arXiv:2603.08669v1 [math.AC] 9 Mar 2026

戴德金整环的一种奇特刻画

ROBERT SZAFARCZYK

Abstract. 我们通过模同态的一种性质，在不一定是诺特整环的整环中刻画戴德金环。我们的证明依赖于一个同调代数论证。

Contents

1. 引言 1
2. 刻画 2
3. 示例 8
参考文献 9

1. Introduction

在交换代数中，环的性质往往会蕴含模的性质。该领域最重要的结果之一——主理想整环上有限生成模的结构定理，便是一个例子。此外，若逆命题也成立，则会非常有用。然而，主理想整环并非如此，因为结构定理对一类更大的环也成立。Kaplansky 首先对这类环进行了研究 [Kap52] ，此后许多作者作出了贡献，最终 Brandal 和 Wiegand [BW78]给出了完整描述。Osofsky（例如 [Oso64]）、Van Huynh（例如 [Huy96]）和 Couchot（例如 [Cou06], [Cou07]）的研究中，还出现了以模的性质刻画各种环的其他结果。

本文给出了戴德金整环的模论刻画。

定理 1.1. 设 R 是一个整环。若一个 R-模态射 $f\colon M \to N$ 满足：对于每个 $m \in M$ ，都有 $f(m) = rn$，其中某个 $n \in N$满足，并且只要 $rm = 0$，就有 $f(m) = 0$，则称其被 $r \in R$ 表面可除。于是，下列陈述等价：

(1) 对于所有 $r \in R$和 $f\colon M \to N$，若 f被 r表面可除，则 $f = r \cdot g$属于 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$。(2) R 是一个戴德金整环。

我们的结果有一个令人惊讶之处：条件 (1) 迫使 R 成为诺特整环。若去掉整环假设，情况便不再如此。满足条件 (1) 的环的完整刻画见定理 2.4，示例见第 3 节。即使将条件 (1) 限定为仅适用于有限生成模，也不能推出 R 是诺特的。不过，在诺特整环中，这个较弱的条件仍能刻画戴德金环（见备注 2.13）。

我们证明 (2) $\implies$ (1) 的核心依赖于一种同调技巧，我们将在下面的命题中给出一个简化情形。

命题 1.2. 阿贝尔群的态射 $f\colon\ M \to N$ 能被素数 $p \in \mathbb{Z}$ 整除，当且仅当它被 p表面可除。

证明。 将 f 除以 p 等价于沿着 $N \xrightarrow{p} N$提升它。这个提升问题可以在导出范畴 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$中求解，在那里它等价于证明复合 $M \to N \to N \otimes^L_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ 为零。这是因为 $N \otimes^L_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ 与 $N \xrightarrow{p} N$的锥同构。根据伴随，只需证明$f \otimes^L_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$: $M \otimes^L_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \to N \otimes^L_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ 在 $\mathcal{D}(\mathbb{F}_p)$中为零。由于根据假设，这个映射在同调上为零，且 $\mathbb{F}_p$ 是一个域，它必定确实为零。□

在特殊情形下，例如当 M 有限生成时，上述陈述可以很容易地用初等方法证明。不过，我们不知道有任何不等价于上述论证、且能避开使用导出范畴的完整论证。

我们给出的证明可以解释为障碍理论。更准确地说，对于表面可除的映射 f，我们在 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{F}_p}(M/p,\ N[p])$ 中附加一个障碍类；当且仅当 f 可被 p整除时，该障碍类才消失。这并不令人意外，因为我们事先知道，f的约数集合是一个由 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}_p}(M/p,\ N[p])$ 作用的主齐性空间。

记号。 设 $x \in R$。我们用 $\mathrm{Ann}(x)$ 表示 $R \xrightarrow{x} R$的核。我们将$V(x)$记为扎里斯基谱 $\mathrm{Spec}\, R$ 中所有包含 x 的素理想构成的闭子集，并将其补集记为 $D(x)$。若 M 是一个 R-模，则用 $M[x]$ 表示它的 x-挠子模。

致谢。 作者感谢 Thomas Nikolaus 向他展示命题 1.2 的证明。对此进一步的思考促使作者开展了这个项目。作者还要感谢 Robert Burklund 提供的多次有益讨论，以及 Semen Slobodianiuk 对文章初稿提出的宝贵意见。作者的研究得到了丹麦国家研究基金会 CPH-GEOTOP- DNRF151 的资助。

2. The characterisation

定义 2.1。 设 R 为一个环， r 为 R中的一个元素，且 $f\colon M \to N$ 为 R-模的一个同态。若 $f(M[r]) = 0$ 且$f(M) \subset rN$，则称 f 表面可除 r 。若 f在 R-模 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 中可被 r整除，则称 f可被 r整除。

