arXiv:2603.08666v1 [physics.optics] 9 Mar 2026

局部幂指数随步长变化的步长分布中 Lévy 飞行的实验研究

Isaac C. Nunes ,[1,2] Jes´us P. L´opez ,[1] 和 Thierry Passerat de Silans [1,*]

[1] *Departamento de Física, CCEN, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-900 João Pessoa, Paraíba, Brazil*
[2] *Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901 Recife, Pernambuco, Brazil*(日期：2026年3月10日)

我们通过实验研究了致密原子蒸气对光的透射。致密原子蒸气中的光传播可建模为 Lévy 飞行随机游走。对于这类系统，步长分布可建模为 $P(\ell) \sim \ell^{-1-\alpha(\ell)}$，其中 Lévy 指数 $\alpha(\ell)$ 随步长平滑变化。此外，在光散射过程中，行走者会根据原子间碰撞是否发生而交替遵循两种不同的分布。我们根据不同系统尺寸和原子密度下的透射测量结果，求得 Lévy 指数。测得的 Lévy 指数由系统尺寸 $\alpha = \alpha(\ell = L)$ 决定。我们对交替遵循两种 Lévy 类步长分布的行走者进行了模拟。

I. 引言

L´evy 飞行是一种方差发散的步长分布随机游走。L´evy 飞行通常用渐近按幂律衰减的步长分布来建模 $P(\ell) \sim \ell^{-1-\alpha}$，其中 L´evy 指数为 $\alpha \leq 2$。L´evy 飞行的主要特征是会出现大步长；尽管这种情况罕见，却主导着随机游走的动力学。例如，大步长会使厚度为 L 的样品的透射率按 $L^{-\alpha/2}$ 衰减，其速度比正常扩散[1–4]更慢。L´evy 飞行存在于各种系统中，以下仅举几例：动物觅食 [5], 、纳米线中的声子输运 [6]以及基因谱系的扩散 [7]。

原子共振蒸气对光的多次散射可描述为 L´evy 飞行随机游走 [8, 9], ，其中步长是光子在连续散射之间行进的距离。在散射过程中，光的频率会重新分布，使得被失谐散射的光会产生 L´evy 飞行典型的大步长。对原子蒸气中光的 L´evy 飞行进行的实验研究，主要集中于通过透射测量 [2, 10–14]确定 L´evy 指数 α 。原子蒸气中光的步长分布并非幂律 [14–17] ，但可以建模为：

$$P(\ell) \sim \ell^{-1-\alpha(\ell)}, \tag{1}$$

其中，L´evy 指数 $\alpha(\ell)$ 随步长缓慢变化。 $\alpha(\ell)$ 随 ℓ 平滑变化，使我们能够在局部将步长分布描述为幂律，其局部指数为 $\alpha(\ell)$。透射测量 α 已证实， α 取决于系统 [13, 14]的尺寸。此外，步长在两种不同的步长分布之间交替，这两种分布分别对应两种不同的频率再分配情况 [15, 18, 19], ，具体取决于光子散射过程中是否发生过原子间碰撞。

本文对共振原子铯蒸气中的光透射率进行了实验研究。我们的目标有两个：i）确定能否从透射测量中获得步长分布的局部指数；ii）了解两种不同步长分布交替出现时，如何影响光穿过样品的透射。我们进行了模拟，以验证实验结果。

本文结构如下：第二节讨论频率再分配，重点介绍两种不同情形，即散射事件期间原子之间是否发生碰撞。此外，我们还说明频率再分配如何影响随机游走的步长分布。第三节介绍实验并讨论实验结果。第四节介绍步长幂律指数依赖于长度且存在两种不同分布时的 L´evy 飞行随机游走模拟。第五节比较并讨论实验与模拟结果，最后在第六节作出结论。

II. 原子蒸气散射光的频率再分配

共振碱金属原子蒸气散射的光，其频率再分配主要通过两种机制发生：(i) 多普勒频移和 (ii) 使原子偶极相位随机化的原子弹性碰撞 [15, 20, 21]。这种频率再分配会导致散射光谱展宽，其中每个频率与蒸气相互作用时对应不同的截面。与原子共振的失谐越大，截面越小，而

* thierry@otica.ufpb.br

在发生新的散射事件之前，传播较大距离的概率越高。步长分布与相互作用截面 $\sigma(x')$ 以及散射光谱轮廓 $\Theta(x')$ 有关：

$$P_n(\ell) = \int dx' \Theta_n(x') \beta(x') e^{-N\sigma(x')\ell}, \qquad (2)$$

其中，x' 表示以多普勒宽度归一化的散射失谐，N 为原子密度，$\beta(x) = N\sigma(x)$为吸收系数。散射光谱线型取决于散射事件数 n和入射失谐 x，可通过递推规则 [11, 17]计算：

$$\Theta_n(x') = \int dx C(x) \Theta_{n-1}(x) \frac{R(x', x)}{\phi(x)}, \qquad (3)$$

其中，$\Theta_{n-1}(x)$是第 $n-1$步的散射线型，$C(x)$是与系统尺寸有关的消光因子，用于计算失谐为 x 的光子被蒸气散射的概率。$\phi(x)$是归一化吸收线型（$\int dx \phi(x) = 1$），而 $R(x, x')$是联合频率再分布函数 [18]。Hummer [18]，计算了四种情形下的联合再分布函数，其中两种适用于此处讨论的碱金属蒸气散射：(i) 情形 II，即纯自然展宽（无碰撞）；(ii) 情形 III，即自然展宽与碰撞展宽的组合。情形 II 和情形 III 在实验室静止系中也都具有多普勒展宽。

对于有限蒸气系统，$\Theta_n(x')$在若干次散射事件后趋于稳定 [17]，情形II 的散射线型收敛为多普勒线型，情形 III 收敛为具有重尾洛伦兹翼的沃伊特线型，这有利于大步长的出现 [22]。频率再分布函数可写为加权平均 [19, 23–25]：

$$R(x, x') = (1 - P_C) R_{II}(x, x') + P_C R_{III}(x, x'), \qquad (4)$$

其中$P_C = \frac{\Gamma_C}{\Gamma_C + \Gamma_n}$为散射事件期间发生原子间碰撞的概率 [24, 25]。Γ_C 和 Γ_n 分别表示碰撞线宽和自然线宽。

光子在原子间碰撞发生之前可以经历若干次散射事件。在其随机游走过程中，光子在两种不同的步长分布之间交替：对应于无原子间碰撞散射的 $P_{II}(\ell)$（情形 II），以及散射期间发生碰撞时的 $P_{III}(\ell)$（情形 III）。

$$P(\ell) = \begin{cases} P_{II}(\ell), & \text{if no collisions occurs during scattering} \\ P_{III}(\ell), & \text{if collision occurs during scattering.} \end{cases} \qquad (5)$$

