[z] = G \setminus C$。因此，由引理 1.5,

$$P_{G(C)}(x) = P_G(x) + x\, P_{G \setminus C}(x). \tag{1}$$

此外,

$$\alpha(G(C)) = \max\{\alpha(G),\, 1 + \alpha(G \setminus C)\}.$$

如下文所示，伪Gorenstein* 性质在对顶点覆盖进行悬挂时表现良好，但极端顶点覆盖的情形除外。

定理 5.3. 设 G 是一个图，且 $\alpha(G) \geq 2$。设 C 是 G 的一个顶点覆盖，满足 $1 \leq |S| \leq \alpha - 1$，其中 $S = V(G) \setminus C$。令 $H := G(C)$ 为 G的 C-悬挂。则

$$G \text{ is pseudo-Gorenstein}^* \iff H \text{ is pseudo-Gorenstein}^*.$$

证明。令 $\alpha := \alpha(G)$，且 $s := |S|$。我们首先证明 $\alpha(H) = \alpha(G) = \alpha$。令 z 为悬接顶点。若 A 是包含 z的 H 的一个独立集，则 $A \setminus \{z\} \subseteq S$，因为 z与 C的每个顶点都相邻。因此

$$|A| \leq 1 + s \leq \alpha.$$

若 A 是一个不包含 z的 H 的独立集，则 A是 G的一个独立集，因此$|A| \leq \alpha$。于是 $\alpha(H) \leq \alpha$。由于 G 的每个独立集在 H中也都是独立集，所以 $\alpha(H) \geq \alpha$。因此 $\alpha(H) = \alpha$。

接下来，我们计算 H 的独立集多项式。由于 $C = V(G) \setminus S$，诱导子图 $G \setminus C = G|_S$ 没有边。因此

$$P_{G \setminus C}(x) = P_{G|_S}(x) = (1 + x)^s.$$

因此，根据公式（1），

$$P_H(x) = P_G(x) + xP_{G \setminus C}(x) = P_G(x) + x(1 + x)^s.$$

在 $x = -1$ 处求值，并利用 $s \geq 1$，得到

$$P_H(-1) = P_G(-1). \tag{2}$$

现在我们比较 h-多项式如下:

$$\begin{aligned} h_{S/I(H)}(t) &= (1-t)^{\alpha} P_H\left(\frac{t}{1-t}\right) \\ &= (1-t)^{\alpha}\left[P_G\left(\frac{t}{1-t}\right) + \frac{t}{1-t}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{s}\right] \\ &= (1-t)^{\alpha} P_G\left(\frac{t}{1-t}\right) + (1-t)^{\alpha}\cdot\frac{t}{1-t}\cdot\left(\frac{1}{1-t}\right)^{s} \\ &= h_{R/I(G)}(t) + t(1-t)^{\alpha-s-1}. \end{aligned}$$

由于 $s \le \alpha - 1$，指数 $\alpha - s - 1$ 非负。此外，由于 $s \ge 1$，多项式 $t(1-t)^{\alpha-s-1}$ 的次数为 $\alpha - s \le \alpha - 1$。因此

$$h_{\alpha}(H) = h_{\alpha}(G). \tag{3}$$

最后，如果 G 是伪Gorenstein*，那么 $\mathfrak{a}(G) = 0$，因此 $P_G(-1) \neq 0$ 根据定理 1.2。由等式 (2)，可得 $P_H(-1) \neq 0$，因此 $\mathfrak{a}(H) = 0$。此外，由等式 (3)，我们有

$$h_{\alpha}(H) = h_{\alpha}(G) = 1.$$

因此 H 是伪Gorenstein*。反向证明完全类似，再次使用等式 (2) 和等式 (3)。证明完毕。 □

注记5.4。 定理 5.3 中剩下的两种情形为 $|S| = 0$ 和 $|S| = \alpha(G)$。

如果 $|S| = 0$，那么 $C = V(G)$，且 H 是 G的完全悬挂。于是

$$P_H(x) = P_G(x) + x.$$

因此， $P_H(-1) = P_G(-1) - 1$。即使 $\mathfrak{a}(G) = 0$，这等价于 $P_G(-1) \neq 0$，也可能出现 $P_H(-1) = 0$。若是如此，则有 $\mathfrak{a}(H) < 0$。因此，伪Gorenstein*性质不一定在完全悬挂下保持不变。

