arXiv:2603.08554v1 [math.SP] 9 Mar 2026

双重简并嵌入特征值附近的共振

HEMANT BANSAL、ALOK MAHARANA 与 LINGARAJ SAHU

Abstract. 本文将作者在 [3] 中开创的共振现象研究推广到二重简并嵌入特征值（即重数为二的特征值）的情形。为解决本研究中出现的、超出 [3]之方法的困难，引入了一个根本性的新概念。我们运用微分拓扑技术，即莫尔斯引理，来研究当前情形。这使我们能够理解 $L^2(\mathbb{R}^3)$上拉普拉斯算子的秩二自伴扰动，并结合 [3], 的方法，得到二重简并嵌入特征值附近谱密度的渐近结果。重要的是，我们能够轻松处理阈值特征值情形。

我们还分析了用以解释此类共振现象的重要性质，即逗留时间、散射截面和时间延迟的渐近行为。

1. Introduction

在扰动下，自伴算子的嵌入特征值可能消失到连续谱中并产生共振；这可以通过谱密度、散射截面、时间延迟和逗留时间等量的局部行为加以描述。与此类特征值相关的共振现象已由多位作者进行了研究；例如，参见 [5, 12, 11, 6, 2]。

在近期的一项工作 [3], 中，作者对 $L^2(\mathbb{R}^3)$上拉普拉斯算子的秩一扰动进行了详细分析，证明简单嵌入特征值的消失会使共振附近的谱密度、散射截面和时间延迟呈现布赖特–维格纳型渐近行为。在本文中，我们研究 $L^2(\mathbb{R}^3)$上拉普拉斯算子的单参数扰动，其中扰动由适当的秩二算子给出，并研究由二重简并嵌入特征值（即重数为二的特征值）引起的共振现象。 [3]的方法（使用隐函数定理）不足以解决研究中出现的简并问题。我们采用微分拓扑中的一种工具，即莫尔斯引理，以在这种情况下得到两条不同的共振路径。我们以规范的方式为每条共振路径关联一个归一化特征向量，使二者共同构成嵌入特征值对应的标准正交特征基，并证明与每个特征向量相关的谱密度在相应共振路径附近均具有布赖特–维格纳型渐近剖面。作为推论，我们分别沿两条路径分析谱投影，从而证明谱集中现象。最后，我们对散射振幅、时间延迟和逗留时间进行渐近分析。

更高重数的情形带来了一些新的困难，目前仍在研究中，相关结果将在未来的工作中报告。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47A10；47A55；81Q15。

Key words and phrases. 共振；嵌入特征值；时间延迟；逗留时间。

本文的结构安排如下。第 2 节汇集了预备结果，并固定了全文所用的记号。第 3 节回顾拉普拉斯算子的谱表示，并建立一些相关结果。第 4 节研究 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中拉普拉斯算子的秩二扰动的谱理论，包括嵌入特征值重数为二的存在性充要条件。第5节明确秩二扰动的类别，并确定本文后续部分将研究的模型。第 6 节致力于谱密度的渐近分析。第 7 节证明谱集中和时间衰减，并推导逗留时间的估计。最后，第8 节考察受扰散射系统趋近于未受扰系统时散射振幅的渐近行为，并推导时间延迟的相应渐近结果。

2. Notations and some basic results

对于可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子 T （可能无界），令 $\sigma(T)$ 和 $\sigma_{ac}(T)$ 分别表示 T 的谱和绝对连续谱。令 $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(T)$ 表示相对于 T 的绝对连续子空间。令 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上有界算子的空间。若序列 $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 强收敛到算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，记作 $\text{s-lim}_{n\to\infty} T_n = T$，则称其强收敛；如果对每个 $v \in \mathcal{H}$，当 $n \to \infty$. 时，$T_n v \to Tv$

令 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有光滑函数和施瓦茨类函数的空间。对于 $1 \le p \le \infty$，令 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 表示标准勒贝格空间。函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 的傅里叶变换定义为:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi\cdot x}\, \mathrm{d}x \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n$$

只要该积分在适当意义下收敛。
现在我们给出一些初步结果，这些结果将用于计算拉普拉斯算子的预解式极限。

定义2.1. 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。 f 的柯西主值记为 $\gamma(f,\cdot)$，定义为

$$\gamma(f,\lambda) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)} \frac{f(x)}{x-\lambda}\, \mathrm{d}x \quad \textit{for } \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

其中上述极限存在(见 [10,推论4.95(b)])。

命题2.2 ([3, 命题2.2])**.** 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。则 $\gamma(f,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$ 及其k阶导数满足

$$\frac{\partial^k \gamma(f,\cdot)}{\partial \lambda^k} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\lambda^k}, \cdot\right). \tag{2.2}$$

命题2.3 （普莱梅利–普里瓦洛夫定理， [10, 式 (4.7.48)]）**.** 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。则

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-(\lambda \pm i\epsilon)}\, \mathrm{d}x = \gamma(f,\lambda) \pm i\pi f(\lambda),$$

对紧集中的 λ 一致成立。

3. Spectral representation of the Laplacian on $L^2(\mathbb{R}^3)$

本节给出若干关于 $\mathbb{R}^3$ 中的拉普拉斯算子 $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$、其谱表示以及其预解式边界行为的预备结果。

设 H_0 表示希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上 $-\Delta$ 的自伴扩张，其定义域为

$$\mathcal{D}(H_0) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} \left| |\xi|^2 \hat{v}(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi < \infty \right\}.$$

算子 H_0 是纯绝对连续的，其 $\sigma(H_0) = [0, \infty)$。$H_0$ 的谱表示可通过酉映射 U，在酉同构的希尔伯特空间 $L^2([0,\infty)\ L^2(S^2))$ 中实现，其中 U 定义如下:

$$(Uv)_\lambda(\omega) = 2^{-1/2} \lambda^{1/4} \widehat{v}(\sqrt{\lambda}\,\omega) \quad \text{for almost every } \lambda \in [0,\infty),\ \omega \in S^2, \tag{3.1}$$

其中 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中配备表面积测度的单位球面，而 $[0,\infty)$ 配备勒贝格测度。注意，对所有 $v \in \mathcal{D}(H_0)$，有

$$(UH_0 v)_\lambda = \lambda (Uv)_\lambda \quad \text{for almost every } \lambda \in [0,\infty).$$

为简化记号，我们将 $(Uv)_\lambda$ 记为 v_λ，并将 n 阶强导数 $\mathrm{d}^n \mathrm{d}\lambda^n\, v_\lambda$ 在 $\lambda = s$ 处记为 $v_s^{(n)}$。若 v_λ 在 $\lambda = s$ 处以 n 阶消失，则称其满足条件：对 $0 \le k < n$，有 $v_s^{(k)} = 0$，且 $v_s^{(n)} \neq 0$。定义空间

$$\mathcal{E} := \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^3) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{the map } \lambda \mapsto v_\lambda \text{ is strongly smooth,} \\ \text{and decays rapidly as } \lambda \to 0 \text{ and } \lambda \to \infty \end{array} \right\}.$$

这是 $L^2(\mathbb{R}^3)$的一个稠密子空间，因为其在谱变换下的像 U 包含$C_c^\infty\big((0,\infty); L^2(S^2)\big)$，而该像在 $L^2\big([0,\infty);\ L^2(S^2)\big)$中稠密。

令 $R_0(z)$表示预解式$(H_0 - z)^{-1}$，即 H_0的预解式，其定义于 $z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$。对于 $v, w \in \mathcal{E}$,定义

$$\eta_{v,w}(\lambda) = \begin{cases} \langle v_\lambda, w_\lambda \rangle & \text{if } \lambda \ge 0, \\ 0 & \text{if } \lambda < 0. \end{cases}$$

注意，由柯西-施瓦茨不等式，$\eta_{v,w} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 于是对于$\operatorname{Im} z \neq 0$,

$$\langle R_0(z) v, w \rangle = \int_0^\infty \langle (R_0(z)v)_\lambda, w_\lambda \rangle \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta_{v,w}(\lambda)}{\lambda - z} \, \mathrm{d}\lambda.$$

因此由命题2.3，我们有

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \langle R_0(\lambda \pm i\epsilon) v, w \rangle = \gamma(\eta_{v,w}, \lambda) \pm i\pi\, \eta_{v,w}(\lambda) \tag{3.2}$$

对紧集中的 λ 一致成立。

对于 $v \in \mathcal{E}$，若满足 $v_a = 0$ 属于 $L^2(S^2)$（对某个 $a \ge 0$），我们如下定义函数$\Phi_{v,a} \in L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(\Phi_{v,a})_\lambda = \begin{cases} \dfrac{v_\lambda}{\lambda - a}, & \text{if } \lambda \neq a, \\ v_a', & \text{if } \lambda = a. \end{cases} \tag{3.3}$$

注意，当 $a = 0$时，我们有 $v_a' = 0$。下述引理将在第 4 节中用到。

引理 3.1. 设 $v \in \mathcal{E}$ 满足条件 $v_a = 0$，其中 $a \geq 0$。则有以下结论:

(a) $\Phi_{v,a} \in \mathcal{E}$。

(b)

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} R_0(a + i\epsilon)v = \Phi_{v,a} \quad in\ L^2(\mathbb{R}^3).$$

(c) 此外，若 $w \in \mathcal{E}$ 满足 $w_a = 0$，则

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\gamma(\eta_{v,w}, \lambda)\Big|_{\lambda=a} = \langle \Phi_{v,a},\, \Phi_{w,a} \rangle.$$

证明。由于 $v \in \mathcal{E}$，函数 $\lambda \mapsto (\Phi_{v,a})_\lambda$ 在 $\lambda \neq a$ 处强光滑，并且当 $\lambda \to 0$ 和 $\lambda \to \infty$ 时快速衰减。此外，由于 $v_a = 0$，在 $\lambda = a$ 处反复应用泰勒定理可知，函数 $\lambda \mapsto (\Phi_{v,a})_\lambda$ 在 $\lambda = a$ 处任意阶强可微，因此 $\Phi_{v,a} \in \mathcal{E}$. 这就证明了 (a) 部分。

为证明 (b) 部分，注意到

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{v_\lambda}{\lambda - (a + i\epsilon)} = (\Phi_{v,a})_\lambda \quad \text{in } L^2(S^2) \quad \text{for } \lambda \neq a,$$

并且

$$\left\| \frac{v_\lambda}{\lambda - (a + i\epsilon)} - (\Phi_{v,a})_\lambda \right\|_{L^2(S^2)} \leq 2\, \|(\Phi_{v,a})_\lambda\|_{L^2(S^2)}.$$

此外,

$$\|R_0(a + i\epsilon)v - \Phi_{v,a}\|^2 = \int_0^\infty \left\| \frac{v_\lambda}{\lambda - (a + i\epsilon)} - (\Phi_{v,a})_\lambda \right\|^2_{L^2(S^2)} \mathrm{d}\lambda.$$

由于$\Phi_{v,\ a} \in \mathcal{E}$，被积函数被一个 L^1函数控制，因此(b)部分可由勒贝格控制收敛定理得出。对于 $v,\ w \in \mathcal{E}$ 且 $v_a = w_a = 0$

$$\eta_{v,w}(a) = \langle v_a, w_a \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \eta'_{v,w}(a) = \langle v'_a, w_a \rangle + \langle v_a, w'_a \rangle = 0.$$

因此函数 $\lambda \longmapsto \frac{\eta'_{v,\ w}(\lambda)}{\lambda - a}$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$。由(2.2)，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\gamma(\eta_{v,w}, \lambda)\Big|_{\lambda=a} = \gamma(\eta'_{v,w}, a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta'_{v,w}(\lambda)}{\lambda - a}\, \mathrm{d}\lambda.$$

利用分部积分可得

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta'_{v,w}(\lambda)}{\lambda - a}\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta_{v,w}(\lambda)}{(\lambda - a)^2}\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \left\langle \frac{v_\lambda}{\lambda - a}, \frac{w_\lambda}{\lambda - a} \right\rangle \mathrm{d}\lambda = \langle \Phi_{v,a},\, \Phi_{w,a} \rangle,$$

由此证明了(c)部分。 □

4. Rank-two perturbation of the Laplacian on $L^2(\mathbb{R}^3)$

Let

$$V = \sum_{j=1}^{2} \langle \cdot, u_j \rangle u_j$$

其中 $u_1, u_2 \in \mathcal{E}$ 且 $u_1 \perp u_2$。对于 $\alpha \in \mathbb{R},$，考虑扰动算子

$$H_\alpha := H_0 + \alpha V \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^3).$$

由于 V 是有限秩自伴算子，算子 H_α 是自伴算子，其定义域为$\mathcal{D}(H_\alpha) = \mathcal{D}(H_0)$，且其本质谱为 $[0,\infty)$。我们用 $R_\alpha(z)$表示 H_α的预解式 $(H_\alpha - z)^{-1}$，其定义于 $\operatorname{Im} z \neq 0$，并用 E_α 表示与之关联的谱测度。为简洁起见，我们将 $(u_j)_\lambda$ 记为 $u_{j,\lambda}$，并将 η_{u_j,u_k} 记为 η_{jk}，其中 $j, k \in \{1,2\}$。

