# REIDEMEISTER 数与 NIELSEN 数：增长率、渐近行为、动力ζ函数与高斯同余

ALEXANDER FEL'SHTYN 和 MATEUSZ SLOMIANY

ABSTRACT. 本文从动力学的角度出发，研究 Reidemeister 数序列以及 Reidemeister 重合数与 Nielsen 重合数序列的增长率和渐近行为。我们还证明了有限 Pr¨ufer 秩无挠幂零群 $G$的端同态驯化映射对 $(\varphi,\ \psi)$ 的 Reidemeister 重合数序列 $\{R(\varphi^n,\ \psi^n)\}$ 满足高斯同余。此外，我们证明了 Nielsen 重合 ζ 函数的有理性，证明了 Nielsen 重合数序列 $\{N(f^n,\ g^n)\}$ 满足高斯同余，并表明紧致幂零流形到自身的驯化映射对 $(f,\ g)$ 的序列 $\{N(f^n,\ g^n)\}$ 存在增长率。

arXiv:2603.08527v1 [math.DS] 9 Mar 2026

CONTENTS

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. Reidemeister 数序列 $\{R(\varphi^n)\}$ 的增长率 7 4. Reidemeister 数序列 $\{R(\varphi^n)\}$ 的增长率与拓扑熵 10 5. Reidemeister 重合数序列 $\{R(\varphi^n,\psi^n)\}$ 的增长率 12 6. Reidemeister 重合数序列 $\{R(\varphi^n,\psi^n)\}$ 的高斯同余 15 7. Nielsen 重合 ζ 函数、序列 $\{N(f^n,g^n)\}$ 20 的增长率与高斯同余 8. 序列 $\{R(\varphi^k,\psi^k)\}$ 和 $\{N(f^k,g^k)\}$ 22 的渐近行为 参考文献 25

## 1. 引言

在拓扑不动点理论中，Reidemeister 数和 Nielsen 数是与连通紧致多面体上的连续自映射相关的同伦不变量。转而考察多面体的基本群，Reidemeister 数便可通过扭曲共轭类作代数处理；参见 [8]。我们假设 $X$ 是一个连通的、˜紧致多面体，且 $f\colon X\to X$ 是连续映射。令 $p\colon X\to X$ 为 $X$ 的万有˜ ˜ ˜ ˜ ˜覆盖， $f\colon X\to X$ 为 $f$ 的一个提升，即 $p\circ f=f\circ p$。如果存在覆盖变换 $\gamma\in\Gamma\cong\pi_1(X)$，使得 $\tilde{f}'=\gamma\circ\tilde{f}\circ\gamma^{-1}$.，则称 $f$ 的两个提升 $f'$ 和 $f$ 共轭。提升类是按共轭关系划分的等价类。记号：$[\tilde{f}]=\{\gamma\circ\tilde{f}\circ\gamma^{-1}|\gamma\in\Gamma\}$. $p(\mathrm{Fix}(f))\ \subset\ \mathrm{Fix}(f)$ 这一子集称为由提升类 $[f]$ 确定的 $f$ 的不动点类。我们通过万有覆盖空间来定义不动点类。其要义是： $f$ 的两个不动点属于同一个类，当且仅当存在 $f$ 的一个提升 $f$，使得这两个不动点上方都有不动点。还有一种表述方式，不必显式使用覆盖空间，因此在识别不动点类时非常有用。 $f$ 的两个不动点 $x_0$ 和 $x_1$ 属于

2010 数学主题分类。 主要分类号：37C25；37C30；22D10；次要分类号：20E45；54H20；55M20。
关键词与短语。 扭曲共轭类，Reidemeister 重合数，重合 Nielsen 数，增长率，高斯同余。

同一个不动点类，当且仅当存在一条从 $x_0$ 到 $x_1$ 的路径 $c$，使得 $c \cong f \circ c$（端点相对同伦——"Nielsen 圆盘"）。这一事实可视为非空不动点类的另一种（几何）等价定义。每个映射 $f$ 只有有限个非空不动点类，每个类都是 $X$ 的紧子集。若某个不动点类的指数非零，则称其为本质的。 $f$ 的提升类的数目（因而也是所有不动点类的数目）称为 $f$ 的 ***Reidemeister*** 数，记作 $R(f)$。该数为正整数或无穷大。本质不动点类的数目称为 $f$ 的 ***Nielsen*** 数，记作 $N(f)$。Nielsen 数总是有限的。 $R(f)$ 和 $N(f)$ 是同伦不变量。在紧致连通多面体范畴中，除某些特殊情形外，映射的 Nielsen 数等于与 $f$ 具有相同同伦类型的映射的不动点数的最小值。

设 $f, g\colon X \to Y$ 是两个紧致连通流形之间的映射。令 $\mathrm{Coin}(f,g) := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ 为 $f$ 和 $g$ 的重合点集。若存在一条路径 $\alpha\colon [0,1] \to X$，从 $x_1$ 到 $x_2$，且 $f \circ \alpha$ 与 $g \circ \alpha$ 同伦，则称两个重合点 $x_1, x_2 \in \mathrm{Coin}(f,g)$ Nielsen 等价。若 $[C]$ 表示 $C$ 的固定端点同伦类，则可将其记为 $[f \circ \alpha] = [g \circ \alpha]$。显然，Nielsen 等价是一种等价关系。我们将重合类的集合记为 $\mathrm{Coin}(f,g)$。设 $\{f_t\}$ 是 $f$ 的一个同伦，且 $\{g_t\}$ 是 $g$, $f_0 = f, g_0 = g$ 的一个同伦。若存在一条路径 $C\colon [0,1] \to X$，满足 $C(0) = x_1, C(1) = x_2$，且 $[\{f_t \circ C(t)\}] = [\{g_t \circ C(t)\}]$，则称两个重合点 $x_1 \in \mathrm{Coin}(f,g)$ 和 $x_2 \in \mathrm{Coin}(f_1,g_1)$ 是 $\{f_t\},\{g_t\}$-相关的。若 $\alpha$ 中的每个重合点都与 $\beta$ 中的每个重合点 $\{f_t\},\{g_t\}$-相关，则称两个等价类 $\alpha \in \mathrm{Coin}(f,g)$ 和 $\beta \in \mathrm{Coin}(f_1,g_1)$ 是 $\{f_t\},\{g_t\}$-相关的。

如果对于任意同伦 $\{f_t\}$（关于 $f$）和 $\{g_t\}$（关于 $g$），在 $\mathrm{Coin}(f_1,g_1)$ 中都存在一个重合类，使得 $\alpha$ 与 $\{f_t\},\{g_t\}$ 相关，那么重合类 $\alpha \in \mathrm{Coin}(f,g)$ 就称为本质的 。$\mathrm{Coin}(f,g)$ 中本质重合类的有限个数称为 $f, g$ 的***Nielsen*** 重合数，记作 $N(f,g)$，另见 [22]。

设 $G$ 是一个群， $\varphi : G \to G$ 是一个端同态。当且仅当存在 $g \in G$ 使得 $y = gx\varphi(g^{-1})$. 时，称两个元素 $x, y \in G$ 为 $\varphi$-共轭 或扭曲共轭。我们将元素 $x \in G$ 的 $\varphi$-共轭 或扭曲共轭类记作 $\{x\}_\varphi$。 $\varphi$-共轭类的数量称为端同态 $\varphi$ 的***Reidemeister*** 数，记作 $R(\varphi)$。如果 $\varphi$ 是恒等映射，那么 $\varphi$-共轭类就是群 $G$ 中通常的共轭类。

我们有不动点类、提升类与相应扭曲共轭类之间的 Reidemeister 双射。因此，连续映射 $f$的 Reidemeister 数与其诱导的、作用于 $X$基本群上的端同态 $f_*$ 的 Reidemeister 数（即扭曲共轭类的个数）相同： $R(f) = R(f_*)$。本文主要从群论观点出发，受到该主题拓扑学起源的启发，但在其他方面独立于其拓扑学起源。

设 $G$为一个群， $\varphi$、 $\psi\colon G \to G$为两个端同态。当且仅当存在 $g \in G$ 使得 $\beta = \psi(g)\alpha\varphi(g^{-1})$时，称两个元素 $\alpha$、 $\beta \in G$为$(\varphi,\psi)$-共轭。$(\varphi,\psi)$-共轭类的个数称为端同态$\varphi$ 和 $\psi$的 Reidemeister 重合数，记作 $R(\varphi,\psi)$。若 $\psi$ 是恒等映射，则$(\varphi, id)$-共轭类就是群 $G$ 中的 $\varphi$-共轭类，并且 $R(\varphi, id) = R(\varphi)$。Reidemeister 重合数 $R(\varphi,\psi)$在 Nielsen-Reidemeister 偶合理论中有重要应用。若端同态 $\varphi$ 的 Reidemeister 数 $R(\varphi^n)$对所有 $n \in \mathbb{N}$均有限，则称其具有驯性。若端同态对$(\varphi,\psi)$的 Reidemeister 重合数 $R(\varphi^n,\psi^n)$对所有 $n \in \mathbb{N}$均有限，则称该端同态对具有驯性。

映射 $f$， $g$ 在紧流形$X$和 $Y$的基本群之间诱导同态 $f_\#$， $g_\#$。我们将映射 $R(f,\ g) := R(f_\#,\ g_\#)$ 的拓扑Reidemeister 重合数定义为所诱导同态的 Reidemeister 重合数。如果 $Y = X$，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，当 $R(f^n,\ g^n) < \infty$ 时，我们称映射对 $f$， $g$ 具有驯性。

在动力系统理论中，Reidemeister 重合数用于计算两个映射的同步点，即在对两个映射同时进行迭代时其轨道相交的点；例如参见 [18], 。

本文从动力学的角度出发，研究温和自同态 $\varphi$、驯化映射 $f$、端同态的良性对 $(\varphi,\psi)$ 以及映射的驯化映射对 $(f,g)$ 所对应的 Reidemeister 数与 Nielsen 数序列 $\{R(\varphi^n)\}$,$\{R(\varphi^n,\psi^n)\}$, $\{R(f^n)\}$, $\{N(f^n,g^n)\}$ 的增长率和渐近行为。我们还证明了有限 Pr¨ufer 秩无挠幂零群 $G$ 上端同态良性对 $(\varphi,\psi)$ 的 Reidemeister 重合数序列 $\{R(\varphi^n,\psi^n)\}$ 满足高斯同余。此外，我们证明了 Nielsen 重合 ζ 函数的有理性以及 Nielsen 重合数序列 $\{N(f^n,g^n)\}$ 满足高斯同余，并证明紧致幂零流形到自身的映射良性对 $(f,g)$ 所对应的序列 $\{N(f^n,g^n)\}$ 存在增长率。

本文结构如下。

第 2 节回顾本文所需的其他理论中的定义、事实和记号，包括映射的拓扑熵、群的酉对偶、幂零群的孤立下中心列以及 $p$-进数。

第 3 节证明，对于有限 Pr¨ufer 秩的无挠幂零群上的温和自同态 $G$，Reidemeister 数序列 $\{R(\varphi^n)\}$ 的增长率存在，并通过诱导自同态在阿贝尔截面上的特征值给出增长率的闭式公式。

第 4 节建立 Reidemeister 数序列 $\{R(\varphi^n)\}$ 的增长率与酉对偶映射的拓扑熵之间的联系；这些映射由有限生成无挠幂零群 $G$ 上的温和自同态诱导，并作用于阿贝尔截面的酉对偶上。

在第5节中，我们证明，对于有限普吕弗秩无挠幂零群 $G$ 上的端同态良性对$(\varphi,\psi)$, Reidemeister 重合数序列 $\{R(\varphi^n,\psi^n)\}$ 的增长率存在，并给出一个通过阿贝尔截面上的诱导自同态的特征值表示该增长率的闭式公式。

在第6节中，我们证明有限普吕弗秩无挠幂零群 $G$ 上的端同态良性对$(\varphi,\psi)$的 Reidemeister 重合数序列 $\{R(\varphi^n,\psi^n)\}$ 满足高斯同余。

在第7节中，我们证明紧致幂零流形到自身的驯化映射对$(f,g)$的Nielsen 重合数序列 $\{N(f^n,g^n)\}$对应的Nielsen 重合 ζ 函数具有有理性，且该序列满足高斯同余；我们还证明该 Nielsen 重合数序列 $\{N(f^n,g^n)\}$的增长率存在。

在第8节中，我们研究序列 $\{R(\varphi^n,\psi^n)\}$、 $\{N(f^n,g^n)\}$的渐近行为，它们分别是具有有限 Pr¨ufer秩的无挠幂零群 $G$ 的端同态良性对$(\varphi,\psi)$的Reidemeister重合数，以及紧致幂零流形到自身的驯化映射对$(f,g)$的Nielsen重合数。

## 2. Preliminary considerations

2.1. 迭代的拓扑熵与 Nielsen 数的增长率。衡量动力系统复杂性最广泛使用的指标是拓扑熵。下面回顾其定义。设 $f\colon\ X\to X$ 是紧致度量空间上的自映射。给定 $\epsilon>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$，若子集 $E\subset X$ 在 $f$ 下满足：对于 $E$ 中的每一对 $x\neq y$，存在 $0\le i<n$，使得 $d\left(f^i(x)\right.$ $\left.f^i(y)\right)\ge\epsilon$，则称其为 $(n,\epsilon)$-分离集。令 $s_n(\epsilon,f)$ 表示 $f$ 下任意 $(n,\epsilon)$-分离子集 $E$ 的最大基数。因此， $s_n(\epsilon,f)$ 是在只能区分彼此至少相距 $\epsilon$ 的 $X$ 中的点时，能够彼此区分的长度为 $n$ 的轨道片段 $x$、$f(x)$ $\cdots$、$f^{n-1}(x)$ 的最大数量。现在令

$$h(f,\epsilon):=\limsup_n\frac{1}{n}\log\ s_n(\epsilon,f)$$

$$h(f) := \lim_{\epsilon\to 0} h(f,\epsilon).$$

数值 $0 \le h(f) \le \infty$ 与所采用的度量 $d$ 无关，前提是诱导拓扑相同；该数值称为 $f$ 的拓扑熵。如果 $h(f,\epsilon) > 0$，那么在分辨率 $\epsilon > 0$ 下，可区分的长度为 $n$ 的轨道片段数量 $s_n(\epsilon, f)$ 随 $n$ 呈指数增长。因此，$h(f)$ 衡量了在任意精细的分辨率下，长度为 $n$ 的轨道片段数量的 $n$ 增长率。

