arXiv:2603.08586v1 [physics.flu-dyn] 9 Mar 2026

多孔介质中不混溶稳态两相流的玻璃态相变

Santanu Sinha，[1] Humberto Carmona，[2] Jos´e S. Andrade Jr.，[2] 和 Alex Hansen[1]1 *PoreLab, Department of Physics, Norwegian University of Science and Technology, 7491 Trondheim, Norway.*
[2] *Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brazil*（日期：2026年3月10日）

多孔介质中的两相流是一种无处不在的现象，已有一个多世纪的研究历史。然而，我们仍然缺乏一种成功的理论，能够基于“微观”模型预测宏观长度尺度（即所谓的 *Darcy scale*）上的流动。在此，我们展示了：通过将两相流中液滴的分布映射为自旋玻璃模型中自旋的分布，可以预测达西尺度上两相流的特征。这一方法的成功令人惊讶，因为两相流是一种非平衡现象，而自旋玻璃的性质则是利用平衡态统计力学获得的。为了建立这一映射，我们采用 Meshulam 和 Bialek（《现代物理评论》**97**，045002（2025））的方法，并利用 Jaynes 最大熵原理，通过在动态孔隙网络模型中对大量两相流模式实现进行训练的机器学习，推导出自旋玻璃哈密顿量。借助这一映射，我们可以构建两相流系统的“相图”。我们发现，将顺磁相与自旋玻璃相分隔开的临界线，与两相流速率对施加压力梯度的依赖由线性转变为非线性的转变相重合。自旋模型的玻璃态与一种流动状态相对应，该流动状态具有滞后现象，并在广泛的时间尺度上表现出强烈涨落。我们不禁想将这一流动状态认定为动态玻璃态。

关键词：两相流；多孔介质；自旋玻璃转变；玻尔兹曼机学习

I. 引言

20世纪80年代，人们对多孔介质中的不混溶两相流产生了浓厚兴趣，这与分形革命 [1–3]同步发生 [4] 。这一时期最重要的成果之一，是Lenormand等人为排驱过程构建的相图。在这一过程中，相对于多孔介质基质而言润湿性较弱的流体侵入被润湿性较强的流体饱和的多孔介质。相图的坐标轴分别为毛细管数 Ca（一个衡量平均流速的无量纲量，定义见方程（13））以及侵入流体与防御流体之间的黏度比 M 。相图揭示了三种注入模式：毛细管数极低、毛细力占主导时出现毛细指进；毛细管数足够大、黏性力与毛细力相互竞争，且防御流体的黏度高于侵入流体时出现黏性指进；最后，当毛细管数仍然较高，但侵入流体的黏度更高时，则出现稳定驱替。

尽管这些分形图案十分美丽，却未能让人深入了解多孔介质中不混溶两相流的大尺度行为，而这正是水文学、土壤科学或油藏工程等实际应用所涉及的领域。原因在于相关长度尺度不同。20世纪80年代的分形图案属于孔隙尺度图案，而实际应用所涉及的尺度大到足以使多孔介质呈现连续体。两者几乎毫无关联。

在多孔介质中，可以区分四种尺度 [5]：1. 亚孔隙尺度，此时受限空间的流体动力学和热力学至关重要；2. 孔隙尺度，此时例如物理学生长现象 [6] 至关重要；3. 达西尺度，此时多孔介质呈现为连续但无结构的整体；最后，4. 油藏尺度，此时地质结构开始显现。

尺度放大旨在衔接相邻尺度上的问题描述。其中有两个突出的尺度放大问题。第一个是将孔隙尺度上的不混溶两相流描述与达西尺度上的描述联系起来。归根结底，就是依据孔隙尺度上的物理机制，构建达西尺度上的有效流动方程。第二个尺度放大问题涉及从达西尺度转向油藏尺度时，如何处理地质结构引入的无序性。当影响流动的地质结构存在于米级乃至更大尺度上时，我们该如何处理边长达数百米的网格块?

这里相关的是第一个尺度放大问题。针对这一问题，有几种方法可以将孔隙尺度的流动描述转化为达西尺度的描述，综述请参见文献 [7]。显然，最简单的流动状态是稳态流。在达西尺度上，这意味着描述流动的变量具有定义明确且稳定的时间平均值，并且饱和度场中不存在梯度。此外，驱动流动的时间平均压力梯度在空间上均匀。在实验室中，通过同时向样本注入不混溶流体来形成稳态流。在远离注入区域和样本边缘的地方，可以观察到稳态流。

Payatakes 研究组在九十年代和二〇〇〇年代对孔隙尺度的稳态流进行了广泛研究，参见 Avraam 和 Payatakes [8]。在这篇论文中，他们将稳态流的孔隙尺度描述分为四个区间。在钙非常高时

他们将稳态描述为液滴交通流。润湿性较弱的流体（下文称为非润湿流体；另一种流体称为润湿流体）会形成亚孔隙尺度液滴，在多孔介质中的运动方式如同车流在城市中行驶。因此得名。在钙较低时，会出现小液团区间。液团是跨越多个孔隙的流体团簇。它们之所以小，是因为给定液团两端的内部压降太小，不足以影响其运动。它们随周围流体一起移动。钙进一步降低时，便进入大液团区间。此时液团大到其内部压降会对运动方式产生显著影响。最后，当钙足够低时，会出现连续通道区间。此时压力梯度非常小，液团不再对流动产生贡献；流动由贯穿多孔介质的开放通道承担。

Berg 等人 [7] 最近提出了一种达西尺度上的稳态流动状态分类方案。它基于平均流速与平均压力梯度之间的本构关系。2009年，Tallakstad 等人 [9, 10] 在二维模型多孔介质中、在稳态流条件下观察到，平均流速会以某一指数依赖于平均压力梯度，

$$v = -m|\nabla P|^{\alpha}\,, \tag{1}$$

其中 m 为流动性，$\alpha = 1.85 \pm 0.27$。不同研究组在多篇论文中对这一观察进行了后续研究，参见例如 [11–24]。Yiotis 等人 [14]证明，幂律本构方程出现在一定的毛细管数Ca窗口内。在该窗口之外，即在较高或较低的Ca下，本构方程是线性的。对这一行为的孔隙尺度解释是：在低Ca时，将流体-流体界面固定在原位的毛细力过强而无法被克服，流动通过开放通道进行。因此，本构方程是线性的。在较高的毛细管数下，孔隙尺度的压力梯度大到足以使界面发生移动。随着Ca增大，这一过程逐渐发生，从而产生所观察到的幂律行为。对导致 $\alpha = 2$ 的这一机制的定量解释见 [10]。当Ca足够高时，所有能够被驱动的界面都在运动，系统恢复为线性行为。

Berg 等人 [7] 将这三种行为，即线性–幂律–线性，称为区间 I、II 和 III。然而，他们进一步将区间 I 分为两部分：Ia 和 Ib。区间 Ia 是界面被冻结在原位的区间。然而，随着钙增大，界面发生移动，从而导致液团形状变化。然而，流体通过该系统的输运仍由开放通道主导 [26]。与这些变化相关的时间尺度跨度很大 [27]。Gao 等人 [20] 还报告了一个区间，该区间虽然仍为线性，但涨落强烈。它也是一个表现出强烈滞后效应的区间。这就是区间 Ib。

因此，我们有三个转变：Ia–Ib、Ib–II 和 II–III。我们推测，Ia–Ib 转变是由动力学阻滞所致 [28], ，也就是说，随着钙降低，界面运动的时间尺度超过了实验的时间尺度。因此，从宏观变量出现奇异性的意义上说，这并不是一种转变。II–III 转变也是如此。Roy 等人 [29] 使用毛细管纤维束模型，通过计算和分析研究了这一转变，发现其位置取决于系统尺寸：系统越大，该位置就越向 Ib–II 转变移动。它并非通常意义上的相变。

本文的焦点是 Ib–II 转变的本质。我们将证明它是一种玻璃化转变，因此，区间 Ib是玻璃态流动相 [30]。

我们利用玻尔兹曼机学习方法 [31]来探究 Ib–II 转变以及区间 Ib 的本质。我们的模型多孔介质是一个动力学孔隙网络模型 [32] ，在本实现中，它由双周期金刚石晶格构成，其中每条连接都是一个孔隙。基于网络中的饱和度构型，我们将流动映射到一个自旋模型上，其中应保留每条连接中的平均饱和度以及所有连接对之间的饱和度-饱和度相关性。我们利用杰恩斯最大熵原理推导出构型概率，它类似于自旋玻璃系统的概率分布。通过使用玻尔兹曼机学习技术，以来自动力学孔隙网络模拟的数据训练自旋模型，并测量高阶关联，我们表明构型概率能够再现孔隙网络模拟所得到的构型。随后，我们在广泛的流动参数范围内测量了磁化强度、磁化率、爱德华兹-安德森序参量以及自旋玻璃磁化率 [30] ，并在自旋模型的相图中确定了一条自旋玻璃临界线。将其与区间 Ib–II 之间的转变线进行比较时，我们发现二者吻合。我们的结论是，区间 Ib 是一种玻璃态流动状态，而向区间 II（即幂律区间）的转变是一种玻璃化转变。由于区间 Ib 既表现出滞后行为，又表现出时间尺度跨度很大的涨落，这一解释在直觉上是合理的。

在第II 节中，我们基于对多孔介质中稳态两相流期间饱和度分布空间相关性的测量，推导自旋构型概率。第III 节介绍用于生成所测饱和度分布的动态孔隙网络模型。在下一节IV 中，我们介绍玻尔兹曼机学习技术，并利用该技术确定定义自旋模型的场常数和耦合常数。在第V 节中，我们运用这项技术研究 Ib–II 转变和区间 Ib 的特征。第 VI 节包含总结和结论。

II. 构型概率

本节旨在基于多孔介质中稳态不混溶两相流期间饱和度场的相关性，推导自旋构型的构型概率。自旋模型由 N 个相互作用的自旋组成，$\sigma_i = \pm 1$。我们使用 Jaynes 最大熵原理 [33, 34] 推导构型概率 $P(\{\sigma\})$，得到

$$P(\{\sigma\}) \propto \exp[-H(\{\sigma\})] \,, \tag{2}$$

其中

$$H(\{\sigma\}) = -\sum_i h_i \sigma_i - \sum_i \sum_{j<i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \,. \tag{3}$$

