arXiv:2603.08559v1 [math.CV] 9 Mar 2026

移位算子的二变量压缩、TOEPLITZ算子与数值域

KELLY BICKEL†、KATIE QUERTERMOUS 与 MATINA TRACHANA

摘要。本文研究与双圆盘上有理内函数相关联的移位算子的二变量压缩；它们推广了与有限布拉施克乘积相关联的经典移位压缩，并且酉等价于单变量矩阵值 Toeplitz算子。本文证明，有理内函数几乎完全由这些托普利兹算子符号所决定，但同时给出例子表明（与单变量情形不同），有理内函数并不能由其压缩移位算子的数值域所决定。本文还研究相关问题，包括构造这些压缩移位 Toeplitz算子的方法，以及相应数值域何时为开集、何时为闭集。

1. 引言

1.1. 单变量情形。 考虑有限布拉施克乘积集合 B，它们是形如

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z},$$

其中 $|\lambda| = 1$ 与 $|a_j| < 1$ 对于 $j = 1, \ldots\ldots, n$。这类函数在单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的表现大致类似于多项式，并在 $\mathbb{D}$ 上的函数论中起着重要作用，例如在涉及插值、逼近和因子分解的问题中，参见 [16, 17]。它们也是内函数的典型例子，即 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，其在单位圆 $\mathbb{T} := \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1\}$ 上的径向边界值几乎处处具有绝对值 1 。本文关注与之相关的算子，称为移位压缩。

具体而言，令 $H^2(\mathbb{D})$ 表示单位圆盘上的经典 Hardy 空间，即由满足以下条件的 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数构成的希尔伯特空间

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ with } \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,$$

日期：2026年3月10日。2020 数学主题分类。 主分类号 47B32；47A13；次分类号 47A12；47B35；32A08。关键词与短语。 模型空间，压缩移位算子，数值域，双圆盘，有理内函数。

† 本研究部分由美国国家科学基金会 DMS项目资助 #2000088 提供支持。

并令 S 表示 H^2 上由 $[Sf](z) = zf(z)$ 给出的移位算子。对于每个有限 Blaschke 乘积 B （实际上对于每个内函数 θ），都可以定义相应的模型空间 $K_B := H^2(\mathbb{D}) \ominus BH^2(\mathbb{D})$ 及其移位算子的压缩

$$S_B := P_B S|_{K_B},$$

其中 P_B 是从 H^2 到 K_B的正交投影。移位算子的压缩受到广泛关注，部分原因是它们是大量算子的“模型算子”，部分原因是它们具有一些令人惊讶而又优美的性质，参见 [13, 15, 16, 32]。

要了解这类性质的一个例子，请回想一下：对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的任意有界算子 A，其数值域 $W(A)$ 和数值半径 $w(A)$ 定义如下：

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \quad \text{and} \quad w(A) = \sup_{z \in W(A)} |z|.$$

算子的数值域在各种应用中都有所体现，它既近似于算子的谱，也包含算子的其他信息；例如，算子 A 是自伴的，当且仅当 $W(A) \subseteq \mathbb{R}$。有关数值域的更多性质和用途，请参见 [21] 。

对于移位压缩，Gau and Wu 在 [18] 中以及 Mirman 在 [31] 中证明，对于每个次数为 $B = n$ 的有限布拉施克乘积 B，其数值域 $W(S_B)$ 都满足一种称为庞斯列性质的优美几何条件：对于每个点 $\lambda \in \mathbb{T}$，都存在一个内接于 $\mathbb{T}$ 的 $(n+1)$ 边形，该多边形外切于 $W(S_B)$ 的边界，且以 λ 为一个顶点。该结果及相关技巧还推导出 $W(S_B)$ 的其他性质，例如，其闭包恰好等于其酉 1- 膨胀的数值域的交集。

此外，由于 $\dim K_B = \deg B$，还可以将 S_B 视为一个矩阵。具体而言，相对于称为 Takenaka-Malmquist-Walsh 基的标准正交基，S_B 的矩阵表示正是这个 $n \times n$上三角矩阵，见 [16, 19]:

$$M_B = \begin{bmatrix} a_1 & \sqrt{1-|a_1|^2}\sqrt{1-|a_2|^2} & \dots & (\prod_{k=2}^{n-1}(-\overline{a_k}))\sqrt{1-|a_1|^2}\sqrt{1-|a_n|^2} \\ 0 & a_2 & \dots & (\prod_{k=3}^{n-1}(-\overline{a_k}))\sqrt{1-|a_2|^2}\sqrt{1-|a_n|^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

由（1.1）可知，M_B 仅取决于 B的零点，而 B的零点恰好就是它的特征值。据此可推得，若 B_1，B_2 是有限布拉施克乘积，则 M_{B_1} 与 M_{B_2} 酉相似，当且仅当 B_1 和 B_2 具有相同的

零点集。更一般地，以下结果揭示了算子S_B 及其数值域 $W(S_B)$如何唯一地取决于有限布拉施克乘积 B的选取：

定理 1。 **1.** 设 B_1、 B_2 是有限布拉施克乘积。则以下各项等价 *t:*

(i) $B_1 = \lambda B_2$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{T}$ 成立；
(ii) S_{B_1} 与 S_{B_2} 酉等价；(iii) $W(S_{B_1}) = W(S_{B_2})$；(iv) $\deg B_1 = \deg B_2$ 且 $W(S_{B_1}) \subseteq W(S_{B_2})$。

(i) 与 (ii) 的等价性可由S_B 在（1.1）中的矩阵表示立即得到。较为微妙的 (i) 与 (iii) 以及 (iv) 之间的等价性归功于 Gau and Wu，参见 [18, 定理 4.1 和引理 4。2]一般而言，同阶的方阵 M_1 和 M_2 可以具有相同的数值域，而彼此并不酉相似。因此，这展示了移位压缩的一种特殊性质。

1.2. 二变量情形。 本文将研究二变量情形下的移位压缩，并探讨这些唯一性结果的类似结论以及数值域的性质。具体而言，令 $\mathbb{D}^2$ 表示由 $\mathbb{D}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|, |z_2| < 1\}$. 给出的单位双圆盘。定义在 $\mathbb{D}^2$ 上的有限 Blaschke乘积的二变量推广称为有理内函数（RIF）；它们是在 $\mathbb{D}^2$ 上全纯、在 $\mathbb{T}^2$ 上几乎处处模为 1 且具有径向边界值的有理函数。以下是两个例子：

$$\phi(z_1, z_2) = z_1 z_2^2 \left(\frac{z_1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z_1}{2}}\right)\left(\frac{z_2 - \frac{i}{3}}{1 + i\frac{z_2}{3}}\right) \quad \text{and} \quad \theta(z_1, z_2) = \frac{2z_1 z_2 - z_1 - z_2}{2 - z_1 - z_2}. \tag{1.2}$$

第一个例子 ϕ （1.2）表明，我们可以利用单变量有限 Blaschke乘积构造一些有理内函数。第二个例子 θ 表明，有理内函数并不总能像有限 Blaschke乘积那样分解为良好的线性因子。此外，它们在 $\mathbb{D}^2$的边界上可能有奇点，这一点可由 θ 在 (1, 1) 处不存在看出。对于有理函数或多项式 f，我们用 $\deg_j f$ 表示 z_j 在 f的表达式中出现的最高次幂，并令 $\deg f =$ 为（$\deg_1 f$，$\deg_2 f$）。因此，在（1.2）中，$\deg \phi =$ 为（2，3）。

有理内函数确实具有某些确定的结构。Rudin 和 Stout [35, 36] 证明，对于每个有理内函数 θ，都存在一个在 $\mathbb{D}^2$ 中没有零点的多项式 p、一对有序非负整数 (m, n)，其中 $(m, n) \geq \deg p,$，以及 $\lambda \in \mathbb{T}$，使得

$$\theta(z_1, z_2) = \lambda \frac{\tilde{p}(z_1, z_2)}{p(z_1, z_2)}, \tag{1.3}$$

其中 $\tilde{p}(z)$ 是由 p 定义的反射多项式

$$\tilde{p}(z_1, z_2) = z_1^m z_2^n \overline{p\left(\tfrac{1}{\bar{z}_1}, \tfrac{1}{\bar{z}_2}\right)}.$$

此外，任何形如 (1.3) 且 $\tilde{p}$ 为多项式的函数都是有理内函数。请注意，我们选择将 m 和 n 的完整值纳入反射$\tilde{p}$ 的定义中，做法与 [10] 相同，以简化记号。

如果进一步要求 p 为非环面型，那么多项式 p 实际上可以唯一确定（相差一个常数倍），在两个变量的情形下，这意味着 p 在 $\mathbb{T}^2$ 上至多只有有限个零点，参见 [3, 定理 3.3 和第 4] 节。由于我们假设 p 在 $\mathbb{D}^2$中没有零点，因此 p 为非环面型等价于要求 p 和 $\tilde{p}$ 没有公因子 [3, 27]，并且这意味着 p 在双圆盘的面 $\mathbb{D}\times\mathbb{T}$ 和 $\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 上没有零点，参见 [35, 定理 4.9.1]。由于 p 在 $\mathbb{D}^2$ 中没有零点，$\deg\,\tilde{p}=(m,n)\geq\deg\,p$。因此 m 将是 z_1 的最高次幂，而 n 将是 z_2 在 θ 中出现的最高次幂，所以$\tilde{\deg}\,\theta=(m,n)$。本文中，凡写作 $\theta=\lambda_p^p$ 是次数为 (m,n) 的有理内函数时，均假定 p 和 $\tilde{p}$ 是上述非环面型多项式及其反射。尽管有理内函数比有限布拉施克乘积更复杂，但它们在双圆盘上的插值和逼近应用中仍发挥着类似的作用，参见 [2, 35]。

为了迈向移位算子的二变量压缩的定义，令 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 表示 $\mathbb{D}^2$ 上的二变量 Hardy 空间，即由 $\mathbb{D}^2$ 上形如以下形式的全纯函数构成的希尔伯特空间

$$f(z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{m,n}z_1^m z_2^n \text{ with } \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D}^2)}:=\sum_{m,n=0}^{\infty}|a_{m,n}|^2<\infty.$$

与单变量情形一样，我们固定一个 RIF θ，并定义相应的二变量模型空间为

$$\mathcal{K}_\theta:=H^2(\mathbb{D}^2)\ominus\theta H^2(\mathbb{D}^2).$$

在这一框架下，现在有两个移位算子 S_{z_1}，S_{z_2}，它们定义在 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 上，由 $[S_{z_j}(f)](z)=z_jf(z)$ 给出，其中 $j=1$，2，因此，在每个 上有两个移位算子的压缩

$$\hat{S}^j_\theta:=P_\theta S_{z_j}|_{\mathcal{K}_\theta},$$

其中 P_θ 是从 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 到 $\mathcal{K}_\theta$ 的正交投影。在数值域的语境下，这些算子并不是特别有趣，因为通常每个 $W(\hat{S}^j_\theta)$ 的闭包都是 $\mathbb{D}$，见 [10]。为了得到一个更接近单变量情形的框架，我们需要进一步分解 $\mathcal{K}_\theta$。可用的关键工具称为 *Agler* 分解。正如 [4], 中所证明的，每个 $\mathcal{K}_\theta$ 都可分解为

$$\mathcal{K}_\theta=\mathcal{S}_1\oplus\mathcal{S}_2,$$

其中，每个 $\mathcal{S}_j$ 都是 $\mathcal{K}_\theta$ 的闭子空间（因此也是 $H^2(\mathbb{D}^2)$的闭子空间），且在移位S_{z_j}作用下保持不变。这些分解给出了以下移位压缩的另一种形式

$$S^1_\theta=P_{\mathcal{S}_2}S_{z_1}|_{\mathcal{S}_2}\quad\text{and}\quad S^2_\theta=P_{\mathcal{S}_1}S_{z_2}|_{\mathcal{S}_1},\tag{1.4}$$

其中， $P_{\mathcal{S}_j}$ 是从 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 到 $\mathcal{S}_j$上的正交投影。第一作者与 P. Gorkin 研究了移位的这两变量压缩及其数值域，见 [10], ，但仍有一些问题悬而未决。该论文中的一个关键结果如下，见 [10]:

定理 1.2. 设 θ 是一个次数为 (m,n) 的有理内函数，且满足 $m \geq 1$。则存在一个 $m \times m$矩阵值函数 M_θ^1，其元素在 $\mathbb{D}$ 上连续且关于 $\overline{z}_2$ 为有理函数，使得 S_θ^1与由 $T_{M_\theta^1}$ 定义的矩阵值 *Toeplitz* 算子酉等价:

$$T_{M_\theta^1}\overrightarrow{f} = P_{H_2^2(\mathbb{D})^m}(M_\theta^1\overrightarrow{f}) \quad for\ \overrightarrow{f} \in H_2^2(\mathbb{D})^m,$$

其中 $H_2^2(\mathbb{D})$ 表示变量为 z_2 的单变量*Hardy*空间，而 $H_2^2(\mathbb{D})^m := \bigoplus_{j=1}^m H_2^2(\mathbb{D})$。

因此，这些移位算子的二变量压缩与单变量矩阵值 Toeplitz 算子酉等价。这一事实将在本文中发挥重要作用，而符号 M_θ^1 将发挥类似于单变量情形中（1.1）的矩阵 M_B 的作用。将范围限制在 $\mathcal{S}_1$ 而不是 $\mathcal{S}_2$，可以类似地得到与压缩移位算子 S_θ^2相关联的符号 M_θ^2。

继续之前，需要注意的是，在定理 1.2 中，算子 S_θ^1 取决于将 $\mathcal{K}_\theta$ 分解为 S_{z_1}-不变子空间 $\mathcal{S}_1$ 和 S_{z_2}-不变子空间 $\mathcal{S}_2$的方式。一般而言，这种分解有多种选取方式。同时，M_θ^1 的公式还取决于子空间 $\mathcal{S}_2 \ominus S_{z_2}\mathcal{S}_2$的一组标准正交基；第 2 节将对此关系作出说明。与 [10], 中的做法一样，我们通常会省略这些依赖关系，直接写作 M_θ^1，但需注意，这里隐含地依赖于所选的分解和基。不过，在某些地方，这些选择十分重要，此时我们将使用记号 M_{θ,β_2}^1 表示由特定分解 $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 及其对应的 $\mathcal{S}_2 \ominus S_{z_2}\mathcal{S}_2$的一组标准正交基 β_2 所得到的矩阵值函数。必要时，我们也可以使用类似的记号 M_{θ,β_1}^2 来强调 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 的基 β_1。

尽管它比单变量矩阵 M_B更复杂，但矩阵值函数 M_θ^1 可以根据 $\mathcal{S}_2$ 的基向量作自然解释，有时还能精确计算。例如，在例 5.4中，我们考虑

$$\theta(z_1,z_2) = \frac{2z_1^2z_2 - z_1^2 - z_1z_2}{2 - z_1 - z_2}$$

并找到 $\mathcal{K}_\theta$ 的一个分解，使其为 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$，从而满足

$$M_\theta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}(1-\overline{z}_2)}{2-\overline{z}_2} & \frac{1}{2-\overline{z}_2} \end{bmatrix}.$$

关于计算M_θ^1 的方法，我们将在第2节中给出更多细节。

在本文中，受其与一元矩阵值托普利兹算子这一关系的启发，我们以 [10] 的工作为基础，进一步探讨（1.4）中所定义的二元移位算子的压缩的结构与性质。然而，值得注意的是，其他二元移位、移位不变子空间及相关对象已在文献中得到广泛研究，例如参见 [5, 9, 8, 14, 29, 30, 37]。

1.3. **论文概述与主要结果**。 在第 2 节中，我们进一步介绍二变量情形的直观解释与详细内容，包括对 Agler 分解的补充说明、定理 1.2 的构造性版本，以及一个示例，说明如何为给定次数 M_θ^1 的 $(2,\ 1)$ 有理内函数 θ。

在第 3 节中，我们研究满足 deg $\theta = (1, n)$ 的有理内函数 θ。在这种情况下，定理 1.2 表明 M_θ^1 是一个 1×1 函数，因此， S_θ^1 与一个标量值 Toeplitz 算子酉等价。第 3 节探讨了这一观察带来的影响。首先，在命题 3.1 中，我们给出相关 Toeplitz 算子的符号公式。随后，我们利用关于 Toeplitz 算子的已知结果，刻画压缩移位 S_θ^1 的谱、数值域和数值半径，并推导出它的一些其他性质。例如，我们在命题 3.5 中证明了一个唯一性结果，在注 3.4 中刻画了何时 $W(S_\theta^1)$ 是开集，并在命题 3.6 中指出哪些函数 M_θ^1可与某个压缩移位 S_θ^1 相关联。

对于一般的有理内函数，矩阵值函数 M_θ^1 是 (1.1) 的二变量类比。为便于进一步研究这一矩阵值函数，我们在第 4 节针对若干类有理内函数示例 θ 构造 M_θ^1。具体而言，我们考虑由较简单的有理内函数有限乘积构成的有理内函数 θ，并将 [10] 中的一种算法加以推广，根据有理内函数因子的分解及其对应的矩阵值函数，构造 θ的分解 $\mathcal{K}_\theta$ 及相应的 M_θ^i。在分析次数为 (1, 0) 和 (1, 1) 的有理内函数可能的分解后，我们将此算法应用于这些次数的有理内函数的有限乘积，包括任意次数为 $(m, 0)$ 的有理内函数，以及形如 $\theta(z) = B(z_1 z_2)$ 的有理内函数，其中 B是单变量有限 Blaschke 乘积。在后一种情形下， M_θ^1 可由 (1.1) 中的矩阵 M_B 构造得到。

定理 1.1 中的单变量结果以及次数 $(1,\ n)$ 情形下的结果引出了三个自然问题。首先，在第 5节中，我们讨论**问题 1：如果** θ 和 ϕ 是两个有理内函数，那么矩阵值函数 M_θ^j和 M_ϕ^j满足什么条件，才能保证 $\theta = \lambda\phi$对某个 $\lambda \in \mathbb{T}$成立？为此，我们首先研究 θ 和 ϕ相差涉及z_2的内因子的情形，然后根据 M_θ^1和 M_ϕ^1的结构对这一问题进行刻画。相关结果以定理 5.1 的形式给出，并有以下推论回答问题 1：

推论 *5.2*。设 θ, ϕ 是 $\mathbb{D}^2$ 上的有理内函数，且 M_θ^j, M_ϕ^j 如上文针对 $j = 1, 2$ 所定义。那么，对于某个 $\lambda \in \mathbb{T}$， $\theta = \lambda\phi$ 当且仅当存在定义在 $\mathbb{T}$ 上的酉值函数 U_1, U_2，使得对于每个 $\tau \in \mathbb{T}$ 和 $j = 1, 2$， $M_\theta^j(\tau) = U_j(\tau) M_\phi^j(\tau) U_j(\tau)^*$.