下面的例子将在第 4 节中用于说明 Reidemeister 数的增长率与拓扑熵之间的联系。

**例 1**（参见 [16, 例 3.2c]）。我们计算将单位圆映射到自身的扩张映射$E_m$：$S^1 \to S^1$ 的拓扑熵，该映射将 $z \mapsto z^m$ 映至 $m \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$。我们将两点 $x$、$y \in S^1$ 之间的距离定义为其辐角之差的归一化值（视为复数时，令 $\iota$ 表示虚数单位），并对1取模。我们将计算最大的 $(n,\epsilon)$-分离集的基数。

取 $\epsilon = 1/m^k$，其中 $k \in \mathbb{N}$。那么点

$$x_j := \exp\left(\frac{2\pi\iota j}{m^{n+k-1}}\right), \quad j = 0,1,\dots,m^{n+k-1}-1$$

$form$ 构成一个 $(n,\epsilon)$-分离集。例如，对于相邻的两个点，我们有 $ve$

$$d\left(E_m^{n-1}(x_j), E_m^{n-1}(x_{j+1})\right) = \frac{(j+1)m^{n-1} - jm^{n-1}}{m^{n+k-1}} = \frac{m^{n-1}}{m^{n+k-1}} = \frac{1}{m^k} = \epsilon.$$

这也意味着，我们无法再向集合中添加点，同时仍使其保持$(n,\epsilon)$-分离，因此 $s_n(1/m^k, E_m) = m^{n+k-1}$。现在直接根据定义

$$h(E_m) = \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m^{n+k-1} = \log|m|.$$

对于流形上的“双曲”（公理A）微分同胚，拓扑熵 $h(f)$ 衡量周期点数量的增长率，参见 [16]。

N. Ivanov 发现了拓扑熵 $h(f)$ 与 Nielsen 数之间的一个基本关系。

**定理 2.** [13]设 $f$ 是紧连通多面体 $X$上的连续映射。那么

$$h(f) \ge \limsup_n \frac{1}{n} \cdot \log N(f^n) =: \log N^\infty(f)$$

数值 $N^\infty(f)$ 称为 $f$ 的迭代的 Nielsen 数增长率 。这个不等式值得注意，因为它不要求映射具有光滑性，并且为同伦类中所有映射的拓扑熵提供了一个共同的下界。

2.2. **酉对偶。 </style}我们用 表示 的酉对偶**，即 $G$的酉不可约表示的等价类空间，并赋予其紧开 拓扑。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$若 $\varphi\colon G \to G$ 是一个自同构，则它诱导出对偶映射 $\widehat{\varphi}\colon G \to G$，$\widehat{\varphi}(\rho) := \rho\circ\varphi$。此对偶$\widehat{\ }$映射 $\widehat{\varphi}$在酉对偶空间 $G$上定义了一个动力系统。

任意局部紧群 $G$ 的酉对偶 $\widehat{G}$ 总是可测的，但不一定是局部紧的。如果 $G$ 是一个离散群，则 $\widehat{G}$ 是紧的，并且 $G$ 的酉对偶是 $G$ 的特征群 $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$，其中 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$。

2.3. **无挠幂零群的孤立下中心列**。设 $G$为一个群。对于子群 $H \leqslant G$，我们将隔离子$\sqrt[G]{H}$ 定义为 $H$ 在 $G$ 中的

$$\sqrt[G]{H} := \{g \in G \mid g^n \in H \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}.$$

注意，一般而言，子群 $H \leqslant G$ 的隔离子不一定是子群。

现在设 $G$ 是一个无挠幂零群，其下中心列为

$$G = \gamma_1(G) \ge \gamma_2(G) \ge \cdots \ge \gamma_c(G) \ge \gamma_{c+1}(G) = \{e\}$$

其中，通常 $\gamma_{k+1}(G) := [\![G,\ \gamma_k(G)]\!]$ 表示 $k$ 重换位子群。根据 [6, 引理 1.1.2 和引理 1.1.4], 的结果，考虑另一个中心列会更有帮助，即

$$G = \sqrt[G]{\gamma_1(G)} \geq \sqrt[G]{\gamma_2(G)} \geq \cdots \geq \sqrt[G]{\gamma_c(G)} \geq \sqrt[G]{\gamma_{c+1}(G)} = \{e\} \tag{1}$$

我们称之为孤立（或适配的）下中心列。孤立下中心列终止当且仅当 $G$ 是无挠幂零群。与通常的下中心列相比，使用该列的主要优点是所有因子

$$\sqrt[G]{\gamma_k(G)} / \sqrt[G]{\gamma_{k+1}(G)} \cong \mathbb{Z}^{d_k}, \quad d_k \in \mathbb{N}$$

都是无挠的。

**2.4. $p$-进数。**本节回顾基本定义，并证明后文所需的关于 $p$-进数的事实。设 $p$ 为任意素数。对于 $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，我们将 $p$-进赋值 $\operatorname{ord}_p a$定义为整除 $a$的 $p$ 的最高次幂。对于有理函数 $q = a/b$，我们定义 $\operatorname{ord}_p q := \operatorname{ord}_p a - \operatorname{ord}_p b$。$q$ 的 $p$-进范数定义为

$$|q|_p := \begin{cases} \frac{1}{p^{\operatorname{ord}_p q}}, & q \neq 0, \\ 0, & q = 0 \end{cases}.$$

该范数是非阿基米德的，这意味着对于所有 $x,\ y \in \mathbb{Q}$，它满足 $|x+y|_p \leq \max(|x|_p,\ |y|_p)$。

我们将用到以下性质：

$$\big(|x|_p < |y|_p\big) \quad \Longrightarrow \quad |x-y|_p = |y|_p. \tag{2}$$

域 $\mathbb{Q}$ 配备范数 $|\cdot|_p$ 后并不完备，但若考虑集合 $\mathbb{Q}_p$，即关于关系所定义的柯西序列的等价类

$$\{a_i\} \sim \{b_i\} \quad \Longleftrightarrow \quad |a_i - b_i|_p \to 0 \ (i \to \infty)$$

（正如我们从 $\mathbb{Q}$ 转到 $\mathbb{R}$ 并使用通常范数时实际所做的那样），并将序列的 $p$-进范数定义为 $|\{a_i\}|_p := \lim |a_i|_p$，那么 $\mathbb{Q}_p$ 就成为一个完备域。此外，由 (2) 和柯西序列的定义可知，柯西序列 $\{a_i\}$ 中各项的 $p$-进范数所构成的序列 $\{|a_i|_p\}$，当 $i$ 充分大时实际上是常数。以下注记将在后文中发挥重要作用。

**注 3。** $\mathbb{Q}_p$ 上 $|\cdot|_p$ 的可能取值属于集合 $\{p^n\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{0\}$。特别地，可能的最大值 $< 1$ 为 $1/p$。

我们将研究在 $\mathbb{Q}_p$ 上代数的数。设 $\mathbb{Q}_p(\xi)$ 是由 $\xi$ 生成的 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其中 $\xi$ 是一个首一多项式的根

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_i \in \mathbb{Q}_p.$$

我们将扩张的范数定义为 $\mathbb{N}_{\mathbb{Q}_p(\xi)/\mathbb{Q}_p}(\xi) := (-1)^n a_n$. 从 $\mathbb{Q}_p$ 到 $\mathbb{Q}_p(\xi)$的 $p$-进范数扩张定义为

$$|\xi|_p := \big|\mathbb{N}_{\mathbb{Q}_p(\xi)/\mathbb{Q}_p}(\xi)\big|_p^{1/n}.$$

存在代数闭包 $\mathbb{Q}_p$ 及其完备化 $\Omega$（它同样是代数闭的），并且范数还可进一步扩张，但本文不会用到这些扩张。子集$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$ 是一个环，其元素称为-进整数

存在对所有满足 $|z|_p < 1$的 $z \in \Omega$定义的 $p$-进对数的类似形式：

$$\log_p(1+z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} z^m.$$

我们将利用 $p$-进对数来证明一个非常具体的不等式。

**引理 4**。设 $\xi$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的代数数，满足 $|\xi|_p = 1$，但 $\xi$ 不是单位根。则存在一个常数 $C$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有不等式

$$\frac{1}{n} \leq C \cdot |\xi^n - 1|_p \tag{3}$$

成立。该常数不依赖于 $n$。

证明。对于 $|1|_p = 1 = |\xi|_p$，由 (2) 可得 $|\xi^n - 1|_p \leq 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。若存在某个 $n$ 使得等式 $|\xi^n - 1|_p = 1$ 成立，则 (3) 对 $C = 1$成立

现在考虑满足 $|\xi^n - 1|_p < 1$ 的 $n$。记次数 $[\mathbb{Q}_p(\xi) : \mathbb{Q}_p] =: k$。由注 3 以及代数数的 $p$-进范数的定义可得

$$|\xi^n - 1|_p \leq \frac{1}{\sqrt[k]{p}}. \tag{4}$$

因此我们可以计算 $p$-进对数，并且

$$\begin{aligned} |n|_p \cdot |\log_p(\xi)|_p &= |\log_p(\xi^n)|_p \\ &= \left| (\xi^n - 1) - \frac{(\xi^n - 1)^2}{2} + \frac{(\xi^n - 1)^3}{3} - \dots \right|_p \\ &\leq \max_m \left( \left| \frac{(\xi^n - 1)^m}{m} \right|_p \right) \end{aligned}$$

注意，利用 (4) 可得

$$0 \leq \left| \frac{(\xi^n - 1)^m}{m} \right|_p = p^{\operatorname{ord}_p m} \cdot |\xi^n - 1|_p^m \leq m \cdot |\xi^n - 1|_p^m \leq m \cdot \left( \frac{1}{\sqrt[k]{p}} \right)^m. \tag{5}$$

对于常数 $q \in (0, 1/\sqrt[k]{p}]$ 导数 $\frac{\partial}{\partial x} x q^x = q^x(1 + x \ln q)$ 仅在 $x = -1/\ln q$ 时为零，对于较小的 $x$ 为正，对于较大的值则为负。注意，$-1/\ln q$ 是递增函数，因此在我们的情形下 $-1/\ln q \leq k/\ln p$。于是，最初有限个 $m$ 对应的取最大值项可能会增长，但最终会存在一个最大值 $M = M(n)$，且该序列在 $m \to \infty$ 时趋于 0。

换句话说，存在满足 $1 \leq m_0 \leq k/\ln p$ 的 $m_0 = m_0(n)$，使得

$$\max_m \left( \left| \frac{(\xi^n - 1)^m}{m} \right|_p \right) = |\xi^n - 1|_p \cdot \frac{|\xi^n - 1|_p^{m_0 - 1}}{|m_0|_p}$$

我们可以像上面那样对右侧作上界估计：

$$\begin{aligned} |\xi^n - 1|_p \cdot \frac{|\xi^n - 1|_p^{m_0 - 1}}{|m_0|_p} &= |\xi^n - 1|_p \cdot \left( p^{\operatorname{ord}_p m_0} \cdot |\xi^n - 1|_p^{m_0 - 1} \right) \\ &\leq |\xi^n - 1|_p \cdot \left( m_0 \cdot |\xi^n - 1|_p^{m_0 - 1} \right) \end{aligned}$$

当 $x \in [1, k/\ln p]$ 时，导数 $\frac{\partial}{\partial q} x q^{x-1} = x(x-1)q^{x-2} \geq 0$，因此

$$|\xi^n - 1|_p \cdot \left( m_0 \cdot |\xi^n - 1|_p^{m_0 - 1} \right) \leq |\xi^n - 1|_p \cdot \left( m_0 \cdot \frac{1}{(\sqrt[k]{p})^{m_0 - 1}} \right)$$

注意，

$$M^* := \max_{1 \leq m \leq k/\ln p} \left\{ m \cdot p^{-(m-1)/k} \right\} \geq m_0 \cdot p^{-(m_0 - 1)/k}$$

对于所有可能的 $m_0$，因此 $M^*$ 不依赖于 $n$。我们得到

$$\frac{1}{n} \leq |n|_p \leq |\xi^n - 1|_p \cdot \frac{M^*}{|\log_p(\xi)|_p}$$

并且（3）对 $C = M^*/|\log_p(\xi)|_p$ 成立。

一般而言，（3）对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，与 $|\xi^n - 1|_p$ 的实际取值无关，只要令 $C := \max\{1, M^*/|\log_p(\xi)|_p\}$。□

## 3. Growth rate of the sequence $\{R(\varphi^n)\}$ of the Reidemeister numbers

设 $\varphi: G \to G$ 是群 $G$的温和自同态。我们如下引入迭代的 Reidemeister 数的增长率 $R^\infty(\varphi)$，以及上增长率和下增长率 $R^\infty_+(\varphi)$ 与 $R^\infty_-(\varphi)$

$$R^\infty_+(\varphi) := \limsup_{k\to\infty} R(\varphi^k)^{1/k}, \qquad R^\infty_-(\varphi) := \liminf_{k\to\infty} R(\varphi^k)^{1/k},$$
$$R^\infty(\varphi) := \lim_{k\to\infty} R(\varphi^k)^{1/k}.$$

一般而言，没有理由认为上述上极限（下极限）一定是极限，因此增长率 $R^\infty(\varphi)$ 可能不存在。

**例5.** 设 $G = \mathbb{Z}$和 $\varphi(x) = dx, d \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$。若存在某个 $a \in G$，使得 $x, y \in G$ 属于同一个 $\varphi^n$- 共轭类，则称这两个元素

$$y = a + x - d^n a = x + a(1 - d^n)$$

这等价于说，$x$ 和 $y$ 属于 $(1 - d^n)\mathbb{Z}$ 的同一个陪集。显然，$R(\varphi^n) = |\mathbb{Z}/(1 - d^n)\mathbb{Z}| = |d^n - 1|$。现在我们可以计算增长率

$$R^\infty(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|d^k - 1|} = |d|.$$