这里，h_i 是场耦合，J_{ij} 是自旋间耦合。

通过对自旋模型进行蒙特卡罗模拟 [57]，即可再现流动模型中发现的饱和度关联。此时必须提出一个显而易见的问题：自旋模型的平衡热力学如何能够反映动态孔隙网络模型的耗散动力学？我们在此指出，Hansen 等人 [35, 36]提出了将耗散流动问题映射为平衡态统计力学、进而映射为平衡热力学的方法。该方法基于这样一种观点：垂直于平均流动方向的截面中的流体构型处于平衡状态，因为按照 Shannon 的定义，截面内及截面之间不会产生构型熵。由香农熵建立的 Jaynes 广义统计力学因而可被采用 [33, 34]。

这里我们将讨论范围限定于（准）二维（2D）多孔介质，不过，整个方法同样适用于三维（3D）。实验室实验中这类二维系统的常见例子包括填有固定玻璃珠的赫勒-肖单元 [9]，，以及用于微流控实验的蚀刻聚二甲基硅氧烷或玻璃芯片 [37]。可以使用高分辨率相机记录此类实验中的流体构型快照。在这种情况下，构型的细节程度由快照的分辨率决定，每个像素可以是多孔介质中的固体，也可以是两种流体之一。孔隙空间中任一像素的颜色会随快照而变化，具体取决于该像素对应的是润湿流体还是非润湿流体。随后，我们可以仿照磁自旋系统定义一种流体构型：为流体像素 i关联一个自旋变量 σ_i，并根据该像素中的流体类型指定一个状态 $\sigma_i = \pm 1$。每种类型的自旋数占自旋总数的比例，将等于系统中相应流体的总饱和度。

对于基于格子玻尔兹曼方法（LBM） [38] 或动态孔隙网络模型 [39]，的计算实验，同样可以通过将自旋变量分别赋给流体体素或孔隙，再根据相应体素或孔隙中流体的饱和度来设定其状态，从而定义稳态构型。这是一种数据驱动方法，需要涵盖广泛参数范围的大规模构型数据。正如前文所述，以下我们将使用动态孔隙网络（DPN）模型，其中多孔介质以由连接和节点构成的网络来建模[32]。与格子玻尔兹曼方法等其他方法相比，该模型的计算成本相对较低，因此非常适合本研究。不过，我们强调，整个方法也可用于其他类型的模拟或实验。赫勒-肖单元实验[40] 的图像分析数据是很有前景的候选数据，我们计划在未来采用这种方法。

现在考虑一个由 N个孔隙组成的孔隙网络。我们为每个孔隙关联一个自旋变量 σ_i，其中 $i = 1, 2, \ldots, N$。一个连接中可以包含润湿流体和非润湿流体的气泡。我们将自旋的状态定义为：

$$\sigma_i = \begin{cases} -1 & \text{if } s_i < \langle s \rangle \\ +1 & \text{if } s_i \geq \langle s \rangle \end{cases} \tag{4}$$

其中，s_i 是第 i个连接中的非润湿相饱和度，而 $\langle s \rangle$ 是非润湿流体的平均孔隙尺度饱和度。自旋取值的集合$\{\sigma_i \cdots \sigma_N\}$定义了一个构型 $\{\sigma\}$。

这里需要特别指出的是，以这种方式为连接分配自旋，似乎会使我们从构造上就令整体磁化强度（定义为所有连接上的平均自旋）始终等于零。但事实并非如此。假设有一个包含100个连接的网络，其中20个完全充满非润湿液体，其余80个完全充满润湿液体。此时我们有 $\langle s \rangle = 0.2$，因此80个连接会被赋予向下的自旋，20个连接会被赋予向上的自旋，从而使整体磁化强度不为零。

现在，我们旨在求得与自旋构型 $\{\sigma\}$相关的构型概率$P(\{\sigma\})$，使得概率分布能够再现两个约束：每个自旋 i的平均磁化强度 $\langle \sigma_i \rangle$，以及所有自旋对 i 和 j 之间的成对相关性 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$。此处的平均值 $\langle \cdots \rangle$ 是对稳态下通过模拟或实验所能获得的所有构型求取的。用 $P(\{\sigma\})$表示时，这两个约束可写为：

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \rangle &= \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i P(\{\sigma\}) \qquad \text{and} \\ \langle \sigma_i \sigma_j \rangle &= \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_j P(\{\sigma\}) \,. \end{aligned} \tag{5}$$

此外，我们还有归一化准则

$$\sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}) = 1 \,. \tag{6}$$

在这些约束条件下，可以通过 Jaynes最大熵得到 $P(\{\sigma\})$ 的表达式

原理 [33, 34]，以最大化定义如下的香农信息熵：

$$\Omega = -\sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}) \ln P(\{\sigma\}) \,. \tag{7}$$

这可以通过拉格朗日乘数法来完成，下面我们对此进行简要概述 [31]。利用方程（5）、（6）和（7），可将拉格朗日函数构造为：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}) \ln P(\{\sigma\}) + \theta \left[\sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}) - 1\right] \\ &+ \sum_i h_i \left[\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i P(\{\sigma\}) - \langle \sigma_i \rangle\right] \\ &+ \sum_i \sum_{j<i} J_{ij} \left[\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_j P(\{\sigma\}) - \langle \sigma_i \sigma_j \rangle\right] \,,\end{aligned} \tag{8}$$

其中，θ、h_i 和 J_{ij} 是拉格朗日乘数。随后，我们令 $\partial\mathcal{L}/\partial P(\{\sigma\}) = 0$ 以最大化 $\mathcal{L}$，得到：

$$P(\{\sigma\}) = \frac{1}{Z} \exp\left[\sum_i h_i \sigma_i + \sum_i \sum_{j<i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j\right] \,, \tag{9}$$

其中，归一化因子，即配分函数为

$$\begin{aligned}Z &= \sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}) \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \exp\left[\sum_i h_i \sigma_i + \sum_i \sum_{j<i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j\right] \,.\end{aligned} \tag{10}$$

如我们所见，构型概率具有方程（2）所给出的形式，这与由方程（3）给出哈密顿量的自旋系统类似。参数 h_i 和 J_{ij} 分别起到场常数和耦合常数的作用，决定系统的不同相态，而这些相态由样本的淬火无序所设定。除了热平均之外，还需要将对这种无序性的平均纳入考虑。耦合的数量随系统尺寸增长，这给理论研究带来了挑战。Edward 和 Anderson 于1975年为自旋玻璃 [41] 提出了第一个模型，该模型考虑了近邻相互作用，其中 J_{ij}从二元分布或高斯分布的随机变量中抽取。Sherrington 和 Kirkpatrick（SK）引入了一个可解的平均场模型 [42]，其中所有自旋对之间都存在直接相互作用；该模型后来由Parisi [43]求解。对于SK模型中耦合服从高斯分布的情况，他们的解揭示了一个包含三个相态的相空间——铁磁相、顺磁相和自旋玻璃相，这些相态由耦合分布的标准差和均值 [30]定义。

鉴于这种相似的构型概率形式，我们将探讨如何表征稳态两相流中的这类相，以及这些相与不同稳态流动状态之间有何关联。我们将使用通过界面追踪动态孔隙网络模型 [32]，获得的构型数据，并在下文作简要介绍。

III. 动态孔隙网络模型

在多孔介质两相流的孔隙网络建模中，多孔基质的孔隙空间由具有理想化几何形状的连边与节点网络表示，不可混溶的两种流体通过该网络输运 [39]。这里我们采用一种动态孔隙网络（DPN），在流体运动过程中同时考虑黏性力和毛细力的作用。通过跟踪网络中所有流体-流体界面的位置来追踪流体的位移。由两个较宽孔体之间狭窄孔喉构成的孔隙，以沙漏形复合连杆建模。因此，介质的全部孔隙空间均由连边表示，网络节点仅表示连边交叉的位置。虽然本文仅考虑二维网络，但该模型适用于任意网络拓扑，也可用于三维网络。

我们考虑一个由 $L \times L = N$ 条连边组成、嵌入二维菱形晶格中的网络。如图1 （a）所示，这是一个包含 $16 \times 16 = 256$ 条连边的网络。如图中的蓝色和红色节点所示，两个方向上均采用周期性边界条件。这使系统成为封闭系统，因此流体的总体积饱和度随时间保持不变。所有连边的长度均为 $l = 1$毫米，而连边的平均半径 r_i i取自 $0.1l$ 至 $0.4l$范围内的均匀随机数分布。图中连边宽度的变化体现了这一点。我们设定黏度比 $M = 1$。图中以灰色和蓝色分别表示润湿气泡和非润湿气泡，展示了两种流体在连边内的一种典型分布。该模型不适用于存在薄膜流或角隅流的系统。对于每条连边内部充分发展的不可压缩流体层流，任意时刻连边内的体积流量 ϕ_i 由下式给出：[4, 44]，

$$\phi_i = -\frac{\kappa_i}{l\mu_i} \left[\Delta p_i - \sum_k p_i'(\epsilon_k)\right] \,, \tag{11}$$

其中，Δp_i 是连接 i两端两个节点之间的压降。这里，κ_i 是连接的流动性；对于哈根–泊肃叶流，我们考虑圆形横截面，此时 $\kappa_i = \pi r_i^4/8$ 。项 μ_i 表示该连接在该时刻内部流体的有效黏度。其表达式为 $\mu_i = s_i\mu_n + (1 - s_i)\mu_w$，其中 μ_w和 μ_n 分别是润湿流体和非润湿流体的黏度，而 s_i 是该连接中非润湿流体的体积饱和度，即连接体积中由非润湿流体占据的比例。

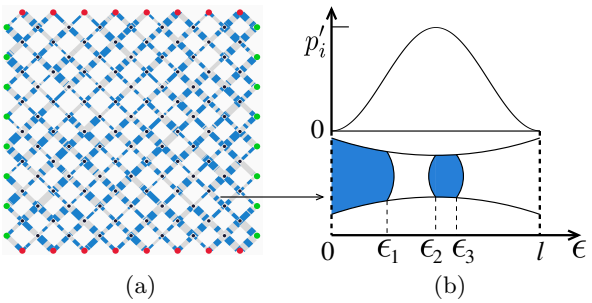


图 1. (a) 一个孔隙网络，由以下部分组成 16×16 二维菱形晶格上的连接。晶格中的键代表复合孔隙，黑点代表节点的位置。键的粗细表示其平均直径。连接中的灰色和蓝色部分分别表示润湿气泡和非润湿气泡。水平方向和垂直方向均采用周期性边界条件，这一点由垂直边界上的绿色节点是相同节点表示。水平边界上的红色节点也同样如此。图 (b) 下方展示了一个复合连接的界面压力（p_i'）形状，其中 ϵ_1，ϵ_2 和 ϵ_3 表示三个界面的位置。沿管道长度方向，界面处 p_i' 的变化遵循方程（12），如图 (b) 上方所示。