这表明，对于 $\mathcal{K}_\theta$ 的任意分解，符号 M_θ^1、M_θ^2 几乎可以唯一确定对应的两个压缩移位算子 θ。接着，在推论 5.3 中，我们将~定理 5.1 应用于 $\theta = \phi$ 的情形，但符号 M_θ^1 和 M_θ^1 来自 $\mathcal{K}_\theta$ 的不同分解。例 5.4 展示了如何寻找这样的 $\mathcal{K}_\theta$ 分解、计算M_θ^1，以及研究酉值函数 U_1、U_2 的各种性质，例如它们并不总是常数这一事实。

在第 6 节中，我们探讨问题 2：如果 θ 和 ϕ 是两个有理内函数，那么对于 $j = 1, 2$，数值域相等 $W(S_\theta^j) = W(S_\phi^j)$ 能告诉我们关于 θ 和 ϕ之间关系的哪些信息？遗憾的是，这种关系似乎比单变量情形复杂得多（在单变量情形中，$B_1 = \lambda B_2$）。第 6 节还讨论了一些部分结果和例子，表明答案并不简单，而本节的核心是例 6.3。这个例子表明，对于 $t \in (0, 1)$，以下两类次数为 (2, 2) 的有理内函数：

$$\phi_t(z) = \left(\frac{z_1 z_2 - t}{1 - t z_1 z_2}\right)^2 \quad \text{and} \quad \psi_{t(2-t)}(z) = z_1 z_2 \left(\frac{z_1 z_2 - t(2-t)}{1 - t(2-t) z_1 z_2}\right)$$

具有相同的数值域 $W(S_{\phi_t}^j) = W(S_{\psi_{t(2-t)}}^j)$，其中 $j = 1, 2$。然而，这些函数似乎不存在明显的关系。

最后，第 7 节考察问题 3：如果 θ是有理内函数，那么何时 $W(S_\theta^j)$ 是开集，何时 $W(S_\theta^j)$ 是闭集？在猜想 7.1 中，我们提出，次数为 $(1, n)$ 的结果很可能在一般情形下也成立；也就是说，如果 θ 是分别由 z_1 和 z_2中的有限布拉施克乘积构成的乘积，那么每个 $W(S_\theta^j)$ 都是闭集；否则，每个 $W(S_\theta^j)$ 都是开集。命题 7.2 和例 7.3 讨论了 θ 是此类有限布拉施克乘积的乘积时的情形。具体而言，命题 7.2 表明，对于这样的 θ，总至少有一对 $W(S_\theta^1)$ $W(S_\theta^2)$ 必须是闭集；但例 7.3 表明，处理一般情形（所有来自 $\mathcal{K}_\theta$ 的可能分解的所有 M_θ^j）颇具挑战。与此同时，定理 7.4 建立了关于开性的以下部分结果：

定理。 *7.4.* 设 $\theta = \lambda_p^{\tilde{p}}$ 是定义在 $\mathbb{D}^2$上的有理内函数。若不存在一条直线同时与所有 $W(M_\theta^1(\tau))$ 的数值域相交，则对于所有 $\tau \in \mathbb{T}$，$W(S_\theta^1)$ 必为开集。

例7.5阐释了该定理，并为猜想7.1提供了进一步的支持。

致谢

特别感谢 Pamela Gorkin 和 Meredith Sargent，感谢她们就本文的总体方向以及所探讨的具体问题进行了许多富有帮助的讨论并分享了宝贵见解。由于本研究始于由莱顿洛伦兹中心举办的会议算子理论女性工作组，作者还想

感谢 LorentzCenter 的工作人员和研讨会组织者，感谢他们营造了如此富有启发性且协作融洽的环境。

2. 二变量细节

本节介绍有理内函数的 Agler 分解背景，以及如何利用它们确定定理 M_θ^1 所述的矩阵值函数 1.2。下文中，˜设 $\theta = \lambda_p^p$ 是一个次数为 $(m,\ n)$的有理内函数。正如 [4] 中所证明、并在 [7],中进一步研究的那样，模型空间 $\mathcal{K}_\theta$ 可分解为

$$\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1^{\max} \oplus \mathcal{S}_2^{\min} = \mathcal{S}_1^{\min} \oplus \mathcal{S}_2^{\max},$$

其中，$\mathcal{S}_1^{\max}$（分别为 $\mathcal{S}_2^{\max}$）是 $\mathcal{K}_\theta$ 中在 S_{z_1}（分别为 S_{z_2}）、$\mathcal{S}_2^{\min} = \mathcal{K}_\theta \ominus \mathcal{S}_1^{\max}$ 和 $\mathcal{S}_1^{\min} = \mathcal{K}_\theta \ominus \mathcal{S}_2^{\max}$ 作用下不变的最大（必然闭）子空间。稍令人惊讶的是，每个 $\mathcal{S}_j^{\min}$ 在 S_{z_j} 作用下都是不变的。这些分解具有典范性，具体而言，若 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 是 $\mathcal{K}_\theta$ 的任意一个正交分解，且每个 $\mathcal{S}_j$ 都在 S_{z_j} 作用下不变（我们常将其简称为在 z_j 下不变），则 $\mathcal{S}_j^{\min} \subseteq \mathcal{S}_j \subseteq \mathcal{S}_j^{\max}$。

现在固定这样一个正交分解 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$，其中每个 $\mathcal{S}_j$ 都是一个闭的 S_{z_j}-不变子空间。众所周知，$\mathcal{K}_\theta$ 是一个再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$K_\theta(z,w) := \frac{1 - \theta(z)\overline{\theta(w)}}{(1 - z_1\overline{w_1})(1 - z_2\overline{w_2})}.$$

如 [7, 定理 2.5 和 3.7], 的证明中所述，存在一对全纯的半正定核 $K_1,\ K_2 : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$，使得每个 $\mathcal{S}_j$ 都是一个核为 $\frac{K_j}{1-z_j w_j}$. 的再生核希尔伯特空间。我们将此记作

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{H}\left(\frac{K_1(z,w)}{1 - z_1\overline{w_1}}\right) \quad \text{and} \quad \mathcal{S}_2 = \mathcal{H}\left(\frac{K_2(z,w)}{1 - z_2\overline{w_2}}\right). \tag{2.1}$$

K_j 的显式公式为 $K_j(z,\ w) = (1 - z_j w_j)(P_{\mathcal{S}_j}(K_\theta(\cdot,\ w))^\intercal(z)$，并且

$$K_\theta(z,w) = \frac{K_1(z,w)}{1 - z_1\overline{w_1}} + \frac{K_2(z,w)}{1 - z_2\overline{w_2}}.$$

这意味着核对 $(K_1,\ K_2)$ 满足方程

$$1 - \theta(z)\overline{\theta(w)} = (1 - z_1\overline{w_1})K_2(z,w) + (1 - z_2\overline{w_2})K_1(z,w) \tag{2.2}$$

对所有 $z, w \in \mathbb{D}^2$ 均成立。更一般地，方程 (2.2) 称为 θ 的 Agler 分解，而满足 (2.2) 的任意全纯半正定核 (K_1, K_2) 称为 θ 的 Agler 核。若从 θ 的一对 Agler 核 (K_1, K_2) 出发，则由 (2.1) 定义的空间 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 必然收缩包含于 $\mathcal{K}_\theta$ 中，且每个 $\mathcal{S}_j$ 都具有 S_{z_j}-不变性。然而，除非 θ 的 Agler 分解唯一，否则还必须验证

这一点， $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}$ 以便应用 Aronszajn核和定理的一个推论，从而得出 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 是正交子空间，并且在 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 范数下是闭的，且 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$。例如，参见 [1, 4, 7, 25, 26]，了解有关 Agler 核的更多信息；参见 [33]，了解有关再生核希尔伯特空间的一般事实。

继续使用我们固定的分解 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 及相应的核K_1， K_2 它们满足（2.1），注意到 $\mathcal{H}(K_2) = \mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$。如 [11, 定理2。2], $\dim(\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2) = m$所示，并且只要 $m \geq 1$，就存在一个由以下形式的$\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 组成的标准正交基

$$\beta_2 = \left\{ \frac{q_1}{p}, \dots, \frac{q_m}{p} \right\} \text{where all the } q_i \text{ are polynomials with } \deg q_i \leq (m-1, n). \tag{2.3}$$

回顾一下，我们可以通过公式 $K_2(z, w) = \sum_{i=1}^{m} q_i(z)\, \overline{q_i(w)}\, p(z)\, \overline{p(w)}$，利用该基恢复核 K_2。~~我~~我们还可以通过下式给出的酉算子 $\mathcal{U}_{\beta_2} : H_2^2(\mathbb{D})^m \to \mathcal{S}_2$ 恢复整个子空间 $\mathcal{S}_2$：

$$\mathcal{U}_{\beta_2} \vec{f} := \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{p} f_i \quad \text{for} \quad \vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in H_2^2(\mathbb{D})^m. \tag{2.4}$$

如定理 1.2 所述， $H_2^2(\mathbb{D})$ 表示变量为 z_2 和 $H_2^2(\mathbb{D})^m := \bigoplus_{j=1}^{m} H_2^2(\mathbb{D})$ 的单变量Hardy空间。还值得注意的是，如果 $m = 0$，那么 θ 具有唯一的 Agler 分解，见 [24, 推论 1. 16]。在这种情况下，令 $\mathcal{S}_1 := \mathcal{K}_\theta$ 且 $\mathcal{S}_2 := \{0\}$，即可得到一个（因而也是全部）此类分解。虽然我们主要关注 $\mathcal{S}_2$，但也可以对 $\mathcal{S}_1$ 进行类似分析，以证明存在一个由 $\mathcal{H}(K_1) = \mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 构成的标准正交基，其形式为

$$\beta_1 = \left\{ \frac{r_1}{p}, \dots, \frac{r_n}{p} \right\} \text{where all the } r_i \text{ are polynomials with } \deg r_i \leq (m, n-1), \tag{2.5}$$

可用于定义酉算子$\mathcal{U}_{\beta_1}$： $H_1^2(\mathbb{D})^n \to \mathcal{S}_1$ 以类似于（2.4）的方式。正如预期， $H_1^2(\mathbb{D})$ 表示变量为 z_1.的单变量Hardy空间

如果从 θ的任意一对（K_1， K_2）Agler 核出发，正如 [11, 定理2.1],$\mathcal{H}$（K_1）和 $\mathcal{H}$（K_2）都是有限维的，并且存在多项式 r_1、……、 r_s， q_1、……、 q_t，满足 deg $r_i \leq$（m， $n-1$）和 deg $q_j \leq$（$m-1$， n），使得

$$K_1(z, w) = \sum_{i=1}^{s} \frac{r_i(z)\overline{r_i(w)}}{p(z)\overline{p(w)}} \text{ and } K_2(z, w) = \sum_{j=1}^{t} \frac{q_j(z)\overline{q_j(w)}}{p(z)\overline{p(w)}}. \tag{2.6}$$

这些事实的证明可见 [4, 7, 24]。关于有理内函数的 Agler 分解及相关对象的更多信息，包括精细分解、构造方法和有趣的例子，请参阅 [12, 20, 23, 27, 28]。如果集合中的所有

集合中的元素

$$\left\{ z_1^k \frac{r_i}{p}, z_2^\ell \frac{q_j}{p} \ : |, k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \le i \le s, 1 \le j \le t \right\}$$

在 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 中两两正交，则可以证明 $\mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix} K_1(& z\, w \\ & 1-z_1 w_1 \end{smallmatrix}\right) \cap \mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix} K_2,) (& z\, w \\ & \underline{1-z_2 w_2} \end{smallmatrix}\right) =,) \{0\}$，因此由 (2.1) 定义 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$，可得到所需形式的正交分解 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$。进而可知，$\overline{\overline{s}} = n$、$t = m$、$\beta_1 = \{ \frac{r_1}{p}, \ldots, \frac{r_n}{p} \}$ 是 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1 \mathcal{S}_1$ 中具有 (2.5) 形式的标准正交基，而 $\beta_2 = \{ \frac{q_1}{p}, \ldots, \frac{q_m}{p} \}$ 是 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2 \mathcal{S}_2$ 中具有 (2.3) 形式的标准正交基。β_1 和 β_2 中向量的正规性可由第5节 [33, 的讨论得出。3]。

回到一般情形以及我们固定的分解 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 和由 (2.3) 给出的基 β_2 $\mathcal{S}_2$ 在后向移位 $S_\theta^{1\,*} = S_{z_1}^* |_{\mathcal{S}_2}$ 下不变，这是由 [7, 命题 34] 得出的。因此，$S_{z_1}^* \frac{q_i}{p}$ 对于每个 $\frac{q_i}{p} \in \beta_2$，都能以唯一的方式写成 (2.4) 中的和的形式。现在我们给出定理 1.2 的一个构造性版本，它概括了 [10, 定理 32]的证明：

定理 2.1。设 $\theta = \lambda_p^p$ 是一个次数为 (m, n) 的有理内函数，且 $m \ge 1$ 以及分解 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 和基 $\beta_2 = \{ \frac{q_1}{p}, \ldots, \frac{q_m}{p} \}$ 如上所述。对于每个 $1 \le i \le m$，令 $h_{i1}, \ldots, h_{im}$ 为 $H_2^2(\mathbb{D})$ 中满足以下条件的单变量函数

$$S_{z_1}^* \left(\frac{q_i}{p} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{p} h_{ij}.$$

那么，每个函数 h_{ij} 都是关于 z_2 的有理函数，并且在 $\mathbb{D}$ 上连续，且

$$S_\theta^1 = \mathcal{U}_{\beta_2} T_{M_\theta^1} \mathcal{U}_{\beta_2}^*$$

其中 $T_{M_\theta^1}$ 是符号为 M_θ^1 的矩阵值 Toeplitz 算子：$= \left[\ h_{ij} \ \right]$ 而 $\mathcal{U}_{\beta_2}$ 是由下式定义的酉算子：(2.4)。

在本文中，记号 M_θ^1 或 M_{θ,β_2}^1（当我们希望强调 $\mathcal{S}_2$ 和 β_2 的选取时），始终表示上述定义的矩阵值函数。若 $m = 0$，则定理 2.1 不适用。相反，正如前文所述，必有 $\mathcal{S}_2 = \{0\}$，这意味着 $S_\theta^1 \colon \{0\} \to \{0\}$，因而，$W(S_\theta^1) = \emptyset$。此外，若 $n \ge 1$，则可使用 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1 \mathcal{S}_1$ 的一组标准正交基 β_1，其形式如式（2.5），将类似论证应用于 S_θ^2。在这种情况下，S_θ^2 通过酉算子 $\mathcal{U}_{\beta_1}$ 与符号为 $M_\theta^2 = M_{\theta,\beta_1}^2 := \left[\ h_{ij} \ \right]$ 的矩阵值 Toeplitz 算子 $T_{M_\theta^2}$ 酉等价，其中对所有 $1 \le i \le n$，$\tilde{h}_{i1}, \ldots, \tilde{h}_{in} \in H_1^2(\mathbb{D})$ 均满足 $S_{z_2}^* \left(\frac{r_i}{p} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{r_j}{p} \tilde{h}_{ij}$。

我们可以利用切片函数将矩阵值函数 M_θ^1 与单变量情形联系起来。由于 p 在 $\mathbb{T}^2$ 上至多有有限个零点，θ 的例外集定义为

定义为

$$E_\theta := \{\tau \in \mathbb{T} : p(t,\tau) = 0 \text{ for some } t \in \mathbb{T}\}, \tag{2.7}$$

必定是有限的。现在固定任意一个 $\tau \in \mathbb{T} \setminus E_\theta$。由 $\theta_\tau := \theta(\cdot,\tau)$ 定义的切片函数 θ_τ 是关于变量 z_1 的有限布拉施克乘积，其次数为 m，并有相应的单变量模型空间 $\mathcal{K}_{\theta_\tau}$。根据 [10, 定理2.2]，由 $\mathcal{J}_\tau f := f(\cdot,\tau)$ 定义的限制映射 $\mathcal{J}_\tau : \mathcal{H}(K_2) \to \mathcal{K}_{\theta_\tau}$ 是酉算子，因此 $\beta_{2,\tau} := \{\mathcal{J}_\tau(\frac{q_i}{p}) : \frac{q_i}{p} \in \beta_2\} = \{\frac{q_1}{p}(\cdot,\tau), \frac{q_2}{p}(\cdot,\tau), \cdots, \frac{q_m}{p}(\cdot,\tau)\}$ 是 $\mathcal{K}_{\theta_\tau}$ 的标准正交基。根据定理3.2和 3.5] 中的论证，矩阵 $M_\theta(\tau)$ 是相对于标准正交基 $\beta_{2,\tau}$ 的移位算子的单变量压缩的矩阵表示 S_{θ_τ}，因为

$$\begin{aligned}
\left\langle S_{\theta_\tau}\frac{q_j}{p}(\cdot,\tau), \frac{q_i}{p}(\cdot,\tau)\right\rangle_{\mathcal{K}_{\theta_\tau}} &= \left\langle \frac{q_j}{p}(\cdot,\tau), S_{z_1}^*\frac{q_i}{p}(\cdot,\tau)\right\rangle_{\mathcal{K}_{\theta_\tau}} \\
&= \sum_{k=1}^{m}\left\langle \frac{q_j}{p}(\cdot,\tau), \frac{q_k}{p}(\cdot,\tau)h_{ik}(\tau)\right\rangle_{\mathcal{K}_{\theta_\tau}} \\
&= \overline{h_{ij}(\tau)} = M_\theta^1(\tau)_{ij}.
\end{aligned}$$

因此存在一个酉矩阵 U_τ使得 $M_\theta^1(\tau) = U_\tau M_{\theta_\tau} U_\tau^*$，其中 M_{θ_τ}是相对于由（1.1）给出的 Takenaka-Malmquist-Walsh 基的 S_{θ_τ} 矩阵表示。这表明，（τ）的特征值是 θ_τ的零点。

例2.2：设 $p(z) = 1 - \frac{1}{2}z_1^2 z_2$，并设 θ为次数为 (2，1) 的有理内函数 $\theta(z) = \frac{\widetilde{p}(z)\,p(z)}{z_1^2 z_2 - \frac{1}{2}} = \frac{z_1^2 z_2 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z_1^2 z_2}$。那么，直接计算可得

$$\frac{1-\theta(z)\overline{\theta(w)}}{(1-z_1\overline{w_1})(1-z_2\overline{w_2})} = \frac{r_1(z)\overline{r_1(w)}}{p(z)\overline{p(w)}(1-z_1\overline{w_1})} + \frac{q_1(z)\overline{q_1(w)} + q_2(z)\overline{q_2(w)}}{p(z)\overline{p(w)}(1-z_2\overline{w_2})}$$

对于 $r_1(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}z_1^2$、$q_1(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$，以及 $q_2(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}z_1$。因此，

$$K_1(z,w) = \frac{r_1(z)\overline{r_1(w)}}{p(z)\overline{p(w)}} \text{ and } K_2(z,w) = \frac{q_1(z)\overline{q_1(w)}}{p(z)\overline{p(w)}} + \frac{q_2(z)\overline{q_2(w)}}{p(z)\overline{p(w)}}$$

满足（2.2），从而构成 θ的一个 Agler 核对。在0 处的 $z_1^j \frac{r_1}{p}$、$z_2^k \frac{q_1}{p}$ 和 $z_2^\ell \frac{q_2}{p}$ 的幂级数展开具有以下形式

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z_1^{2(i+1)+j} z_2^i, \quad \sum_{i=k}^{\infty} b_i z_1^{2(i-k)} z_2^i, \quad \text{and} \quad \sum_{i=\ell}^{\infty} c_i z_1^{2(i-\ell)+1} z_2^i,$$

分别地，其中标量 a_i，b_i 和 c_i 取决于 j、k 和 ℓ 的选择。比较各次幂可知，$\{z_1^j \frac{r_1}{p}, z_2^k \frac{q_1}{p}, z_2^\ell \frac{q_2}{p}$ 的元素：j，k，$\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ 在 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 中将两两正交，因为它们不含幂次成对匹配的项。因此，我们

得到正交分解 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$，其中

$$\mathcal{S}_1 := \mathcal{H}\left(\frac{r_1(z)\overline{r_1(w)}}{p(z)\overline{p(w)}(1-z_1\overline{w_1})}\right) \quad and \quad \mathcal{S}_2 := \mathcal{H}\left(\frac{q_1(z)\overline{q_1(w)}+q_2(z)\overline{q_2(w)}}{p(z)\overline{p(w)}(1-z_2\overline{w_2})}\right)$$