设 $\varphi: \underline{G} \to \underline{G}$ 是群 $G$ 的一个端同态。那么 $\varphi$ 诱导有限剩余完备化 $G$ 的连续端同态 $\varphi: \overline{G} \to G$，并在 Reidemeister类集合上诱导一个自然映射

$$\mathcal{R}(\varphi) \to \mathcal{R}(\overline{\varphi}), \quad [x]_\varphi \mapsto [\iota x]_{\overline{\varphi}},$$

其中 $\iota : G \to \overline{G}$ 是完备化映射。

**L引理 6** ([8,第 5.3 节2], [9])。在上述情形下，以下性质成立。(i) 若 $R(\varphi) < \infty$，则自然映射 $\mathcal{R}(\varphi) \to \mathcal{R}(\varphi)$ 是满射。(ii) 若 $G$ 是阿贝尔群且 $R(\varphi) < \infty$，则自然映射 $\mathcal{R}(\varphi) \to \mathcal{R}(\varphi)$ 是双射。

若群 $G$ 的每个有限生成子群都有一个基数为 $\leq \mathrm{rk}(G)$ 的生成集，且 $\mathrm{rk}(G)$ 是满足此条件的最小数，则称群 $G$ 具有有限（*Pr ¨ufer*）秩 $\mathrm{rk}(G)$。

用 $\mathbb{P}$ 表示所有有理素数的集合；对于 $p \in \mathbb{P}$，$p$ 进数域记为 $\mathbb{Q}_p$，$p$ 进整数环记为 $\mathbb{Z}_p$，而 $p$ 进绝对值（及其到固定代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 的唯一延拓）记为 $|\cdot|_p$。$\mathbb{C}$ 上的绝对值记为 $|\cdot|_\infty$。

**定理 7**。设 $\varphi: G \to G$ 是有限 *Prüfer* 秩的无挠幂零群 $G$ 上的温和自同态。令 $c$ 表示 $G$ 的幂零类，并且对于 $1 \leq k \leq c$，令 $\alpha_k : A_k \to A_k$ 表示由 $G$ 的孤立下中心列导出的有限秩无挠阿贝尔因子群 $A_k = \sqrt[G]{\gamma_k(G)}/\sqrt[G]{\gamma_{k+1}(G)}$ 上的诱导自同态，其中秩记为 $d_k \geq 1$。则有以下结论。

(a) 对于 $1 \leq k \leq c$，令

$$\alpha_{k,\mathbb{Q}}: A_{k,\mathbb{Q}} \to A_{k,\mathbb{Q}}$$

表示 $\alpha_k$ 到 $A_k$ 的可除包 $A_k$ 的扩张，$_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A_k \cong \mathbb{Q}^{d_k}$。令 $\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,d_k}$为 $\alpha_{k,\mathbb{Q}}$ 在域 $\mathbb{Q}$ 的一个固定代数闭包中的特征值，计入重数。设 $L_k = \mathbb{Q}(\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,d_k})$；对每个 $p \in \mathbb{P}$，固定一些嵌入 $L_k \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ 和 $L_k \hookrightarrow \mathbb{C}$。

那么存在子集 $I_k(p) \subset \{1, \ldots, d_k\}$，对于 $p \in \mathbb{P}$，使得以下结论成立。

(i) 对于每个 $p \in \mathbb{P}$，多项式 $\prod_{i\in I_k(p)} (X - \xi_{k,i})$ 的系数属于 $\mathbb{Z}_p$；特别地，对于 $i \in I_k(p)$，$|\xi_{k,i}|_p \leq 1$。

(ii) 对于每个 $n\in\mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
R(\varphi^n) &= \prod_{k=1}^{c}\prod_{p\in\mathbb{P}}\prod_{i\in I_k(p)}|\xi_{k,i}^n-1|_p^{-1}\\
&= \prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d_k}\left(|\xi_{k,i}^n-1|_\infty\cdot\prod_{p\in\mathbb{P}}\prod_{i\notin I_k(p)}|\xi_{k,i}^n-1|_p\right);
\end{aligned}
\tag{6}
$$

由于该数是一个正整数，$|\xi_{k,\,i}^n-1|_p=1$ 对于 $1\le i\le d_k$，几乎所有 $p\in\mathbb{P}$。

(b) 假设对于每个 $k\in\{1,\dots,c\}$，集合的基数

$$
\mathbf{P}_k:=\left\{p\in\mathbb{P}\colon \prod_{i\notin I_k(p)}|\xi_{k,i}^n-1|_p\neq 1\right\}
$$

是有限的，且 $|\xi_{k,\,i}|_\infty\neq 1$ 对于 $1\le i\le d_k$。

那么迭代的 Reidemeister 数的增长率存在，且由下式给出

$$
\begin{aligned}
&R^\infty(\varphi)=R_+^\infty(\varphi)=R_-^\infty(\varphi)=\\
&=\prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d_k}\max\{|\xi_{k,i}|_\infty,1\}\cdot\prod_{k=1}^{c}\prod_{p\in\mathbf{P}_k}\prod_{i\in S_k^*(p)}\max\{|\xi_{k,i}|_p,1\},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $S_k^*(p)=\{i\in\{\{1,\dots,d_k\}\setminus I_k(p)\}\mid|\xi_{k,\,i}|_p\neq 1\}$

证明。对于温和自同态 $\varphi$，[11] 中的定理 6表明

$$
R(\varphi^n)=\prod_{k=1}^{c}R(\alpha_k^n),\qquad \text{for } n\in\mathbb{N}.
$$

为证明断言 (a) 和公式 (6)，我们基本沿用 [9]中命题 3.4 和定理 1.4 的证明。利用引理 6(2)，我们可以转到 $\alpha_k$的有限剩余完备化。对于 $1\le k\le c$，阿贝尔群 $A_k$ 及其端同态 $\alpha_k$ 的有限剩余完备化 $A_k$ 可分解为直积

$$
\iota\colon A_k\to\overline{A_k}=\prod_{p\in\mathbb{P}}(\overline{A_k})_p\qquad\text{and}\qquad \overline{\alpha_k}=\prod_{p\in\mathbb{P}}(\overline{\alpha_k})_p,
$$

其中，对每个素数 $p$，$A_k$ 的 Sylow pro-$p$ 子群是 $\overline{A_k}$的 pro-$p$ 完备化 $(A_k)_p$，并配备端同态 $(\alpha_k)_p$: $(A_k)_p\to(A_k)_p$。引理 6(2)表明

$$
R(\alpha_k^n)=\prod_{p\in\mathbb{P}}R((\overline{\alpha_k})_p^n),\qquad\text{for } n\in\mathbb{N};
$$

特别地，$R(\alpha_k^n)<\infty$意味着 $R((\alpha_k)_p^n)=1$，对几乎所有 $p\in\mathbb{P}$均成立。因此，该乘积仅在形式上是无限的。

固定一个素数 $p\in\mathbb{P}$。一方面，pro-$p$ 群 $(A_k)_p$ 是无挠阿贝尔群，且秩不超过 $d_k$，因此 $(A_k)_p\cong\mathbb{Z}_p^{d_k(p)}$，其中 $d_k(p)=\operatorname{rk}((A_k)_p)\le d_k$。另一方面，我们可以通过另一种方式得到 $(A_k)_p$，从而进一步了解 $(\alpha_k)_p$ 的特征值及其与 $\alpha_{k,\mathbb{Q}}$的特征值之间的关系。我们注意到，群 $\overline{A}_k$ 与 $A_{k,\mathbb{Z}_p}$ 具有相同的 pro-$p$ 完备化：$=\mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}}A_k$ (参见 [9] 和 [19])。$\mathbb{Z}_p$-模 $A_{k,\mathbb{Z}_p}$ 分解为其极大可除子模 $D\cong\mathbb{Q}_p^{d-d_k(p)}$与一个自由 $Z_p$-模 $A\cong\mathbb{Z}^{d_k(p)}p$ 的直和，其中 $d_k(p)\le d_k$(参见 [15, 定理 20])。

端同态 $\alpha_{k,\mathbb{Q}}$ 诱导出一个端同态 $\alpha_{k,\mathbb{Z}_p}:A_{k,\mathbb{Z}_p}\to A_{k,\mathbb{Z}_p}$。可除子模 $D$ 在 $\alpha_{k,\mathbb{Z}_p}$ 下保持不变（见 [15, 第 5] 章），因此我们得到一个端同态 $\alpha_{k,\mathbb{Z}_p}:A_{k,\mathbb{Z}_p}/D\to A_{k,\mathbb{Z}_p}/D$，其中商群为 $A_{k,\overline{\mathbb{Z}_p}}/D\cong A\cong\mathbb{Z}_p^{d_k(p)}$。因此，存在一个同构 $\sigma:(A_k)_p\to A_{k,\mathbb{Z}_p}/D$，使得 $\alpha_{k,\mathbb{Z}_p}\circ\sigma=\sigma\circ(\alpha_k)_p$。

我们得出结论，存在一个子集 $I_k(p) \subseteq \{1,\dots,d_k\}$，使得端同态 $(\alpha_k)_p$的特征值为 $\xi_{k,i}$，$i \in I_k(p)$（即 $\alpha_{k,\mathbb{Q}}$ 的一部分特征值，具体取决于哪些特征值作用于可除子模 $D$，哪些作用于自由模 $A$）。特别地，特征多项式 $\prod_{i\in I_k(p)}(X-\xi_{k,i})$ 的系数属于 $\mathbb{Z}_{(p)}$；特别是，对于 $i \in I_k(p)$，有 $|\xi_{k,i}|_p \le 1$（更多详情见 [9, 命题 3.4]）。

最后，

$$R((\overline{\alpha_k})_p^n) = |\mathrm{Coker}((\overline{\alpha_k})_p^n - 1)| = |\det((\overline{\alpha_k})_p^n - 1)|_p^{-1} = \prod_{i\in I_k(p)} |\xi_{k,i}^n - 1|_p^{-1}.$$

对所有素数 $p$ 求积，然后再对 $1 \le k \le c$求积，便得到（6）中的第一个等式。利用 $a \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ 的阿代尔公式 $|a|_\infty \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} |a|_p = 1$，可得（6）中的第二个等式。假设端同态 $\varphi$ 具有驯性，则特征值 $\xi_{k,i}$ 都不是单位根。

因此，只需证明断言（b）。

对于 $1 \le k \le c$ 和 $p \in \mathbf{P}_k$，我们记 $S_k(p) = \{1,\dots,d_k\} \setminus I_k(p)$ 和 $S_k^*(p) = \{i \in S_k(p) \mid |\xi_{k,i}|_p \ne 1\}$。令

$$b = \prod_{k=1}^{c} \prod_{p\in\mathbf{P}_k} \prod_{i\in S_k^*(p)} \max\{|\xi_{k,i}|_p, 1\}.$$

于是，对于 $i \in S_k^*(p)$，$|\xi_{k,i}^n|_p = |\xi_{k,i}|_p^n \ne 1$ 和 $|\xi_{k,i}^n - 1|_p = \max\{|\xi_{k,i}^n|_p, 1\} = \max\{|\xi_{k,i}|_p^n, 1\} = \max\{\xi_{k,i}, 1\}^n$。由此以及（6）可推出，对于 $n \in \mathbb{N}$，

$$R(\varphi^n) = g(n)\cdot f(n),$$

其中

$$\begin{aligned} g(n) &= \prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - 1|_\infty \cdot b^n, \\ f(n) &= \prod_{k=1}^{c} \prod_{p\in\mathbf{P}_k} \prod_{i\in S_k(p)\setminus S_k^*(p)} \left|\xi_{k,i}^n - 1\right|_p. \end{aligned} \tag{8}$$

现在我们将乘积 $\prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - 1|_\infty$重新排列。谱 $\alpha_{k,\mathbb{Q}}$ 中的复特征值 $\xi_{k,i}$ 成对出现，其对应的复共轭为 $\xi_{k,i}$。对于复数 $\lambda$，有

$$|\lambda^n - 1|\cdot|\overline{\lambda}^n - 1| = |\lambda^n - 1|^2 = (\lambda^n - 1)\cdot(\overline{\lambda}^n - 1).$$

如果 $\xi_{k,i}$ 是 $\alpha_{k,\mathbb{Q}}$ 的实特征值，那么有 $|\xi_{k,i}^n - 1|_\infty = \delta_{1,k,i}^n - \delta_{2,k,i}^n$，其中 $\delta_{1,k,i} = \max\{|\xi_{k,i}|_\infty, 1\}$ 且 $\delta_{2,k,i} = \xi_{k,i}/\delta_{1,k,i}$，假设 $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \overline{\lambda_s}$ 是所有复特征值，而 $\xi_{k,i(t)}$, $t = 1,\dots,T$ 是实特征值。那么，以上两个观察表明

$$\prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - 1|_\infty = \sum \pm(\mu_1\nu_1\cdots\mu_s\nu_s\delta_{\epsilon(1),k,i(1)}\cdots\delta_{\epsilon(T),k,i(T)})^n, \tag{9}$$

其中 $\mu_i$ 是 $\lambda_i$ 或 1，$\nu_i$ 是 $\lambda_i$ 或 1，$\epsilon(i)$ 是 1 或 2。因此，对 $k$ 取乘积并结合 $b$，得到

$$g(n) = \sum_{j\in J} c_j w_j^n, \tag{10}$$

其中 $J$ 是有限指标集，$c_j = \pm 1$ 和 $w_j \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，$j \in J$。

如果对于所有 $p \in \mathbf{P}_k$ 以及所有 $k = 1, \dots\dots, c$，$S_k(p) \setminus S_k^*(p) = \varnothing$，那么 $f(n) \equiv 1$。

现在假设对于某个 $k \in \{1,\dots,c\}$，$p \in \mathbf{P}_k$，$S_k(p) \setminus S_k^*(p) \ne \varnothing$。那么 $\lim_{n\to\infty} f(n)^{1/n} = 1$。事实上，对于 $f(n)$ 中涉及的特征值，我们可以推出以下界

$$\frac{1}{n} \le C\cdot|\xi_{k,i}^n - 1|_p \quad \text{and} \quad |\xi_{k,i}^n - 1|_p \le 1 \tag{11}$$