当 $|S| = \alpha(G)$ 时， $\alpha(H) = \alpha(G) + 1$ 并且

$$h_{S/I(H)}(t) = (1-t)h_{R/I(G)}(t) + t.$$

在这种情况下，若 G 是伪Gorenstein*，则 $h_{\alpha}(G) = 1$。注意， $h_{S/I(H)}(t)$ 的首项系数为 $h_{\alpha(G)+1}(H) = -1$。因此， H 不可能是伪Gorenstein*。

正如注5.4所述，完全悬挂一般不会保持伪Gorenstein* 性质。因此，我们准确确定了圈和路径的完全悬挂何时是伪Gorenstein*。

定理5.5. 令 G 表示图上的完全悬挂（锥） G.

(a) 对于 $n \ge 3$，完全悬挂 C_n 是伪*Gorenstein** 当且仅当 $n \equiv 0$ (模 12)。

(b) 对于 $n \ge 1$，完全悬挂 P_n 是伪*Gorenstein** 当且仅当 $n \equiv 1, 10 (\mathrm{mod}\ 12)$。

$\widehat{}$证明。设 z 为完全悬挂 G中的新顶点。由于 z 与 G的每个顶点相邻，我们有 $P_{\widehat{G}}(x) = P_G(x) + x$。因此

$$P_{\widehat{G}}(-1) = P_G(-1) - 1. \tag{4}$$

$\widehat{}$此外，$\alpha(G) = \alpha(G)$，因为包含 G 的任何独立集 z 的大小均为 1，而每个非空图 G 都有一个大小至少为 1 的独立集。接下来，我们应用推论 1.4。

(a) 设 $G = C_n$，其中 $n \geq 3$。则 $\alpha(\widehat{C_n}) = \alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。根据推论 1.4，$\widehat{C_n}$是伪Gorenstein* 当且仅当 $P_{\widehat{C_n}}(-1) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$。利用（4），这等价于

$$P_{C_n}(-1) - 1 = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

根据引理 2.2，我们有如下结论

$$P_{C_n}(-1) - 1 = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 6, \\ 0, & n \equiv 1, 5 \pmod 6, \\ -2, & n \equiv 2, 4 \pmod 6, \\ -3, & n \equiv 3 \pmod 6. \end{cases}$$

由于右侧 $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 始终为 ± 1，唯一可能的情形是 $n \equiv 0$ (模 6)，此时我们必须有

$$1 = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

若 $n \equiv 0$ （模 6），则 $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$，因此当且仅当 $n/2$ 为偶数时，这种情况才会发生，即当 $\frown n \equiv 0$ （模 12）时。因此，C_n 是伪Gorenstein* 当且仅当 $n \equiv 0$ （模 12）。

（b）令 $G = P_n$，其中 $n \geq 1$。则 α（$\widehat{P_n}$）$= \alpha$（P_n）$= \lceil \frac{n}{2} \rceil$。再次由推论1.4，$\widehat{P_n}$是伪Gorenstein* 当且仅当 $P_{\widehat{P_n}}$（-1）$=$（-1）$^{\lceil n/2 \rceil}$。利用（4），这等价于

$$P_{P_n}(-1) - 1 = (-1)^{\lceil n/2 \rceil}.$$

由引理2.1，可得

$$P_{P_n}(-1) - 1 = \begin{cases} 0, & n \equiv 0, 5 \pmod 6, \\ -1, & n \equiv 1, 4 \pmod 6, \\ -2, & n \equiv 2, 3 \pmod 6. \end{cases}$$

因此，只有当 $n \equiv 1$,4（模 6）时，才可能与 $(-1)^{\lceil n/2 \rceil} \in \{\pm 1\}$ 相等；此时我们需要

$$-1 = (-1)^{\lceil n/2 \rceil}.$$

若 $n \equiv 1$ (模 6)，则当且仅当 $n \equiv 1$ (模 12) 时成立。若 $n \equiv 4$ (模 6)，则$\widehat{}$当且仅当 $n \equiv 10$ (模 12) 时成立。因此，P_n 是伪Gorenstein* 当且仅当 $n \equiv 1$，10（模 12）。□

6. Suspensions over maximal independent sets: cycles

本节中，我们研究圈的极大独立集上的悬挂。一般来说，极大独立集上的悬挂并不保持 a-不变量（见 [14, 定理 5。7]）。

设 $n \geq 4$，设 $\mathcal{C}$ 为 C_n 的一个极大独立集，并设 G 为以 z 为新顶点的 C_n 的 $\mathcal{C}$-悬挂，即

$$V(G) = V(C_n) \cup \{z\}, \qquad E(G) = E(C_n) \cup \{\{z, x_i\} : x_i \in \mathcal{C}\}.$$