我们回顾一下 Stone公式，它将 H_α 的谱投影与其预解式的边界值联系起来。对于任意 v, $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\frac{1}{2}\left(\langle E_\alpha(a,b)v,w\rangle + \langle E_\alpha[a,b]v,w\rangle\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left\langle \big(R_\alpha(\lambda+i\varepsilon) - R_\alpha(\lambda-i\varepsilon)\big)v,w\right\rangle d\lambda. \tag{4.1}$$

因此，分析 H_α 的谱性质归结为理解当参数 $\lambda \pm i\epsilon$ 趋近谱时，其预解式的边界行为。为此，我们首先将 H_α 的预解式与 H_0.的预解式联系起来

我们定义线性映射 $\tau\colon L^2(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}^2$ 如下:

$$\tau v = \begin{bmatrix}\langle v,u_1\rangle \\ \langle v,u_2\rangle\end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

于是 $\tau^*\tau = V$，并且当 $\operatorname{Im} z \neq 0$时，预解式恒等式给出

$$R_\alpha(z) - R_0(z) = -\alpha R_0(z)VR_\alpha(z) = -\alpha R_0(z)\tau^*\tau R_\alpha(z).$$

这意味着

$$B(\alpha,z)\tau R_\alpha(z) = \tau R_0(z)$$

其中 $B(\alpha, z) = I + \alpha\tau R_0(z)\tau^*$.注意到，当 $\operatorname{Im} z \neq 0$时，算子 $B(\alpha, z)$ 可逆，且 $B(\alpha, z)^{-1} = I - \alpha\,\tau R_\alpha(z)\tau^*$.因此，我们得到

$$\tau R_\alpha(z) = B(\alpha,z)^{-1}\,\tau R_0(z). \tag{4.3}$$

从现在起，我们将 $B(\alpha, z)$ 视为关于 $\mathbb{C}^2$ 的标准正交基 $\{e_1, e_2\}$ 的一个 2×2 矩阵。下面的引理给出了 H_α 和 H_0的预解式的矩阵元之间的关系。

引理 4.1。 对于 $v, w \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 以及 $\operatorname{Im} z \neq 0$，我们有

$$\langle R_\alpha(z)v,w\rangle = \langle R_0(z)v,w\rangle - \frac{\alpha}{\det\, B(\alpha,z)}\sum_{j,k=1}^{N}\tilde{b}_{jk}(\alpha,z)\langle R_0(z)v,u_j\rangle\langle R_0(z)u_k,w\rangle \tag{4.4}$$

其中 $\tilde{b}_{jk}(\alpha, z)$ 表示与 $B(\alpha, z)$相关联的余子式矩阵的第(j, k)个元素。

证明。 根据预解式恒等式，我们得到

$$\langle R_\alpha(z)v,w\rangle = \langle R_0(z)v,w\rangle - \alpha\sum_{j=1}^{N}\langle R_0(z)v,u_j\rangle\langle R_\alpha(z)u_j,w\rangle. \tag{4.5}$$

为了计算 $\langle R_\alpha(z)u_j, w\rangle$，由（4.3）以及 $B(\alpha,z)^* = B(\alpha,z)$，我们有

$$\langle R_\alpha(z)w,u_j\rangle = \langle \tau R_\alpha(z)w,e_j\rangle = \langle R_0(z)w,\tau^*B(\alpha,\overline{z})^{-1}e_j\rangle.$$

Now,

$$\tau^* B(\alpha,\overline{z})^{-1} e_j = \frac{1}{\det\, B(\alpha,\overline{z})}\tau^*(\tilde{b}_{j1}(\alpha,\overline{z}),\ldots,\tilde{b}_{jN}(\alpha,\overline{z}))^\top = \frac{1}{\det\, B(\alpha,\overline{z})}\sum_{k=1}^{N}\tilde{b}_{jk}(\alpha,\overline{z})u_k.$$

因此,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\langle R_\alpha(z)w,u_j\rangle = \frac{1}{\det\, B(\alpha,z)}\sum_{k=1}^{N}\overline{\tilde{b}_{jk}(\alpha,\overline{z})}\langle R_0(\lambda\pm i0)w,u_k\rangle$$

这意味着

$$\langle R_\alpha(z)u_j,w\rangle = \overline{\langle R_\alpha(\overline{z})w,u_j\rangle} = \frac{1}{\det\, B(\alpha,z)}\sum_{k=1}^{N}\tilde{b}_{jk}(\alpha,z)\langle R_0(z)u_k,w\rangle. \tag{4.6}$$

将（4.6）代入（4.5），可得（4.4）。 □

注意，由于 u_1，$u_2\in\mathcal{E}$，由（3.2）可知

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\langle R_0(\lambda\pm i\epsilon)u_j,u_k\rangle = \gamma(\eta_{jk},\lambda)\pm i\pi\,\eta_{jk}(\lambda),\qquad j,k\in\{1,2\} \tag{4.7}$$

u在 λ 的紧集上一致。因此，对于 $\lambda\in\mathbb{R}$，我们定义 $B(\alpha,\lambda\pm i0)\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ b y

$$B(\alpha,\lambda\pm i0) := \lim_{\epsilon\to 0^+} B(\alpha,\lambda\pm i\epsilon)$$

其中，极限是在 $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ 上的强算子拓扑中取的。

此处强极限等价于所有矩阵元关于标准基的收敛，这由（4.7）以及 B（α，$\lambda+i0$）允许如下分解

$$B(\alpha,\lambda+i0) = C(\alpha,\lambda)+iD(\alpha,\lambda),$$

其中 C（α，λ）与 D（α，λ）为厄米矩阵，其元素为

$$c_{jk}(\alpha,\lambda) = \delta_{jk}+\alpha\,\gamma(\eta_{kj},\lambda),\quad d_{jk}(\alpha,\lambda) = \alpha\pi\,\eta_{kj}(\lambda). \tag{4.8}$$

由于当$\operatorname{Im} z\neq 0$时，$B$（$\alpha$，$z$）$^*=B$（$\alpha$，$z$），因此

$$B(\alpha,\lambda-i0) = B(\alpha,\lambda+i0)^* = C(\alpha,\lambda)-iD(\alpha,\lambda).$$

注意，若 v，$w\in\mathcal{E}$，则由引理4.1 以及（3.2），

$$\langle R_\alpha(\lambda\pm i0)v,w\rangle := \lim_{\epsilon\to 0^+}\langle R_\alpha(\lambda\pm i\epsilon)v,w\rangle$$

~ ~存在当且仅当 B（α，$\lambda\pm i0$）可逆。设 b_{jk}（α，$\lambda\pm i0$） $\tilde{c}_{jk}$（α，λ）与 d_{jk}（α，λ）分别表示对应于 B（α，$\lambda\pm i0$）、C（α，λ）以及D（α，λ）的余因子矩阵的系数。

定义 $F(\alpha,\lambda) := \det(B(\alpha,\lambda+i0)) = F_1(\alpha,\lambda)+iF_2(\alpha,\lambda)$，其中

$$F_1(\alpha,\lambda) = (1+\alpha\gamma(\eta_{11},\lambda))\,(1+\alpha\gamma(\eta_{22},\lambda))-\alpha^2\,|\gamma(\eta_{12},\lambda)|^2-\alpha^2\pi^2(\eta_{11}(\lambda)\eta_{22}(\lambda)-|\eta_{12}(\lambda)|^2), \tag{4.9}$$

and

$$F_2(\alpha,\lambda) = \alpha\pi\sum_{j,k=1}^{2}\tilde{c}_{jk}(\alpha,\lambda)\eta_{kj}(\lambda). \tag{4.10}$$

注意，根据 Birman–Schwinger 原理（例如参见 [4, 第 1.2 节8]）， H_α 存在离散特征值 $\mu<0$ 当且仅当 0 是 $B(\alpha,\ \mu+i0$ 的特征值。下面的结果给出了 $\mu\geq 0$ 成为 H_α 的嵌入特征值的充要条件。证明沿用了 [1, 命题 1017]中的论证。

定理 4.2。 $\mu\geq 0$ 是 H_α 的特征值，当且仅当0 是 $B(\alpha,\mu+i0)$的特征值。此外，特征子空间 $Ker(B(\alpha,\mu+i0))$ 与 $Ker(H_\alpha-\mu)$线性同构。

证明。 首先假设 $\mu>0$. 设 $\xi\in \mathrm{Ker}(B(\alpha,\mu+i0))$。 那么，由（3.2），

$$\begin{aligned}||(\tau^*\xi)_\mu||^2 &= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathrm{Im}\langle R_0(\mu+i\epsilon)\tau^*\xi,\tau^*\xi\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\mathrm{Im}\langle \tau R_0(\mu+i\epsilon)\tau^*\xi,\xi\rangle\\ &= \frac{1}{\alpha\pi}\mathrm{Im}\langle (B(\alpha,\mu+i0)-I)\xi,\xi\rangle = \frac{1}{\alpha\pi}\mathrm{Im}\langle -\xi,\xi\rangle = 0.\end{aligned}$$

因此（$\tau^*\xi$）$_\mu=0$。由于 $\tau^*\xi\in\mathcal{E}$，由引理 3.1(a) 可得 $\Phi_{\tau^*\xi,\ \mu}\in\mathcal{E}$因此 $\Phi_{\tau^*\xi,\ \mu}\in\mathcal{D}($ H_α)。此外，由引理 3.1 (b)，有

$$R_0(\mu+i\epsilon)\tau^*\xi\to\Phi_{\tau^*\xi,\mu}\quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ as } \epsilon\to 0^+,$$

这意味着

$$\tau R_0(\mu+i\epsilon)\tau^*\xi\to\tau\Phi_{\tau^*\xi,\mu}.$$

因此 $\tau\Phi_{\tau^*\xi,\ \mu}=\frac{1}{\alpha}$(B(α, $\mu+i0$) $-I)\xi=-\frac{1}{\alpha}\xi$因此

$$(H_\alpha-\mu)\Phi_{\tau^*\xi,\mu}=(H_0-\mu)\Phi_{\tau^*\xi,\mu}+\alpha V\Phi_{\tau^*\xi,\mu}=\tau^*\xi+\alpha\tau^*\tau\Phi_{\tau^*\xi,\mu}=0.$$

反过来，假设 $f\in$ Ker($H_\alpha-\mu$)。那么

$$(\lambda-\mu)f_\lambda+\alpha(Vf)_\lambda=0\quad \text{for a.e. } \lambda\in(0,\infty),$$

这意味着

$$f_\lambda=-\frac{\alpha(Vf)_\lambda}{\lambda-\mu}\quad \text{for a.e. } \lambda\in(0,\infty). \tag{4.11}$$

由于 $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$，函数 $\lambda\mapsto f_\lambda$属于 $L^2((0,\infty)\ L^2(S^2))$，这意味着 $(Vf)_\mu=0$。由引理 3.1(b) 和 (4.11)，

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}R_0(\mu+i\epsilon)Vf=\Phi_{Vf,\mu}=-\frac{1}{\alpha}f.$$

这意味着 $\tau f\in$Ker($B(\alpha,\mu+i0)$)。 最后，注意到

$$T:\mathrm{Ker}(B(\alpha,\mu+i0))\to\mathrm{Ker}(H_\alpha-\mu),\quad T\xi=\Phi_{\tau^*\xi,\mu},$$

是一个线性同构，且 $T^{-1}f=-\alpha\tau f$.