其中 $C$ 是一个与 $n$ 无关的常数。注意，根据 $S_k(p) \setminus S_k^*(p)$ 的构造，$|\xi_{k,i}|_p = 1$。右侧的不等式由 (2) 得出，而左侧的不等式在引理 4 中得到了证明。由夹逼定理可得 $\lim_{n\to\infty} f(n)^{1/n} = 1$。

由于 $|\xi_{k,\,i}|_\infty \neq 1$ 对于 $i = 1, \ldots, d_k$, $k = 1, \ldots, c$, 等式 (9) 以及 $\delta_{1,\,k,\,i}$ 和 $\delta_{2,\,k,\,i}$ 的显式形式表明，在展开式 (10) 中存在一个主导项 $w_m$，使得 $|w_m|_\infty = \prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d_k} \max\{|\xi_{k,i}|_\infty, 1\} \cdot b$，并且 $|w_m|_\infty > |w_j|_\infty$ 对所有 $j \neq m$ 均成立。

于是，Reidemeister 数的迭代增长率存在，且由下式给出

$$R^\infty(\varphi) = |w_m|_\infty = \prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d_k} \max\{|\xi_{k,i}|_\infty, 1\} \cdot \prod_{k=1}^{c}\prod_{p\in\mathbf{P}_k}\prod_{i\in S_k^*(p)} \max\{|\xi_{k,i}|_p, 1\}.$$

□

**注 8.** 在定理 7 第一部分的证明中，我们转到因子群的 *profinite* 完备化 $(A_k)_p$，并指出，由于它们是无挠阿贝尔群且秩至多为 $d_k$，因此它们同构于 $\mathbb{Z}^{d_{k(p)p}}$，其中 $d_k(p) \leq d_k$。

如果群 $G$ 不仅具有有限的 ***Prüfer*** 秩，而且实际上是有限生成的，那么等式 $d_k(p) = d_k$ 成立，集合 $I_k(p) = \{1, \ldots, d_k\}$ 也成立。这是因为，如果无挠阿贝尔因子群有限生成 $A_k \cong \mathbb{Z}^{d_k}$，那么 $A_{k,\mathbb{Z}_p}$ 的极大可除子模 $D$ 是平凡的。因此，公式（6）中的 $p$-进部分消失，进而（7）变为

$$R^\infty(\varphi) = \prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d_k} \max\{|\xi_{k,i}|_\infty, 1\}. \tag{12}$$

更多细节请参见 [9,定理 1。4]。

## 4. Growth rate of the sequence $\{R(\varphi^n)\}$ of the Reidemeister numbers and topological entropy

下面的例子引出了关于 Reidemeister 数的增长率与拓扑熵之间联系的结果。

**例 9.** 考虑群 $G = \mathbb{Z}$ 以及端同态 $\varphi\colon x \mapsto dx$，其中 $d \in \mathbb{Z}\setminus\{-1, 0, 1\}$ 如例 5 所示。我们计算了增长率 $R^\infty(\varphi) = |d|$。

$\hat{}$在庞特里亚金对偶 $G \cong U(1)$ 上，我们的端同态 $\varphi$ 诱导出对偶端同态 $\hat{}\varphi(\chi) = \chi^d$。在例 1 中，我们计算了拓扑熵 $h_{top}(\hat{}\varphi) = \log |d|$。我们注意到

$$R^\infty(\varphi) = \exp(h_{top}(\hat{\varphi})).$$

紧致度量空间 $(X, d)$ 上的同胚 $f$ 如果存在常数 $\epsilon > 0$，使得对于任意两个不同的点 $x, y \in X$，都存在 $n \in \mathbb{Z}$，满足 $d(f^n(x)\ f^n(y)) > \epsilon$，则称其为扩张的。

我们还需要 Bowen 的规范性质 [2]这一概念。我们引用文献 [3] 中的定义。形式化定义起初可能显得模糊，因此最好先记住以下直观理解。设自映射 $f\colon X \to X$ 作用于一个紧致度量空间；如果给定一个精度 $\epsilon > 0$ 以及若干段轨道，就能够找到一条周期轨道，以精度 $\epsilon$ 依次跟随每一段轨道，并且从一段轨道移动到另一段轨道所需的时间是固定的，且只取决于 $\epsilon$，那么我们称该自映射具有规范性。

话虽如此，设给定 $(x_1, l_1) \ldots, (x_r, l_r) \in X \times \mathbb{N}$，其中 $0 \leq r < \infty$。对于常数 $D \in \mathbb{N}$，我们将部分长度记为

$$L(s) := l_1 + \cdots + l_{s-1} + (s-1)D, \quad 1 \leq s \leq r+1.$$

映射 $f$ 具有 规范性，如果对于每个 $\epsilon > 0$，都存在常数 $D < \infty$ 和$z \in X$，使得 $f^{L(r+1)}(z) = z$ 且

$$d(f^{L(s)+k}(z), f^k(x_s)) < \epsilon, \quad 0 \le k < l_s$$

对所有 $s = 1, \ldots\ldots, r$。

**引理 10** ([2])。 对于紧致度量空间 $X$ 上具有扩张性和规范性的同胚 $f$，周期点数量的增长率 $F^\infty(f)$ 存在，且由下式给出

$$F^\infty(f) := \lim_{k\to\infty} \#(\mathrm{Fix}(f^k))^{1/k} = \exp(h(f)),$$

其中， $h(f)$ 表示拓扑熵。

**定理 11**。 设 $\varphi\colon\ G \to G$ 是有限生成离散阿贝尔群 $G$的驯服自同构。假设庞特里亚金对偶映射 $\widehat{\varphi}$ 是庞特里亚金对偶群 $G$ 上具有扩张性和规范性的同胚。那么， $\varphi$ 的迭代的 *Reidemeister* 数的增长率存在，且由下式给出

$$R^\infty(\varphi) = \exp(h(\widehat{\varphi})).$$

证明。 余核 $(1-\varphi)$: $G \to G$ 的庞特里亚金对偶与对偶映射 $(1-\varphi)$: $G \to G$ 的$\widehat{\ }$ 核规范同构。由于 $R(\varphi^n) = \#\,\mathrm{Coker}(1-\varphi^n)$ 是有限的，因此有

$$\#\,\mathrm{Coker}(1-\varphi^n) = \#\widehat{\mathrm{Coker}(1-\varphi^n)} = \#\,\mathrm{Ker}\,(\widehat{1-\varphi^n}).$$

映射 $\widehat{1-\varphi^n}$ 等于 $\hat{1} - \hat{\varphi}^n$。因此，其核就是映射 $\hat{\varphi}^n : \hat{G} \to \hat{G}$ 的不动点集合。因此，我们有:

$$R(\varphi^n) = \#\,\mathrm{Fix}\left(\hat{\varphi}^n : \hat{G} \to \hat{G}\right) \tag{13}$$

于是，引理 10 蕴含该结果。 □

**定理 12**。 设 $G$ 是一个有限生成无挠幂零群，其孤立下中心列为 （1）。设 $\varphi\colon\ G \to G$ 是其自同构，使得所有诱导的自同构

$$\varphi_k : \sqrt[G]{\gamma_k(G)}/\sqrt[G]{\gamma_{k+1}(G)} \to \sqrt[G]{\gamma_k(G)}/\sqrt[G]{\gamma_{k+1}(G)}$$

满足定理 11 的假设。则

$$R^\infty(\varphi) = \exp\left(\sum_{k=1}^{c} h(\widehat{\varphi_k})\right).$$

证明。 对于有限生成幂零群的端同态，我们有 Roman'kov 公式[20]（关于推广，另见 [11, 定理 6]和 [9,命题 2。1]）

$$R(\varphi) = \prod_{k=1}^{c} R(\varphi_k).$$

对于 $\varphi_k^n$ 的每次迭代 $n$，等式（6）以及整个定理 7 都成立。因此，我们可以对 Roman'kov 公式两边取 n 次方根，并令 $n$趋于无穷。得到

$$R^\infty(\varphi) = \prod_{k=1}^{c} R^\infty(\varphi_k)$$

结论由定理 11 得出。 □

## 5. Growth rate of the sequence $\{R(\varphi^n,\ \psi^n)\}$ of the Reidemeister coincidencenumbers

类比于单个端同态迭代的 Reidemeister 数的增长率，我们定义迭代的 Reide meister 重合数的增长率、上增长率和下增长率

$$R^\infty(\varphi,\psi) := \lim_{k\to\infty} R(\varphi^k,\psi^k)^{1/k}$$
$$R^\infty_+(\varphi,\psi) := \limsup_{k\to\infty} R(\varphi^k,\psi^k)^{1/k}$$
$$R^\infty_-(\varphi,\psi) := \liminf_{k\to\infty} R(\varphi^k,\psi^k)^{1/k}$$

分别。

下面的定理主要基于 [9,定理 1.4]

**定理 13.** 设 $\varphi,\psi\colon\ G\to G$ 是有限普吕弗秩无挠幂零群 $G$ 上的一对良性端同态。令 $c$ 表示 $G$ 的幂零类，对于 $1\le k\le c$，令$\varphi_k,\psi_k\colon\ G_k\to G_k$表示由 $G$的孤立下中心列 $(1)$ 导出的有限秩无挠阿贝尔因子群$G_k=\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ 上的诱导自同态，记其秩为 $d_k\ge 1$。则有以下结论。

(a) 对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$(\varphi,\psi)$-Reidemeister重合类集合 $\mathcal{R}(\varphi^n,\psi^n)$ 与笛卡尔积 $\prod_{k=1}^c \mathcal{R}(\varphi_k^n,\psi_k^n)$ 之间存在一个双射；因此，

$$R(\varphi^n,\psi^n)=\prod_{k=1}^{c} R(\varphi_k^n,\psi_k^n)\qquad \text{for } n\in\mathbb{N}. \tag{14}$$

(b) 对于 $1\le k\le c$，令

$$\varphi_{k,\mathbb{Q}},\psi_{k,\mathbb{Q}}\colon G_{k,\mathbb{Q}}\to G_{k,\mathbb{Q}}$$

表示 $\varphi_k,\psi_k$ 在 $G_k$ 的可除包 $G_{k,\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} G_k\cong\mathbb{Q}^{d_k}$ 上的扩张。假设每对端同态 $\varphi_{k,\mathbb{Q}},\psi_{k,\mathbb{Q}}$ 都可以同时三角化。令 $\xi_{k,1},\dots,\xi_{k,d_k}$ 和 $\eta_{k,1},\dots,\eta_{k,d_k}$ 分别为 $\varphi_{k,\mathbb{Q}}$ 和 $\psi_{k,\mathbb{Q}}$ 在域 $\mathbb{Q}$ 的某个固定代数闭包中的特征值，按重数计，并按如下方式排序：对于 $n\in\mathbb{N}$，$\varphi^n_{k,\mathbb{Q}}-\psi^n_{k,\mathbb{Q}}$ 的特征值为 $\xi^n_{k,1}-\eta^n_{k,1},\dots,\xi^n_{k,d_k}-\eta^n_{k,d_k}$。令 $L_k=\mathbb{Q}(\xi_{k,1},\dots,\xi_{k,d_k},\eta_{k,1},\dots,\eta_{k,d_k})$；对于每个 $p\in\mathbb{P}$，固定一个嵌入$L_k\hookrightarrow\mathbb{Q}_p$，并选取一个嵌入 $L_k\hookrightarrow\mathbb{C}$。

那么存在子集 $I_k(p)\subset\{1,\dots,d_k\}$，对于 $p\in\mathbb{P}$，使得以下条件成立。

(i) 对每个 $p\in\mathbb{P}$，多项式 $\prod_{i\in I_k(p)}(X-\xi_{k,i})$ 和 $\prod_{i\in I_k(p)}(X-\eta_{k,i})$ 的系数都属于 $\mathbb{Z}_p$；特别地，$|\xi_{k,i}|_p,|\eta_{k,i}|_p\le 1$ 对于 $i\in I_k(p)$。(ii) 对每个 $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} R(\varphi_k^n,\psi_k^n) &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\prod_{i\in I_k(p)} |\xi_{k,i}^n-\eta_{k,i}^n|_p^{-1} = \\ &= \prod_{i=1}^{d_k}|\xi_{k,i}^n-\eta_{k,i}^n|_\infty \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}}\prod_{i\notin I_k(p)} |\xi_{k,i}^n-\eta_{k,i}^n|_p; \end{aligned} \tag{15}$$

如下　这个数是正整数，$|\xi^n_{k,i}-\eta^n_{k,i}|_p=1$ 对于 $1\le i\le d_k$，对几乎所有 $p\in\qquad\mathbb{P}.$

(c) 假设对于每个 $k\in\{1,\dots,c\}$，集合的基数

$$\mathbf{P}_k := \left\{ p\in\mathbb{P}\colon \prod_{i\notin I_k(p)} |\xi_{k,i}^n-\eta_{k,i}^n|_p\neq 1 \right\}$$

是有限的，并且$|\xi_{k,\ i}|_\infty\neq|\eta_{k,\ i}|_\infty$ 对于 $1\le i\le d_k$。

那么，迭代的 Reidemeister 重合数的增长率存在，且由下式给出

$$
\begin{aligned}
R^\infty(\varphi,\psi) = R^\infty_+(\varphi,\psi) = R^\infty_-(\varphi,\psi) = \\
= \prod_{k=1}^{c} \prod_{p\in\mathbf{P}_k} \prod_{i\in S_k^*(p)} \max\{|\xi_{k,i}|_p, |\eta_{k,i}|_p\} \cdot \\
\cdot \prod_{k=1}^{c} \prod_{p\in\mathbf{P}_k} \prod_{i\in S_k(p)\setminus S_k^*(p)} |\eta_{k,i}|_p \cdot \prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d} \max\{|\xi_{k,i}|_\infty, |\eta_{k,i}|_\infty\},
\end{aligned} \tag{16}
$$

其中，对于 $p\in\mathbf{P}_k$ 我们记 $S_k(p) = \{1,\dots,d_k\}\setminus I_k(p)$ 以及 $S_k^*(p) = \big\{i\in S_k(p)\big|\ |\xi_{k,i}|_p \neq |\eta_{k,i}|_p\big\}$

证明。(a) 中的等式是 Roman'kov 公式的推广，适用于有限生成幂零群中的普通扭曲共轭类，参见 [9, 命题 2.1]。因此，接下来我们考虑因子群 $G_k$ 上的 Reidemeister 数。