方程（11）括号内带求和符号的第二项对应于与流体-流体界面相关的界面压力（p_i'）。对于沙漏形复合连杆，该压力会沿连接发生变化，并且是界面位置的函数。我们用修正杨-拉普拉斯方程 [45–47]来描述这一函数形式，方程如下：

$$|p_i'(\epsilon)| = \frac{2\gamma}{r_i}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{l}\right)\right], \tag{12}$$

其中 γ 是两种流体之间的表面张力，ϵ 是界面的位置。这在图 1(b) 中有所说明，图中显示了位于 ϵ_1，ϵ_2 和 ϵ_3处的三个界面。方程（11）中的求和遍及连接 i 内部的所有界面，其中需要根据毛细力的方向，为 p_i' 采用适当的符号。

最后，对于不可压缩流体，我们在每个节点处由基尔霍夫定律 $\sum_{i\in n_i}\phi_i = 0$得到。这里，$n_j$ 是连接到节点 j的连接数。由此得到一组线性方程，我们采用共轭梯度法 [48]，在必要的边界条件（如全局压降或总流量）下进行求解。这些解给出节点处的局部压力，随后用于计算连杆流量ϕ_i。所有界面均沿各自连接中流动的方向，以较小的时间步长 Δt发生位移。这改变了界面的位置，从而改变了整个网络中的压力分布。我们再次求解压力，并重复该过程。流体正是以此方式被输运，并生成不同的流体构型。

本研究中一个重要的考量是时间间隔 Δt。在该模型中，Δt的选取方式应确保任何界面的最大位移不超过相应连接长度的 10%，这一点通过在每个时间步计算 $\Delta t = 0.1l/v_{\max}$ 来实现，其中 $v_{\max}$ 是所有连接中最快的流体速度。因此，如果网络中沿全局压降方向存在连续流道，流体至少需要 $10L$ 个时间步才能穿过整个网络。由于本研究需要收集彼此在时间上不相关的构型，我们在稳态下每隔 $2 \cdot 10L$ 个时间步记录一次构型。

该模型的一个技术细节是如何通过节点将流体从各连接分配到相邻连接。具体做法是，计算从流动指向该节点的相连连接（流入连接）到达每个节点 j 的润湿流体和非润湿流体的总体积（分别为V_j^w和 V_j^n，且 $V_j^w + V_j^n = V_j$）。随后，这些体积作为新气泡被分配到流动离开该节点的相连连接（流出连接）中。在某一流出连接 i中，这些新的润湿气泡和非润湿气泡的体积分别由 $V_i^w = \phi_i \Delta t V_j^w/V_j$ 和 $V_i^n = \phi_i \Delta t V_j^n/V_j$给出。这意味着，不同流出连接之间总新体积（$V_i^w + V_i^n$）之比与这些连接中的流量 ϕ_i 之比相同；并且在任一单个流出连接中，V_i^w与 V_i^n 之比与相应节点处流入的润湿流体总体积与非润湿流体总体积之比相同。

本研究中的模拟是在恒定毛细管数 Ca 下进行的，其定义为：

$$\mathrm{Ca} = \frac{Q\mu}{A\gamma}, \tag{13}$$

其中，Q 表示流体沿全局压降方向的总流量 ΔP。这里，γ 表示流体之间的表面张力，μ表示总有效黏度，A表示平均横截面积，测量值为 $A = \sum_i \pi r_i^2/L$。这里我们取$\gamma = 0.03\mathrm{N/m}$，两种流体的黏度相等，且 $\mu = 0.1$ Pa.s。随后，我们通过改变总流量 Q来改变 Ca。

该模型已通过大量实验 [16, 49]和理论 [13, 50] 结果的检验。它可以模拟不同边界条件下的稳态流，以及排驱位移产生毛细指进和黏性指进的过程 [51]。该模型也适用于由真实样本重建的三维多孔网络 [16]。

IV. 玻尔兹曼机学习 G

本节采用逆伊辛建模（亦称玻尔兹曼机学习（BLM）方法） [31], 来确定局部场耦合 h_i 和耦合常数 J_{ij} 的分布，这些参数与 DPN 模拟中公式（3）给出的底层哈密顿量有关。该方法可应用于各种问题，涵盖生物

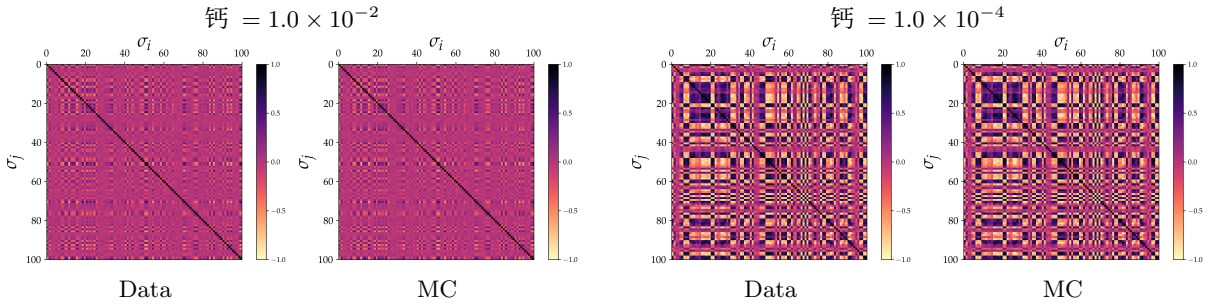


图2. $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ 矩阵图，比较学习特定网络样本后得到的孔隙网络模拟数据与蒙特卡罗采样数据。此处的图示对应 $S_n = 0.3$，并展示了两种不同的钙。对于两者，蒙特卡罗得到的图与数据在视觉上无法区分，这表明玻尔兹曼机学习计算已收敛。

网络 [52, 53] 和贸易网络 [54] 到鸟群行为 [55, 56], ，其中系统可映射为类伊辛模型。

我们的思路是求得 h_i 和 J_{ij} 的取值，使概率分布函数 $P(\{\sigma\})$能够最佳地再现从模拟数据中获得的构型。具体做法是最小化目标概率分布 P^{Data} （与数据相关，此处为DPN模拟）与概率分布（P^{MC}）之间的差异，其中后者遵循方程（ $P(\{\sigma\})$ 中给出的函数9）。为了生成具有 $P(\{\sigma\})$的构型，我们采用蒙特卡罗（MC）模拟 [57]。两个统计分布之间的距离采用库尔贝克-莱布勒（KL）距离（D_{KL}）度量，定义如下:

$$D_{\text{KL}}\left(P^{\text{Data}} \parallel P^{\text{MC}}\right) = \sum_k P_k^{\text{Data}} \ln\left(\frac{P_k^{\text{Data}}}{P_k^{\text{MC}}}\right) , \quad (14)$$

其中，求和遍历所有可能的构型。为使 D_{KL} 相对于 h_i 和 J_{ij}最小化，我们采用迭代梯度下降法，

$$\begin{aligned} h_i(\tau+1) &= h_i(\tau) - \eta \left.\frac{\partial D_{\text{KL}}}{\partial h_i}\right|_\tau \quad \text{and} \\ J_{ij}(\tau+1) &= J_{ij}(\tau) - \eta \left.\frac{\partial D_{\text{KL}}}{\partial J_{ij}}\right|_\tau , \end{aligned} \quad (15)$$

其中 τ 是迭代步长，而 η 是学习率。利用 D_{KL}的导数，以及方程（ $P^{\text{MC}} \equiv P$（$\{\sigma\}$）中给出的5）的定义，由方程（14）和（15）可得

$$\begin{aligned} J_{ij}(\tau+1) &= J_{ij}(\tau) + \eta\left[\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{\text{Data}} - \langle\sigma_i\sigma_j\rangle_\tau^{\text{MC}}\right] \text{ and} \\ h_i(\tau+1) &= h_i(\tau) + \eta\left[\langle\sigma_i\rangle^{\text{Data}} - \langle\sigma_i\rangle_\tau^{\text{MC}}\right] , \end{aligned} \quad (16)$$

其中， $\langle\ldots\rangle^{\text{Data}}$是在BML迭代开始时根据DPN模拟数据测得的，而 $\langle\ldots\rangle^{\text{MC}}$是在每个迭代 τ中根据蒙特卡罗模拟测得的。

学习率 η 决定了梯度下降法中参数更新的速度，是影响算法最佳性能的关键参数。它会影响收敛的速度和稳定性。学习率过高或过低都可能导致过冲或收敛极慢，使模拟无法达到足够高的精度。通常的做法是从相对较大的 η开始，然后使用学习率调度器逐步降低。不同类型的问题适合不同类型的调度器。尝试了几种不同的调度器后，我们发现，调度器$ReduceLROn\text{-}Plateau$ [58] 最适合本研究。该方法会在迭代过程中监测损失（E），并在 E 经过指定次数的迭代仍未改善时，将η 按一定比例降低。这里的损失定义如下:

$$\begin{aligned} E =& \frac{1}{N}\sum_i \left(\langle\sigma_i\rangle^{\text{Data}} - \langle\sigma_i\rangle_\tau^{\text{MC}}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{N(N-1)}\sum_i\sum_{j<i}\left(\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{\text{Data}} - \langle\sigma_i\sigma_j\rangle_\tau^{\text{MC}}\right)^2 , \end{aligned} \quad (17)$$