根据计算得到的步长分布和公式 1，我们可以提取局部幂律指数

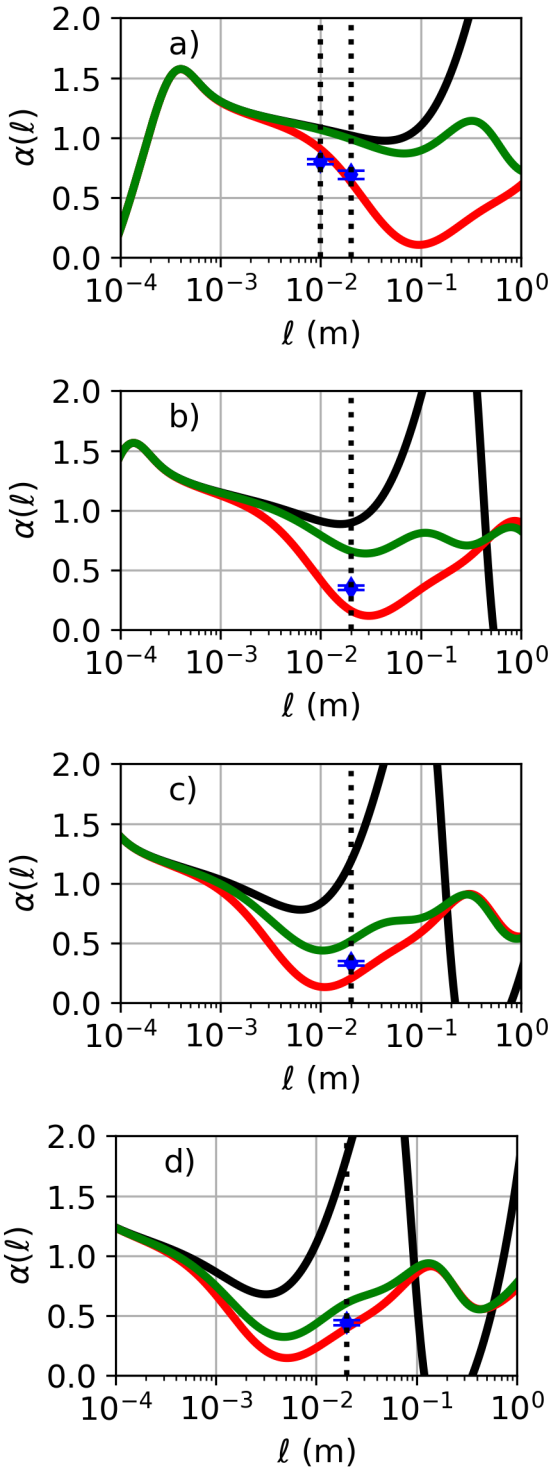


图1. 不同原子密度下测得的L´evy指数（菱形）。曲线为依赖于步长的L´evy指数 $\alpha(\ell)$，分别由 $P_{II}(\ell)$（黑线）、$P_{III}(\ell)$（红线）和 $P(\ell)$（绿线）计算得到。(a) 数密度为 $N = 3.5 \times 10^{12}$ 原子/cm^3，对应于 $P_C = 6\%$；(b) 为 $N = 10 \times 10^{12}$ 原子/cm^3 和 $P_C = 15\%$；(c) 为 $N = 44 \times 10^{12}$ 原子/cm^3 和 $P_C = 30\%$；(d) 为 $N = 25 \times 10^{12}$ 原子/cm^3 和 $P_C = 43\%$。对于数密度(a)，测量使用了厚度分别为 $L = 1$ cm和 $L = 2$ cm的两个不同蒸气池。对于数密度(b-d)，仅使用厚度为 $L = 2$ cm的蒸气池。

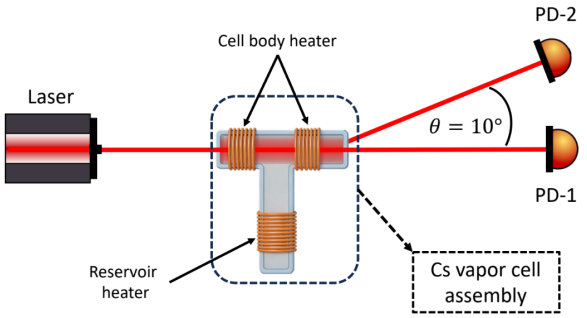
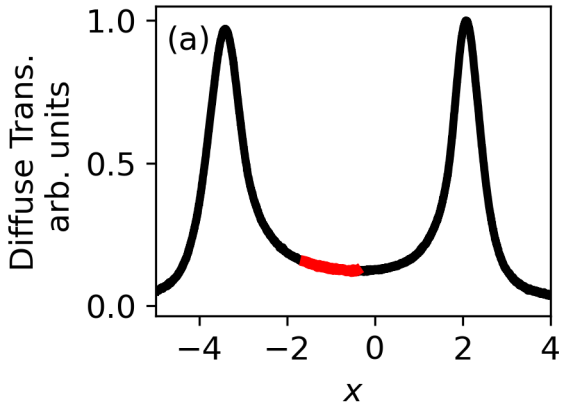


图2. 实验装置示意图。一束低功率激光束入射到原子蒸气上，漫透射由光电探测器PD2在相对于激光束 10° 处收集。

$1+\alpha(\ell) = -\frac{dlog_{10}(P(\ell))}{dlog_{10}(\ell)}$。在图1中，我们展示了针对不同原子密度，由 $P_{II}(\ell)$、 $P_{III}(\ell)$和 $P(\ell)$计算得到的 $\alpha(\ell)$。例如，观察图1(a)可见，对于情形 II，$\alpha(\ell)$随 ℓ 平滑变化，在很宽的步长范围（从 2 mm 到 3 cm）内保持在$1.2 \leq \alpha \leq 1.0$ 范围内。对于情形 III， α 降至低至 $\alpha \sim 0.1$ 的数值，这与散射线型从多普勒核向洛伦兹翼的过渡有关；对于更大的步长，它又升至 $\alpha \sim 0.5$ ，这与散射线型的洛伦兹翼 [8, 14, 16, 17]有关。图1(a)中根据总步长分布 $P(\ell)$计算得到的 $\alpha(\ell)$（$P_C \sim 6$ %）在步长为 $\ell < 10^{-1}$ m时趋近于情形 II，这是因为原子间碰撞很少。然而，对于大步长， $P(\ell)$分布趋近于 $P_{III}(\ell)$分布，因为 $P_{II}(\ell)$分布存在截断 [15, 17] ，这是原子静止系中散射相干性的结果。



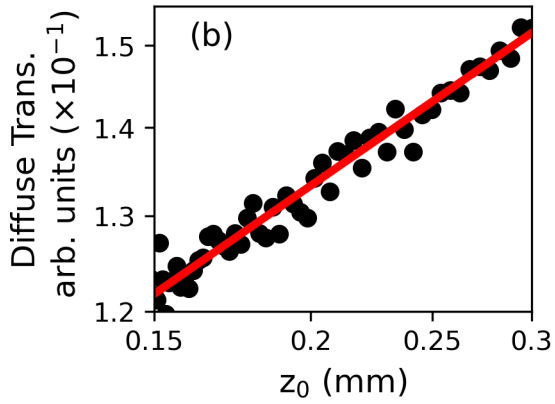


图 3. (a) 厚度为 $L = 2$ cm、原子密度为 $N = 3.5 \times 10^{12}$ atoms/cm^3 的蒸气池的漫射透射光谱。零失谐对应于 $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}(F' = 5)$ 跃迁。(b) 漫射透射随激光穿透深度 z_0 变化的幂律依赖。(b) 中分析的频率范围对应于 (a) 中的红色实线。