分别是 S_{z_1}-不变与 S_{z_2}-不变的闭子空间，且 $\beta_1 = \left\{\frac{r_1}{p}\right\}$与 $\beta_2 = \left\{\frac{q_1}{p}, \frac{q_2}{p}\right\}$ 分别是 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 与 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 的标准正交基。

为确定相对于 β_2的 M_θ^1，首先回顾移位 $S_{z_1}^*$ 的伴随算子由下式定义

$$\left(S_{z_1}^* f\right)(z_1,z_2) = \frac{f(z_1,z_2)-f(0,z_2)}{z_1}, \tag{2.8}$$

对 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$。因此，

$$S_{z_1}^*\frac{q_1}{p} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2(1-\frac{1}{2}z_1^2z_2)} - \frac{\sqrt{3}}{2(1-0)}}{z_1} = \frac{\sqrt{3}z_1z_2}{4(1-\frac{1}{2}z_1^2z_2)} = 0\left(\frac{q_1}{p}\right) + \frac{1}{2}z_2\left(\frac{q_2}{p}\right) \text{ and}$$

$$S_{z_1}^*\frac{q_2}{p} = \frac{\frac{\sqrt{3}z_1}{2(1-\frac{1}{2}z_1^2z_2)} - \frac{0}{2(1-0)}}{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2(1-\frac{1}{2}z_1^2z_2)} = 1\left(\frac{q_1}{p}\right) + 0\left(\frac{q_2}{p}\right),$$

因此，由定理 2.1，$M_\theta^1(z_2) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}z_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。容易看出，例外集 E_θ为空，并且对任意 $\tau \in \mathbb{T}$，$M_\theta^1(\tau)$的特征值确实是$\theta_\tau(z_1) = \frac{z_1^2\tau - \frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z_1^2\tau}$的零点

3. The Degree $(1,n)$ Case

本节探讨二变量压缩移位算子，以及它们在次数为 $(1,n)$ 的有理内函数上的性质。首先，当 θ 是次数为 $(1,n)$ 的有理内函数时，定理 2.1 有如下简单解释：

命题 3.1。设 $\theta = \lambda_p^{\tilde{p}}$是次数为 $(1,n)$ 的有理内函数。那么，定理 M_θ^1*2.1* 中的矩阵 *2.1*为

$$\overline{M_\theta^1(z_2)} = \frac{(-S_{z_1}^*p)(z_2)}{p(0,z_2)}. \tag{3.1}$$

此公式对 M_θ^1 的任意分解都成立，其中 $\mathcal{K}_\theta$ 分解为 $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 和 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 的标准正交基 β_2。

证明。设 $\{\frac{q}{p}\}$是 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$的一组基，且次数 $q \leq (0,n)$。于是应用（2.8），

$$\left(S_{z_1}^*\frac{q}{p}\right)(z) = q(z_2)\left(\frac{\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{p(0,z_2)}}{z_1}\right) = \frac{q}{p}(z)\cdot\frac{-(S_{z_1}^*p)(z_2)}{p(0,z_2)}.$$

因此，根据定理 2.1， S^1_θ 与 Toeplitz 算子 $T_{M^1_\theta}$ 酉等价，其中 M^1_θ 由（3.1）定义。□

这使我们能够立即回答关于 S^1_θ 在次数为 **(1，** n**)** 的情形下的一系列问题。

推论 3.2。 设 $\theta = \lambda^{\tilde{p}}_p$ 是次数为 $(1, n)$ 的有理内函数，设 M^1_θ 按 (3.1) 中的定义给出，并设 $M^1_\theta(\mathbb{D}) = \{M^1_\theta(z)\colon z \in \mathbb{D}\}$。则有以下结论：

i. S^1_θ 的谱是 $M^1_\theta(\mathbb{D})$ 的闭包。ii. S^1_θ 的数值域是 $M^1_\theta($ $\mathbb{D})$ 的凸包。iii. S^1_θ 的数值半径为 上确界 $|M^1_\theta(z)|$。$_{z\in\mathbb{D}}$

证明。 这些结论可由有界符号的反解析 Toeplitz 算子的已知性质立即推出，参见例如 [22]中的推论 2 及其前面的讨论。□

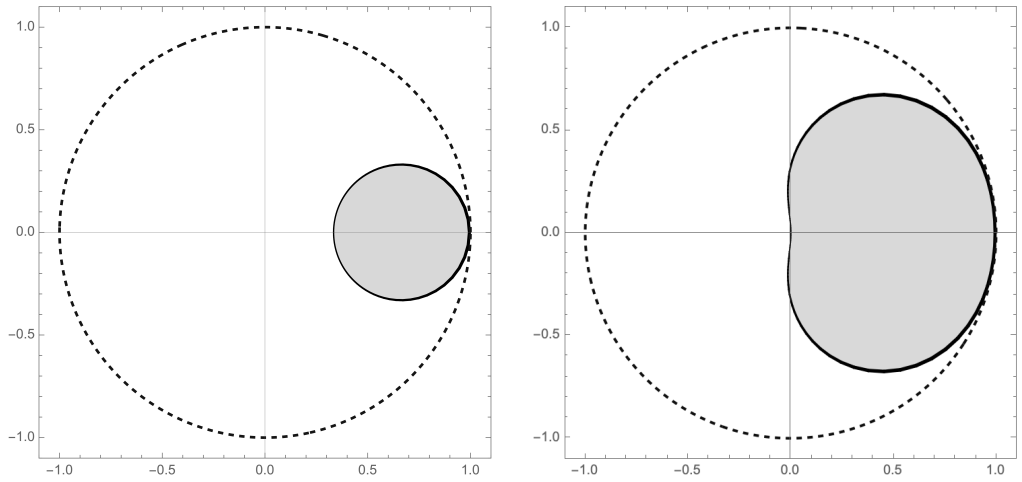
示例 3.3。 为说明推论 3.2，考虑以下有理内函数：

$$\theta(z_1, z_2) = \frac{2z_1z_2 - z_1 - z_2}{2 - z_1 - z_2} \quad \text{and} \quad \phi(z_1, z_2) = \frac{4z_1z_2^2 - z_2^2 - 3z_1z_2 - z_2 + z_1}{4 - z_1 - 3z_2 - z_1z_2 + z_2^2}. \tag{3.2}$$

利用（3.1）进行简单计算可得

$$M^1_\theta(z_2) = \frac{1}{2 - \bar{z}_2} \quad \text{and} \quad M^1_\phi(z_2) = \frac{1 + \bar{z}_2}{4 - 3\bar{z}_2 + \bar{z}_2^2}.$$

M^1_θ（$\mathbb{D}$） 和 M^1_ϕ（$\mathbb{D}$） 的闭包如下图图 3.1所示。根据推论



（a） $M^1_\theta(\mathbb{D})$ 的闭包　　（b） $M^1_\phi(\mathbb{D})$ 的闭包

图 3.1。 在 M^1_θ（$\mathbb{D}$） 中，M^1_ϕ（$\mathbb{D}$） 和 $\mathbb{D}$ 在 θ 和 ϕ 中，根据（3.2）的闭包。

3.2，这些图与以下算子的谱相吻合：S^1_θ 和 S^1_ϕ ，并取其

内部得到数值域 $W(S_\theta^1)$ 和 $W(S_\phi^1)$。图中还表明，数值半径满足 $w(S_\theta^1) = 1$ 以及 $w(S_\phi^1) = 1$。这与 [10, 定理 3.7],相符，因为 θ 和 ϕ 在 $\mathbb{T}^2$ 上的 $(1, 1)$ 处都有一个奇点。还可以证明，$M_\theta^1(\mathbb{D})$（因此 $W(S_\theta^1)$）是一个开欧几里得圆盘，其中心为$_{2\,3}$，半径为$_{1\,3}$。

关于来自 (3.2) 的 θ 的 $W(S_\theta^1)$ 的这一观察可推广如下：单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的每个开欧几里得圆盘，都可以表示为某个次数为 $(1, 1)$ 的有理内函数 θ 的 $W(S_\theta^1)$。为此，固定 $r \in (0, 1)$ 和 $c \in \mathbb{D}$，使得以 c 为中心、半径为 r 的开圆盘（此处记为 $D_r(c)$）包含于 $\mathbb{D}$ 中。定义多项式 $p(z) = 1 - \bar{c}z_1 - rz_1z_2$。那么 p 在 $\mathbb{D}^2$ 上不为零，并且容易验证 p、$\tilde{p}$ 没有公因子。定义有理内函数

$$\theta(z) = \frac{\tilde{p}}{p}(z) = \frac{z_1z_2 - cz_2 - r}{1 - \bar{c}z_1 - rz_1z_2}. \tag{3.3}$$

于是，经过简短计算可得 $M_\theta^1(z_2) = c + r\bar{z}_2$，进而推出

$$W(S_\theta^1) = M_\theta^1(\mathbb{D}) = D_r(c).$$

正如以下备注中所讨论的，推论3.2 意味着数值域$W(S_\theta^1)$ 对于次数为 θ 的有理内函数通常是开集，其次数为 $(1, n)$。

注记 3.4。在单变量情形中，与有限布拉施克乘积 B 相关联的移位算子的压缩 S_B 作用于有限维空间。因此，数值域 $W(S_B)$ 总是闭的。双变量情形则大不相同。

设 $\theta = \lambda\frac{\tilde{p}}{p}$是一个次数为 $(1, n)$的有理内函数。推论 3.2指出，$W(S_\theta^1)$ 是 $M_\theta^1(\mathbb{D})$的凸包。当 M_θ^1为常数时，$M_\theta^1(\mathbb{D})$（因此 $W(S_\theta^1)$）显然是闭的。注意，M_θ^1 为常数，当且仅当存在一个多项式 p_1 和一个常数 k 使得

$$p(z_1, z_2) = p_1(z_2) + z_1kp_1(z_2) = p_1(z_2)(1 + kz_1).$$

由于 deg $\theta = (1, n)$，p 也具有这种形式等价于 θ 是 z_1 中的一个次数为 1 的 Blaschke乘积与 z_2. 中的一个次数为 n 的 Blaschke乘积的乘积。然而，一旦 θ 不具有这种形式（即 M_θ^1不是常数），开映射定理便意味着 $M_\theta^1(\mathbb{D})$ 是开集，因此其凸包 $W(S_\theta^1)$ 也是开集。

因此，次数为 $(1, n)$ 的情形分为两种情况：若 θ 是 z_1中次数为 1 的 Blaschke乘积与 z_2中次数为 n的 Blaschke乘积之积，则 $W(S_\theta^1)$ 是闭的。否则，$W(S_\theta^1)$ 是开的。这回答了次数为 $(1, n)$ 的有理内函数 θ的问题 3。

我们也可以利用命题 3.1 中的公式，开始研究问题1 在次数为 $(1, n)$ 的有理内函数 θ 这一情形。

命题 3.5。设 $\theta = \lambda_1\frac{p}{p}$和 $\phi = \lambda_2\frac{q}{q}$分别为次数为 $(1, n)$ 和 $(1, k)$ 的有理内函数。当且仅当存在有限 *Blaschke*乘积 B_1，B_2，使得$\theta(z)B_1(z_2) = \phi(z)B_2(z_2)$时，$M_\theta^1 = M_\phi^1$成立。

Proof. 根据命题 3.1，函数 M_θ^1和 M_ϕ^1相等当且仅当

$$\frac{-(S_{z_1}^* p)(z_2)}{p(0,z_2)} = \frac{-(S_{z_1}^* q)(z_2)}{q(0,z_2)}. \tag{3.4}$$

对于正向推导，假设（3.4），并注意到它蕴含

$$q(0,z_2)\left(p(0,z_2)+z_1(S_{z_1}^* p)(z_2)\right) = p(0,z_2)\left(q(0,z_2)+z_1(S_{z_1}^* q)(z_2)\right), \tag{3.5}$$

值得注意的是，（3.5）意味着 p 和 q 在 z_1中的次数相同。令 r_1（z_2）：$=q(0,z_2)$ 和 r_2（z_2）：$=p(0,z_2)$。那么（3.5）等价于

$$r_1(z_2)p(z) = r_2(z_2)q(z). \tag{3.6}$$

由于 r_1，r_2 在 $\mathbb{D}$ 上没有零点，因此它们是有限 Blaschke 乘积的分母。令

$$C_1(z_2) = \frac{\tilde{r}_1(z_2)}{r_1(z_2)} \quad \text{and } C_2(z_2) = \frac{\tilde{r}_2(z_2)}{r_2(z_2)},$$

其中˜运算是针对 r_j 在 z_2. 中的次数进行的。那么（3.6）意味着存在单项式 $\gamma_1 z_2^{\ell_1}$和 $\gamma_2 z_2^{\ell_2}$，使得 γ_1，$\gamma_2 \in \mathbb{T}$ 因此若令

$$B_1(z_2) = \gamma_1 z_2^{\ell_1} C_1(z_2) \quad \text{and} \quad B_2(z_2) = \gamma_2 z_2^{\ell_2} C_2(z_2),$$

我们得到

$$B_1(z_2)\theta(z) = \gamma_1 z_2^{\ell_1}\frac{\tilde{r}_1(z_2)\tilde{p}(z)}{r_1(z_2)p(z)} = \gamma_2 z_2^{\ell_2}\frac{\tilde{r}_2(z_2)\tilde{q}(z)}{r_2(z_2)q(z)} = B_2(z_2)\phi(z).$$

对于另一个方向，假设对于某些有限 Blaschke 乘积 $B_1(z_1) = \lambda_1 {}^{\tilde{r}_1(z_2)\, r_1(z_2)}$和 $B_2(z_2) = \lambda_2 {}^{\tilde{r}_2(z_2)\, r_2(z_2)}$，有 $\theta(z)B_1(z_2) = \phi(z)B_2(z_2)$，其中 ˜ 运算针对每个 j 都是相对于 deg(B_j) 进行的，并且 λ_1，$\lambda_2 \in \mathbb{T}$。那么，由于 $r_1 p$ 和 $r_2 q$ 在 $\mathbb{D}^2$ 上没有零点，且在 $\mathbb{T}^2$ 上至多只有有限个零点，因此它们是非环面型的。由于它们是同一个有理内函数的非环面型分母多项式，因此必存在某个非零常数 c，使得

$$r_1(z_2)p(z) = cr_2(z_2)q(z).$$

由此，整理各项即可得出3.4式成立。 □

最后，我们可以利用命题 3.1 得到与次数为 M_θ^1的$(1,n)$ 有理内函数相对应的符号的如下刻画。

命题 3.6。单变量标量函数 f（z_2）满足 $\bar{f} = M_\theta^1$当且仅当存在某个有理内函数 θ，且 $\deg_1$（θ）≥ 1，使得 f 满足以下三个性质：

i. f 在 z_2 中为有理函数，且在 $\mathbb{D}$上连续，ii. $|f| < 1$ 在 $\mathbb{D}$上，iii. f 不是有限布拉施克乘积。

证明。对于正向，假设 $M_\theta^1 = f$ 对于某个有理内函数 $\theta = \lambda \frac{\tilde{p}}{p}$。根据定理2.1， θ 的次数必为 $(1, n)$ 对于某个 n 且 f 在中为有理函数，并在上连续。写作 $f = \frac{f_1}{f_2}$，且无公因子，(3.1)表明—

$$\frac{f_1(z_2)}{f_2(z_2)} = \frac{(-S_{z_1}^* p)(z_2)}{p(0, z_2)},$$

除至多有限多个 z_2 外均成立。由于 f_1 和 f_2 没有公因子，这意味着存在一个多项式 r，使得

$$-(S_{z_1}^* p)(z_2) = r(z_2) f_1(z_2) \quad \text{and } p(0, z_2) = r(z_2) f_2(z_2).$$

重新排列这些等式，得到 $p(z) = r(z_2)\left(f_2(z_2) - z_1 f_1(z_2)\right)$。由于 p 在 $(\mathbb{T} \times \mathbb{D}) \cup \mathbb{D}^2$ 上没有零点，我们必有 $|f_1| < |f_2|$ 在 $\mathbb{D}$ 上；同理，由于 p 在 $\mathbb{T}^2$ 上至多有有限个零点，f 不可能是有限布拉施克乘积。

对于反向推导，假设 f 满足性质 (i)-(iii)，并将 $f = \frac{f_1}{f_2}$ 写成没有公因子的形式。若 $f_1 \equiv 0$，令 $\theta = z_1$，则 $p \equiv 1$。否则，定义

$$p(z) = f_2(z_2) - z_1 f_1(z_2).$$

那么，对于某个 n， p 是一个次数为 $(1, n)$ 的不可约多项式。根据假设 (ii)， p 在 $\mathbb{D}^2$ 上没有零点。我们断言， p 是非环面型。为此，写作

$$\tilde{p}(z) = z_1 \tilde{f}_2(z_2) - \tilde{f}_1(z_2),$$

其中 f_2 与 f_1 均借助 $\deg_2(p)$ 计算。用反证法，假设p 不是非环面型。则 p 与 $\tilde{p}$ 有公因子。由于 p 不可约，这意味着

$$z_1 \tilde{f}_2(z_2) - \tilde{f}_1(z_2) = \tilde{p}(z) = \lambda p(z) = \lambda \left(f_2(z_2) - z_1 f_1(z_2)\right),$$

对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$成立。由于对一切 $\tau \in \mathbb{T}^2$均有 $|\tilde{p}(\tau)| = |p(\tau)|$，故必有 $\lambda \in \mathbb{T}$。于是 $-\lambda f_1 = \tilde{f}_2$，从而 $f = -\bar{\lambda} \frac{f_2}{f_2}$是满足 $\deg_1(f) = 0$的有理内函数，因此是z_2中的有限布拉施克乘积。由于这不被允许， p， $\tilde{p}$ 没有公因子，因此 p 是非环面型的。令$\theta = \frac{p}{p}$即得 $M_\theta^1 \backsimeq f$。□

4. 有理内函数乘积的 M_Θ^1

为便于研究更一般有理内函数的移位算子的压缩，我们现在建立一些工具，以便计算各类有理内函数的矩阵 M_θ^1，这些有理内函数将成为我们研究中的关键例子。具体而言，我们考虑有理内函数的有限乘积。这项工作推广了 Bickel 与 Gorkin [10] 的结果，他们研究了每个因子次数为 (1,1) 且在 $\mathbb{T}^2$上有奇点的情形。

下文中，设 $r \in \mathbb{N}$, $\Theta = \prod_{t=1}^r \theta_t$，其中每个 $\theta_t = \lambda_t \frac{p_t}{p_t}$都是次数为 (m_t, n_t) 的有理内函数，其对应的正交分解为 $\mathcal{K}_{\theta_t} = \mathcal{S}_1^{\theta_t} \oplus \mathcal{S}_2^{\theta_t}$，满足 $\mathcal{S}_1^{\theta_t}, \mathcal{S}_2^{\theta_t}$

分别关于 S_{z_1}-和 S_{z_2}-不变。对于 $1 \le t \le r$，假设 $m_t \ge 1$，并为 $\mathcal{S}_2^{\theta_t} \ominus z_2\mathcal{S}_2^{\theta_t}$. 固定一个标准正交基 $\beta_2^{\theta_t} = \{f_1^t, \dots, f_{m_t}^t\}$

为了得到 $\mathcal{K}_\Theta$ 作为 $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$的分解，我们注意到，尽管[10] 中的命题 4.3 是针对次数为(1,1) 的函数 θ_t （每个函数在 $\mathbb{T}^2$上都有一个奇点）陈述的，但其证明的大部分并未用到这些限制，因此可以推出以下更一般的结果。

命题 4.1。 在上述设定下， $\mathcal{K}_\Theta = \bigoplus_{t=1}^{r} \left(\prod_{k=1}^{t-1} \theta_k\right) \mathcal{K}_{\theta_t}$. 对于 $i = 1, 2$，定义

$$\mathcal{S}_i := \bigoplus_{t=1}^{r} \left(\left(\prod_{k=1}^{t-1} \theta_k\right) \mathcal{S}_i^{\theta_t} \right). \tag{4.1}$$