该式计算数据与蒙特卡罗模拟的相关性及平均值之间的均方差。

我们使用不同 S_n 和钙值下的DPN模拟所获得的数据集进行了BML 计算。通过采用方程（ $\langle\sigma_i\rangle^{\text{MC}}$ 和 $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{\text{MC}}$中给出的概率分布函数进行Metropolis蒙特卡罗模拟，计算9）。这需要在每个BML步骤中测量每个蒙特卡罗样本的相关性 N（ $N-1$）/2值，计算成本高昂。我们的DPN模拟采用了一个 40×40 网络，这会产生1279200个耦合值。此外，在自旋玻璃相中需要大量蒙特卡罗采样，因为构型可能会长时间困在局部极小值中。我们的参数空间也很大（参数集的完整细节和数据集的大小将在下一节中介绍）。为了将计算时间缩短到现有资源能够承受的范围，我们将系统粗粒化为一个 10×10 网络以进行BML 计算。这使得系统包含 $N = 100$ 个自旋和4950个耦合值。每次BML迭代中，我们采用 2×10^5次蒙特卡罗扫描进行蒙特卡罗热化，并采用 10^5 个蒙特卡罗构型求平均。对于每种情况，我们至少进行了 10^4 次BML迭代；当方程（E 中的损失17）达到足够小的值时，便终止迭代。然后取BML迭代结束时的 h_i 和 J_{ij} 值。

为验证方程（3）中的哈密顿量以及

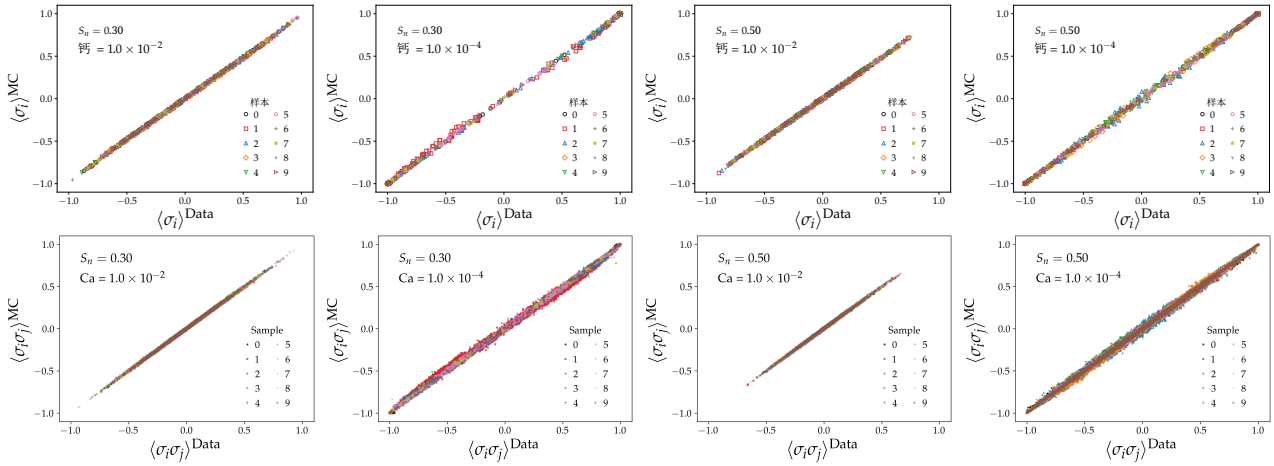


图3. $\langle \sigma_i \rangle^{\mathrm{Data}}$ 与 $\langle \sigma_i \rangle^{\mathrm{MC}}$ 的图示（上排），以及 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{\mathrm{Data}}$ 与 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{\mathrm{MC}}$ 的图示（下排），展示 DPN模拟数据与 BML 计算的比较。我们展示两种饱和度 $S_n = 0.3$ 和 0.5 下的数据，每种饱和度对应两个毛细管数，钙 $= 1.0 \times 10^{-2}$ 和 1.0×10^{-4} 。每幅图包含 10 个不同网络样本的结果。

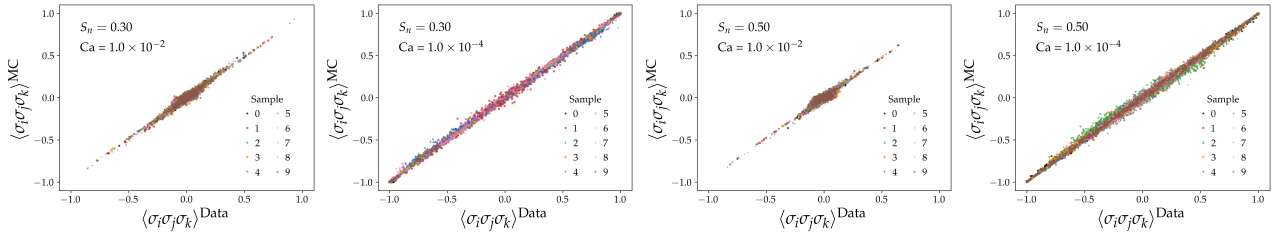


图4. DPN 数据与蒙特卡罗样本对比的三点关联 $\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle$ 图示。我们展示两种饱和度 $S_n = 0.3$ 和 0.5 下的结果，每种饱和度对应两个毛细管数，钙 $= 1.0 \times 10^{-2}$ 和 1.0×10^{-4} 。每幅图包含 10 个不同网络样本的结果；对于每个样本，我们仅绘制了随机选取的 1000 个唯一三元组 $\{ijk\}$ 的数据。

方程（ $P(\{\sigma\})$ 中的相应构型概率在方程（9）中能否重现从 DPN 模型获得的两相流数据，我们在图2中展示了 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ 在两种情况下的矩阵图，以直观比较 DPN 数据与 BML 计算。我们展示了两种钙值；在这两种情况下，BML 图示与 DPN 数据在视觉上都无法区分。我们看到，低、高手细管数下的相关性有所不同。在高钙值下，相关性显示围绕零连续变化；而在低钙值下，我们看到高正值或高负值聚集成簇。这表明，在低钙值下，不同孔隙中的流动高度相关或反相关。

图 3给出了 DPN 数据与 BML 结果之间更定量的比较，其中我们绘制了 $\langle \sigma_i \rangle$ 和 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ 在所有 i 和 j 取值下，数据与蒙特卡罗结果之间的关系。我们展示了两种不同饱和度 $S_n = 0.3$以及 0。5 的结果，每种情况下各取两个钙值。每幅图都包含 10 个网络样本的数据点。可以看出，数据点紧贴对角线，偏差极小。这表明构型概率 $P(\{\sigma\})$ 方程（9）与 DPN 数据吻合良好。

概率分布 $P(\{\sigma\})$（公式9）是在最多二点相关性的约束下获得的。因此，为了验证模型是否能够预测高阶关联，我们在图4 中绘制了三点相关性 $\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle$，这些相关性分别根据 DPN 数据和蒙特卡罗获得；图示表明，该模型能够以最小偏差再现数据。

利用 DPN 数据进行 BML 计算得到的局部场 h_i 和耦合常 J_{ij} 数，绘于图5 和 6中。每幅图都包含来自 10 个不同网络样 h_i 本的数据。 的直方图表明，这些值大多分布在零附近，不过在低钙条件下，少数自旋的 h_i值非常高或非常低。然而，高钙条件下不会出现此类自旋，但 h_i 的分布范围会变宽。

图 $p(J_{ij})$所示的分布呈现出非平凡的形态。所有组的分布都表明，耦合常数围绕零值分布，既有正值也有负值，这说明该系统属于自旋玻璃型系统。然而，在低钙含量下， $p(J_{ij})$呈现双峰型分布，大多数样本都有两个峰，表明存在两组正相关和负相关孔隙。随着钙含量增加， $J_{ij} = 0$ 处开始出现峰值；在高钙含量下，所有分布都转变为单峰分布。

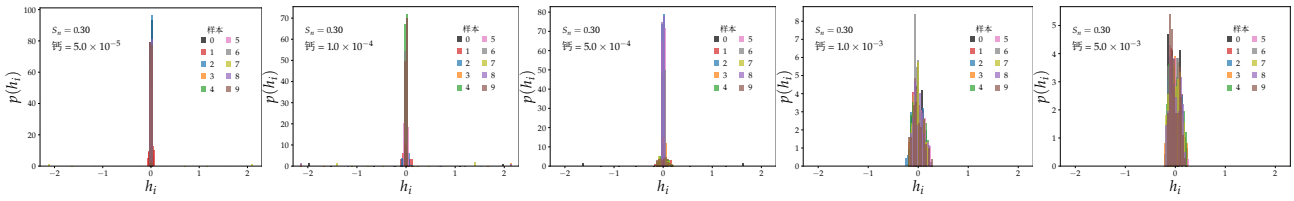


图5. 不同毛细管数下，局部场常数 h_i 的直方图 $S_n = 0.3$ 。每个图示均展示了10个不同网络样本的数据。

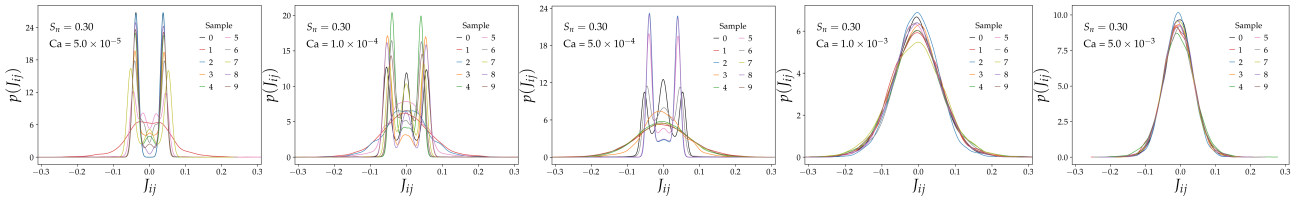


图6. 耦合常数 J_{ij} 的分布图示 $S_n = 0.30$。这里展示了5种毛细管数下的结果。每个图示包含10个不同网络样本的结果。显然，所有分布的均值都接近于零；然而，在较低钙值下，大多数样本呈现多个峰，表明存在若干组高度相关或负相关的耦合。此外，低钙值下样本间差异也很显著。在较高钙值下，对于所有样本，耦合常数均以类高斯分布散布在零值附近。

V. 玻璃化转变与玻璃态流动状态

自旋系统中的顺磁相（P）和铁磁相（F）分别以总平均磁化强度（m）为零和非零为特征，这意味着自旋排列是随机的或沿特定方向排列。另一方面，自旋玻璃（SG）相的特征则更为微妙。与顺磁相类似，自旋并未整体沿某个特定方向排列，但此时自旋在局部具有取向。这是由于系统中同时存在铁磁（$J_{ij} > 0$）和反铁磁（$J_{ij} < 0$）耦合（尽管这并非充分条件），导致无法满足每一对自旋之间的耦合条件。这会造成受挫和崎岖的能量景观 [30]，，并出现无序的冻结自旋图样，使自旋在局部磁化。