接下来考虑 $\mu=0$ 的情形。论证过程与上述相同，注意到由于 $\tau^*\xi\in\mathcal{E}$，有 $(\tau^*\xi)$ $_0=0$，因此 $\Phi_{\tau^*\xi,\ 0}\in\mathcal{E}$。类似地，由于 $u_1,\ u_2\in\mathcal{E}$，可得 $Vf\in\mathcal{E}$，因而 $(Vf)_0=0$。证明的其余部分同理可得。证明完毕。

□

推论 4.3. 假设对某个 $\alpha_0\in\mathbb{R}$ 和 $\lambda_0\geq 0$，有 $B(\alpha_0,\lambda_0+i0)=0$。则：

(a) λ_0 是 H_{α_0} 的重数为二的特征值，且相应的特征空间由 $\phi_1 = \Phi_{u_1,\lambda_0}$ 和 $\phi_2 = \Phi_{u_2,\lambda_0}$生成。

(b) 特征函数满足

$$\langle u_j, \phi_k \rangle = -\frac{\delta_{jk}}{\alpha_0}, \qquad j,k \in \{1,2\}.$$

证明。 根据假设，我们有

$$u_{1,\lambda_0} = u_{2,\lambda_0} = \delta_{jk} + \alpha_0\, \gamma(\eta_{jk}, \lambda_0) = 0.$$

因此，(a) 部分直接由定理 4.2 得出。此外，由于 $\gamma(\eta_{jk}, \lambda_0) = \langle u_j, \phi_k \rangle$ 当 $j,k \in \{1,2\}$ 时，(b) 部分立即得出。 □

注 4.4。 注意，若 $\alpha_0 > 0$，则 H_{α_0} 是严格正算子，因此0 不可能是阈值特征值。因此，若要使 $\lambda_0 = 0$ 成为可能的阈值特征值，必须满足 $\alpha_0 < 0$。

海森矩阵及其行列式的计算：为研究H_α 在H_{α_0}的退化特征值 λ_0 附近的谱行为，我们分析 $F_1(\alpha,\cdot)$ 的零点。根据引理 3.1(c)，$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(\alpha_0,\lambda_0) = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}(\alpha_0,\lambda_0) = 0$，因此我们进一步考察点 (α_0,λ_0) 处的海森矩阵 D^2F_1。 再次根据引理 3.1(c)，可得

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \lambda^2}(\alpha_0,\lambda_0) = 2\alpha_0^2\big(\|\phi_1\|^2\|\phi_2\|^2 - |\langle \phi_1,\phi_2\rangle|^2\big), \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2}(\alpha_0,\lambda_0) = \frac{2}{\alpha_0^2},\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha\,\partial \lambda}(\alpha_0,\lambda_0) = -\big(\|\phi_1\|^2 + \|\phi_2\|^2\big). \tag{4.13}$$

Thu当海森矩阵 D^2F_1 在点 $(\alpha_0,\ \lambda_0)$ 处的行列式非零时，它是可逆的 t

$$\det\big(D^2F_1(\alpha_0,\lambda_0)\big) = -\big(\|\phi_1\|^2 - \|\phi_2\|^2\big)^2 - 4\,|\langle \phi_1,\phi_2\rangle|^2 \tag{4.14}$$

在下面的引理中，我们讨论 $F_1(\alpha,\ \cdot)$ 在 $\alpha = \alpha_0.$ 附近的零点

引理 4.5。 假设 $B(\alpha_0,\lambda_0 + i0) = 0$ 且 $\det\big(D^2F_1(\alpha_0,\lambda_0)\big) < 0$，其中 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda_0 \geq 0$。那么，存在分别以 λ_0 和 α_0 为中心的开区间 J 和 I，以及两个不同的光滑函数

$$\lambda_j : I \to J, \quad j = 1,2,$$

使得 $\lambda_j(\alpha_0) = \lambda_0$ 且 $F_1(\alpha,\lambda_j(\alpha)) = 0$ 对所有满足以下条件的 $\alpha \in I$ 都成立

$$\lambda_j'(\alpha_0) = \frac{\|\phi_1\|^2 + \|\phi_2\|^2 + (-1)^{j+1}d}{2\alpha_0^2\big(\|\phi_1\|^2\|\phi_2\|^2 - |\langle \phi_1,\phi_2\rangle|^2\big)}, \tag{4.15}$$

其中 $d = \sqrt{-\det(D^2F_1(\alpha_0,\lambda_0))}$。如果 $\lambda_0 > 0$，则区间 J 可以选在 $(0,\ \infty)$ 内，并且此后假设 J 满足这一条件。

注 4.6. 容易验证，对 $j = 1$、2，有 $\lambda_j'(\alpha_0) > 0$，这利用了 ϕ_1、ϕ_2并非线性相关这一事实，因而 λ_1、λ_2 在 α_0 的某个邻域内是递增函数。

引理 4.5 的证明。由于 ϕ_1 与 ϕ_2 线性无关，由 (4.12) 可知，$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \lambda^2}(\alpha_0,\lambda_0) \neq 0$。此外，由于 $\det(D^2F_1)(\alpha_0,\lambda_0) < 0$，应用莫尔斯引理（推论 A.2），存在 α_0 附近的开区间 I 以及 λ_0 附近的 J，还有两个不同的光滑函数 $\lambda_j : I \to J$，使得 $\lambda_j(\alpha_0) = \lambda_0$ 且

$$F_1(\alpha, \lambda_j(\alpha)) = 0 \quad \text{for all } \alpha \in I$$

which 证明了 (a) 部分。对 $F_1(\alpha,\lambda_j(\alpha)) = 0$ 关于 α 求二阶导数，我们得到 n

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2}(\alpha,\lambda_j(\alpha))+2\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \lambda}(\alpha,\lambda_j(\alpha))\lambda_j'(\alpha)+\frac{\partial^2 F_1}{\partial \lambda^2}(\alpha,\lambda_j(\alpha))\lambda_j'(\alpha)^2+\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(\alpha,\lambda_j(\alpha))\lambda_j''(\alpha)=0.$$

由于 $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(\alpha_0,\lambda_0) = 0$，将 $\alpha = \alpha_0$ 代入上式可得

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2}(\alpha_0,\lambda_0) + 2\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \lambda}(\alpha_0,\lambda_0)\lambda_j'(\alpha_0) + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \lambda^2}(\alpha_0,\lambda_0)\lambda_j'(\alpha_0)^2 = 0. \tag{4.16}$$

求解4.16中的二次方程$\lambda_j'(\alpha_0)$，得到4.15。 □

接下来，在引理 4.5 的假设下，我们分析 H_α 在 $\lambda_0 > 0$ 附近的谱行为。根据 $F_2(\alpha,\lambda_j(\alpha))$ 是否为零，我们将得到简单嵌入特征值的存在，或谱的绝对连续性，具体如以下定理所述。

阈值特征值情形 $\lambda_0 = 0$ 将在定理 4.8 中讨论。

定理 4.7. 假设引理 4.5 中的假设成立，令 I, J 和 $\lambda_j(\alpha)$，j =1,2如该引理中所述，并假设 $\lambda_0 > 0$. 则以下结论成立：

(a) 对于 $j = 1, 2$，若对所有 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$ 都有 $F_2(\alpha, \lambda_j(\alpha)) \neq 0$，则对于每个 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$，$H_\alpha$ 在 J 中的谱是纯绝对连续的，而 H_{α_0} 在 $J \setminus \{\lambda_0\}$ 中的谱是绝对连续的。*(b)* 若存在 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$ 和 $j \in \{1, 2\}$ 使得 $F_2(\alpha, \lambda_j(\alpha)) = 0$，则 $\lambda_j(\alpha)$ 是 H_α 的单特征值，其对应的特征向量为 Φ_{v_j}，$\lambda_j(\alpha)$，其中 $v_j = u_2(\lambda_j(\alpha))u_1 - u_1(\lambda_j(\alpha))u_2$。

证明。假设对于所有 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$ 和 $j = 1, 2$，$F_2(\alpha, \lambda_j(\alpha)) \neq 0$。要证明 H_α 在 J 中的谱是绝对连续的，注意到由于 $\mathcal{E}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中稠密，根据 [13], 中的推论 3.28, 只需证明对于所有 $\lambda \in J$ 和 $v, w \in \mathcal{E}$，$\lim_{\epsilon \to 0^+} \langle R_\alpha(\lambda + i\epsilon)v, w\rangle$ 存在。利用引理 4.1 和 (3.2)，这归结为证明

$$F(\alpha, \lambda) \neq 0, \qquad \forall\, \lambda \in J,\ \alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}.$$

根据引理 4.5，对于 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$,

$$F_1(\alpha, \lambda) \neq 0 \quad \text{for } \lambda \in J \setminus \{\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)\},$$

这意味着

$$F(\alpha, \lambda) \neq 0 \quad \text{for } \lambda \in J \setminus \{\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)\}.$$

此外，由于

$$F_2(\alpha, \lambda_j(\alpha)) \neq 0, \quad \forall\, \alpha \in I \setminus \{\alpha_0\},\ j = 1, 2,$$

因此，对所有 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$， H_α 的谱在 J. 中都是纯绝对连续的

最后，注意到 $F_1(\alpha_0,\ \lambda) \neq 0$ 对 $\lambda \in J \setminus \{\lambda_0\}$成立。这意味着算子 H_{α_0}在 $J \setminus \{\lambda_0\}$ 中绝对连续。至此，(a) 部分的证明完成。

为证明 (b) 部分，注意若 $F_2(\alpha,\ \lambda_j(\alpha)) = 0$，则 $F(\alpha,\ \lambda_j(\alpha)) = 0$，因此秩$(B(\alpha,$ $\lambda_j(\alpha) + i0)) = 1$。现在由定理 4.2即可得出结论。

□

定理 4.8 (**阈值情形**)。 假设引理4。5的假设成立，并假设 $\lambda_0 = 0.$ 。则以下陈述成立：

(a) 对于 $\alpha < \alpha_0$， $\lambda_1(\alpha)$ 和 $\lambda_2(\alpha)$ 是 H_α. 的离散简单特征值。*(b)* 对于 $\alpha > \alpha_0$， $\lambda_1(\alpha)$ 和 $\lambda_2(\alpha)$ 均为正。对于 $j = 1$，若 2 $F_2(\alpha, \lambda_j(\alpha)) \neq 0$对所有 $\alpha > \alpha_0$ 成立，则 H_α 在 $J \cap [0, \infty)$ 中的谱是绝对连续的。此外， H_{α_0} 在 $J \cap (0, \infty)$ 中的谱是绝对连续的。*(c)* 若存在 $\alpha > \alpha_0$ 使得 $F_2(\alpha, \lambda_j(\alpha)) = 0$ 对某个 $j \in \{1, 2\}$ 成立，则$\lambda_j(\alpha)$ 是 H_α 的单特征值，其对应的特征向量为 $\Phi_{v_j, \lambda_j(\alpha)}$，其中$v_j = u_2(\lambda_j(\alpha))$ $u_1 - u_1(\lambda_j(\alpha))u_2$。

证明。由于 $\lambda_j'(\alpha_0) > 0$，我们有 $\lambda_j(\alpha) < 0$，对于 $j = 1$、2 以及所有 $\alpha \in I$。此外，由于 $F_2(\alpha, \lambda) = 0$，对于 $\lambda < 0$，根据 Birman–Schwinger 原理可知， $\lambda_j(\alpha)$ $j = 1$、2 是 H_α 的单重离散特征值，对于所有满足 $\alpha \in I$ 的 $\alpha < \alpha_0$，这就证明了 (a)。为证明 (b)，注意到 $\lambda_j(\alpha) > 0$，对于 $j = 1$ 以及所有满足 $\alpha \in I$ 的 $\alpha > \alpha_0$。随后论证方式与定理 4.7 (a) 相同。(c) 的证明与定理 4.7 (b) 类似。□

5. The model

根据上一节的结果，尤其是推论 4.3、引理 4.5和定理 4.7，我们描述该模型（见下文的定义）

$$H_\alpha = H_0 + \alpha V \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^3)$$

使得 λ_0 是H_{α_0} 的二重嵌入特征值，其特征空间由 $\{\phi_1, \phi_2\}$ 张成，其中 $\phi_1 = \Phi_{u_1,\ \lambda_0}$， $\phi_2 = \Phi_{u_2,\ \lambda_0}$。对于 $\alpha \neq \alpha_0$， H_α 在 λ_0. 附近的一个区间内是纯绝对连续的。在接下来的章节中，我们将通过分析当 $\alpha \to \alpha_0$.时谱密度、散射振幅和时间延迟的渐近行为，研究嵌入特征值 λ_0 附近的共振现象

定义 5.1 （模型）。设 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda_0 > 0$ 为固定值。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，考虑算子

$$H_\alpha = H_0 + \alpha V \quad on\ L^2(\mathbb{R}^3) \tag{5.1}$$

且 u_j、 $j = 1$、2 满足以下条件：

(a) u_1、 $u_2 \in \mathcal{E}$ 和 $u_1 \perp u_2$。*(b)* $u_{1,\ \lambda_0} = u_{2,\ \lambda_0} = 0$、 $\delta_{jk} + \alpha_0\gamma\ (\eta_{jk}$、 $\lambda_0) = 0$ （等价地， $B\ (\alpha_0$、 $\lambda_0 + i0)\ = 0)$ 。*(c)* $\langle\phi_1$、 $\phi_2\rangle \neq 0$ 或 $\|\phi_1\| \neq \|\phi_2\|$ （等价地，行列式 $\det\left(D^2F_1\ (\alpha_0$、 $\lambda_0)\ \right)$ <0）。

(*d*) 函数 $F_2(\alpha,\ \lambda_j(\alpha)) \neq 0$ 对所有 $\alpha \in I$ 以及对于 $j=1,\ 2$ 其中 I 和 $\lambda_j(\alpha)$ 如引理 4。5中所得到。

不失一般性，我们假设 $||\phi_1|| \leq ||\phi_2||$；否则交换 u_1 和 u_2. 即可得到这一情形

算子 H_{α_0} 有一个嵌入特征值 λ_0，其特征空间为 span$\{\phi_1,\phi_2\}$。为了分析 H_α 在嵌入特征值 $\lambda_0 = \lambda(\alpha_0)$, 附近沿路径 $\lambda_1(\alpha)$ 和 $\lambda_2(\alpha)$ 的共振现象，我们将为该特征空间选取一组适当的标准正交基 $\{\psi_1,\psi_2\}$。