那么 $\mathcal{K}_\Theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$、 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 分别是 S_{z_1}-不变和 S_{z_2}-不变的，并且

$$\beta_2 := \left\{ f_1^1, \dots, f_{m_1}^1, \theta_1 f_1^2, \dots, \theta_1 f_{m_2}^2, \dots, \left(\prod_{k=1}^{r-1} \theta_k\right) f_1^r, \dots, \left(\prod_{k=1}^{r-1} \theta_k\right) f_{m_r}^r \right\} \tag{4.2}$$

是一个.....的标准正交基

$$\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2 = \bigoplus_{t=1}^{r} \left(\prod_{k=1}^{t-1} \theta_k\right) \left(\mathcal{S}_2^{\theta_t} \ominus z_2\mathcal{S}_2^{\theta_t}\right).$$

注意，若对于所有 $1 \le t \le r$， $n_t \ge 1$ 和 $\beta_1^{\theta_t} = \{f_1^{t,1}, \dots, f_{n_t}^{t,1}\}$ 都是 $\mathcal{S}_1^{\theta_t} \ominus z_1\mathcal{S}_1^{\theta_t}$ 的标准正交基，那么以下结论也成立：

$$\beta_1 := \left\{ f_1^{1,1}, \dots, f_{n_1}^{1,1}, \theta_1 f_1^{2,1}, \dots, \theta_1 f_{n_2}^{2,1}, \dots, \left(\prod_{k=1}^{r-1} \theta_k\right) f_1^{r,1}, \dots, \left(\prod_{k=1}^{r-1} \theta_k\right) f_{n_r}^{r,1} \right\} \tag{4.3}$$

是 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 的标准正交基，其中 $\mathcal{S}_1$ 由（4.1）定义。这里，我们不假设每个 $m_t \ge 1$。

现在，我们可以找到 M_Θ^1 的显式公式，将其表示为一个下三角分块矩阵，其对角块为各个因子的矩阵 $M_{\theta_t}^1$ 。

˜定理 *4.2*。设 $\Theta = \prod_{t=1}^{r} \theta_t$，其中每个 $\theta_t = \lambda_t \frac{p_t}{p_t}$都是次数为（$m_t$， n_t）的有理内函数，且$m_t \ge 1$，并假设 $\mathcal{S}_2^{\theta_1}$、.....、$\mathcal{S}_2^{\theta_r}$、 $\beta_2^{\theta_1}$、.....、$\beta_2^{\theta_r}$、 $\mathcal{S}_2$和 β_2 如上所述。对于 $1 \le t \le r$，设 $M_{\theta_t}^1$、$\beta_2^{\theta_t}$是定理 *2.1* 中关于 $\beta_2^{\theta_t}$的 θ_t 对应的矩阵值函数，并设 g_1^t、.....、$g_{m_t}^t \in H_2^2$（$\mathbb{D}$）满足 $S_{z_1}^* \theta_t = \sum_{j=1}^{m_t} g_j^t f_j^t$.

那么，关于基 M^1_Θ 的定理 2.1 中的矩阵值函数 β_2 是一个分块矩阵 $[H_{st}]^r_{s,\ t=1}$ 其中 $m_s \times m_t$ 分块 H_{st} 由下式给出

$$H_{st} = \begin{cases} 0_{m_s \times m_t}, & if\ s < t \\ M^1_{\theta_s, \beta_2^{\theta_s}}, & if\ s = t \\ \left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1} \overline{\theta_\ell(0,z_2)}\right) \left[\ \overline{f_i^s(0,z_2) g_j^t(z_2)}\ \right], & if\ s > t \end{cases}$$

证明。由定理 2.1，M^1_Θ 是分块矩阵 $M^1_\Theta = [H_{st}]$ 其中 $m_s \times m_t$ 分块 $H_{st} := \left[h_{ij}^{st}\right]$ 由唯一函数 $h_{ij}^{st} \in H^2_2(\mathbb{D})$ 构成，这些函数满足

$$S^*_{z_1}\left(\left(\prod_{k=1}^{s-1}\theta_k\right) f_i^s\right) = \sum_{t=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_t} h_{ij}^{st}\left(\prod_{k=1}^{t-1}\theta_k\right) f_j^t.$$

众所周知，若 $G,\ H \in H^2(\mathbb{D}^2)$ 且 $GH \in H^2(\mathbb{D}^2)$，则 $S^*_{z_1}(GH) = GS^*_{z_1}(H) + H(0,\ z_2) S^*_{z_1}(G)$。归纳地应用这一结论，我们得到

$$S^*_{z_1}\left(\left(\prod_{k=1}^{s-1}\theta_k\right) f_i^s\right) = \left(\prod_{k=1}^{s-1}\theta_k\right) S^*_{z_1}(f_i^s) + \sum_{t=1}^{s-1}\left(\prod_{k=1}^{t-1}\theta_k\right)\left[\left(\left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1}\theta_\ell\right) f_i^s\right)(0,z_2)\right] S^*_{z_1}(\theta_t).$$

直接计算表明，每个 $S^*_{z_1}(\theta_t) \in \mathcal{K}_{\theta_t}$ 以及 $S^*_{z_1}(\theta_t) \perp \mathcal{S}_1^{\theta_t}$，因为 $\mathcal{S}_1^{\theta_t}$ 是 $\mathcal{K}_{\theta_t}$ 的 S_{z_1}-不变子空间，所以 $S^*_{z_1}(\theta_t) \in \mathcal{S}_2^{\theta_t}$。因此，对每个 t，存在函数 $g_1^t,\ \ldots\ldots,\ g_{m_t}^t \in H^2_2(\mathbb{D})$，使得 $S^*_{z_1}(\theta_t) = \sum_{j=1}^{m_t} g_j^t f_j^t$. 由构造，$M^1_{\theta_s,\ \beta_2^{\theta_s}} = \left[\hat{}\, h_{ij}^s\right]$，其中函数 $\hat{}\, h_{ij}^s \in H^2_2(\mathbb{D})$ 满足 $S^*_{z_1} f_i^s = \sum_{j=1}^{m_s} \hat{}\, h_{ij}^s f_j^s$。

因此，

$$S^*_{z_1}\left(\left(\prod_{k=1}^{s-1}\theta_k\right) f_i^s\right) = \sum_{j=1}^{m_s} \hat{h}_{ij}^s \left(\prod_{k=1}^{s-1}\theta_k\right) f_j^s + \sum_{t=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{m_t}\left(\left(\left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1}\theta_\ell\right) f_i^s\right)(0,z_2)\right) g_j^t(z_2)\left(\prod_{k=1}^{t-1}\theta_k\right) f_j^t.$$

因此，对于 $1 \le s,\ t \le r,\ 1 \le i \le m_s$ 和 $1 \le j \le m_t$，函数

$$h_{ij}^{st}(z_2) = \begin{cases} 0, & \text{if } s < t \\ \hat{h}_{ij}^s(z_2), & \text{if } s = t \\ \left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1}\theta_\ell(0,z_2)\right) f_i^s(0,z_2) g_j^t(z_2), & \text{if } s > t \end{cases},$$

从而得到所需的分块矩阵公式。 □

注意，如果 $n_t \ge 1$ 对于 $1 \le t \le r$，那么通过使用 $S^*_{z_2}$ 进行类似论证，也可以得到，对于上述描述的 Θ 以及由（4.3）给出的 β_1，$M^2_{\Theta,\ \beta_1} = [\hat{}\, H_{st}]^r_{s,\ t=1}$

具有 $n_s \times n_t$ 矩阵块

$$\hat{H}_{st} = \begin{cases} 0_{n_s \times n_t}, & \text{if } s < t \\ M^2_{\theta_s, \beta_1^{\theta_s}}, & \text{if } s = t \\ \left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1} \overline{\theta_\ell(z_1, 0)}\right) \left[\overline{f_i^{s,1}(z_1, 0) g_j^{t,1}(z_1)}\right], & \text{if } s > t \end{cases}$$

其中，对于 $1 \le t \le r$, $g^{t,\,11}, \ldots, g^{t,\,n_t 1} \in H^2_1(\mathbb{D})$ 满足 $S^*_{z_2}\theta_t = \sum_{j=1}^{n_t} g^{t,\,j 1} f^{t,\,j 1}$。

应用定理 4.2 需要了解与构件函数 θ_t相关的基及其对应的矩阵值函数。对于次数为 (1, 0) 和 (1, 1) 的有理内函数 θ，我们可以对其进行完整描述。在这种情况下，命题 3.1 已完整描述了 1×1 矩阵值函数 M^1_θ，但要明确 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 的可能基，还需要进一步研究。以下工作通过为例 3.3 提供另一种方法并扩展引理 4.1，拓展了 [10] 中的结果；引理 4.1 研究了在 $\mathbb{T}^2$ 中具有奇点的次数为 (1, 1) 的有理内函数。对于次数为 (1,0) 的情形，注意任何次数为 $(m, 0)$ 的有理内函数都必须是变量 z_1 的有限布拉施克乘积，因此我们可以通过以下引理描述一般的 (1, 0) 情形。

引理 4.3。设 $a \in \mathbb{D}$, $\lambda \in \mathbb{T}$ 以及 $\theta(z) = \lambda \frac{z_1 - a}{1 - \overline{a} z_1}$。若 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 是 $\mathcal{K}_\theta$ 的一个正交分解，其中各子空间分别为S_{z_1}-不变和 S_{z_2}-不变，并且β_2 是 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 形式为 （2.3）的标准正交基，则 $\mathcal{S}_1 = \{0\}$, $\mathcal{S}_2 = \mathcal{K}_\theta$,

$$M^1_\theta(z_2) = a, \qquad \beta_2 = \left\{ \frac{\delta\sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \overline{a} z_1} \right\} \text{ for some } \delta \in \mathbb{T}, \quad \text{and} \quad (S^*_{z_1}\theta)(z) = \lambda \frac{1 - |a|^2}{1 - \overline{a} z_1}.$$

证明。由于 $\deg \theta = (1, 0)$，由第 2 节可知 $\dim(\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2) = 1$ 且 $\beta_2 = \{\frac{q}{p}\}$，其中 $p(z) = 1 - az_1$，并且 $\deg q \le (0, 0)$，即 q 是一个常数。通过范数计算可知，$|q|$ 必定等于 $\sqrt{|1|^2 - |a|^2}$。若我们从 β_2、$\frac{K_2}{1 - z_2 w_2} = \mathcal{K}_\theta$中恢复 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$的再生核 K_2，则 $\mathcal{S}_2 = \mathcal{K}_\theta$和 $\mathcal{S}_1 = \{0\}$。$S^*_{z_1}\theta$ 的公式直接由（2.8）得到。□

引理 4.4。S 设 $\theta = \lambda^p_p$是一个次数为 $(1, 1)$ 的有理内函数，且 $p(z) = b + cz_1 + dz_2 + ez_1z_2$。令

$$A_1 := (|b|^2 - |e|^2) + (|c|^2 - |d|^2), \quad A_2 := (|b|^2 - |e|^2) - (|c|^2 - |d|^2),$$

$$\gamma_1 := \overline{b}c - \overline{d}e, \quad \gamma_2 := \overline{b}d - \overline{c}e, \quad \zeta_i := \begin{cases} \frac{\gamma_i}{|\gamma_i|}, & \gamma_i \ne 0 \\ 1, & \gamma_i = 0 \end{cases} \text{ for } i = 1, 2, \quad \text{and}$$

$$B := \sqrt{A_1^2 - 4|\gamma_1|^2} = \sqrt{A_2^2 - 4|\gamma_2|^2}.$$

定义二变量多项式 r^+, r^-, q^+, q^- 如下：

$$(4.4) \quad r^\pm(z) = \sqrt{\frac{A_1 \pm B}{2}} + \zeta_1\sqrt{\frac{A_1 \mp B}{2}} z_1 \quad \text{and} \quad q^\pm(z) = \sqrt{\frac{A_2 \pm B}{2}} + \zeta_2\sqrt{\frac{A_2 \mp B}{2}} z_2.$$

那么，将 $\mathcal{K}_\theta$ 正交分解 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 为闭子空间，且这些子空间分别对 S_{z_1}和 S_{z_2}不变的唯一方式是 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix} r^- \\ p \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix} q^+ \\ p \end{smallmatrix}\right)$和 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix} r^+ \\ p \end{smallmatrix}\right) \oplus \mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix} q^- \\ p \end{smallmatrix}\right)$。当且仅当 $B = 0$时，这两种分解相同；这等价于 θ 在 $\mathbb{T}^2$上有奇点。与形式（2.5）和（2.3）的 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 相对应的标准正交基对分别为

$$\beta_1^- = \left\{\delta_1 \frac{r^-}{p}\right\}, \beta_2^+ = \left\{\delta_2 \frac{q^+}{p}\right\} \qquad and \qquad \beta_1^+ = \left\{\delta_1 \frac{r^+}{p}\right\}, \beta_2^- = \left\{\delta_2 \frac{q^-}{p}\right\}$$

对某些 δ_1、$\delta_2 \in \mathbb{T}$，并且在两种情形下

$$M_\theta^1(z_2) = \frac{-\overline{ez_2} - \overline{c}}{\overline{dz_2} + \overline{b}} \qquad and \qquad M_\theta^2(z_1) = \frac{-\overline{ez_1} - \overline{d}}{\overline{cz_1} + \overline{b}}.$$

此外，

$$(S_{z_1}^*\theta)(z) = \lambda\overline{\zeta_2}\frac{q^+(z)q^-(z)}{p(z)p(0,z_2)} \qquad and \qquad (S_{z_2}^*\theta)(z) = \lambda\overline{\zeta_1}\frac{r^+(z)r^-(z)}{p(z)p(z_1,0)}.$$

证明。设 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 是将 $\mathcal{K}_\theta$ 分解为分别 S_{z_1}-不变与 S_{z_2}-不变的闭子空间的正交分解。根据第 2 节中的讨论， $\mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 与 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 均为一维，相应的标准正交基为 $\beta_1 = \{\frac{r}{p}\}$ 与 $\beta_2 = \{\frac{q}{p}\}$，其中 deg $r \le (1,0)$，且 deg $q \le (0,1)$。由于 $K_1(z,w) = r(z)r(w)/p(z)p(w)$ 与 $K_2(z,w) = q(z)q(w)/p(z)p(w)$ 必须满足 (2.2)，我们有

$$|p(z)|^2 - |\tilde{p}(z)|^2 = (1-|z_1|^2)|q(z)|^2 + (1-|z_2|^2)|r(z)|^2$$

对所有 $z \in \mathbb{D}^2$ 成立，从而由连续性对所有 $z \in \mathbb{D}^2$ 成立。由此可得，对所有 $\eta \in \mathbb{T}$,

$$|r(\eta,0)|^2 = |b+c\eta|^2 - |d+e\eta|^2 \quad \text{and} \quad |q(0,\eta)|^2 = |b+d\eta|^2 - |c+e\eta|^2. \tag{4.5}$$

由此我们可以推 deduce that r 必须是 r^+ 或 r^- 的模为1的常数倍，而q 必须是 q^+ 或 q^-的模为1的常数倍。这里我们展示 q 的计算过程， r 的类似计算留给读者。

设 $q(z) = t + sz_2$。然后展开（4.5）中的第二个方程，我们得到$|t|^2 + |s|^2 + 2\mathrm{Re}(ts\eta) = A_2 + 2\mathrm{Re}(\overline{\gamma_2}\eta)$ 对所有 $\eta \in \mathbb{T}$均成立。因此，

$$|t|^2 + |s|^2 = A_2 \quad \text{and} \quad \bar{t}s = \gamma_2. \tag{4.6}$$

若 $\gamma_2 = 0$，这立即意味着 $q(z) = \delta_2\sqrt{A_2} = \delta_2 q^+(z)$ 或 $q(z) = \delta_2\sqrt{A_2}z_2 = \delta_2 q^-(z)$ 对于某个 $\delta_2 \in \mathbb{T}$。现在假设 $\gamma_2 \neq 0$。那么$s = \frac{\gamma_2}{\bar{t}}$，因此将其代入（4.6）中的第一个方程，我们得到 $|t|^4 - A_2|t|^2 + |\gamma_2|^2 = 0$ 从而 $|t|^2 = \frac{A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4|\gamma_2|^2}}{2} =$

$\frac{A_2\pm B}{2}$ 。因此

$$q(z)=\delta_2\sqrt{\frac{A_2\pm B}{2}}+\frac{\gamma_2}{\overline{\delta_2}\sqrt{\frac{A_2\pm B}{2}}}z_2=\delta_2\left(\sqrt{\frac{A_2\pm B}{2}}+\frac{\gamma_2}{|\gamma_2|}\sqrt{\frac{A_2\mp B}{2}}z_2\right)=\delta_2 q^{\pm}(z)$$

对于某个 $\delta_2\in\mathbb{T}$，如所需。上面的第二个等式源于以下观察：$A_2^2-B^2=4|\gamma_2|^2$.