我们用 $\mathcal{S}^R_r$表示所有表面可被 r 整除的 R-模态射的集合，用 $\mathcal{P}^R_r$表示所有可被 r整除的态射的集合。我们有$\mathcal{P}^R_r \subset \mathcal{S}^R_r$。若记作 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$，则表示对每个 $r \in R$都有 $\mathcal{S}^R_r = \mathcal{P}^R_r$。

本节的目标是刻画满足 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$的环 R 。我们先给出一些观察。

注 2.2. 设 R 是一个满足 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$的环。那么，对于 R的任意商环或局部化 S ，$\mathcal{S}^S = \mathcal{P}^S$ 也成立。事实上，这是因为，除相差单位外， S 的所有元素都来自 R ，并且从 S-模到R-模的遗忘函子是全忠实的。

备注 2.3. 设 $(r,\ s) \in R\times S$。那么 $\mathcal{S}^{R\times S}{}_{(r,\ s)} = \mathcal{P}^{R\times S}{}_{(r,\ s)}$ 当且仅当 $\mathcal{S}^R_r = \mathcal{P}^R_r$和 $\mathcal{S}^S_s = \mathcal{P}^S_s$都成立。还要注意，只要 e 是单位或 $e=0$，$\mathcal{S}^R_e = \mathcal{P}^R_e$就总是成立，因此当 e 是幂等元时也成立。

以下是我们的主要定理。我们给出了代数刻画 (2) 和几何刻画 (3)。稍后我们将把结果特化到整环的情形，见推论 2.12。

回顾一下，主理想环是指所有理想都是主理想的环。根据[Hun68，定理 1]，，所有主理想环都是主理想整环的商环的有限积。

定理 2.4。对于环 R，以下陈述等价：

(1) $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$。(2) R 在任意素理想处的局部化都是主理想环，并且对于每个元素 $x\in R$，环 R 都可以写成乘积 $R_0\times R_1\times R_2$，其中

- $x = (0,\ x_1,\ x_2) \in R_0\times R_1\times R_2$。
- $x_1 \in R_1$ 是一个具有离散 $V(x_1)$ 的非零因子。
- R_2 是一个主理想环。

(3) R 在任意素理想处的局部化都是主理想环，$\operatorname{Spec} R$ 中的所有非约化点都是孤立的；并且，只要 $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} R$ 是子集 $S\subset \operatorname{Spec} R\backslash\{\mathfrak{p}\}$ 的一个聚点，且 $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$，那么 $\mathfrak{q}$ 也是 S 的聚点。

我们将证明分解为一系列引理。首先证明 (1) $\Longrightarrow$ (3)，然后证明 (3) $\Longrightarrow$ (2)，最后证明 (2) $\Longrightarrow$ (1)。

证明 (1) $\Longrightarrow$(3) 的关键步骤是在局部情形下进行证明。我们将在引理 2.6 中完成这一步。

记号。设 R是一个环。$R\{y_1, y_2 ...\}$ 表示由名为 $y_1, y_2, ...$ 的生成元生成的自由 R-模 $\bigoplus_{\mathbb{N}} R$。

给定元素序列 $x_1, x_2, ... \in R$以及一个 R-模 M，用 $M[\frac{1}{x_1x_2...}]$表示该图表的余极限

$$M \xrightarrow{x_1} M \xrightarrow{x_2} M \xrightarrow{x_3} ... .$$

也就是说，$M[\frac{1}{x_1x_2...}] = \{\frac{m}{x_1...x_n} :\ m\in M, n\geq 0\}/\sim$，其中 $\frac{m}{x_1...x_n}\sim\frac{m'}{x_1...x_k}$ 当且仅当存在 $t\geq \max(k,n)$，使得 $x_{n+1}...x_t\cdot m = x_{k+1}...x_t\cdot m'$ 属于 M。

引理 2.5。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个局部环，且设 $x\in\mathfrak{m}$。假设存在元素序列 $x_1, x_2, ... \in \mathfrak{m}$，使得乘积 $x_1...x_n$ 不属于 $(x, \operatorname{Ann}(x))$，对任意 n均如此。那么 $\mathcal{S}^R_x \neq \mathcal{P}^R_x$。

证明。我们可以考虑如下的 R-模态射

$$f : R\left[\tfrac{1}{x_1x_2...}\right] \longrightarrow \left(R\Big/\operatorname{Ann}(x)\left[\tfrac{1}{x_1x_2...}\right]\oplus R\{y_1, y_2, ...\}\right)\Big/\left\{xy_i - \tfrac{1}{x_1...x_i}\right\}_{i>0}$$