由推论 2.6 可知，在 $\alpha := \alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ –

$$a_n := (-1)^{\alpha} P_{C_n}(-1) = h_{\alpha}(C_n),$$

a_n 的值由 n 模 12 决定。

注 6.1. 记 $c := |\mathcal{C}|$。则 $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq c \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。令 $\ell := n - 2c$。由于 $\mathcal{C}$ 是极大独立的，$\mathcal{C}$ 沿圈的连续顶点之间的间隙（顶点）长度为 1 或 2。因此，若 $H := G - N[z]$，则 H 是 ℓ 条边与 $c - \ell$ 个孤立顶点的不交并。从而

$$\alpha(H) = \ell + (c - \ell) = c.$$

因此 $\alpha(G) = \max\{\alpha(C_n) \ 1 + \alpha(H)\} = \max\{\alpha, c + 1\}$。由于 $c \leq \alpha$，由此可得

$$\alpha(G) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{if } c = \alpha, \\ \alpha, & \text{if } c < \alpha. \end{cases}$$

注 6.2. $n = 3$ 的情形比较特殊。此时 $|\mathcal{C}| = 1$，而唯一的 $\mathcal{C}$悬挂 $G$of C_3 满足

$$P_G(x) = 1 + 4x + 2x^2, \qquad \text{and} \qquad h_G(t) = 1 + 2t - t^2.$$

特别地， G不是伪Gorenstein*。

定理 6.3. 我们有

$$h_{\alpha(G)}(G) = \begin{cases} -a_n, & \text{if } c = \alpha, \\ \operatorname{sgn}(a_n), & \text{if } c = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil < \alpha, \\ a_n, & \text{if } \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil < c < \alpha. \end{cases}$$

证明. 由引理 1.5，由于 $G - z = C_n$ 且 $G - N[z] = H$，我们有

$$P_G(x) = P_{C_n}(x) + x\, P_H(x) = P_{C_n}(x) + x(1 + x)^{c-\ell}(1 + 2x)^{\ell}.$$

因此，由命题 1.1，

$$h_{\alpha(G)}(G) = (-1)^{\alpha(G)} P_G(-1).$$

如果 $c > \ell$，t当 $3c > n$ 时。因此 $c - \ell > 0$，且第二项在 $x = -1$ 处为零。于是

$$P_G(-1) = P_{C_n}(-1), \qquad h_{\alpha(G)}(G) = (-1)^{\alpha(G)-\alpha} a_n.$$

如果 $c = \alpha$，那么 $\alpha(G) = \alpha + 1$。因此 $h_{\alpha(G)}(G) = -a_n$。如果 $\lceil \frac{n}{3} \rceil < c < \alpha$，那么 $\alpha(G) = \alpha$。因此$h_{\alpha(G)}(G) = a_n$。最后，如果 $c = \lceil \frac{n}{3} \rceil < \alpha$，那么 $3 \nmid n$。因此，根据推论 2.6， $a_n \in \{\pm 1\}$。于是，在这个子情形中， $h_{\alpha(G)}(G) = a_n = \operatorname{sgn}(a_n)$。

剩下的情形是 $c = \ell$。在这种情况下， $n = 3c$。因此 $c = \lceil \frac{n}{3} \rceil < \alpha$，且 $\alpha(G) = \alpha$。在 $x = -1$ 处求值，得到

$$P_G(-1) = P_{C_n}(-1) + (-1)^{c+1} \qquad \text{and} \qquad h_{\alpha(G)}(G) = a_n + (-1)^{\alpha+c+1}.$$

由于 $n = 3c$，由引理 $P_{C_n}(-1)$ 得到的 2.2 中的数值 $P_{C_n}(-1) = 2(-1)^c$。因此

$$a_n = (-1)^{\alpha} P_{C_n}(-1) = 2(-1)^{\alpha+c}.$$

Thus

$$h_{\alpha(G)}(G) = 2(-1)^{\alpha+c} + (-1)^{\alpha+c+1} = (-1)^{\alpha+c} = \operatorname{sgn}(a_n).$$