III. 实验

实验装置如图2所示。波长为852 nm的激光束入射到密封池中的铯蒸气上，并在D_2 线附近扫描。两个独立的加热炉分别加热蒸气池的探测体积和液态铯储库。通过加热储库提高蒸气的数密度，使线中心处的光学密度至少为60；也就是说，线中心附近不存在弹道透射。光在逸出蒸气之前可能经历多次散射事件，并以漫透射的形式被探测器PD2收集。探测器PD2相对于激光束轴线的角度为 10° ，并置于透镜之后以收集漫射光。实验参数的更多细节见附录。

我们的实验目的是，在固定的原子密度 N 和池厚度 L下，测量漫透射随随机游走 z_0起点的变化。

漫透射预期按 [3, 4]标度：

$$T_D \propto \left(\frac{z_0}{L}\right)^{\alpha/2}. \tag{6}$$

在我们的实验中，激光频率在 $6S_{1/2}(F = 4) \rightarrow 6P_{3/2}(F' = 3,\ 4,\ 5)$ 铯跃迁附近扫描，随机游走的起点定义为激光束的穿透深度，其值为 $z_0 = (N\sigma(x))^{-1}$ [14]。图3展示了漫射透射光谱的一个示例。图3(a)中光谱的频率轴可以转换为穿透深度轴，从而绘制出图3(b)；如式6所预测，该图显示漫透射随随机游走起点变化呈幂律依赖。采用幂律对漫透射进行拟合，以获得 Lévy 指数 α。在相同原子密度 $N = 3.5 \times 10^{12}$ atoms/cm^3 下，对厚度分别为 $L = 1$ cm 和 $L = 2$ cm 的两个不同蒸气池测得的 α 结果

如图1(a)中的菱形所示。$L = 2$ cm 时另外三种数密度下的结果见图1(b-d)[26]

图1展示了两个主要结果：i）测量值 α 取决于系统尺寸，并遵循曲线 $\alpha(\ell)$；ii）测得的 α 遵循预期曲线$\alpha(\ell)$，适用于情形 III，也就是说，即使碰撞线宽相对于自然线宽较小（图1(a)中为$\Gamma_C \sim 0.1\Gamma_n$），原子之间发生碰撞时的散射也符合这一规律。

IV. 模拟

A. 双帕累托分布

为了初步理解局部幂指数变化的步长分布的影响，以及两种步长分布之间的交替，我们按照分布 $P^{DP}(\ell)$模拟一维随机游走：

$$P^{(DP)}(\ell) = \begin{cases} P_{II}^{(P)}(\ell), & \text{with probability } 1 - P_C \\ P_{III}^{(P)}(\ell), & \text{with probability } P_C \end{cases}, \quad (7)$$

其中 $P^{(P)\ (II,\ III)}(\ell)$是归一化的帕累托分布：

$$P_{(II,III)}^{(P)}(\ell) = \frac{\alpha_{(II,III)}}{\ell_0} \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{1+\alpha_{(II,III)}} \Theta(\ell - \ell_0), \quad (8)$$

其中 Θ 为赫维赛德函数，ℓ_0 为最小步长。选择这些分布的 L´évy 指数，使得 $1 < \alpha_{II} < 2$ 且 $0 < \alpha_{III} < 1$，以模拟原子蒸气中光扩散所对应的两种步长分布，分别对应多普勒和 Voigt 散射线型（情形 II 和 III）。

1. *Transmission as a function of starting point*

随机行走的行走者在一维空间中演化 $0 < z < L$，其起点 z_0 满足 $\ell_0 \ll z_0 \ll L$，这就是所谓的连续极限 [4]。我们在固定 ℓ_0 的条件下进行模拟，并针对不同的起点 z_0取 L。我们收集透过位于$z = L$ 处吸收壁的透射率 T，并将其表示为 z_0 的函数，见图 4(a)。随后，利用公式 6，我们确定 $log_{10}(T)$ 的局部斜率，并将其表示为 $log_{10}(z_0)$ 的函数，以得到 $\alpha/2$。采用这一方法得到的α 值（对应两种不同的系统尺寸）如图 4(b) 所示。我们在$\ell_0 = 1$、$L = 10^3$ 和 $L = 10^5$ 的条件下进行了模拟，其中 z_0 的取值范围为 10 至$L/10$。

所得的 α 取决于起点z_0，而与系统尺寸 L无关。由于起点到位于 $z = 0$ 处的吸收壁的距离远小于到 $z = L$ 的距离，

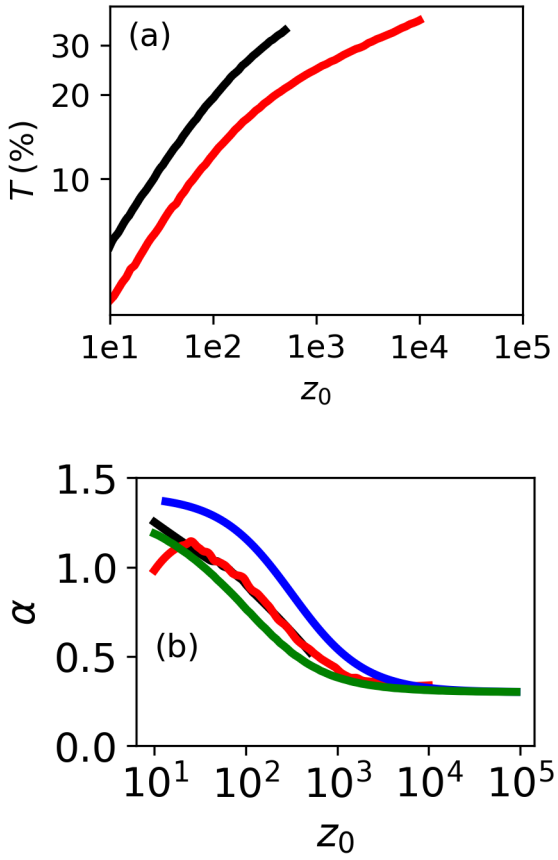


图 4。（a）对于两种不同系统尺寸，透射率随起点 z_0 的变化：$L = 5 \times 10^3$（黑色实线）和 $L = 10^5$（红色实线）。（b）通过对 $L = 5 \times 10^3$ 的公式 6 进行局部拟合得到的局部 L´évy 指数 α，其中 $L = 5 \times 10^3$ 对应黑色实线，$L = 10^5$ 对应红色实线。蓝色实线表示根据步长分布计算得到的预期 α 值：$1 + \alpha = -\frac{dlog(P^{(DP)})}{dlog(z_0)}$。绿色实线表示根据公式 9 得到的预期$\alpha^{(w)}$。