下一个引理给出了 $\lambda_j'(\alpha_0)$ 的界。其证明见附录。

引理 5.2. 我们有

$$\lambda_1'(\alpha_0) \geq \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_j||^2},\ \lambda_2'(\alpha_0) \leq \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_j||^2} \quad for\ j=1,2. \tag{5.2}$$

and

$$\lambda_1'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_1||^2},\ \lambda_2'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_2||^2} \iff \phi_1 \perp \phi_2 \tag{5.3}$$

其中 $\lambda_j(\alpha)$ 按照引理 4.5. 中的结果取值。

在 λ_0 处构造典范特征基：定义

$$\psi_1 = a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2, \quad \text{and} \quad \psi_2 = a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2, \tag{5.4}$$

其中

$$a_{11} = \sqrt{\frac{-1+\alpha_0^2\|\phi_2\|_2^2\lambda_1'(\alpha_0)}{d}}, \qquad a_{12} = -q(\langle\phi_1,\phi_2\rangle)\sqrt{\frac{-1+\alpha_0^2\|\phi_1\|_2^2\lambda_1'(\alpha_0)}{d}},$$

$$a_{21} = \sqrt{\frac{1-\alpha_0^2\|\phi_2\|_2^2\lambda_2'(\alpha_0)}{d}}, \qquad a_{22} = q(\langle\phi_1,\phi_2\rangle)\sqrt{\frac{1-\alpha_0^2\|\phi_1\|_2^2\lambda_2'(\alpha_0)}{d}}$$

且 $q(z) = z/|z|$ 表示 z 的相位因子, 当 $z=0.$ 时定义为 1。为简化记号，我们将 $(\phi_j)_\lambda$ 记为 $\phi_{j,\lambda}$ 并将 $(\psi_j)_\lambda$ 记为 $\psi_{j,\lambda}$ 其中 $j=1,2$。

在下一个引理中，我们推导系数 a_{jk} 之间的若干关系，并证明 $\{\psi_1,\psi_2\}$ 是一个标准正交集。证明见附录。

引理 5.3。 *(a)* 对于 $j=1,2,$

$$a_{j1}a_{j2} = \frac{(-1)^j}{d}\,\alpha_0^2\langle\phi_1,\phi_2\rangle\lambda_j'(\alpha_0).$$

(b) 对于 $j,k\in\{1,2\}$,

$$\overline{a_{j1}}a_{k1} + \overline{a_{j2}}a_{k2} = \delta_{jk}\alpha_0^2\lambda_j'(\alpha_0).$$

(c) $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$ 和 $\psi_1 \perp \psi_2$.

6. Spectral density and its asymptotic behaviour

在我们的模型中，由于 H_α 在 J 上对 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$是纯绝对连续的，根据 Stone公式（4.1），与测度 $\langle E_\alpha(\mathrm{d}\lambda)v, w\rangle$（对于 $v, w \in L^2(\mathbb{R}^3)$）相关的谱密度 $\rho^{v,\,w}(\alpha,\ \cdot)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\rho^{v,w}(\alpha,\lambda) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\langle E_\alpha(\mathrm{d}\lambda)v, w\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\langle R_\alpha(\lambda+i0)v, w\rangle - \langle R_\alpha(\lambda-i0)v, w\rangle\right)\end{aligned} \tag{6.1}$$

对于几乎处处的 $\lambda \in J$. 为简化记号，记 $\rho^{v,\,v}$ 为 ρ^v. 下文中，对于 $v,\ w \in \mathcal{E}$ 我们将研究谱密度 $\rho^{v,\,w}(\alpha,\ \cdot)$ 在嵌入特征值 λ_0 附近关于柯西分布的渐近行为 $\alpha \to \alpha_0$，这将导致在 λ_0 附近出现谱集中，并产生相应的时间衰减行为。

直接应用引理 3.1可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(c_{jk}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\right)\big|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{\delta_{jk}}{\alpha_0} + \alpha_0\langle\phi_k,\phi_j\rangle\lambda_l'(\alpha_0), \quad j,k,l \in \{1,2\}. \tag{6.2}$$

对于 $\alpha \in J \setminus \{\alpha_0\}$ 和 $l = 1,\ 2$，定义

$$\kappa_l(\alpha) := \frac{F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\alpha\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))||\phi_l||^2}. \tag{6.3}$$

由（5.3）和（6.2），对于 $l = 1,\ 2$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\right)\big|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0. \tag{6.4}$$

于是，对于 $l = 1,\ 2$，有 $\kappa_l(\alpha) = O(|\alpha-\alpha_0|^2)$，其中 $\alpha \to \alpha_0$。此外，若 $u_{j,\ \lambda}$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 处的消失阶数为 n，对于 $j = 1,\ 2$，则

$$\kappa_l(\alpha) = O(|\alpha-\alpha_0|^{2n}), \qquad l = 1, 2. \tag{6.5}$$

对于 $\alpha \in J,\ \ l = 1,\ 2$，我们定义 $\lambda_l^h(\alpha) = \lambda_l(\alpha) + h\,\kappa_l(\alpha)$。

在证明谱密度的渐近性质之前，我们先证明以下引理，该引理将在证明过程中及后文中使用。

引理 6.1。对于任意固定的 $h \in \mathbb{R}$ 以及 j、k、$l \in \{1,2\}$，有

(a)

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\tilde{c}_{jk}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))} = \frac{\overline{a_{lj}}a_{lk}}{|a_{ll}|^2}.$$

(b)

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_2(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\kappa_l(\alpha)} = \alpha_0||\phi_l||^2. \tag{6.6}$$

(c)

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_1(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\kappa_l(\alpha)} = h\frac{\alpha_0}{|a_{ll}|^2}. \tag{6.7}$$

此外，上述所有极限关于 h 在紧集上一致。

证明。 （a）的证明由（6.2）和中值定理可得。为证明（b），首先注意到

$$\left|\frac{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}-1\right| \le \left|\frac{1}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}\int_{\lambda_l(\alpha)}^{\lambda_l^h(\alpha)}\tilde{c}'_{ll}(\alpha,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right| \le |h|\frac{\kappa_l(\alpha)\sup_{\alpha\in I,\lambda\in\mathbb{R}}|\tilde{c}'_{ll}(\alpha,\lambda)|}{|\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))|}.$$

利用（6.4）以及 $\kappa_l(\alpha) = O(|\alpha-\alpha_0|^2)$ 这一事实，我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}=1 \qquad \text{uniformly for } h \text{ in compact sets.} \tag{6.8}$$

由（6.3），我们得到

$$\frac{F_2(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\kappa_l(\alpha)}=\frac{F_2(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))-F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\kappa_l(\alpha)}+\alpha||\phi_l||^2. \tag{6.9}$$

Now,

$$\begin{aligned}&\left|F_2(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))-F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha))-h\kappa_l(\alpha)\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\right| \\ &=\left|\int_{\lambda_l(\alpha)}^{\lambda_l^h(\alpha)}\left(\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda)-\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\right)\mathrm{d}\lambda\right| \le h^2\kappa_l(\alpha)^2\left|\left|\frac{\partial^2 F_2}{\partial\lambda^2}\right|\right|_\infty.\end{aligned} \tag{6.10}$$

由于 $\kappa_l(\alpha) = O(|\alpha-\alpha_0|^2)$，且当 α 趋于 α_0 时，$\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\ \lambda_l(\alpha)) = O(|\alpha-\alpha_0|^2)$，因此

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_2(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))-F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\kappa_l(\alpha)}=\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{h\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}=0. \tag{6.11}$$

结合（6.8）、（6.9）和（6.11），得到（6.6）。由（6.10）和（6.8）可知，（6.6）中的极限对于 h 在紧集上是一致的。由于 $F_1(\alpha,\ \lambda_l(\alpha)) = 0$，通过类似于（6.10）中的估计，我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_1(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\kappa_l(\alpha)}=\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_1(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))-F_1(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\kappa_l(\alpha)}=\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{h\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))} \tag{6.12}$$

对于 h 在紧集上一致成立。现在，利用 (a) 部分，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}&=\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{c_{11}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}\frac{\partial c_{22}}{\partial\lambda}(\alpha_0,\lambda_0)+\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{c_{22}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}\frac{\partial c_{11}}{\partial\lambda}(\alpha_0,\lambda_0)\\ &\quad-2\,\mathrm{Re}\left[\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{c_{21}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}\frac{\partial\overline{c_{21}}}{\partial\lambda}(\alpha_0,\lambda_0)\right]\\ &=\alpha_0||\phi_2||^2\frac{|a_{l2}|^2}{|a_{ll}|^2}+\alpha_0||\phi_1||^2\frac{|a_{l1}|^2}{|a_{ll}|^2}+2\alpha_0\,\mathrm{Re}\left[\overline{\langle\phi_1,\phi_2\rangle}\frac{\overline{a_{l1}}a_{l2}}{|a_{ll}|^2}\right]\\ &=\alpha_0\frac{|a_{l1}|^2||\phi_1||^2+|a_{l2}|^2||\phi_2||^2+2\,\mathrm{Re}[\overline{\langle\phi_1,\phi_2\rangle}\overline{a_{l1}}a_{l2}]}{|a_{ll}|^2}.\end{aligned}$$

由于

$$1=||\psi_l||^2=|a_{l1}|^2||\phi_1||^2+|a_{l2}|^2||\phi_2||^2+2\,\mathrm{Re}[\overline{\langle\phi_1,\phi_2\rangle}\overline{a_{l1}}a_{l2}],$$

我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}=\frac{\alpha_0}{|a_{ll}|^2}. \tag{6.13}$$

那么，将（c）代入（6.13）即可得到（6.12）。 □

以下定理描述了经过适当的能量平移和缩放 λ后，在 α_0附近，的谱密度H_α 的渐近行为，并以柯西分布来刻画。这是本文的主要结果之一。由此，我们在第7节中得到了关于谱集中和时间衰减的结果。

定理 6.2。 对于任意固定的 $h\in\mathbb{R}$ 和 v， $w\in\mathcal{E}$，有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\kappa_l(\alpha)\rho^{v,w}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))=\frac{\langle P_{\psi_l}v,w\rangle}{\pi}\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h^2+||a_{ll}\phi_l||^4} \tag{6.14}$$

其中， P_{ψ_l} 表示到由 ψ_l 张成的子空间上的正交投影。特别地，对于 H_{α_0} 的特征向量 ψ_1 和 ψ_2 ，有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\kappa_l(\alpha)\rho^{\psi_j,\psi_k}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))=\frac{\delta_{lj}\delta_{lk}}{\pi}\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h^2+||a_{ll}\phi_l||^4}. \tag{6.15}$$

此外，上述所有极限关于紧集中的 h 都是一致的。

证明。 由引理 4.1，对任意 $\lambda\in J$ 和 $\alpha\in I\setminus\{\alpha_0\}$，有

$$\begin{aligned}&\kappa_l(\alpha)\langle R_\alpha(\lambda_l^h(\alpha)+i0)v,w\rangle\\&=\kappa_l(\alpha)\langle R_0(\lambda_l^h(\alpha)+i0)v,w\rangle\\&\quad-\alpha\frac{\kappa_l(\alpha)\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{F(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\tilde{b}_{jk}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha)+i0)}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}\langle R_0(\lambda_l^h(\alpha)+i0)v,u_j\rangle\langle R_0(\lambda_l^h(\alpha)+i0)u_k,w\rangle.\end{aligned} \tag{6.16}$$

由于 $u_{j,\ \lambda_0}=0$ 对任意 j，由（3.2），可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle R_0(\lambda_l^h(\alpha)+i0)v,u_j\rangle=\gamma(\eta_{v,u_j},\lambda_0)=\langle v,\phi_j\rangle \tag{6.17}$$

and

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle R_0(\lambda_l^h(\alpha)+i0)u_k,w\rangle=\gamma(\eta_{u_k,w},\lambda_0)=\langle\phi_k,w\rangle. \tag{6.18}$$

应用引理 6.1(b) 和 (c)，还可得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\kappa_l(\alpha)}=\frac{\alpha_0(h+i||a_{ll}\phi_l||^2)}{|a_{ll}|^2}. \tag{6.19}$$

此外，由引理 6.1(a)，可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\tilde{b}_{jk}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha)+i0)}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}=\frac{\overline{a_{lj}}a_{lk}}{|a_{ll}|^2}.$$

在（ $\alpha \to \alpha_0$ 6.16）中取极限，并代入上述极限以及（6.17）、（6.18）和（6.19），我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\alpha_0} \kappa_l(\alpha)\langle R_\alpha(\lambda_l^h(\alpha)+i0)v,w\rangle &= -\frac{1}{h+i||a_{ll}\phi_l||^2}\sum_{j,k=1}^{2}\overline{a_{lj}}a_{lk}\langle v,\phi_j\rangle\langle\phi_k,w\rangle \\ &= -\frac{\langle v,\psi_l\rangle\langle\psi_l,w\rangle}{h+i} = -\frac{\langle P_{\psi_l}v,w\rangle}{h+i||a_{ll}\phi_l||^2}.\end{aligned} \tag{6.20}$$