它由和到第一因子的典范投影给出。根据构造，它表面可除以 x。我们将证明 f 不能被 x 整除。

反设存在 g 使得 $f = x\cdot g$。我们可以写成

$$g(1) = \frac{r}{x_1...x_n} + r_1y_1 + r_2y_2 + ... + r_ny_n$$

其中 n 和 $r \in R/\mathrm{Ann}(x)$， $r_k \in R$。两边乘以 x ，得

$$1 = \frac{rx}{x_1...x_n} + \frac{r_1}{x_1} + \frac{r_2}{x_1x_2} + ... + \frac{r_n}{x_1...x_n}$$

在 $R/\mathrm{Ann}(x)[\frac{1}{x_1x_2...}]$ 中。这给出（在必要时增大 n 后）

$$(*) \qquad x_1...x_n = rx + r_1x_2...x_n + r_2x_3...x_n + ... + r_n$$

在 $R/\mathrm{Ann}(x)$ 中。

对于每个 $j > 0$，我们都有投影

$$\left(R\Big/_{\mathrm{Ann}(x)}\left[\tfrac{1}{x_1x_2...}\right] \oplus R\{y_1, y_2, ...\}\right)\Big/_{\left\{xy_i - \frac{1}{x_1...x_i}\right\}_{i>0}} \longrightarrow R\{y_j\}\Big/_x.$$

令 g_j 表示其与 g的复合。于是我们有

$$r_j = g_j(1) = x_1...x_{j+1} \cdot g_j\left(\frac{1}{x_1...x_{j+1}}\right)$$

在 R/x 中，因此我们得到 $r_j = s_jx_1...x_j$ 在 R/x 中，且 $s_j = x_{j+1} \cdot g(\frac{1}{x_1...x_{j+1}}) \in \mathfrak{m}$。结合（$*$），可得

$$(1 - s_1 - ... - s_n) \cdot x_1...x_n \in (x, \mathrm{Ann}(x)).$$

但（$1 - s_1 - ... - s_n$）是可逆的，因此 $x_1...x_n \in (x, \mathrm{Ann}(x))$与我们的假设矛盾。□

引理 2.6. 设$(R, \mathfrak{m})$ 为一个局部环，使得 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$。则 R 是一个主理想环。特别地，$\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$ 在 R中。

证明. 假设 R 既非零也不是域。我们将分三步证明该命题：

1. 我们证明 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$。2. 我们证明 $\mathfrak{m}$ 是主的。3. 我们证明$\bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n = 0$。

注意，由后两点可得 R 是主的。事实上，它们蕴含 R 的每个非零元都具有形式 ut^k ，其中 u 为单位，而 t为 $\mathfrak{m}$的一个生成元。

步骤 *1.* 反设 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$。我们首先证明存在非零的 $x \in \mathfrak{m}$ ，使得 $\mathfrak{m} \neq (x, \mathrm{Ann}(x))$。事实上，若 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ 且 $\mathfrak{m} = (x, \mathrm{Ann}(x))$，则 $x \in (x^2, \mathrm{Ann}(x))$，从而 $x^2 \in (x^3)$。由局部性，这蕴含 $x^2 = 0$ ，故 $x \in \mathrm{Ann}(x)$。但此时 $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(x)$。若这对所有 $x \in \mathfrak{m}$都成立，则我们会得到 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 = 0$，矛盾。因此，我们选取一个非零的 $x \in \mathfrak{m}$ ，使得 $\mathfrak{m} \neq (x, \mathrm{Ann}(x))$。

现在我们断言，存在一个序列 $x_1, x_2... \in \mathfrak{m}$ ，使得对于任意 n ，乘积 $x_1x_2...x_n$ 都不包含于 $(x,\mathrm{Ann}(x))$ 中。事实上，由于 $\mathfrak{m} \neq (x, \mathrm{Ann}(x))$，存在 $x_1' \in \mathfrak{m}\backslash(x,\mathrm{Ann}(x))$。利用 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$，我们将 x_1' 写成 $\mathfrak{m}$ 中元素的乘积之和。该和式中至少有一项仍不包含于 $(x,\mathrm{Ann}(x))$ 中，不妨设为 x_1x_2'。对 x_2' 等继续这一过程，我们便得到所需的序列。这与引理 2.5 矛盾，因此 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$。

步骤 *2.* 任取 $t \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$。我们将证明 $\mathfrak{m} = (t)$。对于任意 $y \in \mathfrak{m}\backslash(t)$，考虑这个 R-模映射

$$f : R/y \longrightarrow R/\mathfrak{m}^2$$

由乘以 t 给出。显然， f 的像中的每个元素都可被 t 整除。如果 $z \in R$ 属于 R/y 的 t-挠，则对于某个 $a \in R$，有 $zt = ay$ 。由于$y \notin (t)$，元素 a 不可能是可逆的，因此 $a \in \mathfrak{m}$ ，从而 $zt \in \mathfrak{m}^2$，于是 f