因此，无论哪种情况，$\mathcal{S}_2\ominus z_2\mathcal{S}_2$都必须具有以下形式的标准正交基：$\beta_2^+=\{\delta_2\,{}^{q^+}_{p}\}$或 $\beta_2^-=\{\delta_2\,{}^{q^-}_{p}\}$，所以 $\mathcal{S}_2$等于 $\mathcal{S}_2^+:=\mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix}K_2^+\\ 1-z_2w_2\end{smallmatrix}\right)$或 $\mathcal{S}_2^-:=\mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix}K_2^-\\ 1-z_2w_2\end{smallmatrix}\right)$，对于核函数

$$K_2^+(z,w)=\frac{q^+(z)\overline{q^+(w)}}{p(z)\overline{p(w)}}\quad\text{and}\quad K_2^-(z,w)=\frac{q^-(z)\overline{q^-(w)}}{p(z)\overline{p(w)}}.$$

同样，$\mathcal{S}_1$必须是 $\mathcal{S}_1^+:=\mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix}K_1^+\\ 1-z_1w_1\end{smallmatrix}\right)$或 $S_1^-:=\mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix}K_1^-\\ 1-z_1w_1\end{smallmatrix}\right)$，其中

$$K_1^+(z,w)=\frac{r^+(z)\overline{r^+(w)}}{p(z)\overline{p(w)}}\quad\text{and}\quad K_1^-(z,w)=\frac{r^-(z)\overline{r^-(w)}}{p(z)\overline{p(w)}}.$$

注意到，量 B 同时出现在 $q^{\pm}$ 和 $r^{\pm}$ 的公式中，因为 $A_2^2-4|\gamma_2|^2=A_1^2-4|\gamma_1|^2$，这一事实可以通过直接计算加以验证。

由核的结构可知，可以保证 $\mathcal{S}_2^+$和 $\mathcal{S}_2^-$都是 S_{z_2}-不变的，而 $\mathcal{S}_1^+$和 $\mathcal{S}_1^-$都是 S_{z_1}-不变的。尽管从这些可能性中对 $\mathcal{S}_1$ 和$\mathcal{S}_2$ 至少有一对选择必然会给出 $\mathcal{K}_\theta$的正交分解，但我们尚不知道所有选择对是否都能做到这一点。

如果 $B=0$、$q^+=q^-$ 和 $r^+=r^-$，因此对于 $i=1$，$\mathcal{S}_i^+=\mathcal{S}_i^-$ 为 2，所以实际上 $\mathcal{S}_1$ 只有一种选择，$\mathcal{S}_2$也只有一种选择，而这些选择必然给出所需的分解。我们断言，当且仅当 p 在 $\mathbb{T}^2$中有一个零点时，$B=0$ 才会出现。为说明这一点，令 $\tau_1=\frac{-2\gamma_1}{A_1}$ 和 $\tau_2=\frac{-2\gamma_2}{A_2}$，它们是定义良好的，因为我们先前的计算表明 A_1 和A_2 非零。注意到，$(\tau_1,\tau_2)\in\mathbb{T}^2$ 当且仅当 $B=0$。证明 [10, 引理 4.1]表明，如果 p 在 $\mathbb{T}^2$中有一个零点，那么该零点必为 (τ_1,τ_2)；并且可以直接计算得到 $p(\tau_1,\tau_2)=bB/(A_1A_2)$，因此当 $(\tau_1,\tau_2)\in\mathbb{T}^2$时，p 在 (τ_1,τ_2)处有一个零点。

现在假设 $B\neq0$。那么 $q^+\neq q^-$ 和 $r^+\neq r^-$，因此对于每个 $\mathcal{S}_i$，都有两种不同的可能情况。经过直接但繁琐的计算可知，核对 (K_1^+,K_2^-) 和 (K_1^-,K_2^+) 满足 (2.2)，因此是 θ 的 Agler 核；但 (K_1^+,K_2^+) 和 (K_1^-,K_2^-) 不满足 (2.2)，因为在这些情况下，方程右边出现的 B 项不会相互抵消。根据定理2.8], 的证明，由于 θ 没有唯一的 Agler 分解，$\mathcal{S}_1^{\max}\neq\mathcal{S}_1^{\min}$和 $\mathcal{S}_2^{\max}\neq\mathcal{S}_2^{\min}$，因此 $\mathcal{K}_\theta$ 至少有两种正交分解，分别分解为闭的、关于 S_{z_1}和 S_{z_2} 不变的子空间。由于每种这样的分解都必须产生一对不同的 Agler 核，我们得出结论，两者

$\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1^+ \oplus \mathcal{S}_2^-$和 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1^- \oplus \mathcal{S}_2^+$是这种类型的正交分解，并且这是 $\mathcal{K}_\theta$ 的仅有的此类分解。

关于 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 与 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 的基的结论由前述讨论得出。公式 M_θ^1（z_2）由命题 3.1 利用（2.8）计算 $S_{z_1}^* p$得到。将（2.8）应用于 θ，我们得到

$$(S_{z_1}^*\theta)(z) = \lambda\left(\frac{\overline{\gamma_2} + A_2 z_2 + \gamma_2 z_2^2}{p(z)p(0,z_2)}\right),$$

并且常规计算表明 $\zeta_2 q^+$（z）q^-（z）$= \overline{\gamma_2} + A_2 z_2 + \gamma_2 \overline{z_2}^2$。$M_\theta^2$（$z_1$）与 $S_{z_2}^*\theta$的公式通过使用命题3.1 与（2.8）的类似形式，针对次数（m，1）有理内函数与 $S_{z_2}^*$ 分别得到。□

我们现在应用前述四个结果，来探讨若干类由次数（1，0）和/或（1，1）的有理内函数之积构成的有理内函数，它们将在后续各节中用作例子。

例4.5. 设 Θ 是一个次数为 $(m,0)$ 的有理内函数，且满足 $m \geq 1$。那么 Θ 可写成如下形式：$\Theta = \prod_{t=1}^m \theta_t$，其中

$$\theta_t(z) = \frac{z_1 - a_t}{1 - \overline{a_t} z_1} \text{ for } 1 \leq t \leq m-1 \quad \text{and} \quad \theta_m(z) = \lambda \frac{z_1 - a_m}{1 - \overline{a_m} z_1},$$

对某些 $\lambda \in \mathbb{T}$ 和 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{D}$成立。我们将 λ并入最后一个因子，以简化计算。根据引理 4.3，每个 $\mathcal{K}_{\theta_t}$ 都可分解为 $\mathcal{K}_{\theta_t} = \mathcal{S}_1^{\theta_t} \oplus \mathcal{S}_2^{\theta_t}$，其中 $\mathcal{S}_2^{\theta_t} \ominus z_2\mathcal{S}_2^{\theta_t}$的正交归一基 $\beta_2^{\theta_t} = \{f_1^t\}$定义为令 $f_1^t(z) = \frac{\sqrt{1-|a_t|^2}}{1-a_t z_1}$。此外，对于 $1 \leq t \leq m$，$M^1_{\theta_t, \beta_2^{\theta_t}}$是常数函数 $M^1_{\theta_t, \beta_2^{\theta_t}}(z) = a_t$；对于 $1 \leq t \leq m-1$，$S_{z_1}^*\theta_t = g_1^t f_1^t$，常数函数 $g_1^t(z) = \sqrt{1-|a_t|^2}$。

对于 $i = 1, 2$，令 $\mathcal{S}_i = \bigoplus_{t=1}^m \left(\left(\prod_{k=1}^{t-1}\theta_k\right)\mathcal{S}_i^{\theta_t}\right)$。根据命题 4.1，$\mathcal{K}_\Theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 是 $\mathcal{K}_\Theta$ 到闭子空间的正交分解，这些闭子空间分别具有 S_{z_1}-不变性和 S_{z_2}-不变性，而 $\beta_2 = \left\{f_1^1, \theta_1 f_1^2, \ldots \left(\prod_{k=1}^{m-1}\theta_k\right) f_1^m\right\}$是 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$的标准正交基。注意，如果将 β_2 中的函数视为单变量函数而非二变量函数，那么 β_2 就是作为单变量函数的 Θ所对应的 Takenaka-Malmquist-Walsh 基的标准排序。应用定理 4.2中的公式，我们得到 M^1_{Θ, β_2}是具有标量值元素的 $m \times m$矩阵 $M^1_{\Theta, \beta_2} = [H_{st}]$

$$H_{st} = \begin{cases} 0 & \text{if } s < t \\ a_s, & \text{if } s = t \\ \left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1} -\overline{a}_\ell\right)\sqrt{1-|a_s|^2}\sqrt{1-|a_t|^2}, & \text{if } s > t \end{cases}.$$

注意到 M^1_{Θ, β_2} 是矩阵 M_Θ 在 1.1) 中给出的转置，当 Θ 被视为单变量函数时，因此它是 M_Θ^1 矩阵的转置，该矩阵是为Θ在 [10, 例 33]中得到的。这里出现转置，是因为采用了

与这些其他计算中所用版本不同的 Takenaka-Malmquist-Walsh 基。

˜例 4.6. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\Theta = \prod_{t=1}^{m} \theta_t$，其中每个 $\theta_t = \lambda_t \frac{p_t}{p_t}$ 都是次数为 (1,1) 的有理内函数。为简化记号，对所有 $t \neq m$，令 $\lambda_t = 1$。对于每个 t 和 $i = 1, 2$，令 $\gamma_{i,t}$、$\zeta_{i,t}$、$A_{i,t}$、B_t、$q_t^{\pm}$ 和 $r_t^{\pm}$ 分别表示引理 4.4 中函数 θ_t 对应的 γ_i、ζ_i、A_i、B、$q^{\pm}$ 和 $r^{\pm}$ 的取值。对于每个 t，令 f^t、$_1{}^2 = \frac{q_t^+}{p_t}$ 和 f^t、$_1{}^1 \equiv \frac{r_t^-}{p_t}$。于是由引理 4.4，我们可以选择将 $\mathcal{K}_{\theta_t}$ 分解为 $\mathcal{K}_{\theta_t} = \mathcal{S}_1^{\theta_t} \oplus \mathcal{S}_2^{\theta_t}$，其中以 $\beta_i^{\theta_t} = \{f_1^{t,i}\}$ 作为 $\mathcal{S}_i^{\theta_t} \ominus z_i \mathcal{S}_i^{\theta_t}$ 的标准正交基，对 $i = 1$, 2。此外，对于所有 $1 \leq t \leq m-1$，$S_{z_1}^* \theta_t = g_1^t f^t$，2 1 对于$g_1^t(z_2) = \zeta_2$，$_t{}^{q_t^-}(z_2)\ _{p_t}(0,z_2)$，且 $S_{z_2}^* \theta_t \equiv g^t$，$_1{}^t$，1 1 对于 g^t，1 1 $(z_1) = \zeta_1$，$_t{}^{r_t^+}(z_1)\ _{p_t}(z_1,0)$。

如前一例子中那样，根据命题4.1 及随后的讨论，我们现在可以将 $\mathcal{K}_\Theta$ 分别分解为 $S_{z_1}-$ 与 $S_{z_2}-$不变子空间，即 $\mathcal{K}_\Theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$，其中对于 $i = 1, 2$，$\beta_i = \left\{f_1^{1,i}, \theta_1 f_1^{2,i}, \ldots \left(\prod_{k=1}^{m-1} \theta_k\right) f_1^{m,i}\right\}$是 $\mathcal{S}_i \ominus z_i \mathcal{S}_i$的一个标准正交基。根据定理4.2及随后的讨论，$M^1_{\Theta,\beta_2} = [H_{st}]$与$M^2_{\Theta,\beta_1} = [\hat{}H_{st}]$均为$\hat{}m \times m$ 矩阵，其中 1×1 块 H_{st} 与$H_{s,t}$ 由下式定义

$$H_{st} = \begin{cases} 0, & \text{if } s < t \\ M^1_{\theta_s}, & \text{if } s = t \\ \zeta_{2,t} \left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1} \overline{\theta_\ell(0, z_2)}\right) \sqrt{\frac{q_s^+(z_2) q_t^-(z_2)}{p_s(0,z_2) p_t(0,z_2)}} & \text{if } s > t \end{cases}$$

and

$$\hat{H}_{st} = \begin{cases} 0, & \text{if } s < t \\ M^2_{\theta_s}, & \text{if } s = t \\ \zeta_{1,t} \left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1} \overline{\theta_\ell(z_1, 0)}\right) \sqrt{\frac{r_s^-(z_1) r_t^+(z_1)}{p_s(z_1,0) p_t(z_1,0)}} & \text{if } s > t \end{cases},$$

分别地，且每个 $M^i_{\theta_s}$ 由 p_s 的系数定义，如引理4.4。

现在我们考虑一个特殊情形，在此情形下，这个例子大大简化。假设$B(z)$ $= \lambda \prod_{t=1}^{m} \frac{z-a_t}{1-a_t z}$ 是一个单变量有限 Blaschke 乘积，且 $\Theta(z) = B(z_1 z_2)$。令 $\theta_t = \frac{z_1 z_2 - a_t}{1 - a_t z_1 z_2}$ 对 $1 \leq t \leq m-1$ 和 $\theta_m = \lambda \frac{z_1 z_2 - a_m}{1 - a_m z_1 z_2}$ 成立，则对所有$1 \leq t \leq m$，有$p_t(z) = 1 + 0 z_1 + 0 z_2 + (-a_t) z_1 z_2$因此，由引理 4.4，$M^1_{\theta_t} = a_t z_2$，$M^2_{\theta_t} = a_t z_1$，$\gamma_{1,t} = \gamma_2$，$_t = 0$，$\zeta_{1,t} = \zeta_2$，$_t = 1$，且$A_{1,t} = A_2$，$_t = B_t = 1 - |a_t|^2$。于是 $q_t^+(z_2) = r_t^+(z_1) = \sqrt{1 - |a_t|^2}$，$q_t^-(z_2)$ $\sqrt{1 - |a_t|^2} z_2$，且 $r_t^-(z_1) = \sqrt{1 - |a_t|^2} z_1$。注意，对所有满足 $1 \leq t \leq m-1$的 t，θ_t $(0, z_2) = \theta_t(z_1, 0) = -a_t$，且 $p_t(0, z_2) = p_t(z_1, 0) = 1$。因此，$H_{st}$的公式可简化为

$$H_{st} = \begin{cases} 0 & \text{if } s < t \\ a_s \overline{z_2}, & \text{if } s = t \\ \left(\prod_{\ell=t+1}^{s-1} -\overline{a}_\ell\right) \sqrt{1 - |a_s|^2} \sqrt{1 - |a_t|^2} \overline{z_2}, & \text{if } s > t \end{cases},$$

以及$\hat{}$ H_{st}的公式只需将上述公式中的 z_2替换为 z_1。因此，$M^1_{\Theta,\ \beta_2} = z_2 M_B^T$以及$M^2_{\Theta,\ \beta_1} = z_1 M_B^T$，其中标量矩阵 M_B由（1.1）定义，且 T表示转置。

例 4.7。 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 θ 是任意次数为 $(m,\ n)$ 的有理内函数，并满足 $m \geq 1$。定义$\Theta(z) = z_1^k \theta(z)$。由例 4.5，我们可以利用 $\mathcal{S}_2^{z_1^k} \ominus z_2 \mathcal{S}_2^{z_1^k}$ 的标准正交基 $\hat{}$ $\beta_2 = \{1, z_1, z_1^2, \ldots, z_1^{k-1}\}$ 将 $\mathcal{K}_{z_1^k}$ 分解为 $\mathcal{K}_{z_1^k} = \mathcal{S}_1^{z_1^k} \oplus \mathcal{S}_2^{z_1^k}$，并且 $M^1_{z_1^k,\ \hat{}\beta_2}$ 是 $k \times k$矩阵，其第一条次对角线上为 **1**，其余位置为 **0**。对 $1 \leq i \leq k$ 令 $f_i^1(z) = z_1^{i-1}$，则使得 $S^*_{z_1} z_1^k = \sum_{j=1}^k g_j^1 f_j^1$ 的函数 g_1^1，……，$g_k^1 \in H_2^2(\mathbb{D})$ 是由若 $1 \leq j \leq k-1$ 则 $g_j^1(z_2) = 0$ 以及 $g_k^1(z_2) = 1$ 所定义的常函数。

固定 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1^\theta \oplus \mathcal{S}_2^\theta$ 的任意分解为分别对 S_{z_1} 和 S_{z_2} 不变的子空间，并取 $\mathcal{S}_2^\theta \ominus z_2 \mathcal{S}_2^\theta$ 的任意标准正交基 $\beta_2^\theta = \{f_1^2, \ldots, f_m^2\}$。令 g_1^2、……、$g_m^2 \in H_2^2(\mathbb{D})$ 为满足 $S^*_{z_1}\theta = \sum_{j=1}^m g_j^2 f_j^2$ 的函数。

现在，我们可以应用命题 4.1 和定理 4.2 ，将 z_1^k 视为乘积中的第一个函数，将 θ 视为第二个函数，从而得到分解 $\mathcal{K}_\Theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$，其中 $\beta_2 = \{1, z_1, \ldots, z_1^{k-1}, z_1^k f_1^2, z_1^k f_2^2, \ldots, z_1^k f_m^2\}$ 是 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2 \mathcal{S}_2$ 的标准正交基，而 $M^1_{\Theta,\ \beta_2}$ 是分块矩阵

$$M^1_{\Theta,\beta_2} = \begin{bmatrix} M^1_{z_1^k,\hat{\beta}_2} & 0_{k\times m} \\ C & M^1_{\theta,\beta_2^\theta} \end{bmatrix}$$

其中 $C = [c_{ij}]$ 是条目为以下内容的 $m \times k$ 矩阵值函数

$$c_{ij} = \overline{f_i^2(0, z_2) g_j^1(z_2)} = \begin{cases} \overline{f_i^2(0, z_2)}, & \text{if } j = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

若 C 是有限布拉施克乘积 $\theta(z) = B(z_1 z_2)$，则 $B(z) = \lambda \prod_{t=1}^m \frac{z - a_t}{1 - a_t z}$ 的各项尤其简单。我们按示例 ~~θ_1~~、……、θ_m 中的定义4.6 来选取 $\mathcal{K}_\theta$的分解及标准正交基 $\beta_2^2 = \{f_1^2, \ldots, f_m^2\}$，与该示例相同。回顾一下，$f_i^2 = \left(\prod_{\ell=1}^{i-1} \theta_\ell\right) \tilde{f}_1^i$对于 $\tilde{f}_1^i = \frac{\sqrt{1-|a_i|^2}}{1 - a_i z_1 z_2}$，对所有 $1 \leq i \leq m$均成立。~~因此，~~在此情形下，

$$c_{ij} = \begin{cases} \left(\prod_{\ell=1}^{i-1} -\overline{a_\ell}\right) \sqrt{1 - |a_i|^2}, & \text{if } j = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

回到一般情形，注意我们也可以将 θ 视为第一个函数，将 z_1^k 视为第二个函数。这将得到分解 $\mathcal{K}_\theta = \tilde{\mathcal{S}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{S}}_2$，其标准正交基为$\widetilde{\beta_2} = \{f_1^2, f_2^2, \ldots, f_m^2, \theta, \theta z_1, \ldots, \theta z_1^{k-1}\}$，对应于 $\tilde{\mathcal{S}}_2 \ominus z_2 \tilde{\mathcal{S}}_2$。于是

$$M^1_{\Theta,\widetilde{\beta_2}} = \begin{bmatrix} M^1_{\theta,\beta_2^\theta} & 0_{m\times k} \\ D & M^1_{z_1^k,\hat{\beta}_2} \end{bmatrix}$$

其中 $D = [d_{ij}]$ 是元素为以下各项的 $k \times m$ 矩阵值函数

$$d_{ij} = \overline{f_i^1(0, z_2) g_j^2(z_2)} = \begin{cases} \overline{g_j^2(z_2)}, & \text{if } i = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

对于有限布拉施克乘积 B，若 $\theta(z) = B(z_1 z_2)$，矩阵 D 也会简化，不过这些计算留给感兴趣的读者。

请注意，在上一个例子中，我们为 Θ 找到了两个矩阵 M_Θ^1，而它们在至少大多数情况下会有所不同。这引出了一些关键问题：如果我们有两个分解，且分别对应 $\widetilde{\ }$ 和 β_2，那么 β_2、$M^1_{\theta、\beta_2}$ 和 $M^1_{\theta\ 之间\widetilde{\beta_2}}$ 是否存在某种关系？它们可能相差多大？我们将在下一节的探讨中回答这些问题。

5. M_θ^1的唯一性

现在我们已经有了生成 M_θ^1 例子的方法，接下来将推广第$(1, n)$ 节中关于有理内函数3的一些结果。首先，回顾命题3.1 可知，若次数$\theta = (1, n)$，则 M_θ^1与 $\mathcal{K}_\theta$所选分解及其对应的标准正交基无关。与此同时，命题3.5刻画了两个次数为$(1, n)$ 的有理内函数具有相同 M_θ^1函数的条件。

本节中，我们首先将命题 3.5 推广到两个变量的所有有理内函数，然后用这一结果回答问题 1，探讨推论 M_θ^1和 M_θ^2中 5.2的唯一性。随后，我们将这一答案应用于单个有理内函数 θ 的情形，其中$\mathcal{K}_\theta$ 具有不同的分解，正如第 4节末所述。例5.4 利用第4 节中的构造来说明这一情形的复杂之处。

本节采用以下记号。设 $\theta = \lambda_1 \frac{\tilde{p}}{p}$，$\phi = \lambda_2 \frac{\tilde{q}}{q}$ 是定义在 $\mathbb{D}^2$ 上的有理内函数，且 $\deg_1(\theta)$，$\deg_1(\phi) \geq 1$，其对应的模型空间分解为 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 和$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\mathcal{K}_\phi = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$。令 S_θ^1 和 S_ϕ^1 表示它们在 z_1 中对应的移位算子的压缩，即 S_{z_1}，定义为

$$S_\theta^1 = P_{\mathcal{S}_2} S_{z_1}|_{\mathcal{S}_2} \quad \text{and} \quad S_\phi^1 = P_{\widetilde{\mathcal{S}}_2} S_{z_1}|_{\widetilde{\mathcal{S}}_2}.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$于是 $m := \deg_1(\theta) = \dim(\mathcal{S}_2 \ominus z_2 \mathcal{S}_2)$，且 $\tilde{m} := \deg_1(\phi) = \dim(\mathcal{S}_2 \ominus z_2 \mathcal{S}_2)$。令 $\beta_2 = \{\frac{q_1}{p}, \ldots, \frac{q_m}{p}\}$为 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2 \mathcal{S}_2$的一个形如（2.3）的标准正交基，并令 $\widetilde{\beta}_2 = \{\frac{t_1}{q}, \ldots, \frac{t_{\tilde{m}}}{q}\}\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$为 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2 \mathcal{S}_2$的一个同样形如（2.3）的标准正交基。令 M_θ^1 和 M_ϕ^1分别表示利用这些基定义的定理 2.1 中相应的矩阵值函数。我们可以完全确定这两个函数何时在 $\mathbb{T}$上逐点酉等价。