类似地，我们有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \kappa(\alpha)\langle R_\alpha(\lambda_l^h(\alpha)-i0)v,w\rangle = -\frac{\langle P_{\psi_l}v,w\rangle}{h-i||a_{ll}\phi_l||^2}. \tag{6.21}$$

最后，利用（6.1）、（6.20）和（6.21），可得（6.14）。由引理 6.1以及 $\gamma(\eta_{v,\ u_j,\ \cdot})$ 和 $\gamma(\eta_{u_j,\ w,\ \cdot})$ 对任意 j 的连续性，上述所有极限均如所述一致收敛。□

7. Spectral concentration, time decay and sojourn time

7.1. **谱集中。** 接下来，我们考察 H_α 在 λ_0 附近的 $\alpha \to \alpha_0$. 谱集中现象。我们对 [7] 中给出的谱集中的定义作如下修改：额外要求集中集收敛到所讨论的特征值。

定义 7.1（谱集中）。 设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ 是一族自伴算子，其对应的谱测度为 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$，且 λ_0 是 T_{α_0}. 的一个特征值。若存在一族博雷尔集 $\{\mathscr{I}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$，使得 $\inf \mathscr{I}_\alpha$ 和 $\sup \mathscr{I}_\alpha$ 均收敛到 λ_0，并且谱投影 E_α（$\mathscr{I}_\alpha$）$\to E_{\alpha_0}$（$\{\lambda_0\}$）当 $\alpha \to \alpha_0$. 时强收敛，则称 T_α 的谱在 λ_0 附近随 $\alpha \to \alpha_0$ 集中

此外，若 $p > 0$ *if* $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{|\mathscr{I}_\alpha|}{|\alpha-\alpha_0|^p} = 0$，则称 $\{T_\alpha\}$ 的谱在 λ_0. 附近以 p 阶集中

引理 7.2。 对于 $l = 1,\ 2$，设 $\{\mathscr{I}_{l,\alpha}\}$ 是一族关于 $\lambda_l(\alpha)$ 对称的开区间，使得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{|\mathscr{I}_{l,\alpha}|}{2\kappa_l(\alpha)} = \infty, \qquad |\mathscr{I}_{l,\alpha}| = o(|\alpha-\alpha_0|) \quad as\ \alpha\to\alpha_0.$$

Then

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_j,\psi_k\rangle = \delta_{jk}\,\delta_{jl}, \qquad j,k,l\in\{1,2\}.$$

证明。 由于 $\lambda_1'(\alpha_0) \neq \lambda_2'(\alpha_0)$，可知对于所有充分接近 α_0 的 α，$\lambda_1(\alpha) \neq \lambda_2(\alpha)$，其中 $\alpha \neq \alpha_0$。此外，由于

$$|\mathscr{I}_{1,\alpha}| = |\mathscr{I}_{2,\alpha}| = o(|\alpha-\alpha_0|) \quad \text{and} \quad |\lambda_1(\alpha)-\lambda_2(\alpha)| = O(|\alpha-\alpha_0|) \quad \text{as } \alpha\to\alpha_0,$$

当 α 充分接近 α_0 时，区间 $\mathscr{I}_{1,\alpha}$ 和 $\mathscr{I}_{2,\alpha}$ 不相交。令

$$\mathscr{I}_\alpha := \mathscr{I}_{1,\alpha}\cup\mathscr{I}_{2,\alpha}.$$

因此，对于 α 附近的 α_0，我们有

$$\langle E_\alpha(\mathscr{I}_\alpha)\psi_j,\psi_j\rangle = \langle E_\alpha(\mathscr{I}_{1,\alpha})\psi_j,\psi_j\rangle + \langle E_\alpha(\mathscr{I}_{2,\alpha})\psi_j,\psi_j\rangle$$

$$= \int_{\mathscr{I}_{1,\alpha}} \rho^{\psi_j}(\alpha,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + \int_{\mathscr{I}_{2,\alpha}} \rho^{\psi_j}(\alpha,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(h)\,\mathrm{d}h,$$

其中

$$f_\alpha(h) = \chi_{\left[-\frac{|\mathscr{I}_{1,\alpha}|}{2\kappa_1(\alpha)},\frac{|\mathscr{I}_{1,\alpha}|}{2\kappa_1(\alpha)}\right]}\kappa_1(\alpha)\,\rho^{\psi_j}\big(\alpha,\lambda_1(\alpha)+h\kappa_1(\alpha)\big) + \chi_{\left[-\frac{|\mathscr{I}_{2,\alpha}|}{2\kappa_2(\alpha)},\frac{|\mathscr{I}_{2,\alpha}|}{2\kappa_2(\alpha)}\right]}\kappa_2(\alpha)\,\rho^{\psi_j}\big(\alpha,\lambda_2(\alpha)+h\kappa_2(\alpha)\big).$$

由于

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{|\mathscr{I}_{l,\alpha}|}{2\kappa_l(\alpha)} = \infty, \qquad l=1,2,$$

由（6.15）可知，对每个固定的 $h\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(h) = \frac{1}{\pi}\frac{\|a_{jj}\phi_j\|^2|a_{jj}|^2}{h^2+\|a_{jj}\phi_j\|^4}.$$

此外,

$$\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(h)\,\mathrm{d}h = \langle E_\alpha(\mathscr{I}_\alpha)\psi_j,\psi_j\rangle \le 1, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\|a_{jj}\phi_j\|^2}{h^2+\|a_{jj}\phi_j\|^4}\,\mathrm{d}h = 1.$$

因此，由 [3], 中的引理 8.1 可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle E_\alpha(\mathscr{I}_\alpha)\psi_j,\psi_j\rangle = 1, \qquad j=1,2. \tag{7.1}$$

对每个单独的区间应用相同的论证，我们还可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_l,\psi_l\rangle = 1, \qquad l=1,2. \tag{7.2}$$

结合（7.1）和（7.2），我们得出

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_j,\psi_j\rangle = \delta_{lj}, \qquad j,l\in\{1,2\}. \tag{7.3}$$

最后，由于 $E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})$ 是正交投影，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\big|\langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_j,\psi_k\rangle\big| = \big|\langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_j, E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_k\rangle\big| \le \langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_j,\psi_j\rangle^{1/2}\langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_k,\psi_k\rangle^{1/2}.$$

利用（7.3），对 $j\neq k$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})\psi_j,\psi_k\rangle = 0. \tag{7.4}$$

证明至此完成。 □

定理 7.3 (谱集中)。 假设 $u_{j,\lambda}$ 在$j=1$处的消失阶数为 n ，其中$j=1,2$。那么对于任意 $p\in[0,2n)$和 $l=1,2$，存在一个以 $\lambda_l(\alpha)$ 为中心对称的区间族 $\mathscr{I}_{l,\alpha}$，使得$|\mathscr{I}_{l,\alpha}| = o(|\alpha-\alpha_0|^p)$ 并且

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha}) = P_{\psi_l}.$$

i=1 特别地，对于任意 $p\in[0,2n)$， H_α 的谱以 λ_0 为中心，其阶为p ，当 $\alpha\to\alpha_0$ 时。

证明。由（6.5），$\kappa_l(\alpha) = O(|\alpha-\alpha_0|^{2n})$ 当 $\alpha \to \alpha_0$. 因此，对于 $l=1$，2 和 $q \in [1,2n)$，我们选取 $\{\mathscr{I}_{l,\alpha}\}$为关于 $\lambda_l(\alpha)$ 对称的区间族，使得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{|\mathscr{I}_{l,\alpha}|}{2\kappa_l(\alpha)} = \infty, \qquad |\mathscr{I}_{l,\alpha}| = o(|\alpha-\alpha_0|^q) \quad \text{as } \alpha \to \alpha_0.$$

由预解式恒等式，当 $\operatorname{Im} z \neq 0$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} ||R_\alpha(z) - R_{\alpha_0}(z)|| = 0,$$

因此 $H_\alpha \to H_{\alpha_0}$ 在强预解式意义下。由命题 B.1，可得

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})(I - P_{\lambda_0}) = 0, \qquad l=1,2. \tag{7.5}$$

另一方面，若 v_1 和 v_2 是 H_{α_0}的特征向量，则由引理 7.2 可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})v_1, v_2\rangle = \langle P_{\psi_l} v_1, v_2\rangle. \tag{7.6}$$

现在，对任意 v，$w \in L^2(\mathbb{R}^3)$，有

$$\begin{aligned}\langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})P_{\lambda_0}v, w\rangle &= \langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})P_{\lambda_0}v, P_{\lambda_0}w\rangle + \langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})P_{\lambda_0}v, (I-P_{\lambda_0})w\rangle \\ &= \langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})P_{\lambda_0}v, P_{\lambda_0}w\rangle + \langle P_{\lambda_0}v, E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})(I-P_{\lambda_0})w\rangle.\end{aligned}$$

由式（7.5）和（7.6），可得 $\langle E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})P_{\lambda_0}v, w\rangle \to \langle P_{\psi_l}v, w\rangle$ 当 $l=1$，2 时，由于 $\alpha \to \alpha_0$.极限算子是一个投影，弱收敛意味着强收敛，因此得到 $E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha})P_{\lambda_0} \to P_{\psi_l}$ 强收敛于 $\alpha \to \alpha_0$. 因此，由式（7.5），我们得出，对于$l=1$，2

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(\mathscr{I}_{l,\alpha}) = P_{\psi_l}. \tag{7.7}$$

令 $\mathscr{I}_\alpha = \mathscr{I}_{1,\alpha} \cup \mathscr{I}_{2,\alpha}$. 则与引理 7.2 中一样，区间 $\mathscr{I}_{1,\alpha}$ 和 $\mathscr{I}_{2,\alpha}$ 互不相交，因此由（7.7）可得

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(\mathscr{I}_\alpha) = \operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(\mathscr{I}_{1,\alpha}) + \operatorname*{s-lim}_{\alpha\to\alpha_0} E_\alpha(\mathscr{I}_{2,\alpha}) = P_{\psi_1} + P_{\psi_2} = P_{\lambda_0}.$$

根据 $\mathscr{I}_\alpha$ 的选取以及上述极限可知，对每个 $p \in [0,2n)$，H_α 的谱都集中在 λ_0 附近，其阶为 p，当 $\alpha \to \alpha_0$时。□

注 7.4. 假设在定理 7.3 中，对于 $l=1$，2，有 $|\mathscr{I}_{l,\alpha}| = o(|\alpha-\alpha_0|^{2n})$，且极限 $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{|\mathscr{I}_{l,\alpha}|}{2\kappa_l(\alpha)}$ 存在。利用定理 6.2 中在紧集上的一致收敛性，可得 $E_\alpha(\mathscr{I}_\alpha)$ 弱收敛于某个 $c_1P_{\psi_1} + c_2P_{\psi_2}$ $0 < c_1, c_2 < 1$。由于算子 $c_1P_{\psi_1} + c_2P_{\psi_2}$ 不是投影，$E_\alpha(\mathscr{I}_\alpha)$ 不可能强收敛。

另一方面，若对于某些 $q > 2n$ 和 $l=1$，$|\mathscr{I}_{l,\alpha}| = o(|\alpha-\alpha_0|^q)$ 2，则 $E_\alpha(\mathscr{I}_\alpha)$强收敛到 0。

7.2. **时间衰减。** 现在，我们通过在 H_α 的某个邻域内平移均值并重新缩放时间，来研究其演化的更精细结构 $\alpha = \alpha_0$。以下结果是（6.15）的直接推论。

推论 7.5. 对于 $l = 1, 2$，我们有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \left\langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\psi_l, \psi_l\right\rangle = \mathrm{e}^{-\|a_{ll}\phi_l\|^2|t|}$$

对 $t \in \mathbb{R}$ 一致成立。

证明。 固定 $l \in \{1, 2\}$。由谱定理，

$$\left\langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\psi_l, \psi_l\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-it\frac{\lambda-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\ \mathrm{d}\langle E_\alpha(\lambda)\psi_l, \psi_l\rangle. \tag{7.8}$$

将（7.8）中的积分拆分，我们写成

$$\left\langle \mathrm{e}^{-it\frac{H_\alpha-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\psi_l, \psi_l\right\rangle = \int_J \mathrm{e}^{-it\frac{\lambda-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\rho^{\psi_l}(\alpha, \lambda)\ \mathrm{d}\lambda + A^l_\alpha(t),$$

其中

$$A^l_\alpha(t) := \int_{\mathbb{R}\setminus J} \mathrm{e}^{-it\frac{\lambda-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\ \mathrm{d}\langle E_\alpha(\lambda)\psi_l, \psi_l\rangle.$$

注意

$$|A^l_\alpha(t)| \le \langle E_\alpha(\mathbb{R}\setminus J)\psi_l, \psi_l\rangle.$$

根据与引理7.2中相同的论证，我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle E_\alpha(J)\psi_l, \psi_l\rangle = 1$$

从而

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} A^l_\alpha(t) = 0 \qquad \text{uniformly for } t \in \mathbb{R}. \tag{7.9}$$