在 t-挠上也为零。因此， f表面可除以 t，所以根据假设， $f = t \cdot g$。我们有 $t \cdot g(1) = f(1) = t$在 $R/\mathfrak{m}^2$中。由于 $t \notin \mathfrak{m}^2$，这意味着 $g(1)$是可逆的，因此 $y \in \mathfrak{m}^2$，因为 $y \cdot g(1) = g(y) = 0$在 $R/\mathfrak{m}^2$中。因此，我们得到$\mathfrak{m}\backslash(t) \subset \mathfrak{m}^2$。现在，如果 $\mathfrak{m} \neq (t)$，则存在一个 $b \in \mathfrak{m}\backslash(t)$。但同样， $t - b \in \mathfrak{m}\backslash(t)$导致$t = b + (t - b) \in \mathfrak{m}^2$，矛盾。

步骤 *3.* 设 $I = \bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n$。回忆一下， $\mathfrak{m} = (t)$。我们先证明， I 的所有元素都是 t-幂挠元，也就是说，乘以 t的某个幂后即为零。任取 $w \in I$。考虑引理 2.5 中的常值序列 $t, t, t...$，可推出存在一个 k，使得 $t^k \in (w, \mathrm{Ann}(w))$。因此，对某个 $a \in R$，有 $t^k w = aw^2$。由此得到 $t^k w(1 - av) = 0$，其中 $v \in \mathfrak{m}$ 满足 $w = t^k v$。但 $1 - av$ 可逆，所以 $t^k w = 0$，如所求。

现在我们将证明 $I = 0$。如果 t 是幂零元，结论显然成立，因此假设它不是幂零元。考虑 R-模

$$M = \left\{(r_0, r_1, ...) : r_i \in R,\ \forall_k \exists_N \forall_{n>N}\, t^k | r_n\right\}$$

以及 R/I-模

$$N = \left\{(r_0, r_1, ...) : r_i \in R/I,\ \forall_k \exists_N \forall_{n>N}\, t^k | r_n\right\}.$$

存在一个满射 $M \twoheadrightarrow N$，它将每个 r_i 映到其模 I的类。现在，假设$I \neq 0$，从而存在一个非零的 $s \in I$，它是 t-挠的。用 s在 M 上作乘法，其像落在有限序列的子模中，因此诱导出一个 R-模映射

$$f : M \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} R.$$

它被 s表面可除，因此由假设得 $f = s \cdot g$。设 h 表示 g与投影$\bigoplus_{\mathbb{N}} R \to \bigoplus_{\mathbb{N}} R/I$的后复合。由于$\bigoplus_{\mathbb{N}} R/I$没有非零的无限 t-可除元，而 $M \twoheadrightarrow N$ 的核仅由这样的元素组成，我们得到 h 通过 N分解。注意到，因为 $f = s \cdot g$ 以及$\mathrm{Ann}(s) = (t)$，每当 N 的一个元素不是 t-可除时，它在 h下的像就是非零的。由于 N 的每个元素都可以被 t 的某个幂极大整除，且$\bigoplus_{\mathbb{N}} R/I$ 是 t-无挠的，这意味着 h：$N \to \bigoplus_{\mathbb{N}} R/I$ 是单射。但是，由于R/I 是主理想整环，这将意味着 N 作为 R/I-模是可数自由的，而事实并非如此。因此，我们必有 $I = 0$。□

处理完局部情形后，下一步是控制 Spec R 的几何结构。

引理 2.7。设 R 是一个满足 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$ 的环。设 $x \in R$，并设 $\mathfrak{p}$ 是 谱 R 中的一个点，其每个开邻域都包含某个 $\mathfrak{q}$，满足 $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$ 和 $x \in \mathfrak{q}$。则 x 在 $R_\mathfrak{p}$ 中为零。