大多数行走者从系统左侧逃逸。由于 $T + T^{(left)} = 1$ 的透射受到通过 z =0逃逸的粒子数（记为 $T^{(left)}$）的强烈影响，而该数量应取决于 z_0，几乎不受较大系统尺寸 L 的影响。我们得出结论，T 由 $T^{(left)}$控制，而 $T^{(left)}$取决于起点 z_0，与系统尺寸 L无关。因此，从模拟中获得的 α 应与 $P^{(DP)}$在 z_0附近的局部斜率有关，该局部斜率由 $1+\alpha = -\frac{dlog}{(P^{(DP)})dlog(z_0)}$计算得到；我们在图 4中将其绘制为蓝线。局部斜率与从模拟中获得的 α 的变化关系相当吻合，这进一步证实了 $T^{(left)}$ 支配动力学这一论点。

通过模拟，我们可以计算在 $z = 0$ 经过一步（P）或 P（P）后逃逸的行走者数量。我们分别用 N_{II} 和 N_{III}表示这些数量。我们估算了一个

按权重将 $\alpha^{(w)}$ 值设为:

$$\alpha^{(w)}(z_0) = \frac{N_{II}(z_0)}{N_{II}(z_0)+N_{III}(z_0)}\alpha_{II} + \frac{N_{III}(z_0)}{N_{II}(z_0)+N_{III}(z_0)}\alpha_{III}. \tag{9}$$

$\alpha^{(w)}$ 在图 4 中以绿色实线绘出。它与得到的 α 值相当吻合。

2. *Transmission as a function of minimum step length*

我们还在模拟中测试了以下情形：固定 z_0 为 10^{-3}，并运行模拟，使 ℓ_0 从 1 变化到 5 [27]。不同系统尺寸下，模拟得到的漫透射 T 随 ℓ_0 的变化如图 5(a) 所示。显然，漫透射遵循由 [4]给出的幂律:

$$T \propto \left(\frac{\ell_0}{L}\right)^{\alpha/2}. \tag{10}$$

根据公式 10，我们可以从模拟的 T中提取 α 。 α 值显然取决于系统尺寸，我们将从模拟中获得的 α 值绘于图 5(b) 中，同时还绘出了步长为 $\ell = L$的步长分布的局部指数，该指数根据 $1+\alpha(L) = -\frac{dlog_{10}(P(L))}{dlog_{10}(L)}$ 计算得到。模拟得到的 α与 $\ell = L$的步长分布局部指数非常接近。此外，图 5(b) 还绘出了一个加权的 α 值，其取值为:

$$\alpha_{(w)} = \frac{N_{II}}{N_{II}+N_{III}}\alpha_{II} + \frac{N_{III}}{N_{II}+N_{III}}\alpha_{III}, \tag{11}$$

其中， N_{II} 和 N_{III} 分别表示行走者在执行一步后，通过 $z = L$的数量；该步分别对应于 $P_{(P)II}$分布和 $P_{(P)III}$分布。

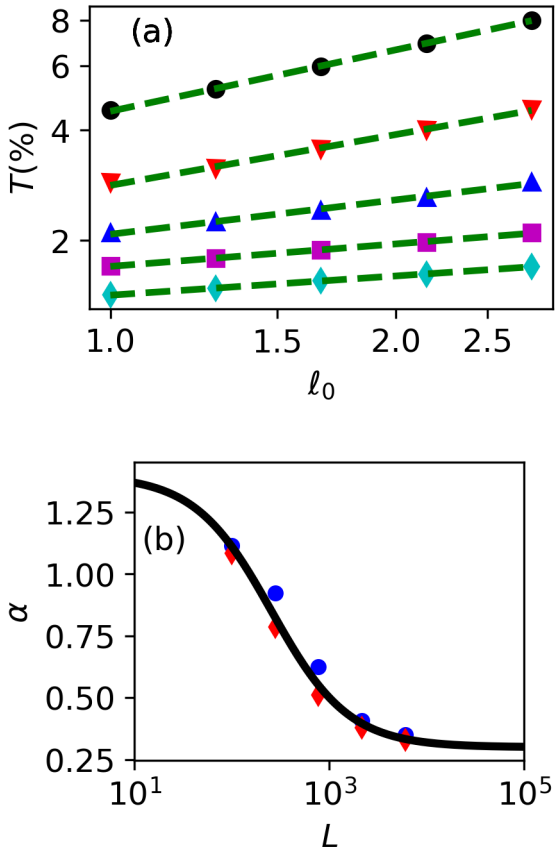


图 5. 不同系统尺寸 L下，漫透射随 ℓ_0 变化的关系： $L = 100$ （黑色圆圈）、 $L = 280$ （红色三角形）、 $L = 780$ （蓝色三角形）、 $L = 2150$ （洋红色方块）和 $L = 6000$ （青色菱形）。（b）通过将式 10 拟合到透射随 L 变化的关系，提取得到的 Lévy 指数α （蓝色圆圈）。黑色实线：根据$1+\alpha(L) = -\frac{dlog(P(L))}{dlog\ L}()$计算得到的预期 α 值。红色菱形：使用式 11 计算得到的预期 $\alpha^{(w)}$ 。

B. 原子蒸气中的光子扩散

1. *Description of the simulation*

我们使用蒙特卡洛方法模拟原子蒸气中的光子扩散。模拟按照以下步骤进行。我们考虑一个纵轴为 z 、在 $z = 0$ 和 $z = L$处设有吸收边界的平板几何。光子沿 z 轴入射，并在位置 z_0首次发生散射。平行于入射光子方向的速度分量取自分布 [28, 29]:

$$P(v_\parallel) \propto \frac{a^2}{a^2+(x-v_\parallel)^2}e^{-v_\parallel^2}, \tag{12}$$

其中 $v_\parallel$ 以最概然速率表示，而 a 是均匀展宽与多普勒宽度之比所定义的沃伊特参数。垂直于光子入射方向的速度分量取自二维麦克斯韦-玻尔兹曼分布。原子静止系中的光子失谐 x^{at}，由实验室系中的失谐 x 经多普勒频移后计算得出:

$$x^{at} = x - v_\parallel. \tag{13}$$

原子静止系中的发射取决于散射过程中是否发生碰撞，发生碰撞的概率为 P_C。如果没有发生碰撞，散射后的失谐与原子静止系中的入射失谐相同$x'^{at} = x^{at}$。如果发生碰撞，原子静止系中的散射后失谐则取自洛伦兹分布 [18, 19]:

$$P(x'^{at}) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{(x'^{at})^2+a^2}. \tag{14}$$

然后各向同性地选取散射方向 $\vec{n}'$，并且

散射后的失谐在实验室静止系中经多普勒频移:

$$x' = x'^{at} + \vec{n}\cdot\vec{v}. \tag{15}$$

得到散射后的失谐后，我们按照以下分布抽取光子在下一次散射事件发生前所行进的距离:

$$P_S(\ell) = \beta(x')e^{-\beta(x')\ell}. \tag{16}$$

更新光子的位置，并在满足 $z > L$ 时将其计为透射。如果满足 $z < 0$ ，则光子逸失；如果满足 $0 < z < L$，则光子仍在蒸气中，并重新开始这一过程。为简化模拟程序，我们采用二能级系统，并使用无量纲尺寸。吸收系数是由 [15] 定义的沃伊特线型:

$$\beta(x) = \frac{1}{\ell_0}\frac{a}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}}{a^2+(x-y^2)}dy. \tag{17}$$

