arXiv:2603.08689v1 [cond-mat.mes-hall] 9 Mar 2026

氮化硅膜谐振器中的非线性模态耦合

Soumya Kanti Das*, [1] Nishta Arora*†, [2] Hridhay A S, [1] Akshay Naik, [2] 以及 Chandan Samanta‡[1,1] *Department of Physics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal-462066, Madhya Pradesh, India*[2] *Centre for Nano Science and Engineering, Indian Institute of Science, Bengaluru-560012, Karnataka, India*

振动模态之间的非线性相互作用，对于理解纳米机械谐振器的动力学响应至关重要。本文报告了在高应力方形氮化硅薄膜谐振器中对非线性模态耦合的实验观测和理论建模。通过增大基模和高阶弯曲模态的振幅，我们量化了张力介导的几何非线性引起的基模频移。我们基于基尔霍夫–洛夫板理论建立了定量理论框架，该框架同时纳入本征杜芬非线性和非线性模间耦合，并且与 (1,1)-(2,1) 和 (1,1)-(2,2) 模式对的实验测量结果吻合良好。我们进一步计算了各模态族的非线性耦合矩阵，揭示了模态对称性和空间重叠在决定模间相互作用中的作用。这些结果表明，非线性模态耦合可作为多模频率调谐和机械转换的可控资源。

机械谐振器[1, 2]在基础研究和新兴技术中都发挥着重要作用。它们对外部刺激具有非凡的灵敏度，推动了众多研究领域的发展，包括力传感[3–5], 质谱法[6,7], 磁力测量[8–11], 加速度计[12, 13], 压力传感器[14–16], 磁共振成像[17–19], 以及扫描探针显微术[20, 21]。除了用于传感，机械谐振器还广泛应用于通信和信号处理[22–24]。它们是混合量子系统中的关键接口[25, 26], , 可将机械运动与光学[27, 28], 电学[29, 30], 和自旋[31–33] 自由度耦合。这些能力使机械谐振器成为连接经典物理学与量子物理学的统一平台[34–37], , 兼具技术应用价值与基础发现意义[38, 39]。

在各类机械谐振器中，高应力氮化硅（Si_3N_4）薄膜已成为一种领先的平台。通过器件几何结构和边界条件，可以精确设计其谐振频率、品质因数和机械模态形状。其极高的品质因数[40–45] 以及与芯片级集成的兼容性，使这类谐振器非常适用于精密传感，也适用于在室温和低温[46, 47]下探究机械动力学。因此，这类谐振器在探索光与物质相互作用[48,49], 、基态冷却[50], 、纠缠[51], 、光力学压缩[52], 、光学到微波光子转换器[53], 、量子存储器[54], 、引力波探测[55], 、暗物质探测器[56], 以及先进精密传感[57]方面正发挥着日益重要的作用。

大多数关于 Si_3N_4 膜谐振器的研究都聚焦于单个、相互孤立的振动模态 [58–60], 而实际的薄膜支持着密集的机械共振谱，这些共振之间的相互作用会显著影响器件动力学和性能。当振荡幅度足够大时，机械谐振器会进入由张力诱导的几何非线性所主导的非线性区，从而实现非线性模态耦合，引发依赖于振幅的频率调谐、正交模态之间的能量交换以及对机械响应的动态控制[61]。这些效应可实现多模态功能，包括混合共振[62, 63], 、增强的能量传递[64, 65], 、带宽拓宽[66], 以及可调谐的耗散途径 [67–69]。尽管具有重要意义，方形 Si_3N_4 薄膜中的非线性模态相互作用仍鲜有研究，然而，这些相互作用对于先进传感、信号处理以及经典–量子混合转换架构至关重要。

在本研究中，我们对高应力方形 Si_3N_4 薄膜谐振器中的非线性模内与模间耦合进行了实验和理论研究。通过驱动多个弯曲模态进入非线性区，我们观察到由模内耦合（本征杜芬非线性）和模间耦合共同引起的振幅依赖的频移。我们基于基尔霍夫–洛夫板理论建立了一个简洁而定量的理论框架，可准确捕捉这些效应。通过系统绘制不同模态族之间的耦合强度，我们计算了基模与高阶模态之间的耦合矩阵，揭示了模态重叠在非线性相互作用中的作用。此外，我们计算了通过激发正交模态对目标模态进行选择性频率调谐的效果，确立了非线性模态耦合作为实现多模态功能的有力资源，在高-