无挠阿贝尔群 $G_k$ 及其端同态的有限剩余完备化可分解为直积

$$
\iota\colon G_k \to \widehat{G}_k = \prod_{p\in\mathbb{P}} \widehat{G}_{k,p} \qquad \text{and} \qquad \widehat{\varphi}_k = \prod_{p\in\mathbb{P}} \widehat{\varphi}_{k,p}, \quad \widehat{\psi}_k = \prod_{p\in\mathbb{P}} \widehat{\psi}_{k,p},
$$

其中，对于每个素数 $p$，$G_k$ 的 Sylow pro-$p$ 子群构成其 pro-$p$ 完备化 $G_{k,\,p}\widehat{\ }$，并配备端同态 $\widehat{\varphi}_{k,\,p}$，$\widehat{\psi}_{k,\,p}\colon G_{k,\,p}\to G_{k,\,p}\widehat{\ }$。对于 Reidemeister 重合数，我们有一个类似于引理 6 的性质（见 [9]），因此

$$
R(\varphi_k^n,\psi_k^n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} R(\widehat{\varphi}_{k,p}^n, \widehat{\psi}_{k,p}^n), \qquad \text{for } n\in\mathbb{N};
$$

特别地，$R(\varphi_k^n,\ \psi_k^n) < \infty$ 意味着，对于几乎所有 $p\in\mathbb{P}$，$R(\widehat{\varphi}_{k,\,p}^n,\ \widehat{\psi}_{k,\,p}^n) = 1$ 因此该乘积仅在形式上是无限的。

我们基本上可以同时对两个端同态 $\varphi_k$，$\psi_k$ 重复定理 7 中的推理，从而得到等式

$$
R(\widehat{\varphi}_{k,p}^n, \widehat{\psi}_{k,p}^n) = |\det(-\widehat{\varphi}_{k,p}^n + \widehat{\psi}_{k,p}^n)|_p^{-1} = \prod_{i\in I_k(p)} |\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n|_p^{-1},
$$

由此得到 (15)。

为证明 (16)，我们遵循定理 7 证明中的相同思路，同时在代入与第二个端同态 $\psi$ 的迭代相关的特征值 $\eta_{k,\,i}$ 时加以注意。对于 $p\in\mathbf{P}_k$，我们写作

$$
S_k(p) = \{1,\dots,d_k\}\setminus I_k(p) \qquad \text{and} \qquad S_k^*(p) = \{i\in S_k(p)\mid |\xi_{k,i}|_p \neq |\eta_{k,i}|_p\};
$$

我们立即指出，对于每个 $i\in S_k(p)\setminus S_k^*(p)$，$\eta_{k,\,i}\neq 0$，否则 $\xi_{k,\,i} = \eta_{k,\,i} = 0$ 和 $\varphi_{k,\,\mathbb{Q}} - \psi_{k,\,\mathbb{Q}}$ 的秩将小于 $d_k$。我们令

$$
b := \prod_{k=1}^{c} \prod_{p\in\mathbf{P}_k} \prod_{i\in S_k^*(p)} \max\{|\xi_{k,i}|_p, |\eta_{k,i}|_p\}, \qquad \eta := \prod_{k=1}^{c} \prod_{p\in\mathbf{P}_k} \prod_{i\in S_k(p)\setminus S_k^*(p)} |\eta_{k,i}|_p
$$

并且，对于 $n\in\mathbb{N}$，

$$
g(n) := b^n\cdot\eta^n\cdot \prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n|_\infty
$$

$$
f(n) := \prod_{k=1}^{c} \prod_{p\in\mathbf{P}_k} \prod_{i\in S_k(p)\setminus S_k^*(p)} \big|(\xi_{k,i}\eta_{k,i}^{-1})^n - 1\big|_p.
$$

我们结合非阿基米德范数的基本性质使用 (15)，并提出公因子 $\eta$，得到

$$R(\varphi^n,\psi^n)=g(n)\cdot f(n). \tag{17}$$

现在，对于 $g(n)$ 中的每一个 $k=1$、.....、$c$，我们展开乘积 $\prod_{i=1}^{d_k}|\xi_{k,\,i}^n-\eta_{k,\,i}^n|_\infty$。$\varphi_{k,\,\mathbb{Q}}$、$\psi_{k,\,\mathbb{Q}}$ 的谱中出现的复特征值 $\xi_{k,\,i}$、$\eta_{k,\,i}$，分别与它们的复共轭 $\xi_{k,\,i}$、$\eta_{k,\,i}$ 成对出现。在同时三角化中，这些成对的特征值可以如下彼此排列。设 $\varphi_{L_k}$、$\psi_{L_k}$ 表示 $L$-向量空间 $V$ 上的诱导端同态：$=L\otimes_Q G\cong L^k\hookrightarrow\mathbb{C}^d$。如果 $v\in V$ 同时是 $\varphi_{L_k}$ 的特征向量，对应复特征值 $\xi_{k,\,d}$，并且也是 $\psi_{L_k}$ 的特征向量，对应特征值 $\eta_{k,\,d}$，那么存在 $w\in V$，使得 $w$ 同时是 $\varphi_{L_k}$ 的特征向量，对应特征值 $\xi_{k,\,d}\neq\xi_{k,\,d}$，也是 $\psi_{L_k}$ 的特征向量，对应特征值 $\overline{\eta_{k,\,d}}$，后者可能等于 $\eta_{d,\,k}$。我们可以从 $\{0\}\subset\langle v\rangle\subset\overline{\langle v,\ w\rangle}$ 开始构造 $V$ 的 $\{\varphi,\psi\}$-不变子空间的完全旗，并通过归纳法利用 $V/\langle v,\ w\rangle$ 继续构造。对于 $\psi_{L_k}$ 的复特征值，我们采用同样的方法处理。

如果 $\xi_{k,\,i}$，$\eta_{k,\,i}$ 中至少有一个是复数，因此它们会与上文所述的某个合适的 $j\neq i$ 对应地配对为 $\xi_{k,\,j}=\xi_{k,\,i}$，$\eta_{k,\,j}=\eta_{k,\,i}$，我们便可得出

$$|\xi_{k,i}^n-\eta_{k,i}^n|_\infty\cdot|\xi_{k,j}^n-\eta_{k,j}^n|_\infty=|\xi_{k,i}^n-\eta_{k,i}^n|_\infty^2=(\xi_{k,i}^n-\eta_{k,i}^n)\cdot(\overline{\xi_{k,j}}^n-\overline{\eta_{k,j}}^n)$$

如果 $\xi_{k,\,i}$，$\eta_{k,\,i}$ 都是实特征值，且没有与另一对特征值配对，那么我们有

$$|\xi_{k,i}^n-\eta_{k,i}^n|_\infty=\delta_{1,k,i}^n-\delta_{2,k,i}^n,$$
$$\delta_{1,k,i}:=\max\{|\xi_{k,i}|_\infty,|\eta_{k,i}|_\infty\},\quad \delta_{2,k,i}:=\frac{\xi_{k,i}\cdot\eta_{k,i}}{\delta_{1,k,i}}$$

现在可以用类似于 (9) 的方式写出乘积 $\prod_{i=1}^{d_k}|\xi_{k,\,i}^n-\eta_{k,\,i}^n|_\infty$，从而得到

$$g(n)=\sum_{j\in J}c_jw_j^n,$$

其中 $J$是有限指标集，$c_j=\pm1$和 $w_j\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$。存在一个主导项 $w_m$，使得

$$|w_m|_\infty=b\cdot\eta\cdot\prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d_k}\max\left\{|\xi_{k,i}|_\infty,|\eta_{k,i}|_\infty\right\}.$$

我们还需要证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(n)}=\overline{1}$。首先注意，$\xi_{k,\,i}\neq\eta_{k,\,i}$，否则 $\varphi_{k,\,\mathbb{Q}}-\psi_{k,\,\mathbb{Q}}$ 的秩将小于 $d_k$，因此 $\xi_{k,\,i}\cdot\eta_{k}^{-1}{}_{,\,i}\neq1$。根据 $S_k(p)\setminus S_k^*(p)$ 的构造，我们有 $|\xi_{k,\,i}|_p=|\eta_{k,\,i}|_p$，因此 $|\xi_{k,\,i}\cdot\eta_k^{-1}{}_{,\,i}|_p=1$。现在我们可以完全按照定理 7 的证明，通过推导出类似于 (11) 的界来继续。

最后，由 (17) 我们得到 $R^\infty(\varphi,\ \psi)=|w_m|_\infty$ 即 (16)。 □

**注14.** 与注*8*中的情形相同，若群 $G$ 确实是有限生成的，则乘积 (16) 中的 $p$-进部分消失。*Reidemeister* 重合数增长率的显式公式变为

$$R^\infty(\varphi,\psi)=\prod_{k=1}^{c}\prod_{i=1}^{d}\max\{|\xi_{k,i}|_\infty,|\eta_{k,i}|_\infty\} \tag{18}$$

## 6. The Gauss congruences for the sequence $\{R(\varphi^n,\ \psi^n)\}$ of the Reidemeister coincidence numbers

设 $\mu(n)$、 $n \in \mathbb{N}$ 为 *Mobius* 函数，即

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ (-1)^k & \text{if } n \text{ is a product of } k \text{ distinct primes}, \\ 0 & \text{if } n \text{ is not square-free.} \end{cases}$$

在数论中，整数满足以下 Gauss 同余:

$$\sum_{d|n} \mu(n/d) \cdot a^d \equiv 0 \mod n$$

对任意整数 $a$ 和任意自然数 $n$ 均成立。当 $n = p^r$ 为素数幂时，Gauss 同余便转化为 Euler 同余。事实上，对于 $n = p^r$ ，Mobius 函数$\mu(n/d) = \mu(p^r/d)$ 仅在两种情况下非零: 当 $d = p^r$ 时以及当 $d = p^{r-1}$ 时。因此，由 Gauss 同余可得 Euler 同余

$$a^{p^r} \equiv a^{p^{r-1}} \mod p^r.$$

当 $(a,\ n) = 1,\ n = p^r$ 时，这些同余等价于以下经典的 Euler 定理:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

这些同余已从整数推广至其他一些数学不变量，例如所有整数矩阵 $A$ 的幂的迹，以及映射迭代的 Lefschetz 数，见 [17, 23]:

$$\sum_{d|n} \mu(n/d) \cdot \operatorname{tr}(A^d) \equiv 0 \mod n, \tag{19}$$

$$\operatorname{tr}(A^{p^r}) \equiv \operatorname{tr}(A^{p^{r-1}}) \mod p^r. \tag{20}$$

A. Dold 在 [7]（另见 [14, 定理 3.1.4]）通过几何论证证明了映射 $f$ 在紧致 ANR $X$上的迭代的 Lefschetz 数满足以下同余式 (DL)，其中 $n$为任意自然数

$$\sum_{d|n} \mu(n/d) \cdot L(f^d) \equiv 0 \mod n. \tag{DL}$$

这些同余式现在称为 Dold 同余。 [17] （另见 [23,定理 9]）还证明了上述同余式 (19)、(20) 和 (DL) 等价。更详细的讨论请参见 [4]。

文献 [11] 证明了多循环有限群的驯性端同态 $\varphi$ 的迭代的 Reidemeister 数满足以下高斯同余

$$\sum_{d|n} \mu(n/d) \cdot R(\varphi^d) \equiv 0 \mod n.$$

事实证明，如果 Reidemeister 重合 ζ 函数是有理函数，那么 Reidemeister 重合数也满足高斯同余。

群 $G$ 的端同态构成的良性对 $(\varphi,\ \psi)$ 的 *Reidemeister* 重合 ζ 函数 在 [9] 中定义如下

$$R_{\varphi,\psi}(z) := \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(\varphi^k, \psi^k)}{k} z^k\right). \tag{21}$$

本节使用以下判据，证明有限秩无挠幂零群的一对端同态的 Reidemeister 重合 ζ 函数的有理性，其中这对端同态具有驯性 Prufer

性对，并由此证明这些端同态迭代的 Reidemeister 重合数满足高斯同余。

**定理 15** ([9, 定理 1.4 (3)])。 设 $\varphi$， $\psi$ 如 定理 13 (c) 中所述。那么，Reidemeister 重合 ζ 函数 $R_{\varphi,\ \psi}(z)$ 要么是有理函数，要么其收敛半径构成自然边界。此外，当且仅当$|\xi_{k,\ i}|_p = |\eta_{k,\ i}|_p$ 对于某个 $k \in\{1,\dots,c\}$， $p\in\mathbf{P}_k$， $i\notin I_k(p)$ 时，后一种情况才会发生。

为在 Reidemeister 重合 ζ 函数具有有理性的假设下证明高斯同余，我们遵循 [1,定理 2.1] 和 [14,定理 3.1.23，命题 3.1.12]。

**引理 16**。 $R_{\varphi,\ \psi}(z)$ 是有理函数，当且仅当对每个 $k\in\mathbb{N}$，都有

$$R(\varphi^k,\psi^k)=\sum_{i=1}^{r}\chi_i\lambda_i^k \tag{22}$$

其中 $r\in\mathbb{N}$、 $\chi_i\in\mathbb{Z}$ 和 $\lambda_i\in\mathbb{C}$ 是互不相同的代数整数。

证明。 $\Leftarrow$) 我们根据符号将所有 $\chi_i$ 分成两组。我们有 $r^+$ 正$\chi_i^+=\chi_i$ 和 $r^-$ 正 $\chi_i^-=-\chi_i$，其中 $r^++r^-=r$。根据相应 $\chi_i$ 的符号，将 $\lambda_i$ 记为 $\lambda_i^+$ 或 $\lambda_i^-$。采用这一记号，我们有

$$\sum_{i=1}^{r}\chi_i\lambda_i^k \;=\; \sum_{i=1}^{r^+}\chi_i^+\lambda_i^{+k} \;-\; \sum_{i=1}^{r^-}\chi_i^-\lambda_i^{-k}.$$