2. *Transmission as a function of starting point z_0*

我们模拟光子的随机游走，并像实验中一样，收集漫透射随入射失谐的变化。入射失谐为 x 的光子穿透蒸气，深入距离 z_0 ，该距离由式 16 的分布给出。在图 6 中，我们以双对数坐标绘出漫透射随平均穿透深度 $\bar{z}_0 = 1/\beta(x)$ 的变化。正如预期，得到幂律行为 [4, 14, 30] （见式 6），据此我们提取 L´évy 指数 α。然而，所得 α 值处于 $0.9 < \alpha < 1.0$ 范围内，并且不随系统尺寸 L 变化，即使 L 改变了 10 倍也是如此。透射的幂律依赖关系 T 与 z_0 无关，这一事实与采用双帕累托分布进行模拟时发现的结果相似。

3. *Transmission as a function of typical step-length ℓ_0*

我们还模拟了固定 z_0 和 L 时，漫透射随典型步长 ℓ_0 的变化。在实验中，可以通过调节原子密度来改变 ℓ_0 ，如文献 [2, 12, 13] 中所做的那样。我们在 $z_0 \ll \ell_0$ 的极限下进行模拟，此时漫透射按式 10 的规律缩放。我们通过将漫透射拟合为幂律（式 10），提取 Lévy 指数 α 。随后，在图 7 中将提取出的 Lévy 指数与理论预测进行比较；这些理论预测对应于步长分布的局部指数（式 2）的 α 值。

从模拟中提取的 α 值与理论预测的 $\alpha(\ell)$曲线吻合良好。我们可以清楚地区分分别对应于原子静止系中的相干散射（情况 II）和非相干散射（情况 III）的两种不同步长分布。

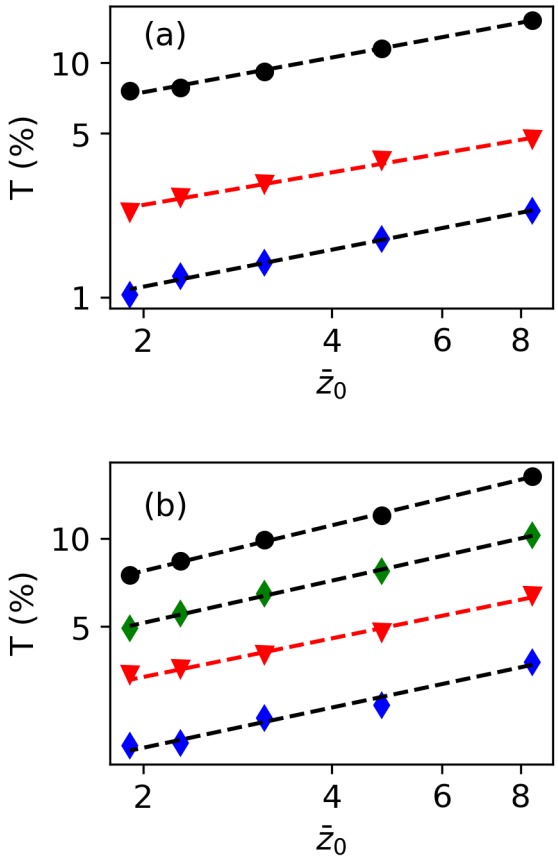


图 6. 四种不同池厚度下，漫透射随平均穿透深度 $\bar{z}_0$ 的变化：$L = 120$（黑色圆点）、$L = 270$ （绿色菱形）、$L = 540$ （红色三角形）和 $L = 1080$ （蓝色菱形）。利用式 6 拟合漫透射，以获得 Lévy 指数 α。（a）对应 $P_C = 0$ ；（b）对应 $P_C = 100\%$。

此外， α 值取决于系统尺寸 L，从模拟中提取的值与 $\alpha(L)$吻合良好，这一结果与实验所得结果相似。

为考察不同碰撞概率的影响，我们通过模拟得到了尺寸为$L = 1100$ 的系统中 α 随 P_C 变化的关系。在图 8(a)中，我们展示了理论计算得到的 $P_C = 0$，30%，50%，70%和 100% 对应的 $\alpha(\ell)$ 曲线，以及模拟传输得到的 α 值。模拟值与理论预测吻合良好。我们还通过模拟得到了经过情形 II（III）的一步后，光子以 $z = L$ 逃逸的百分比，记为 $N_{II}(N_{III})$；计算方法与第 IV-A 节类似，结果绘于图 8(b)。情形 III 对应的一步之后逃逸的光子百分比高于 P_C ，因为情形 III中大步长更常见。我们估算得到加权 Lévy 指数为 $\alpha_w = N_{II}\alpha_{II} + N_{III}\alpha_{III}$，其中 α_{II} （α_{III}）是 $\ell = L$时情形 II（III）的理论局部指数；该估算值与从模拟中提取的 α 吻合良好

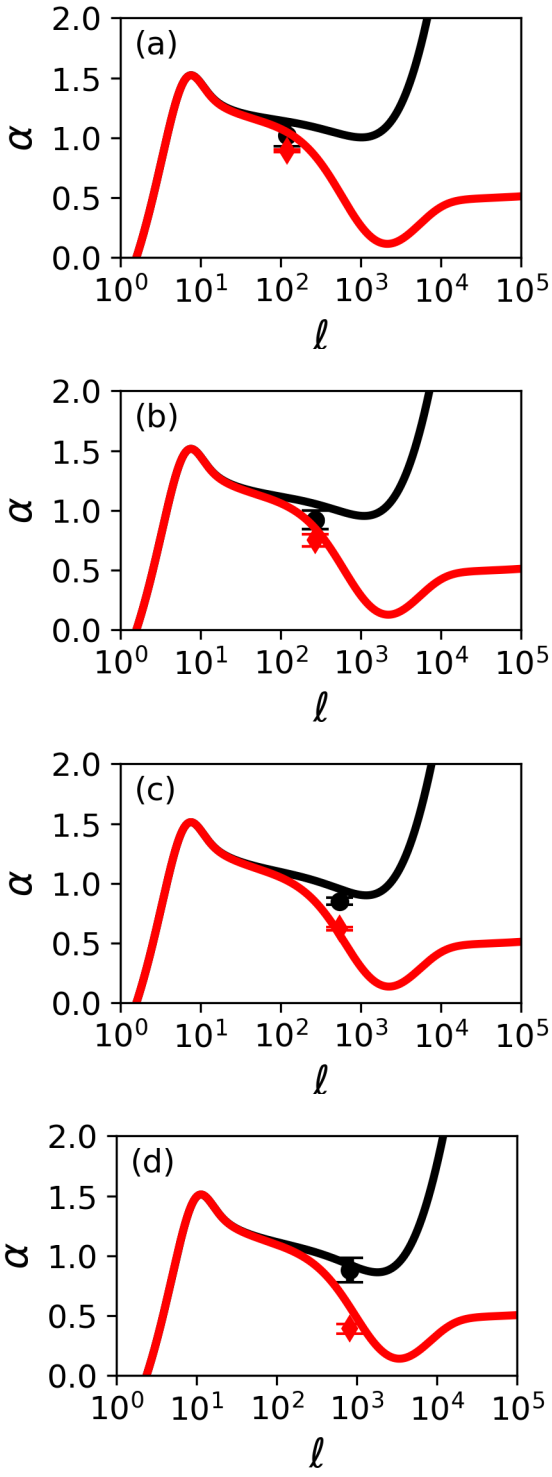


图 7. 对于 $\ell_0 = 1$，在不同池厚度下，$P_C = 0$（黑色实线）和 $P_C = 100\%$（红色实线）的步长分布局部幂指数计算值：(a) $L = 120$，(b) $L = 270$，(c) $L = 540$，(d) $L = 810$。每幅图中，符号表示将公式 10 拟合到模拟漫透射后提取的 α 值。