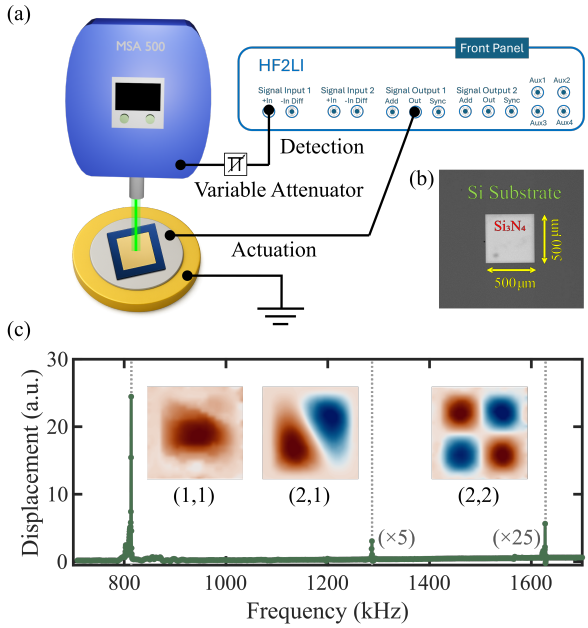

图 1. 器件的测量装置和振动模态。(a) 基于激光多普勒测振法（LDV）的测量装置示意图。采用 Polytec MSA-500 系统对 Si_3N_4 膜的面外运动进行光学探测，同时使用 Zurich instruments HF2LI 锁相放大器实现电驱动和信号检测。(b) 器件的光学显微图，显示悬置于硅基底上的 $500\,\mu$m × × $500\,\mu$m Si_3N_4 膜。(c) 随驱动频率变化的测得位移振幅谱，显示出多个机械共振。为便于观察，较高频率的振型分别按 $\times 5$ 和 $\times 25$ 倍进行缩放。插图显示了相应共振振型的空间振型。

应力 Si_3N_4 膜谐振器。

实验在一片来自 Norcada 的悬空氮化硅方形薄膜上进行，其边长（L）为 500 μm，厚度（h）为 100 nm，并夹持在厚度为 500 μm 的硅衬底上。氮化硅/硅衬底安装在压电致动器上，通过施加交流电压 $V(t) = V_0\cos(\omega t)$，可实现面外激励。我们使用激光多普勒测振仪（Polytec MSA 500）对薄膜的频率-振幅响应进行光学测量。所有测量均在高真空下进行，基底压力为 2×10^{-5} mbar，以尽量减小空气阻尼。图1(a) 展示了实验装置示意图，其中使用锁相放大器（Zurich Instruments HF2LI）同时驱动并检测薄膜的机械运动。图1(b) 和图1(c) 分别展示了薄膜的光学显微图，以及 700 至 1700 kHz 范围内测得的模态谱。在此频率范围内观察到三个振动模态；插图展示了测得的空间振型，模态根据沿两个面内方向的波腹数量标记为（n, m）膜的方向。

我们首先在较低驱动振幅下表征面外振动模态，此时模内耦合和模间耦合均可忽略。图2(b) 显示了 (1,1) 振动模态的线性频率响应，而 (2, 1) 和 (2,2) 振动模态的响应见图 S4。在此状态下，所有振动模态均呈现洛伦兹线型。测得的 (1, 1)、(2,1) 和 (2,2) 振动模态的共振频率分别为 814 kHz、1286 kHz 和 1628 kHz，对应品质因数分别为 5.2×10^4, 12.5×10^4 和 11.3×10^4。图 2(a) 显示了在逐渐增大的驱动振幅下测得的 (1,1) 振动模态的非线性频率响应，该响应源于本征杜芬非线性。

我们在基尔霍夫–洛夫板理论的框架内描述膜动力学[70]。横向位移 $w(x,\ y,\ t)$满足

$$D\nabla^4 w(x,y,t) - \left(N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + N_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

其中 D 为弯曲刚度，N_{xx}, N_{xy}, N_{yy} 为面内应力合力，ρ 为膜的质量密度，h 为厚度。在高应力薄膜近似[71] 下，面内应力分量可表示为

$$\begin{aligned} N_{xx} &= Eh\left(\epsilon_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right), \\ N_{yy} &= Eh\left(\epsilon_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right), \\ N_{xy} &= \frac{1}{2}Eh\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 E 为杨氏模量，ϵ_0 为膜的内建拉伸应变。横向位移表示为 $w(x,y,t) = \phi(x,y)\ z(t)$，其中$\phi(x,y)$ $=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)$为空间模态形状，$z(t)$为相应的面外位移。将振动模态展开代入方程(1)，并应用伽辽金离散化过程，随后计入线性阻尼（ν）和外部驱动力（$f_d\,cos(\omega_d t)$），即可得到Duffing运动方程

$$\ddot{z} + \omega_{nm}^2 z + \nu\dot{z} + \alpha_{nm}z^3 = f_d\,cos(\omega_d t), \tag{3}$$