利用这一等 式（22）、exp 的性质以及恒等式 $\ln(1/(1-t)) =\sum_{n=1}^{\infty}t^n/n$，我们得 et

$$R_{\varphi,\psi}(z)=\frac{\prod_{i=1}^{r^+}\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_i^+z)^k}{k}\right)\right)^{\chi_i^+}}{\prod_{i=1}^{r^-}\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_i^-z)^k}{k}\right)\right)^{\chi_i^-}}=\frac{\prod_{i=1}^{r^-}\left(1-\lambda_i^-z\right)^{\chi_i^-}}{\prod_{i=1}^{r^+}\left(1-\lambda_i^+z\right)^{\chi_i^+}}$$

并且该 ζ 函数是有理函数。

$\Rightarrow$) 假设 ume $R_{\varphi,\ \psi}(z)$ 是有理函数。根据定义 $R_{\varphi,\ \psi}(0) =1\neq 0$ 因此我们可以写成 e

$$R_{\varphi,\psi}(z)=\frac{\prod_i(1-\beta_iz)}{\prod_j(1-\gamma_jz)}$$

其中 $\beta_i$， $\gamma_j$ 是多项式的非零根，且这些乘积均为有限乘积。将这些根合并为一个序列 $\{\lambda_i\}$，其中对于 $i\neq j$ 存在 $\lambda_i\neq\lambda_j$。考虑乘法后，我们可以写成

$$R_{\varphi,\psi}(z)=\prod_i(1-\lambda_iz)^{\chi_i},\quad \chi_i\in\mathbb{Z}. \tag{23}$$

考虑对数导数

$$S(z):=\frac{d}{dz}\ln R_{\varphi,\psi}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}R(\varphi^k,\psi^k)\cdot z^{k-1}. \tag{24}$$

由（23）可得

$$\begin{aligned} S(z)=\frac{d}{dz}\left(\sum_i\chi_i\ln(1-\lambda_iz)\right) \;&=\; \sum_i\chi_i\frac{-\lambda_i}{1-\lambda_iz}\\ &=\sum_i(-\chi_i\lambda_i)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_i^kz^k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_i-\chi_i\lambda_i^k\right)z^{k-1}. \end{aligned} \tag{25}$$

比较 $z^{k-1}$ 处的系数，得到 $R(\varphi^k,\psi^k) =\sum_i\chi_i\lambda_i^k$除了 $\chi_i$的符号外，该和是有限的， $\chi_i\in\mathbb{Z}$ 和 $\lambda_i$ 都是代数数。

我们将证明 $\lambda_i$ 实际上是代数整数。由 (24) 可知， $S(z)$ 是一个具有整数系数的幂级数；由 (25) 可知，它是一个有理函数。因此 $S(z) = u(z)/v(z)$，其中 $u,\ v \in \mathbb{Q}[z]$。Fatou 引理（见 [14, 引理 3.1.31]）指出，在这种情况下， $u(z)$ $v(z)$具有以下形式

$$u(z) = \sum_{i=0}^{s} a_i z^i, \quad v(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j$$

其中系数为 $a_i,\ b_j \in \mathbb{Z}$。将其与（25）比较，我们得到

$$\frac{\sum_{i=0}^{s} a_i z^i}{1 + \sum_{j=1}^{q} b_j z^j} \ = \ S(z) \ = \ \sum_i \frac{-\chi_i \lambda_i}{1 - \lambda_i z}$$

并且很容易验证，所有 $\lambda_i$ 都是多项式 $\tilde{v}(z) = z^q + \sum_{j=1}^{q} b_j z^{q-j}$的根。因此它们是代数整数。□

**引理 17.** 存在一个定义在紧欧几里得邻域收缩上的映射 $f\colon X \to X$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$， $L(f^k) = R(\varphi^k, \psi^k)$ 当且仅当等式 (22) 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立

证明。 $\Rightarrow$) 记由映射 $H_i(f)\colon H_i(X;\mathbb{Q}) \to H_i(X;\mathbb{Q})$ 在 $i$ 阶同调空间上诱导的映射为，并令

$$A_e := \bigoplus_{i-even} H_i(f), \quad A_o := \bigoplus_{i-odd} H_i(f).$$

用这一记号，我们可以写成

$$R(\varphi^k, \psi^k) = L(f^k) = \operatorname{tr} A_e^k - \operatorname{tr} A_o^k.$$

令 $\lambda_i^+, \lambda_j^-$ 分别为 $A_e, A_o$的所有互不相同的特征值，其重数分别为 $\chi_i^+, \chi_j^-$。于是

$$R(\varphi^k, \psi^k) \ = \ \sum_i \chi_i^+ \lambda_i^{+k} \ - \ \sum_j \chi_j^- \lambda_j^{-k},$$

其中 $\chi_i^+, \chi_j^- \in \mathbb{Z}$ 以及所有 $\lambda_i^+, \lambda_j^-$ 都是互不相同的代数整数（它们是整数矩阵的特征多项式的根）。

$\Leftarrow$) 假设对于每个 $k \in \mathbb{N}$，等式

$$R(\varphi^k, \psi^k) = \sum_{i=1}^{r} \chi_i \lambda_i^k$$

其中 $r \in \mathbb{N},\ \chi_i \in \mathbb{Z}$ 和 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ 是互不相同的代数整数，等式成立。事实证明，若 $\lambda_i, \lambda_j$代数共轭，则 $\chi_i = \chi_j$。事实上，记 $v(z)$ 为根为 $\lambda_i, \lambda_j$的不可约多项式。记 $\Sigma$ 为 $v(z)$ 的域，并令 $\sigma$ 为 $\Sigma$的伽罗瓦群中的一个元素。根据定义， $\sigma$ 是 $\mathbb{Q}$上的恒等函数。众所周知， $\sigma$ 将 $v(z)$ 的根集映为自身的一个置换，也将诱导的指标置换记为 $\sigma$，即 $\sigma(\lambda_i) = \lambda_{\sigma(i)}$。我们得到

$$\sigma\left(R(\varphi^k, \psi^k)\right) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{r} \chi_i \lambda_i^k\right) = \sum_{i=1}^{r} \chi_i \sigma(\lambda_i)^k = \sum_{i=1}^{r} \chi_i \lambda_{\sigma(i)}^k = \sum_{i=1}^{r} \chi_{\sigma^{-1}(i)} \lambda_i^k.$$

另一方面，Reidemeister 重合数是一个整数，因此 $\sigma\left(R(\varphi^k,\ \psi^k)\right) = R(\varphi^k,\ \psi^k)$，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们都能得到

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i \lambda_i^k \ = \ \sum_{i=1}^{r} \chi_{\sigma^{-1}(i)} \lambda_i^k.$$

这个等式尤其对 $k=1,\ \ldots r$ 成立，我们将其写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & \lambda_r\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^r & \ldots & \lambda_r^r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \vdots\\ \chi_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & \lambda_r\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^r & \ldots & \lambda_r^r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{\sigma^{-1}(1)}\\ \vdots\\ \chi_{\sigma^{-1}(r)}\end{pmatrix}.$$

由于所有 $\lambda_i$ 互不相同，该矩阵可逆（范德蒙德矩阵），因此对所有 $i$ 以及任意 $\sigma$，都有 $\chi_i=\chi_{\sigma^{-1}(i)}$。我们知道，对于每一对 $\lambda_i,\lambda_j$，都存在一个自同构 $\sigma$，使得 $\sigma(\lambda_i)=\lambda_j$。这意味着，当 $\lambda_i,\lambda_j$ 代数共轭时，$\chi_i=\chi_j$。

现在设 $v(z)=\prod_{i=1}^r(\lambda_i-z)$ 是一个多项式，其根全都是 $\lambda_i$。令

$$v(z)=\prod_\alpha v_\alpha(z)=\prod_\alpha\left(z^{r_\alpha}+b_1^{(\alpha)}z^{r_\alpha-1}+\cdots+b_{r_\alpha-1}^{(\alpha)}z+b_{r_\alpha}^{(\alpha)}\right),\quad b_i^{(\alpha)}\in\mathbb{Z}$$

为其不可约多项式分解。根据 $\chi_\alpha$ 的符号，我们将指标集合 $A=A^+\cup A^-$ 中的 $\alpha$ 分成两个子集。我们可以写成

$$\begin{aligned}R(\varphi^k,\psi^k)&=\sum_{\alpha\in A}\chi_\alpha\left(\sum_{i=1}^{r_\alpha}\left(\lambda_i^{(\alpha)}\right)^k\right)\\&=\sum_{\alpha\in A^+}\chi_\alpha\left(\sum_{i=1}^{r_\alpha}\left(\lambda_i^{(\alpha)}\right)^k\right)-\sum_{\alpha\in A^-}|\chi_\alpha|\left(\sum_{i=1}^{r_\alpha}\left(\lambda_i^{(\alpha)}\right)^k\right).\end{aligned}\tag{26}$$

考虑整数矩阵

$$M_\alpha:=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{r_\alpha}^{(\alpha)}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_{r_{\alpha-1}}^{(\alpha)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_2^{(\alpha)}\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_1^{(\alpha)}\end{pmatrix}$$

利用拉普拉斯展开直接计算可得 $\det(zI-M_\alpha)=v_\alpha(z)$，因此 $\{\lambda_i^{(\alpha)}\}$ 是 $M_\alpha$ 的特征值。接着由 (26) 可写成

$$R(\varphi^k,\psi^k)=\sum_{\alpha\in A^+}\chi_\alpha\operatorname{tr}M_\alpha^k-\sum_{\alpha\in A^-}|\chi_\alpha|\operatorname{tr}M_\alpha^k$$

记

$$A_e:=\bigoplus_{\alpha\in A^+}\bigoplus_{i=1}^{\chi_\alpha}M_\alpha,\quad A_o:=\bigoplus_{\alpha\in A^-}\bigoplus_{i=1}^{|\chi_\alpha|}M_\alpha.$$

使用这一记号，我们最终得到

$$R(\varphi^k,\psi^k)=\operatorname{tr}A_e^k-\operatorname{tr}A_o^k.$$

本文由下面的引理18得出。 □

下面的引理是 [1, 定理2.1]的一个推论。我们给出一种更适合本文目的的表述。

**引理18** ([14, 命题3.1.12])。 设 $X$ 是由 $n_1$ 个圆和 $n_2$ 2维球面组成的楔和，$n_1\geq 2$。那么，对于每一对矩阵 $A_e\in M_{n_2}(\mathbb{Z})$ $A_o\in M_{n_1-1}(\mathbb{Z})$，都存在一个自映射$f:X\to X$ 满足

$$L(f^k)=\operatorname{tr}A_e^k-\operatorname{tr}A_o^k$$

对每一个 $k\in\mathbb{N}$。

证明。 设 $X_2 := \bigvee_1^{n_2} S^2$ 为 $n_2$ 2维球面的楔和，且 $X_1 := \bigvee_1^{n_1-1} S^1$ 为 $n_1 - 1$ 个圆的楔和。则 $X = S^1 \vee X_1 \vee X_2$。

令 $f_2 : X_2 \to X_2$, $f_1 : X_1 \to X_1$ 分别为由矩阵$A_e, A_o$ 以显然方式定义的映射，并令 $f_0 = \mathrm{Id} : S^1 \to S^1$ 为恒等映射。我们断言， $f := f_0 \vee f_1 \vee f_2$是满足假设的映射。

我们将 $f$在 $i$次同调空间上诱导的映射记为 $H_i(f) : H_i(X, \mathbb{Q}) \to H_i(X, \mathbb{Q})$。注意，我们有

$$\begin{aligned} H_2(f_2) = A_e, \quad H_1(f_2) = 0, \quad H_0(f_2) = 1, \\ H_1(f_1) = A_o, \quad H_0(f_1) = 1, \\ H_1(f_0) = 1, \quad H_0(f_0) = 1. \end{aligned}$$

根据 Lefschetz 数的定义以及矩阵迹的性质

$$\begin{aligned} L(f^k) &= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \operatorname{Tr}(H_i(f^k)) \\ &= 1 - (\operatorname{Tr} A_o^k + 1) + \operatorname{Tr} A_e^k \\ &= \operatorname{Tr} A_e^k - \operatorname{Tr} A_o^k \end{aligned}$$

引理得证。 □

最后，本段的主要结果是

**定理19**。 设 $\varphi, \psi$ 是有限 *Pr ̈ufer* 秩无挠幂零群的一个良性对端同态。若 *Reidemeister* 重合 $\zeta$ 函数$R_{\varphi,\ \psi}(z)$ 是有理函数，则对每个 $n \in \mathbb{N}$， 高斯同余成立

$$\sum_{k|n} \mu(n/k) R(\varphi^k, \psi^k) \equiv 0 \mod n. \tag{27}$$

证明。引理 16 和引理 17 表明，$R_{\varphi,\ \psi}(z)$ 是有理函数，当且仅当对每个 $k \in \mathbb{N}$， 都有$L(f^k) = R(\varphi^k, \psi^k)$。将结果直接代入 Dold 同余 (DL) 即可完成证明。 □

**例20**。 考虑以加法记号书写的群 $\mathbb{Z}$ 及其两个端同态

$$\varphi : x \mapsto d_\varphi x, \quad \psi : x \mapsto d_\psi x, \quad d_\varphi, d_\psi \in \mathbb{Z}.$$

根据定义，元素 $x, y \in \mathbb{Z}$ 属于 $(\varphi^k, \psi^k)$ 的同一个 *Reidemeister*重合类，当且仅当存在 $g \in \mathbb{Z}$ 使得

$$y = d_\psi^k g + x - d_\varphi^k g = x + g(d_\psi^k - d_\varphi^k)$$

因此

$$R(\varphi^k, \psi^k) = \begin{cases} |d_\psi^k - d_\varphi^k|, & d_\psi^k \neq d_\varphi^k, \\ \infty, & otherwise \end{cases}.$$

因此，数对$(\varphi, \psi)$ 是驯性的当且仅当 $|d_\varphi| \neq |d_\psi|$。下文中设该数对是驯性的。记为$d_1 = \max(|d_\varphi|, |d_\psi|)$ $d_2 = d_\varphi d_\psi / d_1$。采用这一记号，$|d_\psi^k - d_\varphi^k| = d_1^k - d_2^k$，很容易计算出 *Reidemeister* 重合 $\zeta$ 函数

$$\begin{aligned} R_{\varphi,\psi}(z) &= \exp\left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(\varphi^k, \psi^k)}{k} z^k \right) = \exp\left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_1^k - d_2^k}{k} z^k \right) \\ &= \exp\big( \ln(1 - d_2 z) - \ln(1 - d_1 z) \big) = \frac{1 - d_2 z}{1 - d_1 z} \end{aligned}$$