这就证明了该定理。 □

推论 6.4。设 $n \geq 4$，令 $\mathcal{C}$ 为 C_n的极大独立集，并令 G 为 C_n的$\mathcal{C}$-悬挂。那么，当且仅当以下情况之一成立时， G 是伪*Gorenstein**：

(a) $n \equiv 0$， 3（模 12）且 $|\mathcal{C}| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$;

(b) $n \equiv 4$， 7、8、 11（模 12）且 $|\mathcal{C}| = \alpha(C_n)$;

(c) $n \equiv 1$， 2、5、 10（模 12）且 $|\mathcal{C}| \neq \alpha(C_n)$。

证明。已在 [14, 定理 4.9] 中证明， $\mathfrak{a}(G) = 0$ 对任意 $\mathcal{C}$-悬挂于 C_n 对任意$n \geq 3$成立。因此 G 是伪Gorenstein* 当且仅当 $h_{\alpha(G)}(G) = 1$。
现在结合推论 2.6 中 a_n 的取值来应用定理 6.3。若 $c = \alpha$，则$h_{\alpha(G)}(G) = -a_n$，其恰好在 $n \equiv 4$、7、8、11（模 12）时等于 1。若$c = \lceil \frac{n}{3} \rceil < \alpha$，则 $h_{\alpha(G)}(G) = \operatorname{sgn}(a_n)$，其恰好在 $n \equiv 0$、1、2、3、5、10（模 12）时等于 1。若$\lceil \frac{n}{3} \rceil < c < \alpha$，则 $h_{\alpha(G)}(G) = a_n$，其恰好在 $n \equiv 1$、2、5、10（模 12）时等于 1。综合这些情形即得 (a)、(b) 与 (c)。□

7. Suspensions over maximal independent sets: paths

In 本节中，我们研究路径的极大独立集上的悬挂 s.

设 $n \geq 2$，令 P_n 为顶点集为 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的路径，令 $\mathcal{C}$ 为 P_n 的一个极大独立集，并令 G 为 P_n 的 $\mathcal{C}$-悬挂，其新顶点为 z。
定义 $\alpha := \alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。回顾推论 2.6 可知

$$b_n := (-1)^{\alpha} P_{P_n}(-1) = h_{\alpha}(P_n),$$

b_n 的取值仅取决于 n 对 12 取模的结果。

记号 7.1。将 $\mathcal{C} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_c}\}$ 写作 $i_1 < i_2 < \cdots < i_c$，其中 $c := |\mathcal{C}|$。对于连续顶点 x_{i_j}， $x_{i_{j+1}} \in \mathcal{C}$，称顶点集合 $\{x_{i_j+1}, \ldots, x_{i_{j+1}-1}\}$ 为它们之间的内部间隙。由于 $\mathcal{C}$ 是极大独立集，每个这样的间隙大小为 1 或 2，等价地

$$2 \leq i_{j+1} - i_j \leq 3 \qquad \text{for } 1 \leq j \leq c-1.$$

此外，左端点 x_1 要么位于 $\mathcal{C}$ 中，要么是 x_{i_1} 之前的唯一顶点。右端点 x_n 也有类似的结论。定义

$$\delta_0 = \begin{cases} 0, & \text{if } x_1 \in \mathcal{C}, \\ 1, & \text{if } x_1 \notin \mathcal{C}, \end{cases} \qquad \delta_t = \begin{cases} 0, & \text{if } x_n \in \mathcal{C}, \\ 1, & \text{if } x_n \notin \mathcal{C}, \end{cases}$$

并令 $\delta := \delta_0 + \delta_t \in \{0,1,2\}$。

注 7.2. 令 $H := G - N[z]$。那么，H 是从 P_n 中删除C的顶点后得到的。每个大小为 2 的内部间隙在 H中贡献一条边，而每个大小为 1 的内部间隙贡献一个孤立顶点。此外，每个缺失端点还贡献一个孤立顶点。若 ℓ 表示大小为 2 的内部间隙数，则 H 是由 ℓ 条边和

$$e := (c-1-\ell) + \delta = c - \ell - 1 + \delta$$

个孤立顶点组成的不交并。因此，$\alpha(H) = \ell + e = c - 1 + \delta$ 且

$$P_H(x) = (1+x)^e (1+2x)^\ell.$$

因此，$\alpha(G) = \max\{\alpha(P_n)\ 1 + \alpha(H)\} = \max\{\alpha,\ c+\delta\}$。此外，

$$\alpha(G) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{if } c + \delta = \alpha + 1, \\ \alpha, & \text{if } c + \delta \le \alpha. \end{cases}$$