证明。结合注 2.2 和引理 2.6，只需证明 $x \in \bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}^n$。假设对于某个 k，有 $x \in \mathfrak{p}^k$。设 I 是所有满足 $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$ 和$x \in \mathfrak{q}$的 $\mathfrak{q}$ 的交集。根据假设，我们有 $\mathfrak{p} \in V(I)$，因此 $I \subset \mathfrak{p}$。考虑 R-线性映射

$$f : R/\mathfrak{p}^{k+1} \longrightarrow R/I \cap \mathfrak{p}^{k+1}$$

由乘以 x给出。如果 $y \in R$ 属于源的 x-挠部分，那么$xy \in \mathfrak{p}^{k+1}$，因此也有 $xy \in I \cap \mathfrak{p}^{k+1}$，因为 $x \in I$。也就是说， f在 x-挠部分上消失。因此，它表面可除以 x，故根据假设， $f = x \cdot g$。由于 $g(\mathfrak{p}^{k+1}) = 0$，我们有$g(1) \cdot \mathfrak{p}^{k+1} \subset I \cap \mathfrak{p}^{k+1}$。因此， $g(1) \in I \subset \mathfrak{p}$，所以 $x \cdot g(1) \in I \cap \mathfrak{p}^{k+1}$。因此，由于$x = f(1) = x \cdot g(1) = 0$属于 $R/I \cap \mathfrak{p}^{k+1}$，我们得到 $x \in \mathfrak{p}^{k+1}$，所以确实有 $x \in \bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}^n$。□

引理 2.8。设 R 是一个满足 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$的环。设 $\mathfrak{p}$ 是谱 R中的一个非孤立点。那么 $R_{\mathfrak{p}}$ 是一个整环。

证明。当 $\mathfrak{p}$ 不是极大理想时，该断言由引理 2.6 得出。因此，假设 $\mathfrak{p}$ 是极大理想。设存在 $x,\ y \in R$，使得 $xy = 0$ 属于$R_{\mathfrak{p}}$。那么在 $\mathfrak{p}$的某个开邻域中也成立，但这意味着 x 或 y 满足引理 2.7 的条件，因此 $x = 0$ 或 $y = 0$ 属于 $R_{\mathfrak{p}}$。□

现在我们可以证明定理 2.4 中的前两个蕴含。

（*1*）的证明 $\implies$（*3*）（定理 *2.4*）。R 在素理想处的每个局部化都是主理想，这由引理 2.6 得出；而谱 R 中的所有非约化点都是孤立点，这由引理 2.8 得出。现在设给定 $\mathfrak{p}$、$\mathfrak{q}$，以及 $S \subset$ 谱 $R\backslash\{\mathfrak{p}\}$，使得 $\mathfrak{p}$ 是 S 和 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$的聚点。我们要证明 $\mathfrak{q}$ 是 S的聚点。反设并非如此。于是存在 $x \in R$，使得 $\mathfrak{q} \in D(x)$且 $S \subset V(x)$。由于 $\mathfrak{p}$ 不包含在来自 S的任何理想中，又因为根据引理 2.6，R 是一维的，因此由引理 2.7 可得 $x = 0$ 属于 $R_{\mathfrak{p}}$。但这样一来 $x \in \mathfrak{q}$，矛盾。□

（*3*）的证明 $\implies$（*2*）（定理 *2.4*）。设 $x \in R$。我们要证明由条件（2）得出的分解。考虑最大开子集 $U \subset \operatorname{Spec} R$，在该子集上 $x = 0$。等价地，它可以描述为满足 $x = 0$ 属于 $R_{\mathfrak{p}}$ 的那些 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$。注意，若 $\mathfrak{q}$ 是某个不包含 $\mathfrak{q}$ 的子集 $S \subset V(x)$ 的聚点，则 $\mathfrak{q} \in U$。事实上，根据假设，包含于 $\mathfrak{q}$ 的每个素理想也都是 S 的聚点。特别地，x 包含于 $R_{\mathfrak{q}}$ 的每个素理想中。但 $R_{\mathfrak{q}}$ 是约化的，因为非约化点都是孤立的。因此，$x = 0$ 属于 $R_{\mathfrak{q}}$。这一观察表明，U 既开又闭，并且 $V(x)\backslash U$ 有限且离散。因此，我们可以写成 $R = R_0 \times R'$，其中 $x = (0, x')$，且 $V(x')$ 是离散的（因其拟紧，所以必然有限）。

现在我们处理 R'。考虑 $V(x')$ 与非约化轨迹的交集。它是有限集，且只由孤立点组成，因此既开又闭。因此，我们可以写成 $R' = R_1 \times R_2$，其中 $x = (x_1, x_2)$，使得对于任意$\mathfrak{p}$，x_1 在 $(R_1)_{\mathfrak{p}}$ 中都不是幂零元；而 R_2 是主环的有限积，因此自身也是主环。局部主理想环中的非幂零元既不是零，也不是零因子。这意味着 x_1 是 R_1 中的非零因子，从而证明了我们的直和分解。□

要得到最后一个推论，我们需要一些技术引理。

引理 2.9。设 R 是一个环，$\mathfrak{p} \subset R$ 是一个有限生成极大理想，且 $R_{\mathfrak{p}}$ 是一个主理想环。那么，对于任意 $n \geq 1$，每个 R-模 M 都存在如下形式的直和分解

$$M \simeq (R/\mathfrak{p})^{\oplus I_1} \oplus (R/\mathfrak{p}^2)^{\oplus I_2} \oplus \ldots \oplus (R/\mathfrak{p}^{n-1})^{\oplus I_{n-1}} \oplus M'$$