通过使用从 DPN模拟中获得的数据，我们在图7中说明，在低毛细管数（钙 $= 0.0005$）下，自旋模型处于自旋玻璃相，而在高毛细管数（钙 $= 0.2$）下则不存在这种相。此处非润湿流体的全局饱和度为 $S_n = 0.3$ 。图中显示了（i）气泡分布，（ii）根据方程（4）得到的相应自旋映射，以及（iii）$\langle\sigma_i\rangle^2$，它表示局域磁化强度的程度。这些图中的全局压降方向为垂直方向。对于这两个低、高毛细管数，自旋表示中的自旋取向均呈现出一定程度的相似随机性，因而m的值较低。然而，局域磁化强度的程度 $\langle\sigma_i\rangle^2$却有显著差异。在高钙下，$\langle\sigma_i\rangle^2$ 在系统中大多数自旋对应的位置均呈现均匀的零值；而在低钙下，大多数自旋具有非常高的局域磁化强度。此外，在低钙（b）下可以观察到 $\langle\sigma_i\rangle^2$ 值较小的斑块，这表明冻结通道流占据主导地位。因此，这些图似乎能够捕捉到不同的孔隙尺度流动模式，与 Avraam 和 Payatakes [8]所描述的情况相似。我们稍后将进一步讨论这一点。

表征这些相的两个主要观测量是总铁磁磁化强度 m和爱德华兹-安德森序参量 q。这两个序参量分别表征顺磁相与铁磁相之间，以及顺磁相与自旋玻璃相之间的转变。自旋玻璃序参量 q 表示局域磁化强度的程度。它们分别为：

$$m = \frac{1}{N}\left[\sum_i \langle\sigma_i\rangle\right]_a \quad \text{and} \quad q = \frac{1}{N}\left[\sum_i \langle\sigma_i\rangle^2\right]_a , \tag{18}$$

其中求和遍及所有 N 自旋。平均值$\langle\ldots\rangle$表示对特定样本的不同构型取平均，而 $[\ldots]_a$ 表示对不同网络样本取平均。顺磁相的特征是 $m = 0$ 和 $q = 0$，铁磁相的特征是 $m \neq 0$和 $q > 0$，自旋玻璃相的特征是 $m = 0$ 和 $q > 0$。另外两个相关观测量是均匀磁化率（χ_{m}）和自旋玻璃磁化率（χ_{sg}），其定义为 [59]，

$$\chi_{\mathrm{m}} = \frac{1}{NT}\left[\langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2\right]_a \quad \text{and}$$
$$\chi_{\mathrm{sg}} = \frac{1}{NT^2}\left[\sum_{\langle i,j\rangle}\left(\langle\sigma_i\sigma_j\rangle - \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle\right)^2\right] , \tag{19}$$

其中 $M = \sum_i \sigma_i$。均匀磁化率 χ_{m}在 P 相与 F 相之间的边界处发散

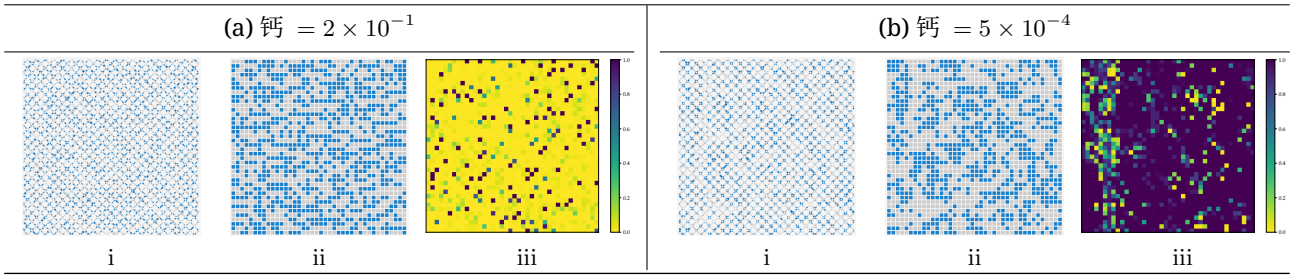


图 7. 动态孔隙网络模拟的快照，展示动态孔隙网络模型中稳态流动状态之间的差异；这些差异导致自旋模型中出现顺磁相和自旋玻璃相。模拟采用了一个包含 $40 \times 40 = 1600$ 个连接、全局非润湿相饱和度为 $S_n = 0.3$ 的网络。我们展示了同一网络在两种情况下的结果，对应的毛细管数为 (a) Ca $= 2 \times 10^{-1}$ 和 (b) Ca $= 5 \times 10^{-4}$。每种情况均包含 3 幅图。(i) 中的快照显示了稳态下某一时间步网络中润湿相（灰色）和非润湿相（蓝色）流体的位置。利用方程（4）得到的相应自旋构型如 (ii) 所示，其中蓝色和灰色圆点分别表示 $\sigma_i = +1$ 和 -1。对稳态下不同时间步的 $\sum_i \sigma_i/N$ 取平均后，两种毛细管数对应的磁化强度均较低，分别为 $m \approx 0.026$ 和 ≈ 0.057，对应 (a) 和 (b)。然而，(iii) 中的快照显示出明显差异，其中展示了 $\langle \sigma_i \rangle^2$，突出了低毛细管数下的局部冻结自旋。这使得 (b) 的爱德华兹-安德森序参量 $q \approx 0.884$ 较高，而 (a) 的 $q \approx 0.088$ 较低。

而自旋玻璃磁化率 χ_{sg} 在 P 相与 SG 相之间的边界处发散。

为测量这些观测量，我们在毛细管数（Ca）恒定的条件下，对包含 $40 \times 40 = 1600$ 个连接的网络进行了动态孔隙网络模拟。我们针对总非润湿饱和度的 17 个取值进行模拟，取值范围从 $S_n = 0.1$ 到 0。9，间隔为 0。05。对于每个饱和度，我们在 5×10^{-5} 至 2×10^{-1}的范围内选取了 53 个不同的 Ca 值进行模拟。因此，总计有 901 组独立的模拟参数。对于每组参数，我们考虑了网络的 100 个不同样本（实现），对应于方程（18）和（19）中的平均值 $[\ldots]_a$。对于每个样本，我们在稳态下考虑了 1000 种不同的流体构型（平均值 $\langle \ldots \rangle$）。因此，每组参数对应 10^5 种稳态构型。为达到稳态，我们通常舍弃 10 个孔隙体积的流量；我们发现，对于两种流体的随机初始分布而言，这已足够。在稳态下，我们仅在足以避免各次测量之间出现相关性的时间间隔进行测量（见第 III 节）。

稳态流体构型被映射为自旋构型，据此我们测量了方程（18）和（19）中定义的观测量。图8 展示了 $S_n = 0.3$的结果，其中我们绘制了 m、 q、 χ_{m} 和 χ_{sg} 随平均稳态压降 ΔP的变化。我们看到，磁化强度 m基本保持不变，且处于较低水平；而自旋玻璃序参量 q 则随着压降降低而急剧上升。这表明，在低钙值下，局域磁化强度很高，而总磁化强度仍保持在较低水平且不变。我们还在图8 (b)中看到，自旋玻璃磁化率 χ_{sg} 在压强值 $\Delta P(\chi_{\mathrm{sg}}^{\max})$处出现峰值，该处与 q 急剧上升的位置相近。均匀磁化率 χ_{m} 则未出现这样的峰值。这些观测结果正是那些表明存在一个临界点、将自旋玻璃相与顺磁相分隔开的信号。这些结果表明，当钙值降低并越过临界值时，动态孔隙网络模型会发生向玻璃态的临界转变。

因此，一个自然的问题是：自旋模型中从顺磁相到玻璃态的这一转变完全由孔隙尺度流体构型决定，那么它是否与达西尺度上观察到的某种转变或交叉有关？如引言中简要所述，Berg 等人 [7]依据流动速度与压力梯度之间的本构关系，对达西尺度的相进行了分类。在实验室中，流动速度和压力梯度无法直接观测。相反，人们观测的是稳态条件下，体积流量 Q 随多孔介质样本两端的压降 ΔP 而变化的关系。实验和计算已证实，随着钙从较低值逐渐增大， Q 与 ΔP 之间的关系会从线性关系（流态I）转变为非线性幂律关系 $Q \sim \Delta P^{\alpha}$，其中 $\alpha > 1$ （流态II） [11–25]。某些系统还显示，这一区间内存在阈值压力 P_t ，使得 $Q \sim (\Delta P - P_t)^{\alpha}$ [13]。 P_t 的成因是缺乏连续通路 [46], ，无法在介质中形成净压降，而黏性压降必须克服这一阻碍才能启动流动。值得注意的是，随着系统尺寸增大， $P_t \to 0$ [5, 29]。继续增大钙时，幂律区间会交叉转变为另一个线性区间（流态III），此时 Q 与 $\Delta P - P_t$之间再次呈线性关系。这三个区间的成因或许在于引言中所述的流体-流体界面动力学。不过，这种行为对于双黏性流体而言具有普遍性 [60, 61]。