定理 5.1. 在上述设定下，存在一个 $m \times m$ 酉矩阵值函数$U(\cdot)$，定义在 $\mathbb{T}$ 上，使得

$$M_\theta^1(\tau) = U(\tau) M_\phi^1(\tau) U(\tau)^* \tag{5.1}$$

对于一个 ll $\tau \in \mathbb{T}$ 当且仅当存在有限 *Blaschke*乘积 B_1、B_2，使得 t

$$B_1(z_2)\phi(z_1,z_2) = B_2(z_2)\theta(z_1,z_2). \tag{5.2}$$

证明. (⇒) 假设存在这样的矩阵值函数 U。固定 $\tau \in \mathbb{T} \setminus (E_\phi \cup E_\theta)$。那么 $M^1_\theta(\tau)$ 的维数等于 $M^1_\phi(\tau)$ 的维数，因此切片函数 θ_τ 和 ϕ_τ 的次数相等，且 $m = \tilde{m}$。$M^1_\theta(\tau)$ 和 $M^1_\phi(\tau)$ 显然具有相同的特征值；根据第 2 节中的讨论，这些特征值分别是 θ_τ 和 ϕ_τ 的零点。因此，θ_τ 和 ϕ_τ 是有限 Blaschke乘积，且恰好具有相同的零点集合（包括重数）。这意味着存在一个常数 $\lambda(\tau) \in \mathbb{T}$，使得对所有 $z_1 \in \mathbb{C}$,

$$\theta(z_1,\tau) = \theta_\tau(z_1) = \lambda(\tau)\phi_\tau(z_1) = \lambda(\tau)\phi(z_1,\tau). \tag{5.3}$$

特别地，对于每个 $\tau \in \mathbb{T} \setminus (E_\phi \cup E_\theta)$，都存在一个 $\lambda(\tau) \in \mathbb{T}$ 使得（5.3）成立。

为证明该断言，定义有理函数 F 如下：

$$F(z_1,z_2) = \frac{\theta(z_1,z_2)}{\phi(z_1,z_2)},$$

在约去所有公因子后，注意到我们需要证明 F 是两个有限布拉施克乘积之比。选取 $(w_1, \gamma) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$，使得 $\phi(w_1, \gamma) \neq 0$ 且$\gamma \notin E_\phi \cup E_\theta$. 于是，$F$在 (w_1, τ) 的邻域内解析，因此可以写成

$$F(z_1,z_2) = F_1(z_2) + (z_1 - w_1)F_2(z_1,z_2),$$

其中函数 F_1、F_2 在 (w_1,γ) 的邻域 $V \subseteq \mathbb{C}^2$ 内解析。必要时缩小 V，我们可以假设 $V = V_1 \times V_2$，其中 V_1、V_2是以 w_1、γ、$V_2 \cap (E_\phi \cup E_\theta) = \emptyset$为中心的开圆盘，且 ϕ 在 V上不为零。任取 $\tau \in V_2 \cap \mathbb{T}$ 和 $z_1 \in V_1$。则（5.3）表明

$$F_1(\tau) + (z_1 - w_1)F_2(z_1,\tau) = \lambda(\tau) = F_1(\tau) + (w_1 - w_1)F_2(w_1,\tau),$$

因此 $F_2(z_1, \tau) = 0$。这意味着，对于每个 $z_1 \in V_1$，单变量全纯函数$G_{z_1}(z_2) := F_2(z_1, z_2)$ 在曲线 $V_2 \cap \mathbb{T}$ 上为零。这意味着 $G_{z_1} \equiv 0$，因此 $F_2 \equiv 0$。于是，在 (w_1, γ) 的某个邻域内，$F(z_1, z_2) = F_1(z_2)$ 仅依赖于 z_2。那么 $\frac{\partial F}{\partial z_1} \equiv 0$ 在该邻域内成立，因而在 F 的整个定义域上也成立，所以 F 仅是 z_2 的有理函数。

由（5.3），我们还知道 $|F(\tau)| = 1$对几乎每一个 $\tau \in \mathbb{T}$。由于我们已经消去了 F 的分子与分母中的任何公因子，这意味着 F 在 $\mathbb{T}$的某个邻域上必须连续。于是 [16, 第50页，推论3.5。4]意味着 $F = \frac{B_1}{B_2}$，对某对有限布拉施克乘积 B_1 与 B_2。由此

立即得到，在 $\mathbb{D}^2$上，

$$\frac{\theta(z_1,z_2)}{\phi(z_1,z_2)}=\frac{B_1(z_2)}{B_2(z_2)},$$

由此确立（5.2）。

(⇐) 反过来，假设（5.2）成立，并固定 $\tau\in\mathbb{T}\setminus(E_\phi\cup E_\theta)$。注意到，对 $\lambda=B_1(\tau)/B_2(\tau)\in\mathbb{T}$，有 $\theta_\tau(z_1)=\lambda\phi_\tau(z_1)$，这意味着 $\mathcal{K}_{\theta_\tau}=\mathcal{K}_{\phi_\tau}$，从而$S_{\theta_\tau}=S_{\phi_\tau}$。因此，$M^1_\theta(\tau)$与 $M^1_\phi(\tau)$都是同一算子的矩阵表示，但可能相对于不同的标准正交基，故必定存在酉换基矩阵 $U(\tau)$，使得（5.1）成立。

为证明该等式实际上对所有 $\tau\in\mathbb{T}$ 成立，而不仅仅对 $\mathbb{T}\setminus(E_\phi\cup E_\theta)$成立，我们构造 $U(\tau)=[u_{ij}(\tau)]$的显式公式。由换基可知，对每个 $\tau\in\mathbb{T}\setminus(E_\phi\cup E_\theta)$以及 $1\le j\le m$，$[u_{1j}(\tau).....,\ u_{mj}(\tau)]^t$ 是如下方程的唯一解

$$\sum_{i=1}^{m}u_{ij}(\tau)\frac{q_i}{p}(\cdot,\tau)=\frac{t_j}{q}(\cdot,\tau). \tag{5.4}$$

如命题 3.5 的证明中所述，(5.2) 意味着，对于某个非零常数 c，$r_1(z_2)q(z)=cr_2(z_2)p(z)$，其中 r_1 和 r_2 分别是 Blaschke乘积 B_1 和 B_2 的分母，因此在 $\mathbb{D}$ 上不为零。因此，将 (5.4) 两边同乘 $r_2(\tau)p(\cdot,\tau)$，可知 $U(\tau)$ 必须满足

$$\sum_{i=1}^{m}u_{ij}(\tau)r_2(\tau)q_i(\cdot,\tau)=\frac{1}{c}r_1(\tau)t_j(\cdot,\tau) \tag{5.5}$$

对所有 $1\le j\le m$ 和 $\tau\in\mathbb{T}\setminus(E_\phi\cup E_\theta)$ 都成立。注意，对所有 $1\le i\le m$，$\hat{}q_i(z):=r_2(z_2)q_i(z)$ 和 $\hat{}t_i(z):=\frac{1}{c}r_1(z_2)t_i(z)$ 都是关于 z_1 和 z_2 的多项式，且其关于 z_1 的次数至多为 $m-1$。因此，存在多项式 $q_{ik}(z_2)$ $t_{ik}(z_2)$，使得对于 $1\le i\le m$，$0\le k\le m-1$

$$\hat{q}_i(z)=\sum_{k=0}^{m-1}q_{ik}(z_2)z_1^k\qquad \hat{t}_i(z)=\sum_{k=0}^{m-1}t_{ik}(z_2)z_1^k.$$

设 $A(z_2)=[q_{j(i-1)}(z_2)]$ 和 $B(z_2)=[t_{j(i-1)}(z_2)]$。那么，对所有 $1\le j\le m$满足 (5.5)，等价于满足 $A(\tau)U(\tau)=B(\tau)$。对于所有 $\tau\in\mathbb{T}\setminus(E_\phi\cup E_\theta)$，$\det(A(\tau))\neq 0$，否则 $r_2(\tau)q_1(\cdot,\tau)\ldots,r_2(\tau)q_m(\cdot,\tau)$ 中的某一个将是其余各项的线性组合，这与假设 $\frac{q_1}{p}(\cdot,\tau)$ $\ldots\frac{q_m}{p}(\cdot,\tau)$ 是 $\mathcal{K}_{\theta_\tau}$ 的一组基相矛盾。因此，根据克拉默法则，对于 $\tau\in\mathbb{T}\setminus(E_\phi\cup E_\theta)$，

$$u_{ij}(\tau)=\frac{\det(A^{i,j}_B(\tau))}{\det(A(\tau))},$$

其中，$A^{i,\ j}_{\ B}(\tau)$由 $A(\tau)$构成，方法是将 $A(\tau)$的第 i列替换为 $B(\tau)$的第 j列。注意，$U(\tau)$是 $U(z_2)$的边界函数 $=[\det(A^{i,\ j}_{\ B}(z_2))/\det(A(z_2))]_{,}$ 这是一个矩阵值函数，其各项都是 z_2 中的有理函数，并且具有

一组共同的奇点。由于 $U(z_2)$ 在 $\mathbb{T}$中除至多有限多个点外均为酉矩阵，因此 $\mathbb{T}$ 中出现的所有这些奇点都是可去奇点。去掉这些奇点后，我们得到 U 现在在 $\mathbb{T}$ 上取酉值，且对于所有 5.3，式（ $\tau \in \mathbb{T}$都成立，因为 M_θ^1和 M_ϕ^1在 $\mathbb{D}$上连续。 □

若交换 z_1 和 z_2的角色，并要求 $\deg_2 \theta$，$\deg_2 \phi \geq 1$，则定理 2.1和定理 5.1 的相应版本仍成立，并定义

$$S_\theta^2 = P_{\mathcal{S}_1} S_{z_2}|_{\mathcal{S}_1} \quad \text{and} \quad S_\phi^2 = P_{\widetilde{\mathcal{S}}_1} S_{z_2}|_{\widetilde{\mathcal{S}}_1}.$$

设 M_θ^1， M_θ^2， M_ϕ^1， M_ϕ^2为定理 S_θ^1， S_θ^2， S_ϕ^1， S_ϕ^2所保证的矩阵值有理函数。利用这些记号，我们得到以下推论，它通过刻画何时 $\theta = \lambda\phi$ 仅使用与移位算子的二变量压缩相关的符号，从而完全回答了问题 1。

推论 5.2. 存在定义在 $\mathbb{T}$ 上的酉矩阵值函数 U_1、U_2，使得 t

$$M_\theta^1(\tau) = U_1(\tau) M_\phi^1(\tau) U_1(\tau)^* \quad \textit{and} \quad M_\theta^2(\tau) = U_2(\tau) M_\phi^2(\tau) U_2(\tau)^*$$

对所有 $\tau \in \mathbb{T}$，当且仅当 $\theta = \lambda\phi$，其中某个 $\lambda \in \mathbb{T}$。

证明。反向结论可由定理 5.1直接得出。为证明正向结论，只需注意定理 5.1 证明中的正向论证 $\frac{\theta}{\phi}$ 是仅关于 z_2 的有理函数，而对称地可知 $\frac{\theta}{\phi}$ 是仅关于 z_1的有理函数。因此，$\frac{\theta}{\phi} \equiv \lambda$对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$成立。由于 $|\theta(\tau)| = |\phi(\tau)| = 1$对几乎处处的 $\tau \in \mathbb{T}^2$成立，所以必有 $\lambda \in \mathbb{T}$。□

定理 5.1还表明，对于单个 θ，对 $\mathcal{K}_\theta$ 的分解方式对所得压缩移位 S_θ^1的影响有限：

推论 5.3。 假设 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$给出 $\mathcal{K}_\theta$ 的两个正交分解，并设

$$S_\theta^1 = P_{\mathcal{S}_2} S_{z_1}|_{\mathcal{S}_2} \quad \textit{and} \quad \tilde{S}_\theta^1 = P_{\tilde{\mathcal{S}}_2} S_{z_1}|_{\tilde{\mathcal{S}}_2}.$$

对于任意选取的 β_2 和 β_2 的标准正交基 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 和 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$，相应的矩阵值函数 M_{θ,β_2}^1 和 $M_{\theta,\widetilde{\beta_2}}^1$ 满足定理 2.1 中的关系

$$M_{\theta,\beta_2}^1(\tau) = U(\tau) M_{\theta,\widetilde{\beta_2}}^1(\tau) U(\tau)^*,$$

其中每个 $U(\tau)$ 都是一个 $m \times m$ 酉矩阵，且 $\tau \in \mathbb{T}$.

我们用下面的例子说明推论 5.3：

例 5.4. 设 $\theta(z) = \frac{2z_1z_2 - z_1 - z_2}{2 - z_1 - z_2}$并令 $\Theta(z) = z_1\theta(z)$。为了满足推论 5.3的条件，我们需要找到 $\mathcal{K}_\Theta$的两个正交分解。我们先考虑 θ。将引理 4.4应用于 θ，可得 $A_2 = 4$，$\gamma_2 = -2$， $\zeta_2 = -1$，

$B=0$，且 $q^{\pm}(z_2)=\sqrt{2}(1-z_2)$，因此 $\mathcal{K}_\theta=\mathcal{S}_1^\theta\oplus\mathcal{S}_2^\theta$ 存在唯一分解，分别为 S_{z_1}-不变子空间和 S_{z_2}-不变子空间；令 $f_1^2(z):=\frac{\sqrt{2}}{(1-z_2)\sqrt{2-z_1-z_2}}$，$\beta_2^\theta:=\{f_1^2\}$是 $\mathcal{S}_2^\theta\ominus z_2\mathcal{S}_2^\theta$ 的标准正交基。此外，对于 $g_1^2(z_2)=-\frac{\sqrt{2}(1-z_2)}{\sqrt{2-z_2}}$，有 $M_\theta^1=\frac{1}{2-\overline{z_2}}$和 $S_{z_1}^*\theta=g_1^2f_1^2$，因为 $\zeta_2=-1$。

根据例 4.7，我们有 $\mathcal{K}_\Theta$ 的两种分解：$\mathcal{K}_\Theta=\mathcal{S}_1\oplus\mathcal{S}_2$ 其标准正交基为 $\beta_2:=\{1,z_1f_1^2\}$ 当 $\mathcal{S}_2\ominus z_2\mathcal{S}_2$；另一种为 $\mathcal{K}_\Theta=\tilde{S}_1\oplus\tilde{\mathcal{S}}_2$ 其标准正交基为 $\widetilde{\beta_2}:=\{f_1^2,\theta\}$。因此，根据该例中的公式，

$$M^1_{\theta,\beta_2}=\frac{1}{2-\overline{z_2}}\begin{bmatrix}0&0\\\sqrt{2}(1-\overline{z_2})&1\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad M^1_{\theta,\widetilde{\beta_2}}=\frac{1}{2-\overline{z_2}}\begin{bmatrix}1&0\\-\sqrt{2}(1-\overline{z_2})&0\end{bmatrix}.$$

因为如例中所述，$M^1_{z_1}=0$。

现在，我们可以应用定理 5.1 证明中的算法，求出 $U(\tau)$。由于 $p=q=2-z_1-z_2$,

$$\hat{q_1}=(2-z_2)+(-1)z_1,\quad \hat{q_2}=0+\sqrt{2}(1-z_2)z_1$$

and

$$\hat{t_1}=\sqrt{2}(1-z_2)+0z_1,\quad \hat{t_2}=-z_2+(2z_2-1)z_1.$$

Thus, $A(z_2)=\begin{bmatrix}2-z_2&0\\-1&\sqrt{2}(1-z_2)\end{bmatrix}$, $B(z_2)=\begin{bmatrix}\sqrt{2}(1-z_2)&-z_2\\0&2z_2-1\end{bmatrix}$, and

$$\begin{aligned}U(z_2)&=\frac{1}{\sqrt{2}(2-z_2)(1-z_2)}\begin{bmatrix}2(1-z_2)^2&-\sqrt{2}z_2(1-z_2)\\\sqrt{2}(1-z_2)&-2(1-z_2)^2\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2-z_2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}(1-z_2)&-z_2\\1&-\sqrt{2}(1-z_2)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

约去公因子后。容易验证，对于所有 $\tau\in\mathbb{T}$，$U(\tau)$ 都是酉矩阵，且 $M^1_{\theta,\beta_2}(\tau)=U(\tau)M^1_{\theta,\widetilde{\beta_2}}(\tau)U(\tau)^*$。

注意，由于 U和 M^{1*}_{θ,β_2}在 $\mathbb{D}$上有界且解析，而 U在$\mathbb{T}$上取酉值，根据矩阵值 Toeplitz 算子的基本性质可知，T_U 是一个等距算子，且 $T_U^*T_{M^1_{\theta,\beta_2}}T_U=T_{M^1_{\theta,\widetilde{\beta_2}}}$。然而，$T_U$不是酉算子，且 $T_UT_{M^1_{\theta,\widetilde{\beta_2}}}T_U^*\neq T_{M^1_{\theta,\beta_2}}$。为说明这一点，令 $\vec{r}(z)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$。那么

$||\vec{r}||_{H_2^2}=1$，但

$$T_U^*\vec{r}=\begin{bmatrix}P_{H_2^2}\left(\frac{1}{2-\overline{z_2}}\right)\\P_{H_2^2}\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\overline{z_2})}{2-\overline{z_2}}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},$$

其范数不为 1。上文中，$P_{H_2^2}$ 表示从 $L^2(\mathbb{T})$（变量为 z_2 ）到 H_2^2的正交投影。此外，类似的计算表明

$$T_U T_{M^1_{\theta,\widetilde{\beta_2}}} T_U^* \vec{r} = \frac{1}{4(2-z_2)} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3-2z_2 \end{bmatrix}$$

而$T_{M^1_{\theta,\ \beta_2}} \vec{r}$ 的第一分量显然必须为 0。

虽然我们在上面得到的酉算子 $U(\tau)$ 取决于 τ，但很自然会问，是否可以用一个常数酉矩阵使这个例子满足推论5.3中的矩阵等式。答案是否定的。考虑任意满足$M^1_{\theta,\ \beta_2}(\tau) U = U M^1_{\theta,\ \widetilde{\beta_2}}(\tau)$和 $UU^* = I$的矩阵$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，不难看出，由此得到的方程组迫使

$|b| = \frac{1}{|2-\tau|}$成立，因此该矩阵必须随 τ变化。

6. Non-Uniqueness of $W(S^1_\theta)$

本节探讨问题 2：对于 $j = 1$，2，等式 $W(S^j_\theta) = W(S^j_\phi)$是否意味着有理内函数 θ 和 ϕ 满足某种良好的关系？同样，我们将用第 4 节中的构造来说明由此产生的困难。首先，正如定理 1.1 所指出的，在单变量情形下，$W(S_\theta) = W(S_\phi)$当且仅当存在某个 $\lambda \in \mathbb{T}$使得 $\theta = \lambda\phi$ 。在 S^1_θ、S^1_ϕ的二变量情形下，这一结论的逆向（在闭包意义下）有一个有趣的类似结果。具体来说，我们有定理 5.1 的以下推论：