我们现在考虑在 J上的积分。作变量替换 $\lambda = \lambda_l(\alpha) + h\kappa_l(\alpha)$，我们得到

$$\int_J \mathrm{e}^{-it\frac{\lambda-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\rho^{\psi_l}(\alpha, \lambda)\ \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ith}\,\kappa_l(\alpha)\,\rho^{\psi_l}\big(\alpha, \lambda_l(\alpha) + h\kappa_l(\alpha)\big)\ \mathrm{d}h = \sqrt{2\pi}\,\widehat{g_{l,\alpha}}(t), \tag{7.10}$$

其中

$$g_{l,\alpha}(h) := \kappa_l(\alpha)\,\rho^{\psi_l}\big(\alpha, \lambda_l(\alpha) + h\kappa_l(\alpha)\big), \qquad h \in \mathbb{R}.$$

定义

$$g_l(h) := \frac{1}{\pi}\frac{\|a_{ll}\phi_l\|^2}{h^2 + \|a_{ll}\phi_l\|^4}.$$

由（6.15），我们有$g_{l,\ \alpha}(h) \to g_l(h)$，对每个 $h \in \mathbb{R}$ 当 $\alpha \to \alpha_0$时。此外，

$$\int_{\mathbb{R}} g_{l,\alpha}(h)\ \mathrm{d}h = \int_{\mathbb{R}} \rho^{\psi_l}(\alpha, \lambda)\ \mathrm{d}\lambda \le 1, \qquad \int_{\mathbb{R}} g_l(h)\ \mathrm{d}h = 1.$$

因此，由 [3],中的引理 8.1

$$g_{l,\alpha} \longrightarrow g_l \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}) \quad \text{as } \alpha \to \alpha_0.$$

因此，

$$\widehat{g_{l,\alpha}} \longrightarrow \widehat{g_l} \quad \text{uniformly on } \mathbb{R}.$$

直接计算可得

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{g_l}(t) = \mathrm{e}^{-\|a_{ll}\phi_l\|^2|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

将其与（7.10）和（7.9）结合即可完成证明。 □

7.3. **逗留时间及其性质。** 现在我们研究约化算子的逗留时间的行为

$$\widetilde{H}_\alpha := E_\alpha(J) H_\alpha.$$

设 $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$。态 v 相对于由自伴算子 H_α 生成的时间演化 $\widetilde{\ }$ 的逗留时间定义为

$$\tau_\alpha(v) := \int_{-\infty}^{\infty} \left|\langle \mathrm{e}^{-it\widetilde{H}_\alpha} v, v\rangle\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\langle \mathrm{e}^{-itH_\alpha} E_\alpha(J) v, v\rangle\right|^2 \mathrm{d}t.$$

注意，对于 $l = 1,\ 2$，有 $\tau_{\alpha_0}(\psi_l) = \infty$。在下一个定理中，我们证明对于 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$，$\tau_\alpha(\psi_l) < \infty$，并且当 α 接近 α_0 时，为 $\tau_\alpha(\psi_l)$ 建立一个下界。

定理 7.6。 对于任意 $\alpha \neq \alpha_0$、$l = 1、2$、$\tau_\alpha(\psi_l) < \infty$. 。此外，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\tau_\alpha(\psi_l) > \frac{1}{4||a_{ll}\phi_l||^2 \kappa_l(\alpha)} \quad for\ |\alpha - \alpha_0| < \delta.$$

证明。 固定 $l \in \{1, 2\}$。 $\tau_\alpha(\psi_l) < \infty$ 的证明与 [3] 中定理 5.1 的证明类似。对于 $\alpha \in J \setminus \{\alpha_0\}$ 和 $T \in (0, \infty)$，定义

$$\tau_\alpha(\psi_l, T) := \int_{-T}^{T} |\langle \mathrm{e}^{-it\tilde{H}_\alpha}\psi_l, \psi_l\rangle|^2 \,\mathrm{d}t. \tag{7.11}$$

于是 $\lim_{T\to\infty} \tau_\alpha(\psi_l, T) = \tau_\alpha(\psi_l)$。 将 T替换为 $T/\kappa_l(\alpha)$ 代入 (7.11)，我们得到

$$\kappa_l(\alpha)\tau_\alpha\left(\psi_l, T/\kappa_l(\alpha)\right) = \int_{-T}^{T} \left|\langle \mathrm{e}^{-it\frac{\tilde{H_\alpha}-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\psi_l, \psi_l\rangle\right|^2 \mathrm{d}t.$$

注意到，由推论 7.5 和 (7.9)，我们有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \langle \mathrm{e}^{-it\frac{\tilde{H_\alpha}-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\psi_l, \psi_l\rangle = \mathrm{e}^{-||a_{ll}\phi_l||^2|t|}$$

从而

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \left|\langle \mathrm{e}^{-it\frac{\tilde{H_\alpha}-\lambda_l(\alpha)}{\kappa_l(\alpha)}}\psi_l, \psi_l\rangle\right|^2 = \mathrm{e}^{-2||a_{ll}\phi_l||^2|t|}.$$

因此，对于任意有限的 T，由勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \kappa_l(\alpha)\tau_\alpha\left(\psi_l, T/\kappa_l(\alpha)\right) = \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-2||a_{ll}\phi_l||^2|t|}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2||a_{ll}\phi_l||^2 T}}{||a_{ll}\phi_l||^2}.$$

选取 $T_0 > 0$ 使得 $\frac{1-\mathrm{e}^{-2||a_{ll}\phi_l||^2 T}}{||a_{ll}\phi_l||^2} > \frac{1}{2||a_{ll}\phi_l||^2}$，并且对于这个 T_0，存在 $\delta > 0$ 使得对于 $|\alpha - \alpha_0| < \delta$，

$$\kappa_l(\alpha)\tau_\alpha\left(\psi_l, \frac{T_0}{\kappa_l(\alpha)}\right) > \frac{1 - \mathrm{e}^{-2||a_{ll}\phi_l||^2 T}}{||a_{ll}\phi_l||^2} - \frac{1}{4||a_{ll}\phi_l||^2} > \frac{1}{4||a_{ll}\phi_l||^2}.$$

由于 $\tau_\alpha(\psi_l) \geq \tau_\alpha\left(\psi_l, \frac{T_0}{\kappa_l(\alpha)}\right)$，因此 $\tau_\alpha(\psi_l) > \frac{1}{4||a_{ll}\phi_l||^2\kappa_l(\alpha)}$.

□

8. Behaviour of Scattering amplitude and Time delay

对于算子对 H_0 与 H_α，其中 $\alpha \neq \alpha_0$ 在我们的模型中，注意 $H_\alpha - H_0$ 是秩二算子。因此，由定理 6.2.1 在 [14], 中，波算子

$$\Omega_{\pm}^{(\alpha)} := \underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, \mathrm{e}^{itH_\alpha}\mathrm{e}^{-itH_0}$$

存在且是完备的。考虑散射算子 $S^{(\alpha)} = \Omega_{+}^{(\alpha)*}\,\Omega_{-}^{(\alpha)}$，它对应于算子对（$H_0$, H_α）。由于 $S^{(\alpha)}$ 是一个与 H_0 对易的酉算子，它关于谱表示（3.1）可分解，该谱表示属于 H_0, 即对任意 $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(S^{(\alpha)}v)_\lambda = S_\lambda^{(\alpha)} v_\lambda \qquad \text{for a.e. } \lambda \in (0,\infty).$$

对于 $\lambda \in (0, \infty)$ $S_\lambda^{(\alpha)}$ 是 $L^2(S^2)$ 上的酉算子，并称为“能量” λ. 处的散射矩阵

引理 8.1. 对于 $\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}$、$\lambda \in J$，与算子对（$H_0$, H_α）相关联的散射矩阵在“能量” λ 处由下式给出：

$$S_\lambda^{(\alpha)} = I - \frac{2\pi i\alpha}{F(\alpha,\lambda)}\left(\sum_{j,k=1}^{2} \tilde{b}_{jk}(\alpha,\lambda+i0)\langle\cdot, u_{j,\lambda}\rangle u_{k,\lambda}\right) \tag{8.1}$$

其中 $\tilde{b}_{jk}(\alpha,\lambda+i0)$ 表示 $B(\alpha,\lambda+i0)$的余子式矩阵中第(j,k)项。

证明。 证明与 [1, 命题 8.22]的证明类似。 □

8.1. **散射振幅与总散射截面。** “能量” λ 处的散射振幅算子定义为

$$R_\lambda^{(\alpha)} := S_\lambda^{(\alpha)} - I.$$

散射振幅算子 $R_\lambda^{(\alpha)}$ 衡量散射系统 (H_0, H_α) 在“能量” λ处偏离自由动力学的程度。散射系统 (H_0, H_α) 在“能量” λ 处的总散射截面 $\sigma_\alpha(\lambda)$ 定义为（见 [1, 方程 (7.69)]）

$$\sigma_\alpha(\lambda) := \pi\lambda^{-1}||R_\lambda^{(\alpha)}||_2^2$$

其中 $||\cdot||_2$ 表示希尔伯特-施密特范数。从物理角度看，能量为 λ时，粒子对 (H_0, H_α) 的总散射截面 $\sigma_\alpha(\lambda)$ 量化了散射的总概率。

在下述定理中，我们研究 $R_\lambda^{(\alpha)}$ 和总散射截面 $\sigma_\alpha(\lambda)$ 在 λ_0 附近、当 α 趋于 α_0时的渐近行为。

定理 8.2。考虑定义 5.1 中的模型，并加上附加假设 *that* $u'_{l,\lambda_0} \neq 0$ *for* $l = 1,2$。那么对于任意固定的 $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} R^{(\alpha)}_{\lambda_l^h(\alpha)} = -2i\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h + i||a_{ll}\phi_l||^2}\langle\cdot, \frac{\psi_{l,\lambda_0}}{||\psi_{l,\lambda_0}||}\rangle\frac{\psi_{l,\lambda_0}}{||\psi_{l,\lambda_0}||} \tag{8.2}$$

在此完备-施密特范数下。因此，对于任意固定的 $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \sigma_\alpha(\lambda_l^h(\alpha)) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{||a_{ll}\phi_l||^4}{h^2 + ||a_{ll}\phi_l||^4}. \tag{8.3}$$

证明。利用（8.1），可将 $R^{(\alpha)}_{\lambda_l^h}(\alpha)$ 写成 $l=1,\ 2$ 的形式:

$$R^{(\alpha)}_{\lambda_l^h(\alpha)} = -2iI_l(\alpha,h)\left(\sum_{j,k=1}^{2} I_{jk,l}(\alpha,h)\langle\cdot,\frac{u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}}{||u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}||}\rangle\frac{u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}}{||u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}||}\right) \tag{8.4}$$

其中

$$I_l(\alpha,h)=\frac{\kappa_l(\alpha)\,\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{F(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))},\quad I_{jk,l}(\alpha,h)=\frac{\alpha\pi\,\tilde{b}_{jk}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha)+i0)\|u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}\|\,\|u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}\|}{\kappa_l(\alpha)\,\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}. \tag{8.5}$$

对于 $j,\ k,\ l\in\{1,2\}$，经简单计算可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\langle\cdot,\frac{u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}}{||u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}||}\rangle\frac{u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}}{||u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}||}=\left\langle\cdot,\frac{u'_{j,\lambda_0}}{||u'_{j,\lambda_0}||}\right\rangle\frac{u'_{k,\lambda_0}}{||u'_{k,\lambda_0}||}=\left\langle\cdot,\frac{\phi_{j,\lambda_0}}{||\phi_{j,\lambda_0}||}\right\rangle\frac{\phi_{k,\lambda_0}}{||\phi_{k,\lambda_0}||} \tag{8.6}$$

在希尔伯特–施密特范数下。利用引理6.1 （b）和（c），还可得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} I_l(\alpha,h)=\frac{|a_{ll}|^2}{\alpha_0(h+i||a_{ll}\phi_l||^2)}. \tag{8.7}$$

接下来，为计算 $\lim_{\alpha\to\alpha_0} I_{jk,\,l}(\alpha,\ h)$，注意到 $\tilde{b}_{jk}(\alpha,\ \lambda+i0)=\tilde{c}_{jk}(\alpha,\ \lambda)+id_{jk}(\alpha,\ \lambda)$，并利用（6.3），将 $I_{jk,\,l}(\alpha,\ h)$ 写成

$$I_{jk,l}(\alpha,h)=\frac{\alpha^2\pi||\phi_l||^2\left(\tilde{c}_{jk}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))+i\tilde{d}_{jk}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\right)\|u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}\|\,\|u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}\|\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha))\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}.$$

由于 $\tilde{d}_{jk}(\alpha,\ \lambda_l^h(\alpha))=\alpha\pi(-1)^{j+k}\eta_{jk}(\lambda_l^h(\alpha))=O(|\alpha-\alpha_0|^2)$，我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\tilde{d}_{jk}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\|u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}\|\,\|u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}\|}{F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha))}=0. \tag{8.8}$$

利用（4.10），我们可以写成

$$\frac{F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\alpha\pi\,\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\|u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}\|\,\|u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}\|}=\frac{\sum_{m,n=1}^{2}\tilde{c}_{mn}(\alpha,\lambda_l(\alpha))\eta_{nm}(\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\|u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}\|\,\|u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}\|}.$$