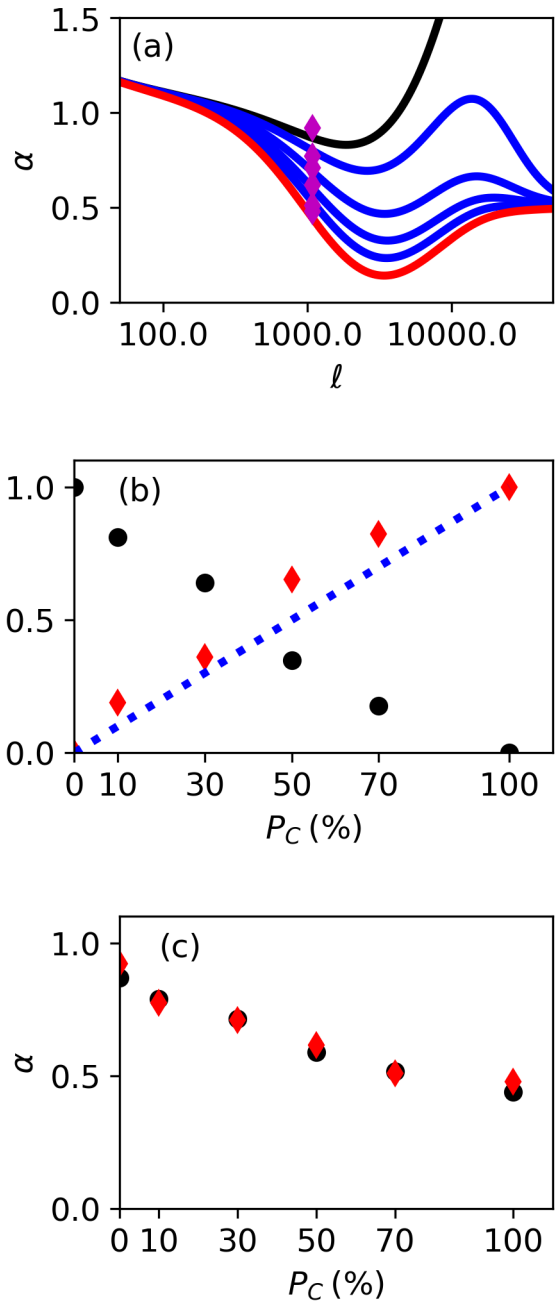


图 8. (a) 不同碰撞概率 P_C（从上至下依次为 0%、10%、30%、70%、100%）下，幂律局部指数随步长的变化。符号表示蒙特卡洛模拟得到的 α 值。(b) 情形 II（N_{II}，黑色圆点）和情形 III（N_{III}，红色菱形）中步后逸出的光子百分比随碰撞概率 P_C 的变化。(c) 比较从模拟透射中得到的 α 值与估算的 α_w 值，后者以 N_{II} 和 N_{III} 加权。

（见图 8(c)）。

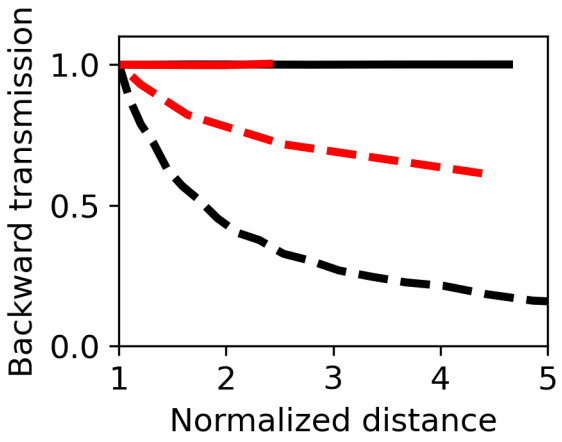


图 9. 首次散射事件后的模拟后向透射。黑线表示双帕累托步长分布，红线表示原子蒸气中的光子扩散。实线表示漫透射随ℓ_0的变化，虚线表示漫透射随 z_0的变化。距离以 ℓ_0 和z_0 中的较小值归一化，透射以最小ℓ_0 或 z_0处的值归一化。

V. 讨论

A. 关于模拟

根据模拟结果，我们发现了两种不同的结果：i）在 $\ell_0 \ll z_0$ 极限下，透射随 z_0 变化时，提取出的 α 值不依赖于系统尺寸 L；ii）在 $z_0 \ll \ell_0$极限下，透射随 ℓ_0 变化时，提取出的 α 值依赖于系统尺寸，并遵循 $\alpha = \alpha(\ell = L)$。如图 9 所示，对于双帕累托和光子扩散模拟，这两种情形相对于第一步的后向逸出表现出不同的行为。在情形（i）中，第一步的后向逸出对所用变量 z_0 非常敏感，而前向透射由这种后向逸出决定。由于 $z_0 \ll L$，自然会认为前向透射不依赖于L。相反，在情形（ii）中，由于最小步长远大于起点 z_0，首次步进后向逸出对变量 ℓ_0 的依赖非常平缓，而 α 依赖于系统尺寸 L。

B. 模拟与实验的比较

在实验中，我们通过激光的穿透深度，改变了随机游走的起点 z_0，并考察其随入射失谐的变化。随着失谐 $x \neq 0$，该实验对应于上一节讨论中的情况 (i)；对于这种情况，模拟结果表明， α 与系统尺寸无关。然而，实验表明，它既与池长有关（$L = 1$ cm 和 $L = 2$ cm），也与有效系统——尺寸有关（不同原子密度下为 $L = 2$ cm，另见[14]）。还需要进一步研究，才能更好地理解这些结果。在模拟中，如果首次散射后的后向逸出几乎不受该变量影响，那么 α 取决于系统尺寸 L。最终，实验中某种尚未理解的机制可能会使后向逸出不再取决于入射失谐。理想情况下，实验研究需要在相同数密度下采用更多种池厚度（即在图1中增加更多实验数据点）。然而，我们只有两个状况良好的蒸气池可用于实验。