其中 M'，且 $M'/\mathfrak{p}^n$ 是一个自由的 $R/\mathfrak{p}^n$-模。

证明。注意到 $R/\mathfrak{p}^m \simeq R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^m$，因此，由于 $R_{\mathfrak{p}}$ 是主的，$R/\mathfrak{p}^m$ 是自内射的（这可利用 Baer 判别法看出）。我们将通过归纳证明 $M \simeq (R/\mathfrak{p})^{\oplus I_1} \oplus \ldots \oplus (R/\mathfrak{p}^{m-1})^{\oplus I_{m-1}} \oplus M_{(m)}$，其中 $M^{(m)}$满足以下性质（$*_m$）：每当 $x \in M^{(m)}$满足 $\mathfrak{p}^{m-1}x = 0$时，便有 $x \in \mathfrak{p}M_{(m)}$。

在此之前，我们先指出，若 M 满足（$*_m$），则 $M/\mathfrak{p}^m$ 也满足。事实上，首先注意，若 M 满足（$*_m$），则 $M_{\mathfrak{p}}$ 也满足[1]。设 p 是一个生成元

[1]我们在此使用了 $\mathfrak{p}$ 的有限生成性。

$\mathfrak{p}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$中的生成元。于是，只需证明，若 $x \in M_{\mathfrak{p}}$ 满足 $p^{m-1}x = p^m y$，则$x \in pM_{\mathfrak{p}}$。这可由将（$*_m$）应用于 $x - py$得到。

情形 $m = 1$ 是平凡的。若 $M^{(m-1)}$ 满足 ($*_{m-1}$) 但不满足 ($*_m$)，则可找到一个单射 $R/\mathfrak{p}^{m-1} \hookrightarrow M^{(m-1)}$，使得复合映射 $R/\mathfrak{p}^{m-1} \to M_{(m-1)} \to M^{(m-1)}/\mathfrak{p}$非零。考虑复合映射 $R/\mathfrak{p}^{m-1} \to M_{(m-1)} \to M_{(m-1)}/\mathfrak{p}^{m-1}$。若它不是单射，那么根据 $M^{(m-1)}/\mathfrak{p}^{m-1}$的性质 ($*_{m-1}$)，可知复合映射 $R/\mathfrak{p}^{m-1} \to M_{(m-1)} \to M_{(m-1)}/\mathfrak{p}^{m-1} \to M^{(m-1)}/\mathfrak{p}$为零，这就矛盾了。因此，它是单射。于是根据 $R/\mathfrak{p}^{m-1}$的自内射性，它可分裂，我们可以重复这一过程，直到剩余的模满足 ($*_m$)。

还需证明：如果 M 是满足（$*_m$）的 $R/\mathfrak{p}^m$-模，那么它就是自由的。设 I 是向量空间 $M/\mathfrak{p}$的一组基。选取提升得到一个满射f：$\bigoplus_I R/\mathfrak{p}^m \to M$。我们将通过归纳证明，对于所有 $k \geq 1$，$f/\mathfrak{p}^k$都是单射。这就足够了，因为 $f/\mathfrak{p}^m = f$。情形 $k = 1$由构造可知成立。现在假设对于 $k \leq m$，$f/\mathfrak{p}^{k-1}$ 是单射，但存在 $a_i \in R/\mathfrak{p}^m$，它们由 I的一个有限子集标记，使得对于某个 $x \in M$，$\sum_i a_i f(1_i) = p^k x$。根据归纳假设，这意味着 $a_i \in \mathfrak{p}^{k-1}$，因此对于某个 b_i，有 $a_i = p^{k-1}b_i$。但这样一来，$\sum_i b_i f(1_i) - px$是p^{k-1}-挠的，所以根据性质（$*_m$），和式 $\sum_i b_i f(1_i)$可被 p整除，因此所有b_i 也都可被其整除。这意味着 $a_i \in \mathfrak{p}^k$，所以 $f/\mathfrak{p}^k$ 是单射，从而证明完成。□

在下一个引理中，我们用 Σ 表示同调移位 1。

引理 2.10. 设 R 是任意一个环。设 $g: A \to B$ 是导出范畴 $\mathcal{D}(R)$ 中的一个态射。假设 A 和 B 的同调集中在次数 $[0, 1]$。若 f 在同调上诱导零态射，则它可以分解为经过某个映射 $\mathrm{H}_0(A) \to \Sigma\mathrm{H}_1(B)$。