结果表明它是有理函数。定理*19*指出，此时（*27*）成立。也可以直接容易地看出，因为

$$\sum_{k|n}\mu(n/k)R(\varphi^k,\psi^k) \;=\; \sum_{k|n}\mu(n/k)d_1^k-\sum_{k|n}\mu(n/k)d_2^k \;\equiv\; 0-0 \mod n$$

根据整数 $d_1$、$d_2$ 的原始高斯同余。

## 7. Nielsen coincidence zeta function, the growth rate and the Gauss congruences for the sequence $\{N(f^n,g^n)\}$

设 $f$、$g$： $X\to Y$是两个紧致连通流形之间的两个映射。映射 $f$、$g$在 $X$和 $Y$的基本群之间诱导同态 $f_\#$、$g_\#$。在第 1 节中，我们将映射 $R(f$、$g)$: $=R(f_\#$、$g_\#)$ 的拓扑 Reidemeister 偶合数定义为所诱导同态的 Reidemeister 重合数。如果 $Y=X$，则称映射对 $f$、$g$具有驯性，当 $R(f^n$、$g^n)<\infty$对每个 $n\in\mathbb{N}$均成立时。我们可以将映射对 $(f$、$g)$ 的 Reidemeister 重合数序列 $\{R(f^n$、$g^n)\}$的增长率定义简单地改写为： $R^\infty(f$、$g)$: $=\lim_{n\to\infty}R$ $(f^n$、$g^n)^{1/n}=R^\infty(f_\#$、$g_\#)$。

与 Reidemeister 数的情形相同，我们定义 Nielsen 重合数序列 $\{N(f^n,\ g^n)\}$的增长率（如果存在）

$$N^\infty(f,g):=\lim_{n\to\infty}N(f^n,g^n)^{1/n}.$$

本节中我们将研究紧致幂零流形。设 $G$ 是一个李群， $\Gamma\subset G$ 是它的离散子群。如果存在一个有限的 $G$-不变测度定义在$G/\Gamma$上，则称 $\Gamma$ 为格。维数为 $d$ 的紧流形 $X$，若其为单连通幂零李群 $G$关于秩为 $d$的格 $\Gamma$的商空间 $G/\Gamma$，则称为幂零流形（见 [14,定义 6.2.5]）。

我们将利用以下结果，它揭示了在某些假设下不同重合数之间的联系。关于勒夫谢茨重合数 $L(f,\ g)$的定义，参见例如 [21]。

**定理 21** （[12, 定理 2。3]）。设 $f,g$： $N\to N$ 是一对映射，其中 $N$ 是一个紧致幂零流形。那么以下条件等价:

(i) $N(f,\ g)\neq 0$;
(ii) Coin$(f_\#,\ g_\#)=1$;
(iii) $R(f,\ g)<\infty$。

如果其中一个条件成立，那么

$$R(f,g)=N(f,g)=|L(f,g)|.$$

上述定理以及本文的其他结果促使我们定义并研究一对映射 $f$，$g$ 的*Nielsen* 重合 ζ 函数： $N\to N$ 从一个紧致多面体到其自身的映射

$$N_{f,g}(z):=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N(f^n,g^n)}{n}z^n\right). \tag{28}$$

由于 Nielsen 重合数有限，Nielsen 重合 ζ 函数总是定义良好的。如果这对映射 $f$，$g$ 不具驯性，那么 Reidemeister 重合 ζ 函数便未定义，因此一般而言，Nielsen 重合 ζ 函数是一个不同的对象。

我们陈述关于 Nielsen 重合 ζ 函数的主要结果。

**定理22**。设 $f$、$g$： $N\to N$ 是从紧致幂零流形映射到自身的一对驯化映射。记 $f_\#$、$g_\#$： $G\to G$ 为诱导在 $N$基本群上的端同态。 $G$ 是一个有限生成无挠幂零群。令 $c$ 表示 $G$ 的幂零类，并且

$1 \le k \le c$ 令 $f_{\#k}$、$g_{\#k}$ : $G_k \to G_k$ 表示有限生成无挠阿贝尔因子群上诱导端同态的良性对

$$G_k = \sqrt[G]{\gamma_k(G)}/\sqrt[G]{\gamma_{k+1}(G)} \cong \mathbb{Z}^{d_k}$$

对于某个 $d_k \in \mathbb{N}$，它们来自 $G$ 的孤立下中心列。每个 $G_k$ 都是 $d_k$ 维环面 $\mathbb{T}^{d_k}$ 的基本群，而该环面也是一个紧致幂零流形。因此，每个端同态 $f_{\#k}, g_{\#k}$ 都可以由自映射 $f_k, g_k$ : $\mathbb{T}^{d_k} \to \mathbb{T}^{d_k}$实现。

于是有以下结论。

(i) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$

$$N(f^n, g^n) = \prod_{k=1}^{c} N(f_k^n, g_k^n) \tag{29}$$

(ii) 对于 $1 \le k \le c$，令

$$f_{\#k,\mathbb{Q}}, g_{\#k,\mathbb{Q}} : G_{k,\mathbb{Q}} \to G_{k,\mathbb{Q}}$$

将 $f_{\#k}, g_{\#k}$ 延拓到可除包 $G_{k,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes G_k \cong \mathbb{Q}^{d_k}$。设每对端同态 $f_{\#k,\mathbb{Q}}, g_{\#k,\mathbb{Q}}$ 均可同时三角化。令 $\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,d_k}$ 和 $\eta_{k,1}, \ldots, \eta_{k,d_k}$ 为域 $\mathbb{C}$中 $f_{\#k,\mathbb{Q}}$ 和 $g_{\#k,\mathbb{Q}}$ 的特征值（计入重数），并按如下方式排列：对于 $n \in \mathbb{N}$, $f_{\#k}^{n}{}_{,\mathbb{Q}} - g_{\#k}^{n}{}_{,\mathbb{Q}}$ 的特征值为$\xi_k^n{}_{,1} - \eta_k^n, 1, \ldots, \xi_k^n{}_{,d_k} - \eta_k^n{}_{,d_k}$。于是对于每个 $n \in \mathbb{N}$

$$N(f_k^n, g_k^n) = \prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n| \tag{30}$$

(iii) 假设 $|\xi_{k,i}| \ne |\eta_{k,i}|$ 对于 $1 \le k \le c$, $1 \le i \le d_k$ 成立。那么 *Nielsen* 重合 $\zeta$ 函数 $N_{f,g}(z)$ 是有理函数。(iv) 在相同假设 $|\xi_{k,i}| \ne |\eta_{k,i}|$ 对于 $1 \le k \le c$, $1 \le i \le d_k$ 成立时，*Nielsen* 重合数的增长率存在，并且可以用显式公式计算

$$N^\infty(f, g) = \prod_{k=1}^{c} \prod_{i=1}^{d_k} \max\{|\xi_{k,i}|, |\eta_{k,i}|\}. \tag{31}$$

(v) 在相同假设 $|\xi_{k,i}| \ne |\eta_{k,i}|$ 对于 $1 \le k \le c$, $1 \le i \le d_k$ 成立时，我们有高斯同余

$$\sum_{k|n} \mu(n/k) \cdot N(f^k, g^k) \equiv 0 \mod n \tag{32}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。 根据定义，$(f, g)$ 的驯性假设给出了定理 21 中的条件 (iii)，该条件对所有迭代 $f^n, g^n$ 均成立。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} N(f^n, g^n) &= R(f^n, g^n) = R(f_\#^n, g_\#^n), \\ N(f_k^n, g_k^n) &= R(f_k^n, g_k^n) = R(f_{\#k}^n, g_{\#k}^n). \end{aligned} \tag{33}$$

从现在起，我们可以沿用定理 13 证明中的论证。

要证明 (i)，只需使用端同态的 Roman'kov 公式 (14)$f_\#$, $g_\#$。于是得到

$$N(f^n, g^n) = R(f_\#^n, g_\#^n) = \prod_{k=1}^{c} R(f_{\#k}^n, g_{\#k}^n) = \prod_{k=1}^{c} N(f_k^n, g_k^n).$$

为证明 (ii)，注意到端同态 $f_{\#k}, g_{\#k} : G_k \to G_k \cong \mathbb{Z}^{d_k}$ 由与之分别对应的整数矩阵 $A_k, B_k \in M_{d_k}(\mathbb{Z})$ 表示。存在幺模矩阵 $M_{n,k}, N_{n,k}$ 以及对角整数矩阵 $C_{n,k} = \mathrm{diag}(c_{n,1}, \ldots, c_{n,d_k})$，使得 $C_{n,k} =$

$M_{n,k}(A_k^n - B_k^n)N_{n,k}$ 且 $\det C_{n,k} = \det(A_k^n - B_k^n)$。 $f_{\#k}^n - g_{\#k}^n$ 的余核的阶等于群 $\mathbb{Z}/c_{n,1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/c_{n,d_k}\mathbb{Z}$ 的阶，因此我们可以写成

$$\begin{aligned} R(f_{\#k}^n, g_{\#k}^n) &= |\operatorname{Coker}(f_{\#k}^n - g_{\#k}^n)| = |c_{n,1} \dots c_{n,d_k}| \\ &= |\det(f_{\#k}^n - g_{\#k}^n)| = |\det(f_{\#k,\mathbb{Q}}^n - g_{\#k,\mathbb{Q}}^n)| \\ &= \prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n| \end{aligned} \tag{34}$$

现在利用（33）即可得到（30）。

为了证明（iii），我们需要展开（30）中的模。谱中的复特征值 $\xi_{k,i}$，$\eta_{k,i}$ 成对出现，其复共轭分别为 $\xi_{k,i}$，$\eta_{k,i}$。如果 $\xi_{k,i}$，$\eta_{k,i}$ 中至少有一个是复数（虚部非零），则有

$$|\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n| \cdot |\overline{\xi_{k,i}}^n - \overline{\eta_{k,i}}^n| = |\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n|^2 = (\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n) \cdot (\overline{\xi_{k,i}}^n - \overline{\eta_{k,i}}^n).$$

若 $\xi_{k,i}, \eta_{k,i}$ 均为实数，则有 $|\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n| = \delta_{1,k,i}^n - \delta_{2,k,i}^n$，其中 $\delta_{1,k,i} = \max\{|\xi_{k,i}|, |\eta_{k,i}|\}$ 且 $\delta_{2,k,i} = \xi_{k,i} \cdot \eta_{k,i} \delta_{1,k,i}$。重新排列特征值，使得对于 $i = 1, \dots, s$，$\xi_{k,i}, \eta_{k,i}$ 中至少有一个虚部非零，复共轭的指标紧随其后；对于 $i = s+1, \dots, d_k$，两个特征值均为实数。于是

$$N(f_k^n, g_k^n) = \prod_{i=1}^{d_k} |\xi_{k,i}^n - \eta_{k,i}^n| = \sum \pm(\mu_1 \nu_1 \cdots \mu_{s/2} \nu_{s/2} \delta_{\epsilon(1),k,s+1} \cdots \delta_{\epsilon(T),k,d_k})^n, \tag{35}$$

其中 $\mu_i$ 是 $\xi_{k,i}$ 或 $\eta_{k,i}$，$\nu_i$ 是 $\overline{\xi_{k,i}}$ 或 $\overline{\eta_{k,i}}$，$\epsilon(i)$ 为 1 或 2。将其代入 (29) 中的每个 $k = 1, \dots, c$，得到

$$N(f^n, g^n) = \sum_{j \in J} c_j w_j^n, \tag{36}$$

其中 $J$ 是有限指标集，$c_j = \pm 1$ 和 $w_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$j \in J$。因此，Nielsen 重合 ζ 函数

$$\begin{aligned} N_{f,g}(z) &= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{N(f^n, g^n)}{n} z^n\right) = \exp\left(\sum_{j \in J} c_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w_j z)^n}{n}\right) \\ &= \prod_{j \in J} (1 - w_j z)^{-c_j} \end{aligned}$$

是有理函数。

为证明 (iv)，注意到在 (36) 中有一个主导项 $w_m$，满足 $|w_m| = \prod_{k=1}^{c} \prod_{i=1}^{d_k} \max\{|\xi_{k,i}|, |\eta_{k,i}|\} |w_j|$ 当 $j \neq m$。我们得到 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{N(f^n, g^n)} = |w_m|$，这就是 (31)。

为证明 (v)，注意到驯性的假设使我们得到 ζ 函数相等：$N_{f,g}(z) = R_{f_\#, g_\#}(z)$。根据 (iii)，这些 ζ 函数都是有理函数。$R_{f_\#, g_\#}(z)$ 满足定理19的假设，因此可得同余式 (32)。□

## 8. Asymptotic behavior of the sequences $\{R(\varphi^k, \psi^k)\}$ and $\{N(f^k, g^k)\}$

假设 Reidemeister 重合 ζ 函数是有理函数。则方程 (22) $R(\varphi^k, \psi^k) = \sum_{i=1}^{r} \chi_i \lambda_i^k$ 成立，并且根据引理 16 的证明，我们知道 $\lambda_i^{-1}$ 是 ζ 函数的零点和极点。定义

$$\lambda(\varphi, \psi) := \max_i \{|\lambda_i|\}, \quad n(\varphi, \psi) := \#\{\lambda_i \mid |\lambda_i| = \lambda(\varphi, \psi)\}. \tag{37}$$

在定理 7 中，我们证明了 Reidemeister 重合数增长的一个公式。若 $R_{\varphi,\psi}(z)$ 是有理函数，则我们可以进一步描述序列 $\left\{R(\varphi^k, \psi^k) \,/\, \lambda(\varphi, \psi)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限点集的结构。Babenko 和 Bogatyi 陈述了以下定理。

**定理 23** ([1, 定理 2。6], 另见 [14, 定理 3.1。53])。若 $f$ 是一个从紧致 *ANR* $X$ 映射到其自身的映射，且 $r(f)$ 是映射 $f_*$ 在同调群上诱导的约化（或本质）谱半径，则以下情况之一成立：