利用引理 6.1(a) 和极限

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\eta_{nm}(\lambda_l^h(\alpha))}{\|u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}\|\,\|u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}\|}=\frac{\langle\phi_{n,\lambda_0},\phi_{m,\lambda_0}\rangle}{||\phi_{j,\lambda_0}||||\phi_{k,\lambda_0}||}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha))}{\alpha\pi\,\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\|u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}\|\,\|u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}\|}&=\frac{\sum_{m,n=1}^{2}\overline{a_{lm}}a_{ln}\langle\phi_{n,\lambda_0},\phi_{m,\lambda_0}\rangle}{|a_{ll}|^2||\phi_{j,\lambda_0}||\,||\phi_{k,\lambda_0}||}\\&=\frac{||\psi_{l,\lambda_0}||^2}{|a_{ll}|^2||\phi_{j,\lambda_0}||\,||\phi_{k,\lambda_0}||}.\end{aligned}$$

再次利用引理6.1 (a), (8.8) 以及上述极限，可得

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} I_{jk,l}(\alpha,h)=\frac{\alpha_0||\phi_l||^2\overline{a_{lj}}a_{lk}||\phi_{j,\lambda_0}||\,||\phi_{k,\lambda_0}||}{||\psi_{l,\lambda_0}||^2}. \tag{8.9}$$

因此，利用 (8.6), (8.7) 和 (8.9)，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\alpha_0} R^{(\alpha)}_{\lambda_l^h(\alpha)} &= -2i\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h+i||a_{ll}\phi_l||^2}\frac{\langle\,\cdot\,, a_{l1}\phi_{1,\lambda_0}+a_{l2}\phi_{2,\lambda_0}\rangle\,(a_{l1}\phi_{1,\lambda_0}+a_{l2}\phi_{2,\lambda_0})}{||\psi_{l,\lambda_0}||^2}\\ &= -2i\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h+i||a_{ll}\phi_l||^2}\left\langle\cdot,\frac{\psi_{l,\lambda_0}}{||\psi_{l,\lambda_0}||}\right\rangle\frac{\psi_{l,\lambda_0}}{||\psi_{l,\lambda_0}||}\end{aligned}$$

在希尔伯特-施密特范数下。这就完成了对 (8.2) 的证明，而 (8.3) 可由 (8.2) 直接推出。

□

Re注 8.3。 当 $u_{j,\lambda}, j=1,2$ 在 λ_0 处消失到 n 阶时，对于任意固定的 $h\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} R^{(\alpha)}_{\lambda_l^h(\alpha)} = -2i\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h+i||a_{ll}\phi_l||^2}\left\langle\cdot,\frac{\psi_l^{(n-1)}}{||\psi_l^{(n-1)}||_{,\lambda_0}}\right\rangle\frac{\psi_l^{(n-1)}}{||\psi_l^{(n-1)}||_{,\lambda_0}},$$

在希尔伯特-施密特范数下。

注意， $R^{(\alpha)}_\lambda$ 的核为

$$R^{(\alpha)}_\lambda(\omega_1,\omega_2) = -\frac{2\pi i\alpha}{F(\alpha,\lambda)}\left(\sum_{j,k=1}^{2}\tilde{b}_{jk}(\alpha,\lambda)\overline{u_{j,\lambda}(\omega_2)}u_{k,\lambda}(\omega_1)\right)\quad\text{for a.e. }(\omega_1,\omega_2)\in S^2\times S^2. \tag{8.10}$$

现在我们定义从初始方向 ω^{in} 到最终方向 ω^{out} 、能量为“ λ ”时的散射振幅 $f(\lambda;\omega^{\text{in}}\to\omega^{\text{out}})$（见 [1, 方程 (7.48)]）

$$f_\alpha(\lambda;\omega^{\text{in}}\to\omega^{\text{out}}) := -2\pi i\lambda^{-1/2}R^{(\alpha)}_\lambda(\omega^{\text{out}},\omega^{\text{in}})$$

对于几乎所有的 $\lambda\in(0,\infty)$ 和 $(\omega^{\text{in}},\omega^{\text{out}})\in S^2\times S^2$.

对于定义 5.1 中的模型，若进一步有 $u_1,u_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, ，则 (3.1) 表明 $u_{1,\lambda}$ 和 $u_{2,\lambda}$ 在 S^2 上光滑，因此振幅 $f_\alpha(\lambda;\omega^{\text{in}}\to\omega^{\text{out}})$ 在 $(0,\infty)\times S^2\times S^2$. 上连续。关于振幅的收敛性，我们有以下定理。

定理 8.4. 考虑定义 5.1 中的模型，并假设 $u_j\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ 且 $u'_{j,\lambda_0}\neq 0$ 属于 $L^2(S^2)$，其中 $j=1,2$。那么，对于任意固定的 $h\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(\lambda_l^h(\alpha);\omega^{in}\to\omega^{out}) = -\frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_0}}\frac{\psi_{l,\lambda_0}(\omega^{out})\overline{\psi_{l,\lambda_0}(\omega^{in})}}{||\psi_{l,\lambda_0}||^2}\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h+i||a_{ll}\phi_l||^2}$$

对 $(\omega^{in},\omega^{out})\in S^2\times S^2$. 一致地

证明。 由 (8.10)，当 $l=1,2,$ 时，我们有

$$R^{(\alpha)}_{\lambda_l^h(\alpha)}(\omega_1,\omega_2) = -2iI_l(\alpha,h)\left(\sum_{j,k=1}^{2}I_{jk,l}(\alpha,h)\frac{u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}(\omega_1)\overline{u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}(\omega_2)}}{||u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}||\,||u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}||}\right) \tag{8.11}$$

对于 $(\omega_1,\omega_2)\in S^2\times S^2$ 其中 $I_l(\alpha,h), I_{jk,l}(\alpha,h)$ 的定义见 (8.5)。注意，对于 $j,l\in\{1,2\}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}-u_{j,\lambda_0}}{\lambda_l^h(\alpha)-\lambda_0}(\omega)-u'_{j,\lambda_0}(\omega)\right| &= \frac{1}{|\lambda_l^h(\alpha)-\lambda_0|}\left|\int_{\lambda_0}^{\lambda_l^h(\alpha)}(u'_{j,\lambda}(\omega)-u'_{j,\lambda_0}(\omega))\,\mathrm{d}\lambda\right|\\ &= \frac{1}{|\lambda_l^h(\alpha)-\lambda_0|}\left|\int_{\lambda_0}^{\lambda_l^h(\alpha)}\int_{\lambda_0}^{\lambda}u^{(2)}_{j,s}(\omega)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\lambda\right|\end{aligned}$$

$$\leq |\lambda_l^h(\alpha)-\lambda_0| \sup_{\lambda\in(0,\infty)} ||u_{j,\lambda}^{(2)}||_{L^\infty(S^2)}.$$

这意味着，对于 $j,k,l\in\{1,2\}$，我们有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}(\omega_1)\overline{u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}(\omega_2)}}{||u_{k,\lambda_l^h(\alpha)}||\,||u_{j,\lambda_l^h(\alpha)}||} = \frac{u'_{k,\lambda_0}(\omega_1)\overline{u'_{j,\lambda_0}(\omega_2)}}{||u'_{j,\lambda_0}||\,||u'_{k,\lambda_0}||} = \frac{\phi_{k,\lambda_0}(\omega_1)\overline{\phi_{j,\lambda_0}(\omega_2)}}{||\phi_{j,\lambda_0}||\,||\phi_{k,\lambda_0}||} \tag{8.12}$$

对 $(\omega_1,\ \omega_2)$ 一致地 $\in S^2$. 因此，由 (8.7)、(8.9) 和 (8.12)，我们得到

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} R^{(\alpha)}_{\lambda_l^h(\alpha)}(\omega_1,\omega_2) = -2i\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h+i||a_{ll}\phi_l||^2}\frac{\psi_{l,\lambda_0}(\omega_1)\overline{\psi_{l,\lambda_0}(\omega_2)}}{||\psi_{l,\lambda_0}||^2}$$

于是结论随之成立。 □

注 8.5. 当 $u_j,\ \lambda,\ j=1,\ 2$ 在 λ_0 处直至 n 阶消失时，对任意固定的 $h\in\mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(\lambda_l^h(\alpha);\omega^{in}\to\omega^{out}) = -\frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_0}}\frac{\psi^{(n-1)}_{l,\lambda_0}(\omega^{out})\overline{\psi^{(n-1)}_{l,\lambda_0}(\omega^{in})}}{||\psi^{(n-1)}_{l,\lambda_0}||^2}\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h+i||a_{ll}\phi_l||^2}.$$

8.2. **Krein 谱移位函数与时间延迟。** 算子对 $(H_0,\ H_\alpha)$ 的 Krein 谱移位函数定义为

$$\xi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to0^+}\arg\det(I+\alpha VR_0(\lambda+i\epsilon))$$

其中“arg”表示辐角函数的主值分支，关于谱移位函数的更多细节参见 [14]。在我们的模型中，注意到 $I+\alpha VR_0(z)\restriction_{\mathrm{span}\{u_1,u_2\}}$ 酉等价于 $B(\alpha,\ z)$，并且 $I+\alpha VR_0(z)\restriction_{\{u_1,u_2\}^\perp}=I$. 因此，

$$\xi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi}\arg F(\alpha,\lambda). \tag{8.13}$$

根据 Birman-Krein 公式（见 [14]），对于 $\alpha\in I\setminus\{\alpha_0\},\ \lambda\in J$，我们有

$$\det S_\lambda^{(\alpha)} = \mathrm{e}^{-2\pi i\xi_\alpha(\lambda)}. \tag{8.14}$$

另一方面，根据广义 Eisenbud-Wigner 公式（见 [8]），散射系统（$H_0,\ H_\alpha$）在“能量” λ 处的平均时延 $\zeta_\alpha(\lambda)$ 为:

$$\zeta_\alpha(\lambda) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\arg\left(\det S_\lambda^{(\alpha)}\right).$$

因此我们得到关系式

$$\zeta_\alpha(\lambda) = -2\pi\xi'_\alpha(\lambda). \tag{8.15}$$

在下面的定理中，我们将求得当α 趋于 α_0.时， ζ_α 在 λ_0 附近的平均时延行为

定理8.6。对于每个固定的 $h\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\kappa_l(\alpha)\zeta_\alpha(\lambda_l^h(\alpha)) = 2\frac{||a_{ll}\phi_l||^2}{h^2+||a_{ll}\phi_l||^4}.$$

证明。由（8.15）和（8.13），注意到

$$\zeta_\alpha(\lambda) = -2\pi\xi'_\alpha(\lambda) = -2\frac{1}{\pi}\frac{F_1(\alpha,\lambda)\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda) - F_2(\alpha,\lambda)\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda)}{|F(\alpha,\lambda)|^2}. \tag{8.16}$$

代入 $\lambda = \lambda_l^h(\alpha)$ 到 (8.16) 中，并乘以 $\kappa_l(\alpha)$，得到

$$\kappa_l(\alpha)\xi'_\alpha(\lambda_l^h(\alpha)) = \frac{1}{\pi}\frac{\kappa_l(\alpha)F_1(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))|^2} - \frac{1}{\pi}\frac{\kappa_l(\alpha)F_2(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{|F(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))|^2}.$$

由于对于 $l = 1,2$，$F_2(\alpha,\lambda_l(\alpha)) = O(|\alpha-\alpha_0|^3)$ 且 $\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l(\alpha)) = O(|\alpha-\alpha_0|)$，因此有

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))}{\tilde{c}_{ll}(\alpha,\lambda_l^h(\alpha))} = 0.$$

结合上述极限以及引理 6.1 (c)、(d) 和 (6.13)，即可得证。 □

9. THRESHOLD EIGENVALUE CASE

定义9.1 (阈值情形模型)。 令 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ 固定。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，考虑算子

$$H_\alpha = H_0 + \alpha V \quad on\ L^2(\mathbb{R}^3) \tag{9.1}$$

且 u_j、 $j = 1$、2 满足以下条件：

(a) u_1、 $u_2 \in \mathcal{E}$ 和 $u_1 \perp u_2$。*(b)* $\delta_{jk} + \alpha_0\gamma(\eta_{jk},\ 0) = 0$。*(c)* $\langle\phi_1$、 $\phi_2\rangle \neq 0$ 或 $\|\phi_1\| \neq \|\phi_2\|$，其中 $\phi_j = \Phi_{u_j,\ 0}$、 $j = 1$、2。

(d) 函数 $F_2(\alpha$、 $\lambda_j(\alpha)) \neq 0$，当 $j = 1$、2 且 $\alpha > \alpha_0$ 属于 I时。

对于该模型，根据推论 4.3，0 是 H_{α_0} 的阈值特征值，重数为二。此外，根据定理 4.8，当 $\alpha > \alpha_0$时，该特征值并入绝对连续谱；而当 $\alpha < \alpha_0$ 时，它分裂为两个单重离散特征值。

第6–7 节的所有结果8.6 以及关于平均时延行为的定理$\alpha \to \alpha_0^+$对该模型仍然成立，且证明无需做任何修改。

Appendix A.