特别地，若 $\mathrm{H}_0(A)$ 是一个投射 R-模，则 g 为零。

证明。利用标准 t-结构，由于 $A \to \mathrm{H}_0(B)$ 为零，我们可以沿着 $\Sigma\mathrm{H}_1(B) \to B$ 提升 f。同理，由于 $\mathrm{H}_1(A) \to \mathrm{H}_1(B)$ 为零，$A \to \Sigma\mathrm{H}_1(B)$ 可以分解为经过 $\mathrm{H}_0(A)$。□

引理 2.11. 设 $x \in R$ 是一个非零因子，且设 $f : M \to N$ 是 R-模之间的映射。则 f 可被 x 整除，当且仅当 $f \otimes^L_R R/x$ 在 $\mathcal{D}(R/x)$ 中为零。

证明。由于 x 是非零因子，导出张量积 $N \otimes^L_R R/x$ 也可以等价地描述为 $\mathcal{D}(R)$ 中 $N \xrightarrow{x} N$ 的锥。因此，f 能被x 整除，当且仅当复合映射 $M \xrightarrow{f} N \to N \otimes^L_R R/x$ 为零。根据伴随关系，这等价于 $f \otimes^L_R R/x$ 在 $\mathcal{D}(R/x)$ 中为零。□

现在我们可以证明 (2) $\Longrightarrow$(1)，并完成定理 2.4 的证明。

对 *(2)* 的证明 $\Longrightarrow$*(1)*（定理 *2.4*）。设 $x \in R$。注意，在我们的直和分解中，R_2 是一个主环，因此是有限个主理想整环的有限积的商环。若将 R_2替换为这个积，那么在其中每个主理想整环里，x 要么为零，要么是非零因子。因此，利用注 2.2，我们可以将问题化归到 $R = R_0 \times R_1$ 的情形。根据备注 2.3，我们还可以假设 $R = R_1$。

现在，设 $f: M \to N$ 是一个表面可被x整除的 R-模映射。我们要证明它可被 x整除。如上所述，我们可以假设$R = R_1$，因此 x 是一个具有离散 $V(x)$ 的非零因子。在这种情况下，我们有$R/x \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in V(x)} R_{\mathfrak{p}}/x$。根据引理 2.11，$f$的除法和 $f \otimes_R (\prod_{\mathfrak{p} \in V(x)} R_{\mathfrak{p}})$的除法

被 x 整除都等价于 $f\otimes_R^L R/x$ 为零。因此，我们可以用 $\prod_{\mathfrak{p}\in V(x)} R_{\mathfrak{p}}$替换 R，因而也可以直接用 $R_{\mathfrak{p}}$替换；这同样由备注 2.3 得出。

由于现在 R 是主理想环，对某个 n 我们有$(x) = \mathfrak{p}^n$，并且可以像引理 2.9 中那样分解M。由于除最后一个因子外，其余因子都是 x-挠的，而表面可除映射在这些因子上必须为零，这就把我们归结到 M 且 M/x为投射的情形，该情形由引理 2.11 结合引理 2.10 得出。□

若进一步假设 R 是整环，我们可以得到更明确的结果。

推论 2.12. 对于整环 R，下列条件等价：

(1) $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$。(2) R 是戴德金整环。

证明. 若 R 是整环，则定理 2.4 的条件 (2) 等价于 R 为局部主理想整环，且对每个非零的 $x \in R$，$V(x)$有限。由 [Gil64 的定理 3], ，这等价于 R 是戴德金整环。□

备注 2.13。从引理 2.6 的证明可以看出，在诺特整环中，戴德金整环已经可以通过限制于有限生成模之间的映射的 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$ 来刻画。对于非诺特整环，例如 $R = k[\sqrt[2^\infty]{x}]$，可能对有限表示模有 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$，但一般情况下并非如此。

3. Examples

在这一简短的章节中，我们给出一些满足 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$ 的环 R 示例。推论 2.12 对整环的情形给出了明确答案，但定理 2.4 在一般情况下则不够具体。

我们先详细说明关于 Spec R 的几何结构所知的内容。根据定理 2.4 的条件 (3)，Spec R 的不可约分支有三种类型：约化点、非约化点和一维分支。

我们的第一个示例表明，对约化点没有任何限制。

例 3.1。设 R 是一个冯·诺伊曼正则环，也就是说，它是一个 0 维约化环。那么，它的所有元素在相差一个单位的意义下都是幂等元，因此 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$，由备注 2.3 可知。

然而，条件（3）对与非约化分支和一维分支相关的收敛施加了限制。我们将在下一个例子中说明，所有未被该条件排除的收敛情形确实都可能出现。

例 3.2。设 k 是一个域。考虑 R，即最终为常数的序列所构成的环.....