(i) $L(f^k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. (ii) 序列 $\left\{L(f^k) \ / \ r(f)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限点集包含一个区间。(iii) 序列 $\left\{L(f^k) \ / \ r(f)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ 与周期序列 $\left\{\sum_{\epsilon_i^m=1} A_i \epsilon_i^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ 具有相同的极限点，其中 $A_i$ 是不会同时为零的整数。

Fel'shtyn 和 Lee 证明了一个类似结果，该结果针对 infra- solvmanifold 上映射的 Nielsen 数，类型为 $(R)$ [10, 定理 4.1]。我们将证明一个类似结果，针对有限 Prüfer 秩无挠幂零群的端同态的 Reidemeister 重合数。记 $R_{\varphi,\psi}(z)$ 的收敛半径为 $\mathcal{R}$。

**引理24.** $\lambda(\varphi, \ \psi) = 1/\mathcal{R}$。

证明。根据柯西–阿达马公式，有

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|R(\varphi^k, \psi^k)|}.$$

考虑到等式 (22)，有

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{R(\varphi^k, \psi^k)} &= \sqrt[k]{\sum_{|\lambda_i|=\lambda(\varphi,\psi)} \chi_i \lambda_i^k + \sum_{|\lambda_i|<\lambda(\varphi,\psi)} \chi_i \lambda_i^k} \\ &= \lambda(\varphi,\psi) \cdot \sqrt[k]{\sum_{|\lambda_i|=\lambda(\varphi,\psi)} \chi_i \cdot C_i^k + \sum_{|\lambda_i|<\lambda(\varphi,\psi)} \chi_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda(\varphi,\psi)}\right)^k},\end{aligned}$$

其中，$C_i \in \mathbb{C}$ 是常数，且对所有 $i$都有 $|C_i| = 1$ 。根号下的和的模有界，因此当 $k \to \infty$ 时，整个根式的模趋于 1。引理得证。□

**注 25.** 由定义可直接得出 $R(\varphi^k, \ \psi^k) \geq 1$，因此定理 *23 (a)* 中关于 *Reidemeister* 重合数的情形不可能成立。此外，根据上面的引理，我们有 $\lambda(\varphi, \ \psi) \geq 1$。

**定理 26.** 设 $\varphi$、$\psi : G \to G$ 是无挠幂零群 $G$ 上的一对良性端同态，该群具有有限的 *Pr¨ufer* 秩，并且 *Reidemeister* 重合 $\zeta$ 函数$R_{\varphi, \ \psi}(z)$ 是有理函数。以下两种情况之一成立：

（i）序列 $\{R（\varphi^k, \ \psi^k） \ / \ \lambda（\varphi, \ \psi）^k\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限点集与一个周期序列 $\{\sum_{j=1}^{n(\varphi,\psi)} \alpha_j \epsilon_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限点集相同，其中 $\alpha_j \in \mathbb{Z}$、$\epsilon_j \in \mathbb{C}$ 和 $\epsilon_j^q = 1$ 对某个整数 $q > 0$成立。

（ii）序列 $\{R（\varphi^k, \ \psi^k） \ / \ \lambda（\varphi, \ \psi）^k\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限点集包含一个区间。

证明。我们将每个满足 $|\lambda_i| = \lambda(\varphi, \ \psi)$ 的 $\lambda_i$ （见式（22））分解为

$$\lambda_i = \lambda(\varphi,\psi)\exp(2\pi\iota\theta_i),$$

其中 $\iota^2 = -1$ 是虚数单位。于是

$$R(\varphi^k, \psi^k) = \lambda(\varphi,\psi)^k \left(\sum_{|\lambda_i|=\lambda(\varphi,\psi)} \chi_i \exp(2\pi\iota k\theta_i)\right) + \sum_{|\lambda_i|<\lambda(\varphi,\psi)} \chi_i \lambda_i^k$$

and

$$\left|\frac{R(\varphi^k, \psi^k)}{\lambda(\varphi,\psi)^k} - \sum_{|\lambda_i|=\lambda(\varphi,\psi)} \chi_i \exp(2\pi\iota k\theta_i)\right| \leq \sum_{|\lambda_i|<\lambda(\varphi,\psi)} |\chi_i| \cdot \left|\frac{\lambda_i}{\lambda(\varphi,\psi)}\right|^k.$$

当 $k\to\infty$ 时，右侧趋于 0，因此序列

$$\left\{R(\varphi^k,\psi^k)\ /\ \lambda(\varphi,\psi)^k\right\}_{k=1}^{\infty}\quad\text{and}\quad\left\{\sum_{|\lambda_i|=\lambda(\varphi,\psi)}\chi_i\exp(2\pi\iota k\theta_i)\right\}_{k=1}^{\infty}$$

具有相同的渐近行为。现在我们声称，后一序列的极限点集的结构取决于所有 $\theta_i$的有理性。

假设对于所有 $i=1,\dots,n(\varphi,\psi)$，我们可以写成 $\theta_i=p_i/q_i$，其中 $p_i,q_i\in\mathbb{Z}$。令 $q:=\mathrm{lcm}(q_1,\dots,q_{n(\varphi,\psi)})$。每当 $k$是 $q$的重数时，所有 $\exp(2\pi\iota k\theta_i)=1$。这就是情形 (i)。

现在假设其中一些 $\theta_i$ 是无理数，并用 $\mathcal{S}:=\{i_1,\dots,i_s\}\subset\{1,\dots,n(\varphi,\psi)\}$表示它们的指标构成的子集。我们可以将该假设表示为线性无关性

$$\left(\sum_{i\in\mathcal{S}}\alpha_i\theta_i=\alpha,\quad \alpha_i,\alpha\in\mathbb{Z}\right)\qquad\Longrightarrow\qquad\forall_i\ \alpha_i=\alpha=0.$$

那么，克罗内克定理（见[5, 定理 VIII.6]）指出，序列$\{(k\theta_{i_1},\dots,k\theta_{i_s})\}_{k=1}^{\infty}$在 $s$维环面 $\mathbb{T}^s$中稠密。

考虑连续函数

$$h:\mathbb{T}^{n(\varphi,\psi)}\to[0,\infty),\qquad h(\xi_1,\dots,\xi_{n(\varphi,\psi)})=\left|\sum_{i=1}^{n(\varphi,\psi)}\chi_i\exp(2\pi\iota\xi_i)\right|.$$

我们可以考虑子环面

$$\mathbb{T}_{\mathcal{S}}:=\left\{(\xi_1,\dots,\xi_{n(\varphi,\psi)})\in\mathbb{T}^{n(\varphi,\psi)}\mid\xi_j=0,\forall j\notin\mathcal{S}\right\}$$

由于 $\mathbb{T}_{\mathcal{S}}$ 是紧致的，且限制映射 $h_{\mathcal{S}}:=h|_{\mathbb{T}_{\mathcal{S}}}$ 连续，因此存在最大值 $m_{\mathcal{S}}:=\max_{\mathbb{T}_{\mathcal{S}}}h_{\mathcal{S}}(\xi)$。注意，稠密序列的像的闭包包含区间

$$\overline{h_{\mathcal{S}}\left(\{k\theta_{i_1},\dots,k\theta_{i_s}\}_k\right)}\ \supset\ [0,m_{\mathcal{S}}].$$

这就是情况 (ii)。 □

设 $f,\ g:\ N\to N$ 是第 7 章所述的从紧致幂零流形到其自身的一对驯化映射。定理 21 确立了在基本群上诱导的驯性自同态对 $f_\#,\ g_\#$ 的 Reidemeister 重合数 $R(f_\#,\ g_\#)$ 与 Nielsen 重合数 $=N(f,\ g)$ 相等。利用 (37)，如果 Reidemeister 重合 ζ 函数 $R_{f_\#,\ g_\#}(z)$ 是有理函数，我们可以定义

$$\lambda(f,g):=\lambda(f_\#,g_\#)\tag{38}$$

对于驯化映射对 $f,\ g$。根据引理24，我们可以将 $\lambda(f,\ g)$ 解释为 Nielsen 重合 ζ 函数 $N_{f,\ g}(z)$ 的收敛半径的倒数。

定理22和定理26的结果使我们能够表述如下

**定理 27.** 设 $f,g:\ N\to N$ 是从一个紧致幂零流形到其自身的驯化映射对。在定理22 (iii) 的假设下，以下两种情况之一成立：

(i)序列 $\{N(f^k,g^k)\ /\ \lambda(f,g)^k\}_{k=1}^{\infty}$与一个周期序列 $\{\sum_{j=1}^{n(\varphi,\psi)}\alpha_j\epsilon_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ 具有相同的极限点集，其中 $\alpha_j\in\mathbb{Z}$, $\epsilon_j\in\mathbb{C}$ 和 $\epsilon_j^q=1$，对于某个整数 $q>0$。(ii)序列 $\{N(f^k,g^k)\ /\ \lambda(f,g)^k\}_{k=1}^{\infty}$的极限点集包含一个区间。

证明。 由于对 $f,g$是驯性的，对所有迭代 $k\in\mathbb{N}$ 我们有等式 $N(f^k,g^k)=R(f^k{}_\#\ g_\#^k)$，并且 ζ 函数也相等：$N_{f,g}(z)\equiv R_{f_\#,g_\#}(z)$。在定理22 (iii) 的假设下，两个 ζ 函数都是有理函数。我们可以将定理 26 应用于序列 $\{R(f_\#^k,g_\#^k)\ /\ \lambda(f_\#,g_\#)^k\}_{k=1}^{\infty}$，在我们的情形中它与序列$\{N(f^k,g^k)\ /\ \lambda(f,g)^k\}_{k=1}^{\infty}$相同。 □

**注记 28**。考虑一对 $f, g$，使得对所有迭代 $k \in \mathbb{N}$有 $N(f^k, g^k) = 0$。由定理 21 可见，该对不是驯性的，且 *Reidemeister* 重合 $\zeta$ 函数$R_{f_\#, g_\#}(z)$ 没有定义。另一方面，*Nielsen* 重合 $\zeta$ 函数 $N_{f,g}(z) \equiv 1$是常数，因而为有理函数。收敛半径为无穷，因此根据我们将 (38) 解释为收敛半径的倒数，令$\lambda(f, g) = 0$ 是有意义的。于是这一情形类似于 定理 23 (i) 中 *Lefschetz* 数的第三种可能性，以及 [10, 定理 4.1 (1)] 中类型 (R) 的 *infra*-可解流形上映射的 *Nielsen* 数的情形。

## References


[1] I. K. Babenko and S. A. Bogatyi，映射迭代下周期点指数的行为，《苏联数学汇刊》*38:1*（*1992*），*1–26*。[2] R. Bowen，具有唯一平衡态的一些系统，《数学系统理论》*8:3*（*1974*），*193–202*。[3] J. Buzzi，区间上的规范性质，《美国数学会汇刊》*349:7*（*1997*），*2737–2754*。[4] J. Byszewski G. Graff and T. Ward，多尔德序列、周期点与动力学，《伦敦数学会会报》*53*（*2021*），*1123–1298*。[5] K. Chandrasekharan，《解析数论导论》，施普林格出版社，*1968*。[6] K. Dekimpe，殆比伯巴赫群：仿射与多项式结构，《数学讲义》*1639*（*1996*）。[7] A. Dold，迭代映射的不动点指数，《数学发明》*74*（*1983*），*419–435*。[8] A. Fel'shtyn，动力$\zeta$函数、尼尔森理论与里德迈斯特挠率，《美国数学会回忆录》*147:699*（*2000*）。[9] A. Fel'shtyn and B. Klopsch，通过有限剩余完备化研究重合 *Reidemeister* $\zeta$ 函数的波利亚-卡尔森二分现象，《印度数学》（新辑）*33:4*（*2022*），*753–767*。
[10] A. Fel'shtyn and J. B. Lee，型为（$R$）的基础可解流形上映射迭代的 *Nielsen* 数与周期轨道，《不动点理论与应用杂志》*20:62*（*2018*）。[11] A. Fel'shtyn and E. Troitsky，离散群的扭曲伯恩赛德-弗罗贝尼乌斯理论，《纯粹与应用数学杂志》*613*（*2007*），*193–210*。[12] D. L. Goncalves，幂零流形上的重合里德迈斯特类与幂零纤维化，《拓扑学及其应用》*83*（*1998*），*169–186*。[13] N. V. Ivanov，熵与 *Nielsen* 数，《苏联科学院通报》*265:2*（*1982*），*284–287*（俄文）；英文译本：《苏维埃数学文献》*26*（*1982*），*63–66*。[14] J. Jezierski and W. Marzantowicz，拓扑不动点与周期点理论中的同伦方法，施普林格出版社，*2006*。[15] I. Kaplansky，《无限阿贝尔群》，密歇根大学出版社，*1954*。
[16] A. Katok and B. Hasselblatt，《动力系统现代理论导论》，剑桥大学出版社，*1995*。
[17] W. Marzantowicz and P. M. Przygodzki，利用 $k$ 进展开寻找映射的周期点，《离散与连续动力系统》*5:3*（*1999*），*495–514*。[18] R. Miles，同步点及其相关动力不变量，《美国数学会汇刊》*365*（*2013*），*5503–5524*。[19] L. Ribes and P. Zalesskii，《投射有限群》，施普林格出版社，*2010*。
[20] V. Roman'kov，幂零群中的扭曲共轭类，《纯粹与应用代数杂志》*215*（*2010*），*664–671*。
[21] J. W. Vick，《同调论》，施普林格出版社，*1994*[22] P. Wong，*Reidemeister* 数、赫希秩、多循环群与可解流形上的重合，《纯粹与应用数学杂志》*524*（*2000*），*185–204*。[23] A. V. Zarelua，关于某些矩阵幂的迹的同余式，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》*263*（*2008*），*85–105*（俄文）；英文译本：《斯捷克洛夫数学研究所数学文献》*263*（*2008*），*78–98*。



Alexander Fel'shtyn, Instytut Matematyki, Uniwersytet Szczecinski,
ul. Wielkopolska 15,70-451 Szczecin, Poland电子邮箱地址: alexander.felshtyn@usz.edu.pl

Mateusz Slomiany, Instytut Matematyki, Uniwersytet Szczecinski,
ul. Wielkopolska 15,70-451 Szczecin, Poland电子邮箱地址: mateusz.slomiany@phd.usz.edu.pl