Berg 等人 [7] 将流态 I 划分为区间 Ia（流体-流体界面静止）和区间 Ib（界面移动但不发生输运）。

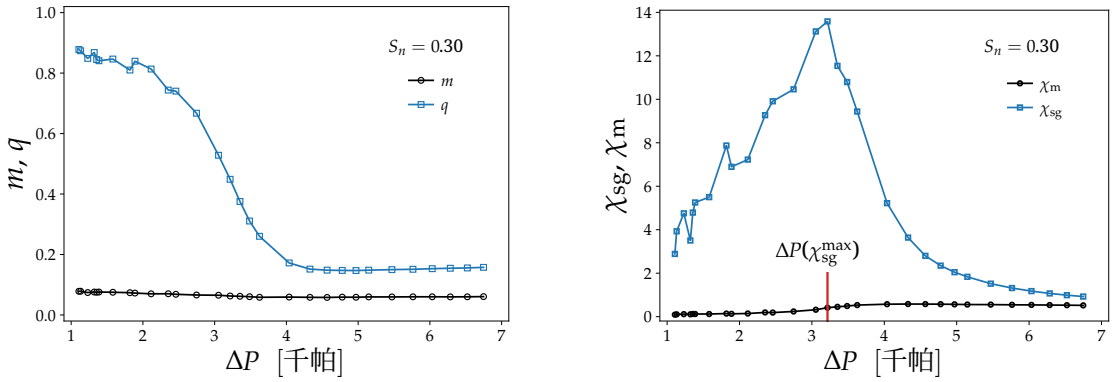


图8. 自旋模型中(a)铁磁序参量与自旋玻璃有序参数 m和 q，以及(b)均匀磁化率与自旋玻璃磁化率 χ_{m} 和 χ_{sg} 随平均稳态压降 ΔP 变化的图示，对应孔隙网络模型中的全局非润湿相饱和度 $S_n = 0.3$ 。磁化强度 m 在整个 ΔP 范围内保持较低，而 q 随 ΔP的减小急剧上升，表明发生自旋玻璃转变。这一点得到(b)中图示的支持，其中 χ_{sg} 在压降 ΔP（$\chi_{\mathrm{sg}}^{\max}$）处呈现明显峰值，而该处正是 q 上升之处。另一方面，均匀磁化率 χ_{m} 在整个 ΔP范围内保持较低。

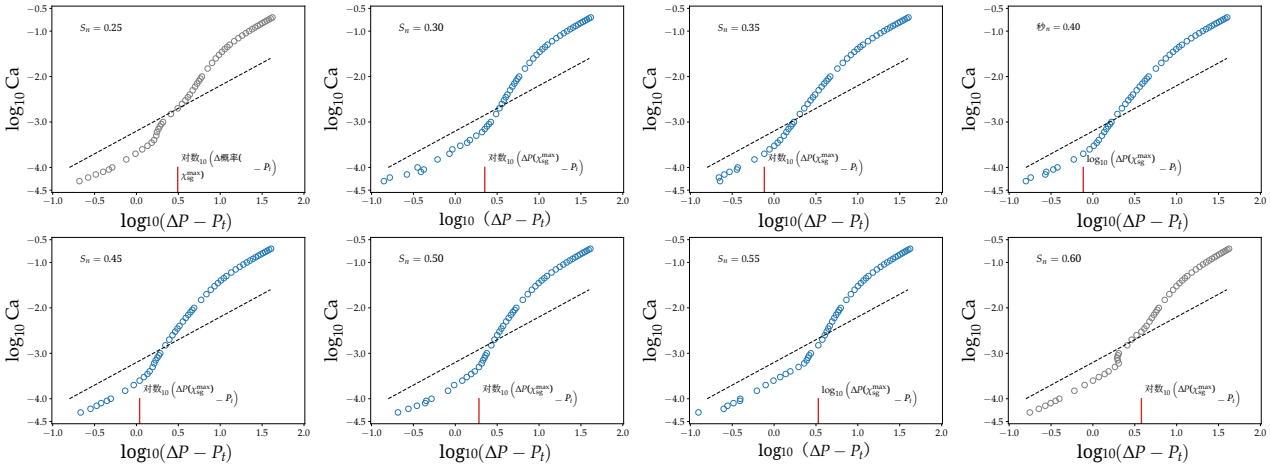


图9. $\log_{10}$钙作为$\log(\Delta P - P_t)$的函数的图示，针对稳态下不同的非润湿相饱和度（S_n）。黑色虚线按斜率1绘制，表明稳态流量 Q 与压降 ΔP之间呈线性关系。数据表明存在三个区间：在低钙值和高钙值处为两个线性区间，其间为一个非线性区间，由Berg 等人命名为区间 I、II 和 III。 [7]。细小的红色竖线标示压降 $\Delta P(\chi_{\mathrm{sg}}^{\max})$的位置，此处自旋玻璃磁化率 χ_{sg} 对相应饱和度出现峰值（见图8 (b)）。我们发现，这些位置与从较低线性区间到中间非线性区间的交叉位置相当，对应于中间饱和度，其范围在 $S_n = 0.30$ 至0.55。该范围以蓝色图示标出。在此饱和度范围之外，这两个位置并不吻合。此外，在此饱和度范围之外，数据也开始偏离这三个界定清晰的区间。

这种移动与输运相关 [26]。Gao 等人 [20]研究了从区间 Ib 到流态 II 的转变，证明非线性的出现以显著的压力波动为特征。这表明，幂律行为的出现是由液团的合并与分裂（即间歇流） [62], , 或滞留液团群逐渐被动员 [63]所触发的。Zhang 等人 [21]通过比较与黏性压降相关的机械能和形成流体弯月面所需的表面能，证明间歇性的出现确实与从区间 Ib 到流态 II 的转变相吻合。

如引言所述，从流态II到III的转变并非相变。Roy 等人 [29]证明，当系统尺寸增大时，该转变会向更低的钙移动。从区间 Ia 到 Ib 的转变同样不是相变。相反，它具有动力学阻滞转变的全部特征，即与 Ib 相动力学相关的时间尺度变得长于实验情形的时间尺度。

为了确定达西尺度流动状态与我们在此针对孔隙网络流动所观察到的玻璃化转变之间的联系，我们测量了平均稳态压降 ΔP，涵盖所有模拟。这些模拟在恒定毛细管数钙下进行，并由此设定总流量 Q（方程（13））。我们在图 9 中展示这些结果，其中绘制了$\log_{10}$钙随

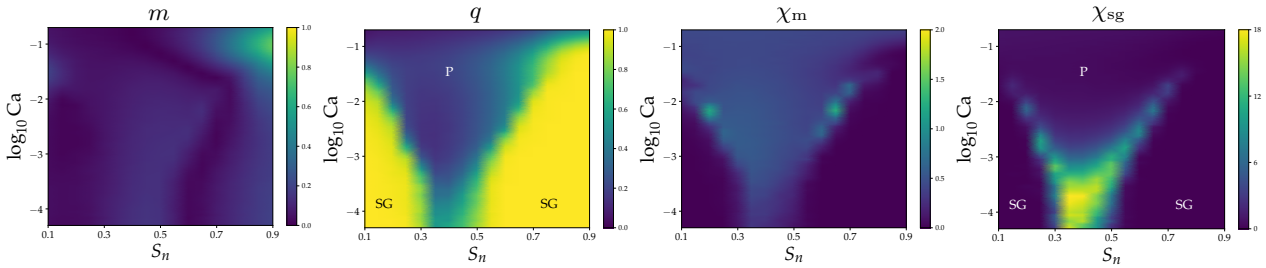


图 10. 色彩图显示了 m、 q、 χ_{m} 和 χ_{sg} 的取值与 (S_n，log10 钙) 的关系。每幅图包含 901 个数据点。 q 和 χ_{sg} 的色彩图清晰显示了顺磁相和自旋玻璃相，标示出这两个相之间的相边界。我们观察到，随着 S_n 接近 ≈ 0.4，从顺磁相转变为 SG 相的钙值会降低。 m和 χ_{m} 的色彩图呈现出一些颜色渐变，但与 q 和 χ_{sg} 相比，渐变非常微弱，也未显示顺磁相与 F 相之间存在任何转变。

$\log_{10}(\Delta P - P_t)$，对应于不同的非润湿相饱和度 S_n。我们看到，对于中间范围的饱和度 $S_n = 0.30$ 至 0.55，图示显示出三个不同的区间I、II和III，并在两个线性区间之间呈现一个非线性区间。虚线以斜率1绘制，表明 Q 与 ΔP 之间存在线性关系。阈值压力 P_t 通过将流态I的数据点拟合为直线测得。随后，我们在图示中加入短竖直红线，标示 ΔP（$\chi_{\mathrm{sg}}^{\max}$）对于每个 S_n，指示通向玻璃态的转变点。量 ΔP（$\chi_{\mathrm{sg}}^{\max}$）的数值取自旋玻璃磁化率 χ_{sg} 的峰值，且是在不同 S_n下测得的，如图 8 （b）所示。令人惊讶的是，与玻璃化转变相关的位置落在 ΔP 的取值处，此处观察到从流态I到流态II的交叉。这解释了间歇流态中所见的滞后行为、大幅涨落以及宽范围的时间尺度：从Ib到II的转变是临界玻璃化转变。

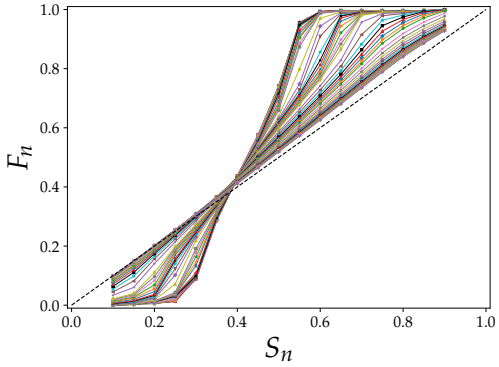


图 11. 53 个毛细管数（Ca）下，非润湿相分数流量（F_n）随全局非润湿相饱和度（S_n）的变化图。对角虚线表示 $F_n = S_n$，沿该线两种流体以相同速度移动。各条曲线对应不同的 Ca 值；越接近对角线的曲线 Ca 值越高，而离对角线最远、呈阶梯状的曲线 Ca 值最低。

这里需要指出，在 $S_n = 0.30$至 0.55 的中间范围之外，如 9 中 $S_n = 0.25$ 和 0.60 的黑色图示所示，我们的 DPN 数据无法很好地重现流态 I 与流态 II 之间的转变。因此，在此范围之外，我们无法发现玻璃态转变点与流态 I 和流态 II 之间交叉点的一致性，该范围为 S_n。因此，我们没有展示 S_n极端取值下的结果。这可能是由于 DPN 模型在低毛细管数下存在局限性。

所有 901 个参数对应的 Ca 与 S_n 空间的完整相图如图10所示。 q 和 χ_{sg} 的色彩图显示出明显的区域分界，标示出 SG 相与 P 相之间的边界。图中标出了相应的相。另一方面， m 和 χ_{m} 的图示未显示出显著的区域分界，因此在此