推论 6.1。设 θ, ϕ 是 $\mathbb{D}^2$ 上的有理内函数。若存在有限布拉施克乘积 B_1, B_2，使得 $B_1(z_2)\phi(z_1, z_2) = B_2(z_2)\theta(z_1, z_2)$，则 ***Closure*** $(W(S^1_\theta)) =$ ***Closure*** $(W(S^1_\phi))$。

证明。首先考虑 $\deg_1(\phi) = 0$ 的情形。那么由我们的假设可知，$\deg_1(\theta) = 0$ 也成立。根据定理 2.1 的陈述之后的说明，$W(S^1_\theta) = \emptyset = W(S^1_\phi)$。若 $\deg_1(\theta) = 0$，类似论证同样成立。

现在假设 $\deg_1(\phi), \deg_1(\theta) \geq 1$。那么，[10, 推论 3.4] 指出，对于任意此类有理内函数ψ（特别是对于 θ 和 ϕ），$W(S^1_\psi)$ 的闭包是 $\bigcup_{\tau\in\mathbb{T}} W(M^1_\psi(\tau))$ 的凸包。根据定理 5.1，每个 $M^1_\theta(\tau)$ 都与 $M^1_\phi(\tau)$ 酉相似，因此，对于每个 $\tau \in \mathbb{T}$，$W(M^1_\theta(\tau)) = W(M^1_\phi(\tau))$。由此，$W(S^1_\theta)$ 的闭包必定等于 $W(S^1_\phi)$ 的闭包。

□

推论 6.1仅说明在取闭包意义下相等。然而，命题3.5 表明，如果次数为 $(1, n)$ 有理内函数 θ和 ϕ在 z_2中仅相差一个内因子，那么 $W(S^1_\theta) = W(S^1_\phi)$。即使在次数为 $(1, n)$ 的情形下，两个有理内函数 θ, ϕ也可能产生相等的数值域，而不只是在 z_2中相差一个内因子。下面考虑一个例子。

例 6.2。 设 $p(z) = 2 - z_1 - z_2$ 和 $q(z) = 2 - z_1 - z_2^2$，并令

$$\theta(z) = \frac{2z_1z_2 - z_1 - z_2}{2 - z_1 - z_2} \quad \text{and} \quad \phi(z) = \frac{2z_1z_2^2 - z_1 - z_2^2}{2 - z_1 - z_2^2}.$$

由命题 3.1， S_θ^1 与 $T_{M_\theta^1}$ 酉等价： $H_2^2 \to H_2^2$ 其中 $M_\theta^1(z_2) = \frac{1}{2-\bar{z}_2}$ 且 S_ϕ^1 与 $T_{M_\phi^1}$ 酉等价： $H_2^2 \to H_2^2$ 其中 $M_\phi^1(z_2) = \frac{1}{2-\bar{z}_2^2}$. 由推论 3.2，

$W(S_\theta^1) = M_\theta^1(\mathbb{D})$ 与 $W(S_\phi^1)$ 的凸包 $= M_\phi^1(\mathbb{D})$ 的凸包。

很容易看出，这两个集合完全相同。

例 6.2 表明，可以尝试证明 $W(S_\theta^1) = W(S_\phi^1)$ 意味着 θ， ϕ 在 z_2 中的差异只能是内因子，或在 z_2 中由有限 Blaschke 乘积复合而成。然而，事实证明，有理内函数可以产生相同的数值域，却具有截然不同的公式。具体而言，在下面的例子中，我们构造两个有理内函数 ϕ 和 ψ，使得 次数 $\phi = (2, 2) =$ 次数 ψ，并且对于 $\mathcal{K}_\phi$ 和 $\mathcal{K}_\psi$ 的给定分解，在两个变量中对应的数值域相同：

$$W(S_\phi^1) = W(S_\psi^1) \text{ and } W(S_\phi^2) = W(S_\psi^2),$$

但是， ϕ 与 ψ 之间没有明显的联系。

例 6.3. 在本例中，我们考虑两类有理内函数 ϕ_t 和 ψ_s，它们由 s， $t \in (0, 1)$ 参数化，并证明对于某些特定的 s， t 取值，它们对应的数值域相同。首先，令 $\theta_t(z) = \frac{z_1z_2 - t}{1 - tz_1z_2}$，并定义

$$\phi_t(z) := \theta_t(z)^2 = \left(\frac{z_1z_2 - t}{1 - tz_1z_2}\right)^2. \tag{6.1}$$

那么 ϕ_t 具有 $B(z_1z_2)$ 的形式，其中 B 是一个有限布拉施克乘积，因此属于例 4.6 的讨论范围。如该例所述，我们可以将 $\mathcal{K}_{\phi_t} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 分解为，其中每个 $\mathcal{S}_j$ 均为 S_{z_j}-不变的，并且 β_1 和 β_2 分别是 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 的标准正交基，如下所示：

$$\beta_1 = \left\{\frac{z_1\sqrt{1-t^2}}{1 - tz_1z_2}, \theta_t\frac{z_1\sqrt{1-t^2}}{1 - tz_1z_2}\right\} \quad \text{and} \quad \beta_2 = \left\{\frac{\sqrt{1-t^2}}{1 - tz_1z_2}, \theta_t\frac{\sqrt{1-t^2}}{1 - tz_1z_2}\right\}.$$

那么，与例 4.6 中一样，矩阵值函数 $M_{\phi_t}^1$ 和 $M_{\phi_t}^2$ 相对于这些基表示为：

$$M_{\phi_t}^1(z_2) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ (1-t^2) & t \end{bmatrix} \bar{z}_2 \quad \text{and} \quad M_{\phi_t}^2(z_1) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ (1-t^2) & t \end{bmatrix} \bar{z}_1.$$

根据定理 2.1，我们知道 $W(S_{\phi_t}^j) = W(T_{M_{\phi_t}^j})$ 当 $j = 1, 2$。由 $M_{\phi_t}^1$ 与 $M_{\phi_t}^2$ 之间的对称性可知， $W(S_{\phi_t}^1) = W(S_{\phi_t}^2)$ 因此，我们只需计算 $W(S_{\phi_t}^1)$。

为便于计算，我们先求出 $W(S^1_{\phi_t})$的闭包。为此，固定 $\tau \in \mathbb{T}$，并注意到，由于 $M^1_{\phi_t}(\tau)$ 是一个 2×2矩阵，我们可以使用椭圆值域定理得出 $W(M^1_{\phi_t}(\tau))$等于$D\big(\bar\tau t,\ \frac{1-t^2}{2}\big)$，即以 $\bar\tau t$为中心、半径为$\frac{1-t^2}{2}$ 的闭圆盘。然后根据 [10, 推论 3.4]，

$$\begin{aligned}\text{Closure of } W(S^1_{\phi_t}) &= \text{Convex hull of } \bigcup_{\tau\in\mathbb{T}} W(M^1_{\phi_t}(\tau))\\ &= \text{Convex hull of } \bigcup_{\tau\in\mathbb{T}} \overline{D\big(\bar\tau t, \tfrac{1-t^2}{2}\big)}\\ &= \text{Convex hull of } \bigcup_{\tau\in\mathbb{T}} \bar\tau\overline{D\big(t, \tfrac{1-t^2}{2}\big)},\end{aligned}$$

其中 $\overline{D(t, \frac{1-t^2}{2})}$是以 t 为中心、半径为 $\frac{1-t^2}{2}$ 的闭圆盘。由于集合 $\cup_{\tau\in\mathbb{T}}\bar\tau D(t, \frac{1-t^2}{2})$ 在关于原点的旋转下不变，且该性质在取凸包时得以保持，我们可以得出 $W(S^1_{\phi_t})$ 的闭包是以原点为中心的闭圆盘。通过考虑 $\tau = 1$，我们可以看到该圆盘的半径为 $t + \frac{1-t^2}{2}$。

现在，我们断言 $W(S^1_{\phi_t}) = D(\mathbf{0}, t + \frac{1-t^2}{2})$，即以 $\mathbf{0}$ 为中心、半径为 $t + \frac{1-t^2}{2}$ 的开圆盘。由于 $W(S^1_{\phi_t})$ 与 $D(\mathbf{0}, t + \frac{1-t^2}{2})$ 是具有相同闭包的凸集，且 $D(\mathbf{0}, t+\frac{1-t^2}{2})$ 是开的，凸集的众所周知的性质（例如，参见 [34, 推论 6.3.2]）蕴含

$$D\big(0, t + \tfrac{1-t^2}{2}\big) \subseteq W(S^1_{\phi_t}).$$

对于另一个包含关系，我们证明：若 $x \in W(S^1_{\phi_t}) = W(T_{M^1_{\phi_t}})$，则 $|x| < t + \frac{1-t^2}{2}$.为此，固定 $x \in W(S^1_{\phi_t})$，从而存在一个 $\vec f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2\end{bmatrix} \in H^2_2 \oplus H^2_2$，满足 $\|\vec f\|^2 := \|f_1\|^2_{H^2_2} + \|f_2\|^2_{H^2_2} = 1$，使得

$$\begin{aligned} x = \langle T_{M^1_{\phi_t}}\vec f, \vec f\rangle_{H^2_2\oplus H^2_2} &= \left\langle \begin{bmatrix} t & 0\\ (1-t^2) & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1\\ f_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_2 f_1\\ z_2 f_2\end{bmatrix}\right\rangle_{H^2_2\oplus H^2_2}\\ &= t\langle f_1, z_2 f_1\rangle_{H^2_2} + (1-t^2)\langle f_1, z_2 f_2\rangle_{H^2_2} + t\langle f_2, z_2 f_2\rangle_{H^2_2}.\end{aligned}$$

如果 f_1 或 f_2 是零函数，那么 $|x| \le t$，因此 $x \in D(\mathbf{0}, t + \frac{1-t^2}{2})$。否则，回想一下，$S_z$在 $H^2(\mathbb{D})$ 上的数值域为 $\mathbb{D}$，参见 [22]。于是 $W(S_{z_2}|_{H^2_2}) = \mathbb{D}$，并且由于$t > 0$，我们有

$$\begin{aligned} |x| &\le t\|f_1\|^2\left|\left\langle \frac{f_1}{\|f_1\|}, z_2\frac{f_1}{\|f_1\|}\right\rangle_{H^2_2}\right| + (1-t^2)\|f_1\|\|f_2\| + t\|f_2\|^2\left|\left\langle \frac{f_2}{\|f_2\|}, z_2\frac{f_2}{\|f_2\|}\right\rangle_{H^2_2}\right|\\ &< t\|f_1\|^2 + (1-t^2)\|f_1\|\sqrt{1-\|f_1\|^2} + t\|f_2\|^2\\ &\le t + \tfrac{(1-t^2)}{2},\end{aligned}$$

按需取值。这意味着 $W(S^1_{\phi_t})$（从而 $W(S^2_{\phi_t})$）等于开圆盘 $D(0, t+\frac{1-t^2}{2})$。对于我们的第二组函数，固定 $s \in [0,1)$ 并考虑

$$\psi_s(z) := z_1 z_2 \theta_s(z) = z_1 z_2 \left(\frac{z_1 z_2 - s}{1 - s z_1 z_2} \right). \tag{6.2}$$

同样，这个函数具有以下形式：$B(z_1 z_2)$，其中 B 是一个有限布拉施克乘积，因此我们可以应用例4.6，将 θ_s 作为第一个因子，将 $z_1 z_2$ 作为第二个因子。这样我们便可以将 $\mathcal{K}_{\psi_s} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 分解为，其中每个 $\mathcal{S}_j$ 都是 S_{z_j}-不变的，并且 β_1 和 β_2 分别是 $\mathcal{S}_1 \ominus z_1\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$ 的标准正交基，如下所示：

$$\widetilde{\beta}_1 = \left\{ \frac{z_1\sqrt{1-s^2}}{1-sz_1z_2}, \theta_s z_1 \right\} \quad \text{and} \quad \widetilde{\beta}_2 = \left\{ \frac{\sqrt{1-s^2}}{1-sz_1z_2}, \theta_s \right\}.$$

于是，与例4.6中一样，矩阵值函数 $M^1_{\psi_s}$ 和 $M^2_{\psi_s}$ 相对于这些基为：

$$M^1_{\psi_s} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ \sqrt{1-s^2} & 0 \end{bmatrix} \bar{z}_2 \quad \text{and} \quad M^2_{\psi_s} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ \sqrt{1-s^2} & 0 \end{bmatrix} \bar{z}_1.$$

因此，我们有 $W(S^1_{\psi_s}) = W(S^2_{\psi_s})$。为计算 $W(S^1_{\psi_s})$，取满足 $\|\vec{f}\|^2 = \|f_1\|^2_{H^2_2} + \|f_2\|^2_{H^2_2} = 1$ 的 $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in H^2_2 \oplus H^2_2$。然后

$$\begin{aligned} \langle T_{M^1_{\psi_s}} \vec{f}, \vec{f} \rangle_{H^2_2 \oplus H^2_2} &= \left\langle \begin{bmatrix} s & 0 \\ \sqrt{1-s^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_2 f_1 \\ z_2 f_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{H^2_2 \oplus H^2_2} \\ &= s\langle f_1, z_2 f_1 \rangle_{H^2_2} + \sqrt{1-s^2}\langle f_1, z_2 f_2 \rangle_{H^2_2} \\ &= \sqrt{1-s^2}\|f_1\|\|f_2\| w + s\|f_1\|^2 \zeta \\ &= xw\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-x^2} + sx^2\zeta, \end{aligned}$$

其中 $x = \|f_1\|_{H^2_2} \in [0,1]$，并且（若 f_1 或 f_2 等价地为零，则需对公式稍作调整），

$$w = \frac{\langle f_1, z_2 f_2 \rangle_{H^2_2}}{\|f_1\|_{H^2_2}\|f_2\|_{H^2_2}} \in \overline{\mathbb{D}} \quad \text{and} \quad \zeta = \left\langle \frac{f_1}{\|f_1\|_{H^2_2}}, z_2 \frac{f_1}{\|f_1\|_{H^2_2}} \right\rangle_{H^2_2} \in W(S_{z_2}|_{H^2_2}) = \mathbb{D}.$$

如果 $f_1 \equiv 0$，那么 $\langle T_{M^1_{\psi_s}} \vec{f},\ \vec{f} \rangle = 0$。如果 $f_2 \equiv 0$，那么 $\|f_1\| = 1$；于是 $\langle T_{M^1_{\psi_s}} \vec{f},\ \vec{f} \rangle = sx^2\zeta$，遍历所有这样的 f_1 会使 ζ 遍历整个 $\mathbb{D}$。与此同时，允许 f_1 和 f_2 遍历所有满足以下条件的函数对：两者均有 $f_1,\ f_2 \not\equiv 0$ 属于 H^2_2，且 $\|\vec{f}\| = 1$ 恰好使 w 和 ζ 分别遍历 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}$，并使 x 覆盖区间 $(0,\ 1)$。因此，我们有

$$W(T_{M^1_{\psi_s}}) = \left\{ xw\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-x^2} + sx^2\zeta : x \in [0,1], w \in \overline{\mathbb{D}}, \zeta \in \mathbb{D}. \right\}.$$

这一刻画意味着，如果 $\alpha \in W(T_{M^1_{\psi_s}})$，那么对所有 $r \in [0, 2\pi$，都有 $e^{ir}\alpha \in W(T_{M^1_{\psi_s}})$。因此，$W(T_{M^1_{\psi_s}})$是一个以原点为中心的圆盘。该圆的半径为

$$\begin{aligned} w(T_{M^1_{\psi_s}}) &= \sup\left\{|\alpha| : \alpha \in W(T_{M^1_{\psi_s}})\right\} \\ &= \max\left\{x\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-x^2} + sx^2 : x \in [0,1]\right\} \\ &= \tfrac{s+1}{2}, \end{aligned}$$

最后一步是一次微积分计算。由于我们只允许 $\zeta \in \mathbb{D}$ 和 $s > 0$，可以看出，数值半径实际上并不会由数值域中的任何一点取到。因此，$W(S^1_{\psi_s}) = W(T_{M^1_{\psi_s}})$ 是一个以原点为中心、半径为 $\frac{s+1}{2}$ 的开圆盘。总而言之，对于所有 s，$t \in (0, 1)$，我们有

$$\begin{aligned} W(S^1_{\phi_t}) = W(S^2_{\phi_t}) &= D\big(0, t + \tfrac{1-t^2}{2}\big), \\ W(S^1_{\psi_s}) = W(S^2_{\psi_s}) &= D\big(0, \tfrac{s+1}{2}\big). \end{aligned}$$

固定 $t \in (0, 1)$。令 $t + \frac{1-t^2}{2} = \frac{s+1}{2}$，得到 $s = t(2-t) \in (0, 1)$。因此，函数

$$\phi_t(z) = \left(\frac{z_1 z_2 - t}{1 - t z_1 z_2}\right)^2 \quad \text{and} \quad \psi_{t(2-t)}(z) = z_1 z_2 \left(\frac{z_1 z_2 - t(2-t)}{1 - t(2-t) z_1 z_2}\right)$$

次数为 (2，2)，且数值域相同，分别为 $W(S^1_{\phi_t}) = W(S^1_{\psi_{t(2-t)}})$ 和 $W(S^2_{\phi_t}) = W(S^2_{\psi_{t(2-t)}})$，但这两个函数之间没有明显的关系（至少对我们而言）。

7. 开数值域与闭数值域

本节中，我们探讨问题 3：何时数值域 $W(S^j_\theta)$是开集，何时是闭集。在注记 3.4中，我们看到，如果 θ 的次数为 $(1, n)$，那么有两种情况：如果 θ 是由一个定义在 z_1 上的次数为 1 的 Blaschke乘积和一个定义在 z_2上的次数为 n的 Blaschke乘积的乘积，那么 $W(S^1_\theta)$ 是闭集。否则，$W(S^1_\theta)$ 是开集。

由此可以提出以下略显推测性的猜想：

猜想 7.1. 设 $\theta = \lambda^{\tilde{p}}_p$ 是定义在 $\mathbb{D}^2$上的有理内函数。如果 θ 不能分解为 $B_1(z_1)B_2(z_2)$，其中 B_1和 B_2是有限布拉施克乘积，那么 $W(S^1_\theta)$和 $W(S^2_\theta)$是开集。如果 θ确实可以分解为$B_1(z_1)B_2(z_2)$，那么 $W(S^1_\theta)$和 $W(S^2_\theta)$是闭集。

如下述命题所示，猜想 7.1中的因子分解条件意味着至少存在一种 $\mathcal{K}_\theta$分解，使所得的 $W(S^1_\theta)$是闭集。

命题 7.2. 设 $\theta = B_1(z_1)B_2(z_2)$ 是有限布拉施克乘积 B_1, B_2。则存在一种 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ 分解，使得 $W(S^1_\theta)$是闭集。

证明。 若 次数$_1(\theta) = 0$，则定理 2.1之后的注释 $W(S^1_\theta) = \emptyset$，因此是闭的。

现在假设 $\deg_1(\theta) \geq 1$。通过考察再生核，我们可以将 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{K}_{B_1} + B_1\mathcal{K}_{B_2}$ 分解并定义

$$\mathcal{S}_1 := B_1\mathcal{K}_{B_2} = \mathcal{H}\left(\frac{B_1(z_1)\overline{B_1(w_1)}(1-B_2(z_2)\overline{B_2(z_2)})}{(1-z_1\bar{w}_1)(1-z_2\bar{w}_2)}\right),$$
$$\mathcal{S}_2 := \mathcal{K}_{B_1} = \mathcal{H}\left(\frac{1-B_1(z_1)\overline{B_1(w_1)}}{(1-z_1\bar{w}_1)(1-z_2\bar{w}_2)}\right).$$