一般振动模态（n, m）的线性共振频率 ω_{nm}和Duffing系数 α_{nm} 的表达式为

$$\omega_{nm}^2 = \frac{E\epsilon_0\pi^2(n^2+m^2)}{\rho L^2}, \tag{4}$$

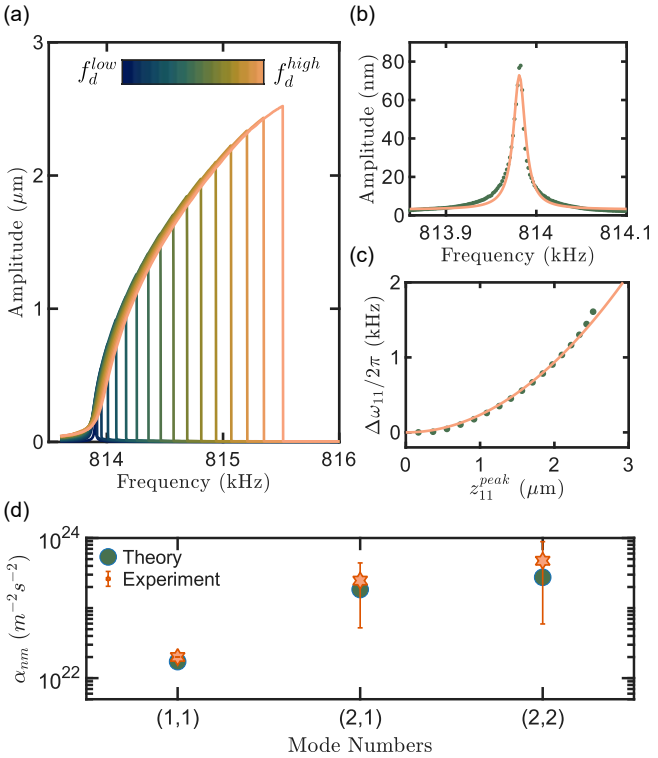

图 2. 模内耦合与杜芬常数。(a) 在逐渐增大的驱动强度下测得的 (1，1) 振动模态的非线性频率响应。(b) 在最低驱动振幅下测得的 (1，1) 振动模态的线性响应；实线表示用于提取共振频率和品质因数的洛伦兹拟合。(c) 与从 (a) 中提取的最大位移振幅对应的振幅依赖的频移。实线表示使用公式 (6) 进行的拟合，用于提取 Duffing系数。(d) 比较实验提取的杜芬系数与根据公式 (5) 计算得到的 (1，1)、(2，1) 和 (2，2) 振型的理论值。

$$\alpha_{nm} = \frac{3E}{32\rho}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left[n^4 + m^4 - \frac{2}{3}n^2m^2\right]. \qquad (5)$$

我们利用测得的基模（1，1）共振频率提取内建拉伸应变$\epsilon_0 = 3.7\times10^{-3}$，代入方程（4）。随后利用该数值估算高阶模态的理论共振频率，如图1（c）中的虚线所示，与实验观测到的高阶模态频率吻合良好。使用多重尺度法求解方程（3），可得共振频率随振幅变化的非线性偏移，

$$\omega_{nm}^{peak} = \omega_{nm} + \frac{3\alpha_{nm}}{8\omega_{nm}}(z^{peak})^2, \qquad (6)$$