(1) 取值于 $k(x)$，其极限是一个多项式。(2) 取值于 $k[x]$，其极限是一个常数。(3) 取值于 $k[x]/x^n$，其极限是一个常数。(4) 取值于 $k(x)[y]$，其极限是 x 中的一个多项式和 y中的一个常数。(5) 取值于 $k(x)[y]/y^n$，其极限是 x 中的一个多项式和 y中的一个常数。

R 的谱看起来像.....

(1) 无穷多个约化点收敛到一条直线的泛点。(2) 无穷多条直线收敛到一个约化点。(3) 无穷多个非约化点收敛到一个约化点。(4) 无穷多条直线收敛到一条直线的泛点。

(5) 无穷多个非约化点收敛到一条直线的泛点。在所有情况下， R 都满足定理 2.4 的条件（3），因此 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$。

我们给出最后一个例子，说明上述某些收敛可以以非常混乱的方式发生。

例 3.3. 设 k 是一个无限域。令 $\mathcal{C}$ 表示康托集。对于每个点 $c \in \mathcal{C}$ ，我们固定一个定义在 $\mathcal{C}\backslash\{c\}$ 上、取值于 k 的局部常值函数 f_c ，使得每个水平集在 $\mathcal{C}$中既开又闭。由于 $\mathcal{C}$ 是全不连通的，这很容易做到。我们通过 $f_c(c) = 0$将 f_c 延拓到整个 $\mathcal{C}$ 上。注意，对于任意满足 $c_i \in \mathcal{C}\backslash\{c\}$ 的收敛序列$c_i \to c$ ，对于任意固定的 $\lambda \in k$，只有有限多个 c_i 满足 $f_c(c_i) = \lambda$ ；因此， f_c 在任何 c的开邻域上都不满足任何多项式方程。

接着，我们考虑由 $\mathcal{C}$ 上满足如下条件的函数构成的环 R ：在每个点$d \in \mathcal{C}$ 的某个邻域内，该函数都可以表示为关于 f_d的多项式。 $\mathcal{C}$ 上的局部常值函数环 S 嵌入 R。特别地， $f_c \in R$ ，因为它在 c之外是局部常值的。环映射 $S \to R$ 在由那些在某个 $e \in \mathcal{C}$ 处取值为零的局部常值函数组成的极大理想上的纤维同构于 $k[f_e]$。因此， R 的谱看起来像是由康托集参数化的无穷多条直线；每当 $\mathcal{C}$中存在一个非平凡的收敛序列 $x_i \to x$ 时， x_i 上方的直线便收敛到 x 上方直线的泛点（这是因为，对于每个$f \in k[f_x]$ ，都存在 x 的一个开邻域 U ，使得 f 限制在 $U\backslash\{x\}$上可逆）。因此， R 满足定理 2.4 的条件（3），故 $\mathcal{S}^R = \mathcal{P}^R$。

References

[BW78] Willy Brandal 和 Roger Wiegand。“所有有限生成模均可分解的约化环”。载于：*Comm. Algebra* 6.2（1978），第 195–201 页。ISSN：0092-7872,1532-4125。DOI：10.1080/00927877808822241。[Cou06] Fran¸cois Couchot。“RD-平坦性与 RD-内射性”。载于：*Comm. Algebra*34.10（2006），第 3675–3689 页。ISSN：0092-7872,1532-4125。DOI：10.1080/ 00927870600860817。[Cou07] F. Couchot。“赋值环上的平坦模”。载于：*J. Pure Appl. Alge-bra* 211.1（2007），第 235–247 页。ISSN：0022-4049,1873-1376。DOI：10.1016/ j.jpaa.2007.01.010。[Gil64] Robert W Gilmer。“近乎 Dedekind 的整环”。载于：*Proceedings of the American Mathematical Society* 15.5（1964），第 813–818 页。[Hun68] Thomas W. Hungerford。“关于主理想环的结构”。载于：*Pacific Journal of Mathematics* 25.3（1968），第 543–547 页。[Huy96] Dinh van Huynh。“用循环模刻画诺特环”。载于：*Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 39.2（1996），第 253–262 页。DOI：10.1017/S0013091500022987。[Kap52] Irving Kaplansky。“Dedekind 整环和赋值环上的模”。载于：*Trans. Amer. Math. Soc.*72（1952），第 327–340 页。ISSN：0002-9947,1088-6850。DOI：10.2307/1990759。[Oso64] B. L. Osofsky。“所有有限生成模均为内射模的环”。载于：*Pacific J. Math.* 14（1964），第 645–650 页。ISSN：0030-8730,1945-5844。URL：http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1103034192。