空间中未观察到 F 相。

从图 10可以观察到，对于任意特定的 S_n ，转变为玻璃态所需的钙值随 S_n 从两侧趋近 ≈ 0.4而减小。该 S_n 值落在与 S_n 穿过 $F_n = S_n$ 线处大致相同的数值附近，如图 11所示。此处 F_n 是稳态下的非润湿相分流率，定义为 $F_n = Q_n/Q$，其中 Q_n 为非润湿相体积流量。图 11 中的不同曲线对应于不同的钙值，其中趋近虚线 $F_n = S_n$ 线的曲线对应于钙的增大。沿 $F_n = S_n$ 线，两种流体以相同速度流动，类似于两种可混溶流体，仿佛两种流体之间不存在表面张力。我们在该图中看到，对于我们的 DPN 模型，所有曲线都在约 $S_n \approx 0.4$ 处穿过该线。因此看来，当 S_n 趋近该值时，毛细力更难以将任何流体团簇固定在原位，从而将玻璃化转变推向更低的钙数。

VI. 总结与讨论

本研究的目的是为多孔介质中不混溶两相流的孔隙尺度构型概率找到一种描述，然后基于这些构型建立稳态相图。我们通过映-

射动态孔隙网络模型中两相流的饱和度模式到一个自旋模型上，使其应保留平均饱和度以及饱和度-饱和度相关性。利用Jaynes 最大熵原理，可得到此类自旋系统的概率分布函数。然后，通过玻尔兹曼机学习方法训练该自旋模型，并测量至三点相关函数，我们表明该自旋模型复现了孔隙网络模型的流体构型。我们随后分析了大量流动参数下随之产生的热力学变量，并构建了相图。我们将所得相图展示于图10。图示的坐标轴为非润湿相饱和度 S_n 和毛细数$\log_{10}$Ca。第三个变量，黏度比，M 设为1。因此这些图示是三维相图的截面。对于磁化强度序参量 m 和磁化率 χ_{m}，我们几乎看不到结构。然而，Edwards-Anderson序参量 q 和自旋玻璃磁化率 χ_{sg} 显著显现，表明存在自旋玻璃相和顺磁相，并由临界线将它们分隔开。

Berg 等人 [7] 提出了一种达西尺度相图，该相图基于关联平均流动速度 v 与平均压力梯度的本构方程$|\nabla P|$。随着毛细管数钙增大，本构方程先呈线性关系（相 I），随后转变为幂律关系，见方程（1）（相 II），之后又转回线性关系（相 III）。此外，相 I 分为冻结相 Ia 和动态相 Ib [26]。Ia 相与 Ib 相之间的转变属于动力学阻滞，因此并非真正的相变。相 II 与相 III 之间的转变也并非真正的相变，而是一种饱和现象：在相 III 中，所有能够移动的流体-流体界面都在移动；而相 II 中本构方程呈非线性，则是因为随着压力梯度增大，被动员的界面数量不断增加 [29]。

我们在图9中展示本构方程，介于体积流量与超额压降$\Delta P - P_t$ 之间，针对动态孔隙网络模型的不同饱和度。自旋模型中自旋玻璃转变的位置在每幅图中均已标出。我们看到，除了所考虑的最小或最大饱和度之外，Ib–II转变与自旋玻璃转变相重合。我们认为它们是相同的。

值得注意的是，相 II 没有表现出滞后现象，见 [64]。而滞后现象是相 Ib 的特征之一。相 Ib 还伴有显著的涨落和较长的弛豫时间[20, 21, 26]。我们认为相 I 是一种玻璃态。

本文之后显而易见的一步，是将实验数据作为玻尔兹曼学习算法的输入。然而，我们认为有必要更好地理解该算法生成的自旋模型。我们还观察到，学习率 η 的选择会显著影响耦合常数分布，尽管每种选择都能重现流动模型中的相关性。这一观察有何意义？自旋模型还能告诉我们哪些关于流动模型物理性质的信息？自旋模型中的温度概念是否有其含义？它是否与流动模型中的搅动温度（“搅动温度”） [35, 36]有所关联？

致谢

我们感谢 Steffen Berg、Daan Frenkel 和 Sauro Succi 提供了有益的讨论。

本研究部分得到了挪威研究委员会通过其卓越中心资助计划（项目编号 262644）以及 INT-PART 计划（项目编号 309139）的支持。SS 和 AH 还感谢欧洲研究委员会提供的资助（资助协议编号 101141323 AGI-PORE）。HC 和 JSA 感谢巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）、高等教育人员提升协调会（CAPES）、FUNCAP 以及复杂系统国家科学技术研究所（INCT-SC）提供的资金支持。

[1] J. Nittmann、G. Daccord 和 H. E. Stanley, *Fractal growth viscous fingers: quantitative characterization of a fluid instability phenomenon*, 《自然》**314**, 141（1985）；DOI：10.1038/314141a0。[2] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*（W. H. Freeman，旧金山，1977）。[3] J. Feder, *Fractals*（Plenum，纽约，1988）。[4] R. Lenormand、E. Touboul 和 C. Zarcone, *Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media* **189**, 165 , 《流体力学杂志》（1988）；DOI：10.1017/S0022112088000953。[5] J. Feder、E. G. Flekkøy 和 A. Hansen, *Physics of Flow in Porous Media*（剑桥大学出版社，剑桥，2022）。[6] A. L. Barab´asi 和 H. E. Stanley, *Fractal Concepts inSurface Growth,*（剑桥大学出版社，剑桥——桥接，1995）。[7] S. Berg、R. T. Armstrong、M. R¨ucker、A. Hansen、S. Kjelstrup 和 D. Bedeaux, *From interface dynamics to Darcy scale description of multiphase flow in porous media* 2026 *J. Coll. Interf. Sci.* **351** 103791 , , , ；DOI:10.1016/j.cis.2026.103791。[8] D. G. Avraam 和 A. C. Payatakes, *Flow regimes and relative permeabilities during steady-state two-phase flow in porous media* 2006 *J. of Fluid Mech.* **293** , , , 207 10 1017 0022112095001698：DOI：。/S。[9] K. T. Tallakstad、H. A. Knudsen、T. Ramstad、G. Løvoll、K. J. M˚aløy、R. Toussaint 和 E. G. Flekkøy, *Steady-state two-phase flow in porous media: Statistics and transport properties* 2009 , , *Phys. Rev. Lett.* , ；DOI：。/**102** 074502 10 1103 102 074502 PhysRevLett.。。[10] K. T. Tallakstad、G. Løvoll、H. A. Knudsen、T. Ram-