在本附录中，我们陈述经典的莫尔斯引理，它给出光滑函数在非退化临界点的邻域中的局部标准形；详见 [9]。

定理 A.1 (莫尔斯引理)。 设 $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，且 $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$是 f 的一个非退化临界点，即 $Df(p) = 0$满足 $f(p) = 0$，并且海森矩阵 $D^2f(p)$ 非奇异。那么存在 U、 $V \subset \mathbb{R}^2$，分别是 p 和0的开邻域，以及一个微分同胚

$$\Phi : U \to V, \qquad \Phi(p) = 0$$

使得在新坐标 $(\xi,\eta) = \Phi(x,y)$下，有

$$f\circ\Phi^{-1}(\xi,\eta) = -\xi^2 - \eta^2, \quad f\circ\Phi^{-1} = -\xi^2 + \eta^2, \quad or \quad f\circ\Phi^{-1} = \xi^2 + \eta^2$$

分别取决于海森矩阵 $D^2 f(p)$ 的指标（负特征值的个数）是 2、1 还是 0。

推论 A.2. 设 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，并设 $p = (x_0, y_0)$ 为指标 1 的非退化临界点，且满足 $f(p) = 0$ 以及 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \neq 0$。则存在 x_0 的邻域 I 以及互不相同的光滑函数 $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$，使得

$$f(x, y_j(x)) = 0, \qquad j = 1, 2.$$

证明。由莫尔斯引理，$f = gh$ 在 U 上，其中

$$g(x, y) = \eta(x, y) + \xi(x, y),\ h(x, y) = \eta(x, y) - \xi(x, y).$$

注意到 $g(p) = h(p) = 0$，我们有

$$0 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) = 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(p)\frac{\partial h}{\partial y}(p),$$

由此可得

$$\frac{\partial g}{\partial y}(p) \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(p) \neq 0.$$

由隐函数定理，存在 x_0 的邻域 I 以及光滑函数 $y_1, y_2 \colon I \to \mathbb{R}$，使得

$$g(x, y_1(x)) = 0 \quad \text{and} \quad h(x, y_2(x)) = 0 \quad \text{for all } x \in I.$$

证明到此结束。 □

Appendix B.

下面的命题有助于推导谱集中。

命题 B.1. 设 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一列自伴算子，且当 $n \to \infty$ 时收敛到自伴算子 T，其中收敛是在强预解式意义下进行的。设 E_n 和 E 分别表示 T_n 和 T 的谱族。设 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ 是一列满足 $\lambda_n \to \lambda$ 的序列，并令 $P \colon = E(\{\lambda\})$。那么

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_n(-\infty, \lambda_n](I - P) = E(-\infty, \lambda).$$

证明。对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义自伴算子 $T_n' \colon = T_n - (\lambda_n - \lambda)$。若 E_n' 表示与 T_n' 相关联的谱族，则 $E_n'(-\infty,\ \lambda] = E_n(-\infty,\ \lambda_n]$. 此外，由此可得 $T_n' \to T$ 在强预解式意义下收敛。因此，根据 [7,第 VIII 章], 中的定理 1.15，我们得到

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E_n'(-\infty, \lambda](I - P) = E(-\infty, \lambda)$$

由此即可得到结论。 □

Appendix C.

在本附录中，我们给出引理 5.2和引理 5.3的证明。

引理的证明 5.2

$\lambda_1'(\alpha_0) \geq \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_j||^2}$ 对于 ~~$j=1,$~~ 2 的证明是显然的。要证明另一个界，注意到

$$\begin{aligned}
\lambda_2'(\alpha_0) \leq \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_2||^2} &\iff ||\phi_2||^2(||\phi_1||^2+||\phi_2||^2) - 2(||\phi_1||^2||\phi_2||^2 - |\langle\phi_1,\phi_2\rangle|^2) \leq ||\phi_2||^2 d \\
&\iff (||\phi_2||^4 - ||\phi_1||^2||\phi_2||^2 + 2|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|^2)^2 \leq ||\phi_2||^4 d^2 \\
&\iff 4\langle\phi_1,\phi_2\rangle^4 - 4||\phi_1||^2||\phi_2||^2|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|^2 \leq 0 \\
&\iff 4|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|^2\left(|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|^2 - ||\phi_1||^2||\phi_2||^2\right) \leq 0.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

最后一个不等式由柯西-施瓦茨不等式成立。因此

$$\lambda_2'(\alpha_0) \leq \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_2||^2} \leq \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_1||^2}.$$

现在注意到，如果将“C.1”中的“ $\leq$ ”替换为“ $=$ ”，则其仍然成立，这意味着

$$\lambda_2'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_2||^2} \iff \phi_1 \perp \phi_2.$$

同理可证

$$\lambda_1'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0^2||\phi_1||^2} \iff \phi_1 \perp \phi_2$$

由此完成证明。 □

引理 5.3的证明

为证明 (a)，注意到 $a_{j1}a_{j2}$ and $(-1)^j\langle\phi_1,\phi_2\rangle$ 的相位因子相同。现在

$$\begin{aligned}
&|a_{j1}a_{j2}| = \frac{\alpha_0^2|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|\lambda_j'(\alpha_0)}{d} \\
\iff &\sqrt{(-1)^{j+1}(-1+\alpha_0^2\|\phi_2\|^2\lambda_j'(\alpha_0))}\sqrt{(-1)^{j+1}(-1+\alpha_0^2\|\phi_1\|^2\lambda_j'(\alpha_0))} = \alpha_0^2|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|\lambda_j'(\alpha_0) \\
\iff &\quad 1+\alpha_0^4\|\phi_1\|^2\|\phi_2\|^2[\lambda_j'(\alpha_0)]^2 - \alpha_0^2\lambda_j'(\alpha_0)(\|\phi_1\|^2+\|\phi_2\|^2) = \alpha_0^4|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|^2[\lambda_j'(\alpha_0)]^2.
\end{aligned}$$

重新排列各项并利用 (4.12) 和 (4.13)，可知最后一个恒等式等价于 (4.16)，由此证明了 (a)。对于 $j=1,\ 2$，我们有：

$$\frac{a_{j1}^2+|a_{j2}|^2}{\alpha_0^2\lambda_j'(\alpha_0)} = \frac{(-1)^{j+1}(-2+\alpha_0^2(||\phi_1||^2+||\phi_2||^2)\lambda_j'(\alpha_0))}{\alpha_0^2\lambda_j'(\alpha_0)d}.$$

将 $\lambda_j'(\alpha_0)$ 在 (4.15) 中的取值代入上式右侧，得到其值为 1。这就证明了 $j=k$ 情况下的 (b)。现在，

$$\begin{aligned}
&a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22} \\
&= \frac{1}{a_{11}\overline{a_{22}}}(a_{11}^2\overline{a_{22}}a_{21} + a_{11}a_{12}|a_{22}|^2) \\
&= \frac{1}{a_{11}\overline{a_{22}}d^2}\left((-1+\alpha_0^2||\phi_2||^2\lambda_1'(\alpha_0))\alpha_0^2\langle\phi_1,\phi_2\rangle\lambda_2'(\alpha_0) - \alpha_0^2\langle\phi_1,\phi_2\rangle\lambda_1'(\alpha_0)(1-\alpha_0^2||\phi_1||_2^2\lambda_2'(\alpha_0))\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha_0^2\langle\phi_1,\phi_2\rangle}{a_{11}\overline{a_{22}}d^2}\left(\alpha_0^2\lambda_1'(\alpha_0)\lambda_2'(\alpha_0)(||\phi_1||^2+||\phi_2||^2)-(\lambda_1'(\alpha_0)+\lambda_2'(\alpha_0))\right)$$
$$= 0$$

这就证明了 $j=2,k=1$ 的 (b) 部分。对于 $j=1,k=2$ 的情形，证明类似。由 $j=1,$ 的 (a) 部分可得

$$\begin{aligned}||\psi_1||^2 &= a_{11}^2\|\phi_1\|^2+|a_{12}|^2\|\phi_2\|^2+2\,\mathrm{Re}[a_{11}\overline{a_{12}}\langle\phi_1,\phi_2\rangle]\\ &= \frac{\|\phi_1\|^2\left(-1+\alpha_0^2\|\phi_2\|^2\lambda_1'(\alpha_0)\right)+\|\phi_2\|^2\left(-1+\alpha_0^2\|\phi_1\|^2\lambda_1'(\alpha_0)\right)-2\alpha_0^2|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|^2\lambda_1'(\alpha_0)}{d}\\ &= \frac{-\left(\|\phi_1\|^2+\|\phi_2\|^2\right)+2\alpha_0^2\lambda_1'(\alpha_0)\left(\|\phi_1\|^2\|\phi_2\|^2-|\langle\phi_1,\phi_2\rangle|^2\right)}{d}\\ &= \frac{-\left(\|\phi_1\|^2+\|\phi_2\|^2\right)+\left(\|\phi_1\|^2+\|\phi_2\|^2+d\right)}{d}=1\end{aligned}$$

类似地，我们得到

$$||\psi_2||^2 = |a_{21}|^2||\phi_1||^2+|a_{22}|^2||\phi_2||^2+2\,\mathrm{Re}[a_{21}\overline{a_{22}}\langle\phi_1,\phi_2\rangle]=1$$

and

$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle = a_{11}a_{21}||\phi_1||^2+a_{12}\overline{a_{22}}||\phi_2||^2+(a_{11}\overline{a_{22}}\langle\phi_1,\phi_2\rangle+a_{12}a_{21}\langle\phi_2,\phi_1\rangle)=0.$$

这就完成了第（c）部分的证明。 □

Acknowledgements

作者衷心感谢 K.B. Sinha 教授就这项关于共振现象的工作进行的多次讨论，并感谢他向我们讲解量子力学的诸多数学方面。

第一作者感谢国家高等数学委员会（隶属于印度政府原子能部）提供的博士奖学金资助，资助编号为 0203/7/2019/RD-II/14855。

References

[1] W. O. Amrein、J. M. Jauch、K. B. Sinha，《量子力学中的散射理论：物理原理与数学方法》，W. A. Benjamin, Inc.，雷丁，马萨诸塞州-伦敦-阿姆斯特丹，1977年，第691页。[2] M. A. Astaburuaga、V. H. Cort´es、C. Fern´andez与 R. Del R´ıo，《有限秩扰动下绝对连续谱的共振与稳定性》，*Pure Appl. Funct. Anal.*，第9卷，第4期，第899–914页，2024年。[3] H. Bansal、A. Maharana、L. Sahu 与 K. B. Sinha，“谱密度、散射截面、时间延迟中的形状共振及逗留时间的界”，*J. Math. Anal. Appl.*，第558卷，第1期，文章编号130373，2026年。[4] R. L. Frank、A. Laptev 与 T. Weidl，*Schrödinger operators: eigenvalues and Lieb–Thirring inequali-ties*，剑桥高等数学研究，第200卷，剑桥大学出版社，剑桥，2023年，xiii+507页。[5] J. S. Howland，“嵌入特征值处共振的皮瑟级数”，*Pacific J. Math.*，第55卷，第157–176页，1974年。

[6] A. Jensen 与 G. Nenciu，“论费米黄金法则：简并特征值”，载于 *Perspectives in operator algebras and mathematical physics*，Theta 高等数学丛书，第8卷，Theta，布加勒斯特，2008年，第91–103页。[7] T. Kato，《线性算子扰动理论》，施普林格出版社，柏林，1995年，第619页。[8] Ph. A. Martin，《量子散射过程的时间延迟》，载于 *New developments in mathematical physics (Schladming, 1981)*，施普林格，维也纳，1981年，第157–208页。[9] J. Milnor，*Morse theory*，数学研究年刊，第51号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1963年，第vi+153页。（根据 M. Spivak 与 R. Wells 的讲义笔记。）[10] D. Mitrea，《分布、偏微分方程与调和分析》，施普林格，纽约，2013年，第460页。[11] A. Orth，《量子力学共振与极限吸收：多体问题》，*Comm.Math. Phys.*，第126卷，第3期，第559–573页，1990年。[12] B. Simon，《具有伸缩解析势的n体量子系统中的共振及含时微扰理论的基础》，数学年刊（2）97，1973年，第247–274页。[13] G. Teschl，《量子力学中的数学方法：及其在Schr¨odinger算子中的应用》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009年，第305页。[14] D. R. Yafaev，《数学散射理论：一般理论》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992年，第341页。

Hemant Bansal, Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research Mohali, Sector 81, SAS Nagar, Punjab 140306, India*Email address*: ph20030@iisermohali.ac.inAlok Maharana, Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Ed-ucation and Research Mohali, Sector 81, SAS Nagar, Punjab 140306, India*Email address*: maharana@iisermohali.ac.inLingaraj Sahu, Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research Mohali, Sector 81, SAS Nagar, Punjab 140306, India*Email address*: lingaraj@iisermohali.ac.in