事实上，$n = 2c + \ell - 1 + \delta \ge 2c - 1 + \delta$。因此，$2c + \delta \le n + 1$。由于 $\delta \le 2$，我们得到

$$2(c+\delta) = 2c + 2\delta \le n + 1 + \delta \le n + 3.$$

因此

$$c + \delta \le \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = \alpha + 1.$$

The理 7.3. 令 G 为一个 C-悬挂，且其基图为 P_n，记号同记号7。 *1.*

(a) 若 $n \equiv 0,\ 2$（模 3），则 $\mathfrak{a}(G) = 0$ 且

$$h_{\alpha(G)}(G) = \begin{cases} -b_n, & \text{if } c + \delta = \alpha + 1, \\ b_n, & \text{if } c + \delta \le \alpha. \end{cases}$$

(b) 若 $n = 3k+1$ 且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$，则 $\mathfrak{a}(G) = 0$ 且

$$h_{\alpha(G)}(G) = (-1)^{\alpha+k+1}.$$

(c) 在所有其余情况下，$\mathfrak{a}(G) < 0$。

证明。在 [14, 定理 5.6 和 5.7] 中证明了 $\mathfrak{a}(G) = 0$ 当且仅当 $n \equiv 0,\ 2$（模 3）或当 $n = 3k+1$ 且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$ 对于某个 $k \ge 1$时成立。这证明了 (c) 部分。因此，剩下的问题是确定哪些 n满足以下条件:

$$1 = h_{\alpha(G)}(G) = (-1)^{\alpha(G)} P_G(-1).$$

由引理 1.5 可知

$$P_G(x) = P_{P_n}(x) + x\, P_H(x) = P_{P_n}(x) + x(1+x)^e (1+2x)^\ell.$$

首先假设 $e \ge 1$。则 $P_G(-1) = P_{P_n}(-1)$。根据推论 2.6，当且仅当 $n \equiv 0,\ 2$（模 3）时，它非零。根据命题 1.1

$$h_{\alpha(G)}(G) = (-1)^{\alpha(G)} P_G(-1) = (-1)^{\alpha(G)-\alpha} b_n.$$

现在应用注记 7.2：若 $c + \delta = \alpha + 1$，则 $\alpha(G) = \alpha + 1$，因此 $h_{\alpha(G)}(G) = -b_n$；若 $c + \delta \le \alpha$，则 $\alpha(G) = \alpha$，因此 $h_{\alpha(G)}(G) = b_n$。这就证明了 (a)。

现在假设 $e = 0$。那么 H 没有孤立顶点。这意味着 $\delta = 0$ 且每个内部间隙的大小均为 2，这等价于对于某个 $k \geq 1$，有 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$。因此$n = 3k + 1$。在这种情况下， H 是由 $\ell = k$ 和 k 条边构成的不交并。由于 $n \equiv 1$ (模 3)，我们有 $P_{P_n}(-1) = 0$ 并且

$$P_G(-1) = (-1)(1-2)^k = (-1)^{k+1} \neq 0.$$

由于 $c = k + 1 \leq \alpha$，我们有 $\alpha(G) = \alpha$ 由注记 7.2得出。因此，(b)成立：

$$h_{\alpha(G)}(G) = (-1)^{\alpha(G)} P_G(-1) = (-1)^{\alpha+k+1}. \qquad \square$$

推论 7.4。 假设 $n \geq 2$。那么， G 是伪*Gorenstein** 当且仅当以下条件之一成立：

(a) $n \equiv 0$，2，9，11（模 12）且 $c + \delta \leq \alpha$；
(b) $n \equiv 3$，5，6，8（模 12）且 $c + \delta = \alpha + 1$；
(c) $n \equiv 1$，4（模 12）且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_n\}$。

证明。 由推论2.6，

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}, \\ -1, & \text{if } n \equiv 3, 5, 6, 8 \pmod{12}, \\ 0, & \text{if } n \equiv 1, 4, 7, 10 \pmod{12}. \end{cases}$$