stad, F. G. Flekkøy 和 K. J. Mâloy, *Steady-state simultaneous two-phase flow in porous media: an experimental study* 2009 *Phys. Rev. E* **80** 036308 , , , , ;
DOI:10.1103/PhysRevE.80.036308。[11] E. M. Rassi、S. L. Codd 和 J. D. Seymour, *Nuclear magnetic resonance characterization of the stationary dynamics of partially saturated media during steady-state infiltration flow* **13**, 015007 211 , 《新物理学杂志》（）；DOI:10.1088/1367-2630/13/1/015007。[12] E. M. Rassi、S. L. Codd 和 J. D. Seymour, *Corrigendum: Nuclear magnetic resonance characterization of the stationary dynamics of partially saturated media during steady-state infiltration flow* , 《新物理学杂志》16，039501（2014）10 1088 1367 2630 16 3 039501（）；DOI：。/-///。[13] S. Sinha 和 A. Hansen, *Effective rheology of immis-cible two-phase flow in porous media*, 《欧洲物理快报》99，44004（2012）；DOI:10.1209/0295-5075/99/44004。[14] A. G. Yiotis、L. Talon 和 D. Salin, *Blob population dynamics during immiscible two-phase flows in reconstructed porous media* **87**, 033001 , 《物理评论E》；DOI:10.1103/PhysRevE.87.033001。[15] O. Aursjø、M. Erpelding、K. T. Tallakstad、E. G. Flekkøy、A. Hansen 和 K. J. Mâloy, *Film flow dominated simultaneous flow of two viscous incompressible fluids through a porous medium* **2**, 63 , 《前沿物理学》（2014）；DOI:10.3389/fphy.2014.00063。[16] S. Sinha、A. T. Bender、M. Danczyk、K. Keepsea- gle、C. A. Prather、J. M. Bray、L. W. Thrane, J. D. Seymour, S. L. Codd 和 A. Hansen, *Effective rheology of two-phase flow in three-dimensional porous media: Experiment and simulation* , 《多孔介质中的传输》119，77（2017）；DOI:10.1007/s11242-017-0874- 4。[17]Y. Gao、Q. Lin、B. Bijeljic 和 M. J. Blunt, *X-ray microtomography of intermittency in multiphase flow at steady state using a differential imaging method* **53**, 10274 2017 , 《水资源研究》（）；DOI:10.1002/2017WR021736。[18] A. G. Yiotis、A. Dollari、M. E. Kainourgiakis、D. Salin 和 L. Talon, *Nonlinear Darcy flow dynamics during ganglia stranding and mobilization in heterogeneous porous domains* **4**, 114302 2019 , 《物理评论：流体》（）；DOI:10.1103/PhysRevFluids.4.114302。[19] S. Roy、A. Hansen 和 S. Sinha, *Effective rheology of two-phase flow in a capillary fiber bundle model* **7**, 92 2019 , 《前沿物理学》（）；DOI:10.3389/fphy.2019.00092。[20]Y. Gao、Q. Lin、B. Bijeljic 和 M. J. Blunt, *Pore-scale dynamics and the multiphase Darcy law* **5**, 013801 2020 , 《物理评论：流体》（）；DOI:10.1103/PhysRevFluids.5.013801。[21] Y. Zhang、B. Bijeljic、Y. Gao、Q. Lin 和 M. J. Blunt, *Quantification of non-Linear multiphase flow in porous media* 2020 090477 , 《地球物理研究快报》48，e GL（2021）；DOI:10.1029/2020GL090477。[22] H. Fyhn、S. Sinha、S. Roy 和 A. Hansen, *Rheology of immiscible two-phase flow in mixed wet porous media: Dynamic pore network model and capillary fiber bundle model results* , 《多孔介质学报》139，491（2021）；DOI:10.1007/s11242-021-01674-3。[23] Y. Zhang、B. Bijeljic 和 M. J. Blunt, *Nonlinear multiphase flow in hydrophobic porous media* , 《流体力学杂志》934，R3（2022）；DOI:10.1017/jfm.2021.1148。[24] J. M. A. Sales、H. J. Seybold、C. L. N. Oliveira 和 J. S. Andrade Jr. *Bubble dynamics in stationary two-phase flow through disordered porous media* **10**, 860190 2022 , 《前沿物理学》（）；
DOI:10.3389/fphy.2022.860190. [25] H. Fyhn、S. Sinha 和 A. Hansen, *Effective rheology of immiscible two-phase flow in porous media consisting of random mixtures of grains having two types of wetting properties* **11**, 1175426 2023 , 《前沿物理学》（）；DOI:10.3389/fphy.2023.1175426. [26] R. T. Armstrong、J. E. McClure、M. A. Berrill、M. R¨ucker、S. Schl¨uter 和 S. Berg, *Beyond Darcy's law: the role of phase topology and ganglion dynamics for two-fluid flow* 2016 *Phys. Rev. E* **94** 043113 2016 , , , （）；DOI:10.1103/PhysRevE.94.043113. [27] J. E. McClure、S. Berg 和 R. T. Armstrong, *Capillary fluctuations and energy dynamics for flow in porous media* **33**, 083323 2021 , 《流体物理学》（）；DOI:10.1063/5.0057428. [28]G. Foffi、E. Zaccarelli、F. Sciortino、P. Tartaglia 和 K. A. Dawson, *Kinetic Arrest Originating in Competition Between Attractive Interaction and Packing Force* 2000 *J. Stat. Phys.* **100** 363 , , , ;
DOI:10.1023/A:1018660200206. [29] S. Roy、S. Sinha 和 A. Hansen, *Effective rheology in the continuum limit* 2024 *Transp. Porous Med.* **151** , , , 1295 10 1007 11242 024 02073 0；DOI：. /s - - - 。[30] K. Binder 和 A. P. Young, *Spin glasses: Experimental facts theoretical concepts and open questions* 1986 *Rev. Mod. Phys.* **58** 801 , , , , , ;
DOI:10.1103/RevModPhys.58.801. [31] L. Meshulam 和 W. Bialek, *Statistical mechanics for networks of real neurons* 2025 *Rev. Mod. Phys.* **97** , , , 045002 10 1103 3；DOI：. /jcrn- nrc。[32] S. Sinha、M. Aa. Gjennestad、M. Vassvik 和 A. Hansen, *Fluid menisci algorithms for dynamic pore network modeling of immiscible two-phase flow in porous media* 2021 *Front. Phys.* **8** 548497 , , , ;
DOI:10.3389/fphy.2020.548497. [33]E. T. Jaynes, *Information theory and statisti-cal mechanics*, 1957, *Physical Review*, 106, 620；DOI:10.1103/PhysRev.106.620. [34] E. T. Jaynes, *Information theory and statisticalmechanics II*, 1957, *Physical Review*, 108, 171；DOI:10.1103/PhysRev.108.171. [35]A. Hansen、E. G. Flekkøy、S. Sinha 和 P. A. Slotte, *A statistical mechanics framework for immiscible and incompressible two-phase flow in porous media* 2023 *Adv. Water Res.* **171** 104336 , , , ;
DOI:10.1016/j.advwatres.2022.104336. [36]A. Hansen 和 S. Sinha, *Thermodynamics-like formalism for immiscible and incompressible two-phase flow in porous media*, 2025, *Entropy*, 27, 121；DOI:10.3390/e27020121. [37] N. K. Karadimitriou、S. M. Hassanizadeh、V. Joekar-Niasar 和 P. J. Kleingeld, *Micromodel study of two-phase flow under transient conditions: Quantifying effects of specific interfacial area* , 《水资源研究》50，8125（2014）；DOI:10.1002/2014WR015388. [38] O. Aursjø、G. Løvoll 和 H. A. Knudsen、E. G. Flekkøy 和 K. J. M˚aløy, *A Direct Comparison Between Drainage Experiment and a 2D Lattice Boltzmann Simulation* , 《多孔介质中的传输》86，125（2011）；DOI:10.1007/s11242-010-9611-y. [39] V. Joekar-Niasar 和 S. M. Hassanizadeh, *Analysis of fundamentals of two-phase flow in porous media using dynamic pore network models: A review*, 《环境科学与技术评论》42，1895（2012）；DOI:10.1080/10643389.2011.574101. [40]M. Moura、D. Bedeaux、R. T. Armstrong 和 S.

Kjelstrup, *Fluctuation–dissipation theorems in porous media two-phase flow: statistical characterisation of saturation fluctuations and measurement of Onsager coefficients* **1026**, 2 2026 ，《流体力学杂志》A（）；DOI:10.1017/jfm.2025.10987.[41] S. F. Edwards 和 P. W. Anderson, *Theory of spin glasses* **5**, 965 1975 ，《物理学杂志 F：金属物理》（）；DOI:10.1088/0305-4608/5/5/017.[42] D. Sherrington 和 S. Kirkpatrick, *Solvable model of a spin-glass* **35**, 1792 1975 ，《物理评论快报》（）；DOI:10.1103/PhysRevLett.35.1792.[43] G. Parisi, *Nobel Lecture: Multiple equilibria* 2304 00580 3 2023 ，arXiv：. v（）；DOI:10.48550/arXiv.2304.00580.[44] E. W. Washburn, *The dynamics of capillary flow*，17，273 1921 10 1103 17 273（）；DOI：./PhysRev. . .[45] F. A. L. Dullien, *Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure*，（学术出版社，圣迭戈，）。1992[46] S. Sinha、A. Hansen、D. Bedeaux 和 S. Kjel-strup, *Effective rheology of bubbles moving in a capillary tube* **87**, 025001 2013 ，《物理评论 E》（）；DOI:10.1103/PhysRevE.87.025001.[47] E. Aker、K. J. Måløy、A. Hansen 和 G. G. Batrouni, *A two-dimensional network simulator for two-phase flow in porous media* **32**, 163 ，《多孔介质中的传输》（1998）；DOI:10.1023/A:1006510106194.[48] G. G. Batrouni 和 A. Hansen, *Fourier acceleration of iterative processes in disordered systems* ，《统计物理学杂志》52，747（1988）；DOI:10.1007/BF01019728.[49] S. Roy、H. Pedersen、S. Sinha 和 A. Hansen, *The co-moving velocity in immiscible two-phase flow in porous media* 2022 *Transp. in Porous Media* **143** ，，，，69 10 1007 11242 022 01783 7；DOI：./s - - -。[50] A. Hansen、S. Sinha、D. Bedeaux、S. Kjelstrup、M. Aa. Gjennestad 和 M. Vassvik, *Relations between seepage velocities in immiscible incompressible two-phase flow in porous media* ，《多孔介质中的传输》125，565 2018 10 1007 11242 018 1139 6（）；DOI：./s - - -。[51] S. Sinha、Y. M. heust、H. Fyhn、S. Roy 和 A. Hansen, *Disorder-induced non-linear growth of fingers in immiscible two-phase flow in porous media* ，《流体物理学》36，033309（2024）；DOI:10.1063/5.0193570.[52] T. Ezaki、E. F. dos Reis 和 N. Masuda, *Closer to critical resting-state neural dynamics in individuals with higher fluid intelligence* **3**, 52 ，《通讯生物学》（2020）；DOI:10.1038/s42003-020-0774-y.[53] C. I. N. S. Filho、L. de Arcangelis、H. J. Herrmann、D. Plenz、P. Kells、T. L. Ribeiro 和 J. S. Andrade Jr., *Ising-like model replicating time-averaged spiking behaviour of in vitro neuronal networks* **14**, ,《科学报告》（）；DOI：。/s---。[54] C. I. N. S. Filho、R. S. Pires、H. A. Carmona、J. S. Andrade Jr、*Mapping inter-city trade networks to maximum entropy models using electronic invoice data*，《混沌、孤子与分形》**202**，117593（2026）；DOI:10.1016/j.chaos.2025.117593。[55]W. Bialek、A. Cavagna、I. Giardina、T. Mora、E. Silvestri、M. Viale 和 A. M. Walczak, *Statistical mechanics for natural flocks of birds*，《美国国家科学院院刊》**109**，4786（2012）；DOI:10.1073/pnas.1118633109。[56] W. Bialek、A. Cavagna、I. Giardina、T. Mora、O. Pohl、E. Silvestri、M. Viale 和 A. M. Walczak, *Social interactions dominate speed control in poising natural flocks near criticality* ，《美国国家科学院院刊》**111**, 7212 2014 10 1073 1324045111 （）；DOI：。/pnas。[57] K. Binder 和 D. Landau, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*（剑桥大学出版社，剑桥，2025）。[58] L. Prechelt，载于 *Neural Networks: Tricks of the Trade*，G. Montavon、G. B. Orr 和 K. R. Müller 编（Springer，柏林，2012）；DOI:10.1007/978-3-642-35289-8 5。[59] K. H. Fischer 和 J. A. Hertz, *Spin glasses*（剑桥大学出版社，剑桥，1991）。[60] S. Roux 和 H. J. Herrmann, *Disorder-induced nonlinear conductivity* **1227**, 4 1987 ，《欧洲物理快报》（）；DOI:10.1209/0295-5075/4/11/003。[61] L. Talon 和 A. Hansen，it 多孔介质中双黏性非牛顿流体的有效流变学，《前沿物理学》**7**，225（2020）；DOI:10.3389/fphy.2019.00225。[62] C. Spurin、T. Bultreys、B. Bijeljic、M. J. Blunt 和 S. Krevor, *Intermittent fluid connectivity during two-phase flow in a heterogeneous carbonate rock* **100**, 043103 2019 ，《物理评论 E》（）；DOI:10.1103/PhysRevE.100.043103。[63] A. G. Yiotis、A. Dollari、M. E. Kainourgiakis、D. Salin 和 L. Talon, *Nonlinear Darcy flow dynamics during ganglia stranding and mobilization in heterogeneous porous domains* **4**, 114302 2019 ，《物理评论：流体》（）；DOI:10.1103/PhysRevFluids.4.114302。[64] M. Erpelding、S. Sinha、K. T. Tallakstad、A. Hansen、E. G. Flekkøy 和 K. J. Måløy, *History independence of steady state in simultaneous two-phase flow through two-dimensional porous media* ，《物理评论 E》**88**，053004 2013 10 1103 88 053004（）；DOI：。/PhysRevE.。。