C. 关于 P_C的实验值

实验的一个奇特结果是，所获得的 α 值对应于情形 III，尽管 $P_C \ll 1$ （例如，图 1(a) 中的 $P_C = 6\%$ ）。通过计算碰撞线宽与数密度 $\Gamma_C = kN$ 成正比，且比例为$k = 9 \times 10^{-8}$ Hz $\cdot$ cm^3 [31–33]，估算出了 P_C 的值。数密度是通过将理论曲线拟合到弹道透射（由光电探测器 PD1 检测，见图1）来估算的。然而，蒸气池中可能存在杂质，从而增大 P_C的值。我们进行了饱和吸收实验，以确认我们的蒸气池中没有大量杂质，并在室温下测得均匀展宽为 $\Gamma = 6.8 \pm 0.3$ MHz（$\Gamma = 1.3\Gamma_n$）。在计算 Γ_C 时考虑 $0.3\Gamma_n$的额外展宽后，对于图1(a)所用的数密度， P_C 的值将为27%；对于图1(d)所用的数密度，该值将为52%。 P_C 的新值仍不足以证明测得的 L´évy 指数接近情形 III 曲线；从原子物理学的角度来看，即使对于 $\Gamma_C < \Gamma_n$，观察到如此显著的碰撞效应（α 值与情形 III 一致）仍然相当令人惊讶。

VI. 结论

我们通过实验研究了共振原子蒸气中的光扩散，该过程可视为一种 L´évy 飞行随机游走 [8, 10, 11, 16]。我们着重指出，行走者会在两种不同的步长分布之间交替，即 $P_{II}(\ell)$ 和$P_{III}(\ell)$；在 Hummer [18] 所描述的蒸气光散射中，这分别对应频率再分配的情形 II 和 III 。每种步长分布都可在局部描述为幂律，其 L´évy 指数随步长变化，为 $\alpha(\ell)$。我们通过透射测量，获得了不同系统尺寸 L 和原子密度下的 L´évy 指数 α 。测量值与步长等于系统尺寸时的预期值相符： $\alpha = \alpha(\ell = L)$。

我们模拟了步长分布具有依赖于步长长度的局部指数的随机游走：（i）使用双帕累托分布，并且

（ii）模拟共振蒸气中的光子扩散。我们在模拟中的重点是观察从漫透射中提取的 L´évy 指数是否像实验中那样依赖于系统尺寸。讨论中涉及三个相关参数：典型步长ℓ_0、随机游走的起点 z_0 以及系统尺寸 L。将漫透射作为 z_0 的函数进行分析，并取 $\ell_0 \ll z_0 \ll L$ [3, 4] 极限（连续极限）时，没有发现 L´évy 指数依赖于系统尺寸。将漫透射作为 ℓ_0 的函数进行分析，并取 $z_0 \ll \ell_0 \ll L$ [4]极限时，我们从模拟中提取出了依赖于系统尺寸的 L´évy 指数，与实验结果一致，即 $\alpha = \alpha$（$\ell = L$）。对于所提出的两种步长分布：双帕累托分布和原子蒸气中的光子扩散，模拟结果相似。

原子蒸气中光的随机游走可描述为在两种不同的步长分布 $P_{II}(\ell)$ 和 $P_{III}(\ell)$ 之间交替进行，前者出现的概率为 $(1 - P_C)$，后者出现的概率为P_C （P_C 表示光散射事件期间发生原子碰撞的概率）。对原子蒸气中光子扩散的模拟表明，从扩散透射的标度关系中提取的 L´evy 指数取决于 P_C。提取出的 α 值取决于在 $P_{II}(\ell)$ 或 $P_{III}(\ell)$ 中迈出一步后逃离系统的行走者相对数量。

在实验中，测得的 α 值与情形 III 下的预期值一致，即使对于 $P_C \ll 1$也是如此。对于原子物理学界而言，即使在 $\Gamma_c \ll \Gamma_n$的情况下，观察到与原子碰撞相关的信号（情形 III）也令人颇感兴趣。此外，该实验通过测量漫透射随 z_0 的变化进行了分析，并测得了一个依赖于系统尺寸的 L´evy 指数。还需要进一步研究，以理解实验结果与模拟结果之间的差异；实验中可能存在某个未纳入考虑的影响因素。特别是，在碰撞概率可忽略不计（$P_C \ll 1$）的情况下出现情形 III 的特征，这对频率再分配的标准解释提出了挑战，并表明存在一种尚未得到充分理解的潜在机制。

本文介绍了一种由列维飞行随机游走描述的真实物理系统，其复杂程度高于文献中通常建模的系统：局部幂指数依赖于步长，并且在两种类列维步长分布之间交替变化。据我们所知，文献中尚未对具有类似特征的系统中的列维飞行开展研究。我们希望，本文所呈现的实验和模拟结果能够推动对类似非通常列维飞行随机游走系统的进一步研究，而这类系统可能对非理想实际系统具有重要意义。

致谢

T.P.d.S. 和 J.P.L. 感谢巴西国家科学技术发展委员会（CNPq，CNPq/MCTI/FNDCT 第 N° 18/2021 号公开征集项目）、巴西研究与项目资助局（FINEP，N° 01.13.0235.07）提供的资金支持。I.C.N. 感谢巴西高等教育人员提升协调局（CAPES）提供的资金支持。

数据可用性

支持本文研究结果的数据未公开。经合理请求，可向作者获取这些数据。

附录：实验详情

在实验中，我们使用了两个不同的蒸气池：一个厚度为 $L = 1$ cm，另一个厚度为 $L = 2$ cm。两者均为圆柱形玻璃池。$L = 1$cm 的蒸气池直径为 4.5 cm，而 $L = 2$ cm 的蒸气池直径为 2 cm。
每个蒸气池均由两个相互独立的加热炉加热，其中一个用于控制蒸气的温度，另一个用于控制盛有液态铯的侧臂储液器的温度。侧臂温度决定蒸气压，而蒸气温度决定多普勒宽度和沃伊特参数。

从图1(a)到图1(d)的实验条件中，侧臂温度被升高以提高原子数密度，同时蒸气温度略有上升；多普勒宽度从数密度为 $N = 3.5 \times 10^{12}$ 原子/cm^3 （图1(a)）时的 $\Gamma_D = 250$ MHz变化到数密度为 $N = 44 \times 10^{12}$ 原子/cm^3（图1(d)）时的 $\Gamma_D = 268$MHz，分别对应于沃伊特参数值 $a = 10^{-2}$和 $a = 2 \cdot 10^{-2}$。

实验中使用的激光器是带外光栅的半导体激光器，其扫描范围覆盖$6S_{1/2}(F = 4) \rightarrow 6P_{3/2}(F' = 3, 4, 5)$跃迁。光束直径为 1.3 mm，功率范围为 1 至 9 μ W，对应的强度为饱和强度的 0.1 至 0.9 倍。在所用强度范围内，激光-蒸气相互作用呈线性，且未观察到 L´evy 指数 α 随强度发生变化。漫透射随入射失谐变化的分析在范围$-1.6 \leq x \leq -0.4$内进行。分析在 $6S_{1/2}(F = 4) \rightarrow 6P_{3/2}(F' = 5)$跃迁的红侧进行，以避免计入单次散射事件后探测到的光子（更多详情见 [14] ）。设置限值 $x \leq -0.4$ 是为了避免吸收系数在 $x = -0.3$附近达到最大值，从而确保 T_D 随 z_0 单调增长。限值 $-1.6 \leq x$ 可确保