若 $n \equiv 0$，2（模 3），则定理 7.3(a)表明 G 是伪Gorenstein* 当且仅当$h_{\alpha(G)}(G) = 1$。若 $c+\delta \leq \alpha$，这意味着 $b_n = 1$，从而得到 $n \equiv 0$，2，9，11（模 12）。若 $c+\delta = \alpha+1$，这意味着 $-b_n = 1$，从而得到 $n \equiv 3$，5，6，8（模 12）。
如果 $n = 3k + 1$ 且 $\mathcal{C} = \{x_1, x_4, \ldots, x_{3k+1}\}$，那么根据定理7.3(b)， G 是伪Gorenstein*当且仅当

$$(-1)^{\alpha+k+1} = 1.$$

奇偶性检验表明，这当且仅当 $k \equiv 0$，1 (mod 4) 时成立，等价地，当$n = 3k + 1 \equiv 1$，4 (mod 12) 时成立。
其余所有情形均由定理7.3(c)排除。 $\square$

References

[1] J. Biermann、T. Chau、S. Kara、A. O'Keefe、J. Skelton、G. S. Castillo 和 D. Vien。通过独立多项式研究覆盖理想可实现的（reg，deg h）对，arXiv 预印本 2602.10376，2026年。[2] M. Bousquet-M´elou、S. Linusson 和 E. Nevo。论方格网格的独立复形。《代数与组合》，27(4):423–450，2008年。[3] J. Brown 和 R. Hoshino。环图的独立多项式及其在音乐中的应用。《离散数学》，309(8):2292–2304，2009年。[4] J. I. Brown 和 B. Cameron。论非常良覆盖图的独立多项式的单峰性。《离散数学》，341(4):1138–1143，2018年。[5] K. Cameron 和 T. Walker。诱导匹配数与匹配数相同的最大图。《离散数学》，299(1-3):49–55，2005年。

[6] M. Chudnovsky 和 P. Seymour。无爪图的独立多项式的根。《组合理论杂志 *B* 辑》，97(3):350–357，2007年。[7]K. Dohmen、A. P¨onitz 和 P. Tittmann。色多项式的一种新的二元推广。《离散数学理论与计算机科学》，6(1):69–89，2003年。[8] V. Ene、J. Herzog、T. Hibi 和 S. Saeedi Madani。伪Gorenstein 与层级 Hibi 环。《代数杂志》，431:138–161，2015年。[9] S. Goto 和 K. Watanabe。论分次环 I。《日本数学会杂志》，30(2):179–213，1978年。[10] I. Gutman 和 F. Harary。匹配多项式的推广。《数学实用论丛》，24:97–106，1983年。[11] T. Hibi。分配格、仿射半群环与带直化律的代数。载于《交换代数与组合学（京都，*1985*）》，第11卷《纯数学高级研究丛书》，第93–109页。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1987年。[12] T. Hibi、H. Kanno 和 K. Matsuda。有限图的诱导匹配数与边理想。《代数杂志》，532:311–322，2019年。[13] T. Hibi、K. Kimura、K. Matsuda 和 A. Tsuchiya。Cameron-Walker 图的正则性与 a 不变量。《代数杂志》，584:215–242，2021年。[14] S. Kara 和 D. Vien。悬挂下边理想的代数不变量，2026年。[15] A. Knopfmacher、R. F. Tichy、S. Wagner 和 V. Ziegler。图、划分与斐波那契数。《离散应用数学》，155(10):1175–1187，2007年。[16] V. E. Levit 和 E. Mandrescu。图在 -1 处的独立多项式。*arXiv* 预印本 *arXiv:0904.4819*，2009年。[17] V. E. Levit 和 E. Mandrescu。图的圈秩及其在 -1处的独立多项式。《图与组合》，29(2):259–273，2013年。[18]A. S. Pedersen 和 P. D. Vestergaard。单圈图中独立集的数量。《离散应用数学》，152(1-3):246–256，2005年。[19] H. Prodinger 和 R. F. Tichy。图的斐波那契数。《斐波那契季刊》，20(1):16–21，1982年。[20]R. P. Stanley。《序结构与划分》，美国数学会回忆录第119号。美国数学会，普罗维登斯，宾夕法尼亚州，1972年。[21] R. P. Stanley。分次代数的希尔伯特函数。《数学进展》，28(1):57–83，1978年。[22] R. P. Stanley。《枚举组合学：第*1*卷》，剑桥高等数学研究丛书第49卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2012年。

(T. Hibi) Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Suita, Osaka 565–0871, Japan
电子邮箱地址：hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

(S.Kara) Department of Mathematics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr, PA 19010电子邮箱地址：skara@brynmawr.edu

(D.Vien) Department of Mathematics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr, PA 19010电子邮箱地址：dvien@brynmawr.edu