由于 $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}$，第 2 节中的讨论意味着，我们有一个正交分解 $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$，其中每个 $\mathcal{S}_j$ 都是 z_j- 不变的，并且 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2 = \mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix}1-B_1(\ z_1\ B_1\ z\\ 1-z_1\bar{w}_1\end{smallmatrix}\right)()$，是与 B_1 相关联的单变量模型空间。

与 [10, 例 3.3], 类似，我们可以为这个单变量模型空间选取一个合适的基，并得到一个矩阵符号 M_θ^1，它与 M_{B_1} 在 (1.1) 中给出的常矩阵一致。由于 M_{B_1} 是一个常矩阵，$W(T_{M_\theta^1}) = W(T_{M_{B_1}}) = W(M_{B_1})$ 是闭的，因此，$W(S_\theta^1)$ 是闭的。□

遗憾的是，猜想 7.1 中的因子分解条件并不意味着与每个 M_θ^1相关联的 $\mathcal{K}_\theta$ 分解都是常值的。例如，考虑以下情形：

例 7.3. 设 $\theta(z) = z_1z_2$ 和 $\Theta(z) = z_1\theta(z)$。那么根据引理 4.4，我们可以将$\mathcal{K}_\theta = \mathcal{S}_1^\theta \oplus \mathcal{S}_2^\theta$ 分解，其中每个 $\mathcal{S}_j^\theta$都是 S_{z_j}-不变的，且 $\{z_2\}$是 $\mathcal{S}_2^\theta \ominus z_2\mathcal{S}_2^\theta$的标准正交基。由此，例 4.7 表明我们可以将 $\mathcal{K}_\Theta = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$分解，其中每个 $\mathcal{S}_j$都是 S_{z_j}-不变的，且 $\{1, z_1z_2\}$ 是 $\mathcal{S}_2 \ominus z_2\mathcal{S}_2$的标准正交基。然后，例 4.7 中的公式（或直接计算）给出相应的矩阵 M_Θ^1:

$$M_\Theta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

尽管 M_Θ^1 不是常数，但可以证明 $T_{M_\Theta^1}$ 的数值域： $H_2^2 \to H_2^2$是以原点为中心、半径为 $_1\ _2$的闭欧几里得圆盘。这可由 [6,定理 2], 推出，但我们也可以直接证明。为确定 $W($ $T_{M_\Theta^1})$中的元素，任取

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \text{ with each } f_1, f_2 \in H_2^2 \text{ and } \|f_1\|_{H_2^2}^2 + \|f_2\|_{H_2^2}^2 = 1.$$

Then

$$\left\langle T_{M_\Theta^1}\vec{f}, \vec{f}\right\rangle_{H_2^2 \oplus H_2^2} = \langle f_1, z_2f_2\rangle_{H_2^2}. \tag{7.1}$$

将 f_1 替换为 $e^{i\alpha}f_1$后，可以验证（7.1）中的点集在旋转下保持不变。因此， $W(T_{M_\Theta^1})$ 必定是以原点为中心的圆盘。此外，每个点都满足

$$\left|\left\langle T_{M_\Theta^1}\vec{f}, \vec{f}\right\rangle_{H_2^2 \oplus H_2^2}\right| = \left|\langle f_1, z_2f_2\rangle_{H_2^2}\right| \leq \|f_1\|_{H_2^2} \cdot \|f_2\|_{H_2^2} \leq \tfrac{1}{2}.$$

由于 1_2 可通过令 $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_2$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 得到，我们可以看出 $W(T_{M_\Theta^1})$ 是一个以原点为中心、半径为 1_2 的闭欧几里得圆盘。因此， $W(S_\Theta^1)$ 是闭集，尽管 M_Θ^1 不是常数函数。这个例子支持猜想 7.1 但也表明，要证明它可能颇具挑战性。

对猜想 7.1的完整解答超出了本文的讨论范围。不过，我们确有以下部分结果，其中用到了一些 [22]中的思路。

定理 7.4。 设 $\theta = \lambda_p^{\tilde{p}}$ 是 $\mathbb{D}^2$ 上的一个有理内函数，且 $\deg_1(\theta) \geq 1$。若不存在一条直线同时与所有 $\tau \in \mathbb{T}$对应的数值域 $W(M_\theta^1(\tau))$ 相交，则 $W(S_\theta^1)$必为开集。

证明。 我们通过逆否命题来证明。具体而言，假设 $W(S_\theta^1) = W(T_{M_\theta^1})$ 不是开集，并证明存在 $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$，使得对每个$\tau \in \mathbb{T}$都有 $\beta \in \mathrm{Im}\,(e^{i\alpha} W(M_\theta^1(\tau)))$。于是， $y = \beta$与每个集合 $e^{i\alpha} W(M_\theta^1(\tau))$ 相交。等价地，将 $y = \beta$旋转 $-\alpha$弧度后，直线 $\cos(\alpha) y + \sin(\alpha) x = \beta$与每个 $M_\theta^1(\tau)$ 相交。

假设 $W(T_{M_\theta^1})$ 不是开集，并令 b为 $W(T_{M_\theta^1}) \cap \partial W(T_{M_\theta^1})$ 中的一点。令 m 为 M_θ^1 的维数，并令 I_m 表示 $m \times m$ 单位矩阵。于是$0 \in W(T_{M_\theta^1 - bI_m}) \cap \partial W(T_{M_\theta^1 - bI_m})$。由于 $W(T_{M_\theta^1 - bI_m})$ 是凸集，存在一个角度 α，使得将 $W(T_{M_\theta^1 - bI_m})$ 旋转 α后，所得集合完全包含于闭上半平面 $\{x + iy \in \mathbb{C} : \ y \geq 0\}$。等价地，

$$\mathrm{Im}\left(W(T_{e^{i\alpha} M_\theta^1 - e^{i\alpha} bI_m})\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha} W(T_{M_\theta^1 - bI_m})\right) \subseteq [0, \infty)$$

并且包含 0。为简单起见，定义函数

$$F_\theta := e^{i\alpha} M_\theta^1 - e^{i\alpha} bI_m,$$

一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的连续矩阵值函数。于是 $\mathrm{Im}\,(W(T_{F_\theta})) \subseteq [0, \infty)$。因此，对所有 $\vec{g} \in H_2^2(\mathbb{D})^m$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{Im}\left(\langle T_{F_\theta} \vec{g}, \vec{g} \rangle_{H_2^2(\mathbb{D})^m}\right) &= \int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\left(\langle F_\theta(\tau) \vec{g}(\tau), \vec{g}(\tau) \rangle_{\mathbb{C}^m}\right) \, dm(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \langle \mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau))\, \vec{g}(\tau), \vec{g}(\tau) \rangle_{\mathbb{C}^m} \, dm(\tau), \end{aligned}$$

其中， dm 是 $\mathbb{T}$ 上的归一化勒贝格测度，且 $\mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau)) = \frac{1}{2i}(F_\theta(\tau) - F_\theta(\tau)^*)$。我们断言，上述不等式意味着，对于每个 $\tau \in \mathbb{T}$， $\mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau))$都必须是半正定矩阵。否则，若存在一个 $\tau_0 \in \mathbb{T}$ 和一个向量 $\vec{x} \in \mathbb{C}^m$ ，使得

$$\langle \mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau_0))\, \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{C}^m} < 0,$$

那么，我们可以找到一个向量值函数 $\vec{G} \in H_2^2(\mathbb{D})^m$ ，使得

$$\int_{\mathbb{T}} \left\langle \mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau))\, \vec{G}(\tau), \vec{G}(\tau) \right\rangle_{\mathbb{C}^m} \, dm(\tau) < 0,$$

矛盾。例如，当 $\epsilon > 0$ 足够小时，可以取 $\vec{G}(z) = \vec{x}_{z-\frac{1}{(1+\epsilon)\tau_0}}$。因此，对于每个 $\tau \in \mathbb{T}$, $\mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau))$ 都必须是半正定矩阵。回忆一下，$0 \in W(T_{F_\theta})$。因此，存在 $\vec{g}_0 \in H^2_2(\mathbb{D})^m$，满足 $\|\vec{g}_0\| = 1$ 且

$$0 = \mathrm{Im}\left(\langle T_{F_\theta}\vec{g}_0, \vec{g}_0\rangle_{H^2_2(\mathbb{D})^m}\right) = \int_{\mathbb{T}} \langle \mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau))\,\vec{g}_0(\tau), \vec{g}_0(\tau)\rangle_{\mathbb{C}^m}\ dm(\tau).$$

我们先前的论证表明

$$\langle \mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau))\,\vec{g}_0(\tau), \vec{g}_0(\tau)\rangle_{\mathbb{C}^m} \geq 0$$

对所有 $\tau \in \mathbb{T}$，只要 g_0 有定义，因此必有

$$\langle \mathrm{Im}\,(F_\theta(\tau))\,\vec{g}_0(\tau), \vec{g}_0(\tau)\rangle_{\mathbb{C}^m} = 0$$

对几乎处处的 $\tau \in \mathbb{T}$ 都成立。由于 $\vec{g}_0$ 是 $H^2_2(\mathbb{D})^m$ 中的一个元素，且不恒等于 $\vec{0}$，其边界值不可能在 $\mathbb{T}$ 中一个正测度的集合上等于 $\vec{0}$。这意味着

$$0 \in W(\mathrm{Im}(F_\theta(\tau))),$$

对几乎处处的 $\tau \in \mathbb{T}$ 都成立；又由于 F_θ 在 $\mathbb{T}$ 上连续，这意味着对每个 $\tau \in \mathbb{T}$，都有 $0 \in W(\mathrm{Im}(F_\theta(\tau)))$。接着，利用数值域的性质和 F_θ 的定义，可得

$$0 \in W(\mathrm{Im}(F_\theta(\tau))) = \mathrm{Im}\left(W(e^{i\alpha}M^1_\theta - e^{i\alpha}bI_m)\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha}W(M^1_\theta(\tau))\right) - \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha}b\right)$$

令 $\beta = \mathrm{Im}\,(e^{i\alpha}b)$，这就意味着，对于每个所需的 $\tau \in \mathbb{T}$，$\beta \in \mathrm{Im}\,(e^{i\alpha}W(M^1_\theta(\tau))$。结合我们此前的分析，即可证明该结论。 □

我们用一个例子来说明这个定理：

例 7.5. 固定 $t \in (0,1)$. 令 $\theta_t(z) = \frac{z_1 z_2 - t}{1 - t z_1 z_2}$，并定义

$$\phi_t(z) := \theta_t(z)^2 = \left(\frac{z_1 z_2 - t}{1 - t z_1 z_2}\right)^2$$

一个如例 6.3 中所述的有理内函数。我们将利用定理 7.4 证明，对于 $t > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$W(S^1_\theta)$ 必须是开集。具体而言，我们将证明，对于这样的 t 值，不存在一条直线能与所有 $\tau = 1, -1, i.$ 的数值域 $W(M^1_\theta(\tau))$ 相交。根据例 6.3，每个 $W(M^1_{\phi_t}(\tau)) = \bar{\tau}D\big(t, \frac{1-t^2}{2}\big)$，即以 $\bar{\tau}t$ 为中心、半径为 $\frac{1-t^2}{2}$ 的闭圆盘。因此，等价地，我们将证明不存在一条直线能与以下所有对象相交

$$D_1 := \overline{D_1(t,r)},\ D_2 := \overline{D_2(-t,r)} \text{ and } D_3 := \overline{D_3(-it,r)},$$

这里 $r = \frac{1-t^2}{2}$. 设 p_1 为圆盘 D_1 给出的边界上的一点

$$p_1 = (t,0) + r(\cos\delta_1, \sin\delta_1) = (t + r\cos\delta_1, \sin\delta_1),$$

p_2 为由 D_2 给出的圆盘边界上的一点

$$p_2 = (-t, 0) + r(\cos\gamma_1, \sin\gamma_1) = (-t + r\cos\gamma_1, r\sin\gamma_1)$$

以及 p_3 圆盘 D_3 边界上的一点，由下式给出

$$p_3 = (0, -t) + r(\cos\gamma_2, \sin\gamma_2) = (r\cos\gamma_2, -t + r\sin\gamma_2).$$

从 D_2 到 D_3 的斜率由下式给出

$$s_{23} = \frac{-t + r(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1)}{t + r(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)},$$

其中

$-t + r(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1) \in [-t - 2r, -t + 2r]$ 且 $t + r(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1) \in [t - 2r, t + 2r]$. 若 $t > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $t^2 + t - 1 = \left(t - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(t + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) > 0$. 于是 $-t + 2r = -t^2 - t + 1 < 0$且 $t - 2r = t^2 + t - 1 > 0$，这意味着 $s_{23} < 0$. 类似地，我们得到一个正斜率

$$s_{13} = \frac{-t + r(\sin\delta_2 - \sin\delta_1)}{-t + r(\cos\delta_2 - \cos\delta_1)}$$

从 D_1 到 D_3 对于 $t > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 因此，对于 $t > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，从 D_2 到 D_3 的直线斜率为负，而从 D_1 到 D_3 的直线斜率为正。这就导致矛盾，也就是说，对于 $t > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，不存在一条直线能与按所述方式排列的三个圆盘都相交。根据定理 7.4， $W(S^1_\theta)$ 必为开集。

参考文献

[1] J. Agler. 关于定义在多圆盘上的某些全纯函数的表示。载于《算子理论：进展与应用》，第48卷，第47–66页。Birkhäuser，巴塞尔，1990年。9[2] J. Agler, J.E. McCarthy，《Pick 插值与希尔伯特函数空间》。数学研究生系列，第44卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2002年。4[3] J. Agler, J. E. McCarthy, M. Stankus，环面代数集与多圆盘上的函数论。《J. Geom. Anal.》，16（2006年），第4期，551–562。4[4] J.A. Ball, C. Sadosky, and V. Vinnikov，具有多个演化过程的散射系统及多维输入/状态/输出系统。《Integral Equations Operator Theory》，52（2005年），323–393。4, 8, 9[5] M. Bhattacharjee, B.K. Das, R. Debnath, and J. Sarkar，多圆盘上的 Beurling 商模。《函数分析杂志》282（2022年），第1期，论文编号109258，共18页。6[6] N. Bebiano, I.M. Spitkovsky，具有矩阵符号的 Toeplitz 算子的数值域。《Linear Algebra Appl.》，436（2012年），1721–1726。35[7] K. Bickel，基本 Agler 分解。《Integral Equations Operator Theory》，74（2012年），第2期，233–257。8, 9, 10, 21[8] K. Bickel, J. Cima, and A. Sola，有理内函数的 Clark 测度。《Michigan Math. J.》73（2023），第5期，1021–1057。6

[9] K. Bickel and C. Liaw, C，借助 Agler 分解研究 Beurling 型子模的性质。《函数分析杂志》272，83–111（2017年）。6[10] K. Bickel and P. Gorkin，双圆盘上移位算子的压缩及其数值域。《算子理论杂志》79（2018年），第1期，225–265。4, 5, 6, 10, 11, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 30, 32, 35[11] K. Bickel and P. Gorkin，数值域与移位算子的压缩。载于《复分析与谱理论》，241–261页，《当代数学》第743卷，Centre Rech. Math. Proc.，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2020年。9[12] B.J. Cole and J. Wermer。安藤定理与平方和。《印第安纳大学数学杂志》，48（1999年），第3期，767–791。9[13] U. Daepp, P. Gorkin, A. Shaffer, K Voss，《寻找椭圆：布拉希克积、彭斯列定理与数值域彼此了解些什么》，Carus 数学专著，AMS/MAA 出版社，第34卷，2018年。2[14] R. Douglas and R. Yang。双圆盘上 Hardy 空间中的算子理论。I。《Integral Equations Operator Theory》38（2000年），第2期，207–221。6[15] S. R. Garcia, J. Mashreghi, and W. T. Ross。《模型空间及其算子导论》。《剑桥高等数学研究》第148卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016年。2[16] S. R. Garcia, J. Mashreghi, and W. T. Ross。《有限布拉施克乘积及其关联》. 施普林格，查姆，2018年。1, 2, 26[17] J. B. Garnett，《有界解析函数》。纯粹与应用数学，第96卷。学术出版社有限公司[Harcourt Brace Jovanovich 出版社],纽约—伦敦，1981年。1[18] H.-L. Gau, Y.P. Wu，数值域 $S(\phi)$。《线性与多重线性代数》，45（1998年），第1期，49–73。2, 3[19] H.-L. Gau, Y.P. Wu，数值域与庞斯列性质。《台湾数学杂志》7（2003年），第2期，173–193。2[20] J. S. Geronimo and H. J. Woerdeman。正扩张、Fejér-Riesz 因式分解与二变量自回归滤波器。《数学年刊》（第2辑）160（2004年），第3期，839–906。9[21] K.E. Gustafson and D.K.M. Rao，《数值域：线性算子与矩阵的值域》。Universitext。施普林格出版社，纽约，1997年。2[22] E.M. Klein。Toeplitz 算子的数值域。《美国数学会会刊》35（1972年），101–103。13, 32, 36[23] G. Knese，二维环面上的 Bernstein-Szegö 测度。《印第安纳大学数学杂志》57（2008年），第3期，1353–1376。9[24] G. Knese，在双圆盘上无零点的多项式。《分析与偏微分方程》3（2010年），109–149。9[25] G. Knese，多圆盘的 Schur-Agler 类中的有理内函数。《数学出版物》55（2011年），第2期，343–357。9[26] G. Knese，精细 Agler 分解及其几何应用。《印第安纳大学数学杂志》60（2011年），第6期，1831–1841。9[27] G. Knese，有理函数的可积性与正则性。《伦敦数学会会刊》（第3辑）（2015年），1261–1306。4, 9[28] A. Kummert，具有指定散射矩阵的二维无损 m 端口综合。《Circuits Systems Signal Process.》8（1989年），第1期，97–119。9[29] Y. Lu, Y. Yang, Yixin, and C. Zu。双圆盘上 Hardy 空间中的压缩移位算子的几何方法。《函数分析杂志》285（2023），第7期，论文编号110063，共44页。6

[30] Y. Lu、Y. Yang 和 S. Zhu，《双圆盘上算子值内函数的 Agler约化子空间》。Integral Equations Operator Theory 94（2022年），第2期，第19号论文，共20页。6[31] B. Mirman，《数值域与庞斯列曲线》。Linear Algebra Appl.，281（1998年），第1–3期，59–85。2[32] B. Sz.-Nagy、C. Foias、H. Bercovici、L. Kérchy，《希尔伯特空间上算子的调和分析》，第二版，Universitext，施普林格，纽约，2010年。2[33] V. Paulsen、M. Raghupathi，《再生核希尔伯特空间理论导论》。Cambridge Studies in Advanced Mathematics，152。剑桥大学出版社，剑桥，2016年。9，10[34] R.T. Rockafellar，《凸分析》，Princeton Math. Ser.，第28号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年，xviii+451页。32[35] W. Rudin，《多圆盘函数论》。W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1969年。3，4[36] W. Rudin 和 E. L. Stout，《多复变函数的边界性质》，J. Math. Mech. 14（1965年），991–1005。3[37] R. Yang，《双圆盘上 Hardy 空间的算子理论。II》。Integral Equations Operator Theory 42（2002年），第1期，99–124。6 Kelly Bickel，数学系，巴克内尔大学，380 Olin Science Building，刘易斯堡，PA 17837，美国。电子邮箱：kelly.bickel@bucknell.edu Katie Quertermous，数学与统计系，詹姆斯·麦迪逊大学，60 Bluestone Dr. MSC 1911，哈里森堡，VA 22807，美国。电子邮箱：querteks@jmu.edu Matina Trachana，数学与信息学系，卡利亚里大学，Via Ospedale 72，09124，卡利亚里，意大利。电子邮箱：mtrachana@outlook.com