线中心周围有效的频率再分配 [14, 24, 25]。

[1] P. Barthelemy、J. Bertolotti 和 D. S. Wiersma。光的 Lévy 飞行。《自然》，453：495–498，2008。[2] Q. Baudouin、R. Pierrat、A. Eloy、E. J. Nunes-Pereira、P.-A. Cuniasse、N. Mercadier 和 R. Kaiser。退火无序下 Lévy 飞行的特征。《物理评论E》，90：052114，2014。[3] S. V. Buldyrev、M. Gitterman、S. Havlin、A. Ya. Kazakov、M. G. E. da Luz、E. P. Raposo、H. E. Stanley 和 G. M. Viswanathan。具有吸收边界的区间上 Lévy 飞行的性质。《物理学A：统计力学及其应用》，302(1)：148–161，2001。复杂系统物理学前沿国际研讨会论文集。[4] J. Klinger、R. Voituriez 和 O. B´enichou。对称跳跃过程的分裂概率。《物理评论快报》，129：140603，2022年9月。[5] G. M. Viswanathan、V. Afanasyev、S. V. Buldyrev、E. J. Murphyt、P. A. Princet 和 H. E. Stanley。游荡信天翁的 Lévy 飞行搜索模式。《自然》，381：413–415，1996。[6] Jincui Li、Linxi Weng、Jie Xie、Jay Amrit 和 Aymeric Ramiere。纳米线中准弹道声子的 Lévy 行走。《物理评论E》，105：064123，2022年6月。[7] Tyler B Smith 和 Daniel B Weissman。具有幂律扩散的种群中的距离隔离。《G3：基因—基因组—遗传学》，13(4)：jkad023，2023年1月。[8] E. —Pereira、J. M. G. Martinho 和 M. N. Berberan-Santos。非相干原子辐射俘获中的光子轨迹表现为 Lévy 飞行。《物理评论快报》，：。[9] V. Zaburdaev、S. Denisov 和 J. Klafter。Lévy 行走。《现代物理评论》，87：483–530，2015年6月。[10] N. Mercadier、W. Guerin、M. Chevrollier 和 R. Kaiser。热原子蒸气中光子的 Lévy 飞行。《自然物理》，5：602–605，2009。[11] N. Mercadier、M. Chevrollier、W. Guerin 和 R. Kaiser。原子蒸气中光的 Lévy 飞行的微观表征。《物理评论A》，87：063837，2013。[12] Michelle O. Ara´ujo、Thierry Passerat de Silans 和 Robin Kaiser。具有无限平均自由程的光子 Lévy 飞行。《物理评论E》，103：L010101，2021年1月。[13] A. S. M. Macedo、J. P. Lopez 和 T. Passerat de Silans。原子蒸气中光子 Lévy 飞行的样本尺寸效应。《物理评论E》，104：054143，2021年11月。[14] J. P. Lopez、A. S. M. Macedo、M. O. Ara´ujo 和 T. Passerat de Silans。原子蒸气中传播的光子，其 Lévy 飞行透射对起点的依赖性。《物理评论A》，107：013501，2023年1月。[15] A. R. Alves-Pereira、E. J. Nunes-Pereiraa、J. M. G. Martinho 和 M. N. Berberan-Santos。共振谱线辐射俘获及部分频率再分配效应中的光子超扩散运动。《化学物理学杂志》，126：154505，2007。[16] Martine Chevrollier。原子蒸气中的辐射俘获与 Lévy 飞行：入门综述。《当代物理学》，53(3)：227–239，2012。[17] I. C. Nunes、M. O. Ara´ujo、J. P. Lopez 和 T. Passerat de Silans。频率再分配与步长分布原子蒸气散射光的分布：莱维飞行随机游走的应用。定量光谱学与辐射传输期刊，343:109481，2025年。[18] David G. Hummer。非相干散射：I. 多普勒展宽下的再分布函数。皇家天文学会月报，125 37，1962年07月 1 21( ): – 。[19] H. Domke 和 I. Hubeny。具有部分频率再分布的谱线偏振光散射：一般再分布矩阵。Astrophys. J.，334:527，1988年11月。[20] W.R. Hindmarsh 和 Judith M. Farr。中性原子引起的谱线碰撞展宽。量子电子学进展，2:141–214，1973年。[21] Nicole Allard 和 John Kielkopf。中性非共振碰撞对原子谱线的影响。Rev. Mod. Phys.，54:1103–1182，1982年10月。[22] 关于案例II和III分别趋于多普勒线型或沃伊特线型的评论，是对散射动力学的简化，旨在保留每种情况下的主要特征。关于系统尺寸和原子电子结构影响的更详细讨论可见 [17]。[23] A. Omont、E. W. Smith 和 J. Cooper。共振辐射的再分布。I. 碰撞的影响。Astrophys. J.，175:185，1972年7月。[24] H. A. Post。184.9 nm汞共振线处的辐射输运。I. 实验与理论。Phys. Rev. A，33:2003–2016，1986年3月。[25]F Vermeersch、V Fiermans、J Ongena、H A Post 和 W Wieme。具有部分频率再分布的共振辐射囚禁的蒙特卡洛研究。物理学杂志B：原子、分子与光学物理，21(10):1933–1937，1988年5月。[26] 理论曲线取决于吸收沃伊特线型参数 $a = (\Gamma_C + \Gamma_n)/\Gamma - D$，因而取决于原子数密度，因此每个数密度都应绘制不同的理论曲线。[27] 注意，对于 ℓ_0 的每个取值，式 8定义了不同的步长分布。因此，我们在一个小范围内改变 ℓ_0，以使步长分布近似保持不变。[28] H. M. Anderson、S. D. Bergeson、D. A. Doughty 和 J. E. Lawler。氩147 nm共振f值与囚禁衰变速率。Phys. Rev. A，51:211–217，1995年1月。[29] Jo˜ao Carlos de Aquino Carvalho 和 Thierry Passerat de Silans。光学厚铯蒸气的后向荧光：实验与蒙特卡洛模拟。定量光谱学与辐射传输期刊，260:107469，2021年。[30] S. V. Buldyrev、S. Havlin、A. Ya. Kazakov、M. G. E. da Luz、E. P. Raposo、H. E. Stanley 和 G. M. Viswanathan。在具有吸收边界的区间上莱维飞行与游走所花费的平均时间。Phys. Rev. E，64:041108，2001年9月。´Z.J. Jabbour、J. Sagle、R.K. Namiotka 和 J. Huennekens。铯共振线自展宽速率系数的测量。期刊

定量光谱学与辐射传输，54(5):767–778，1995年。[32] 孟腾飞、姬中华、赵延霆、肖连团和贾锁堂。气-固界面选择反射光谱的超精细偶极-偶极展宽。欧洲物理学快报，115(6):63001，2016年11月。

[33]Thierry Passerat de Silans。通过共振干涉测量测定碱金属蒸气的原子密度和碰撞展宽。物理学杂志B：原子、分子与光学物理，51(19)：195401，2018年9月。