其中，z^{peak} 表示（n，m）振动模态的最大位移振幅。测得的 z^{peak}数值绘制为峰值频率偏移的函数

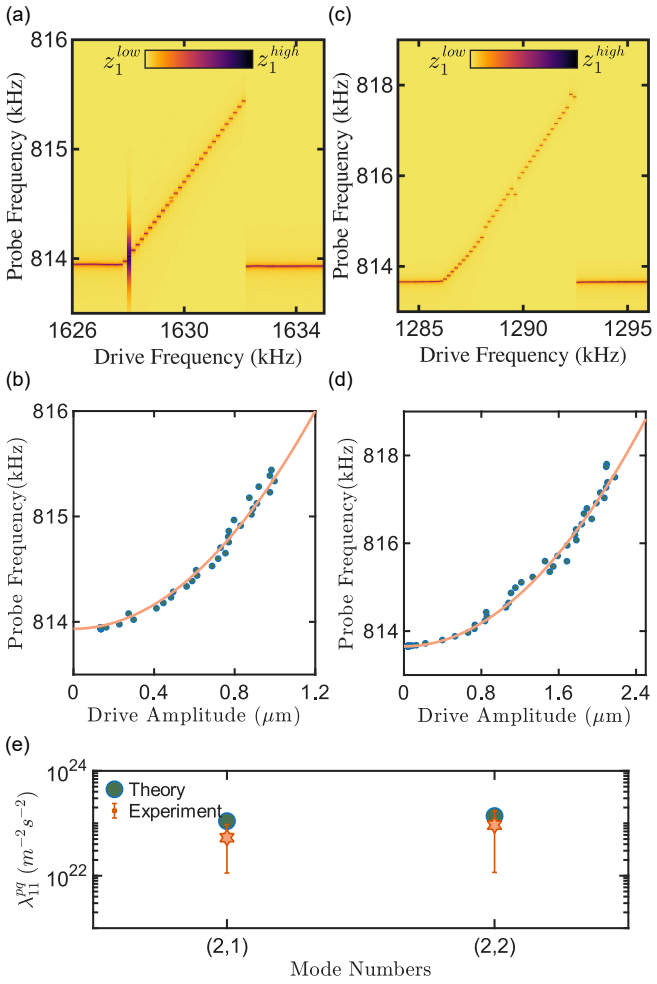

图 3. 非线性模间耦合。(a、c) 强烈激励 (2，2) 和 (2，1) 振型分别引起的基频 (1，1) 振动模态共振频率偏移现象。(b、d) 提取的 (1，1) 振动模态共振频率随受驱动的 (2，2) 和 (2，1) 振型位移振幅的变化。实线表示使用公式 (9) 对数据进行的拟合，用于提取非线性模间耦合常数。(e) 比较实验提取的耦合常数（星号）与根据公式 S40 计算得到的理论值（圆圈）。

（$\omega_{nm}^{peak} - \omega_{nm}$）对应图2（c）中的（1，1）振动模态。使用式（6）拟合数据，其中杜芬常数是唯一的自由参数。提取得到（1，1）、（2，1）和（2，2）振型的实验杜芬系数，分别为 $2\times10^{22}\ m^{-2}s^{-2}$，$2.5\times10^{23}\ m^{-2}s^{-2}$和 $4.7\times10^{23} m^{-2}s^{-2}$。图2（d）显示，实验获得的杜芬系数与根据式（5）计算的理论值吻合良好。（2，1）和（2，2）振型的相应分析见补充材料中的图 S4。

当高阶模态被驱动进入非线性区时，其大振幅振荡会改变膜的拉伸应力。这种位移相关张力对

其他振型产生有效的参量扰动，从而导致非线性模间耦合。因此，基模的共振频率会随受驱动高阶模态的振荡振幅而变化。为在实验中探测这一效应，我们在（2，1）和（2，2）模态的共振频率附近对其施加强驱动，同时使用弱探测音监测基模（1，1）的响应。图3（a）和3（c）以彩色图展示了基模响应随探测频率及施加于高阶模态的驱动频率的变化。观察到（1，1）模态出现明显的振幅依赖的频移，表明模间耦合导致了非线性频率牵引。图3（a）中驱动频率附近基模谱振幅的局部增强~ 1628 kHz 源于驱动信号的一个次谐波分量。图3（c）中则没有这一特征，因为此类谐波分量与基模不共振。

为了从理论上评估模间耦合常数，我们将面内应力分量修改为

$$N_{xx} = Eh\left[\epsilon_0 + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right\}\right],$$
$$N_{yy} = Eh\left[\epsilon_0 + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2\right\}\right], \quad (7)$$
$$N_{xy} = \frac{1}{2}Eh\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\right],$$

其中，$w_1 = sin(\frac{n\pi x}{L})\ sin(\frac{m\pi y}{L})\ z_1(t)$ 和 $w_2 = sin(\frac{p\pi x}{L})\ sin(\frac{q\pi y}{L})\ z_2(t)$ 分别表示探测模态和驱动模态的横向位移。将振型代入控制板方程，并应用伽辽金离散化方法，再加入线性阻尼（ν_1）和外部探测力（$f_p\,cos(\omega_p t)$）项，可得探测模运动方程：

$$\ddot{z_1} + \omega_{nm}^2 z_1 + \nu_1 \dot{z_1} + \alpha_{nm} z_1^3 + \lambda_{nm}^{pq} z_1 z_2^2 = f_p\,cos(\omega_p t), \quad (8)$$

其中，λ_{nm}^{pq} 表示驱动模态（p，q）与探测模态（n，m）之间的耦合常数。对方程（8）应用多重尺度法，可得模间耦合引起的基模有效共振频率：

$$\omega = \omega_{nm} + \frac{3\alpha_{nm}}{8\omega_{nm}}(z_1^{peak})^2 + \frac{\lambda_{nm}^{pq}}{2\omega_{nm}} z_2^2, \quad (9)$$

其中 z_2 是受驱高阶模态的振幅。实验测得的频移如图3(b) 和 3(d) 所示。使用公式 (9) 对数据进行拟合，其中 λ_{nm}^{pq} 是唯一的拟合参数。通过这些拟合，我们提取出模间耦合常数

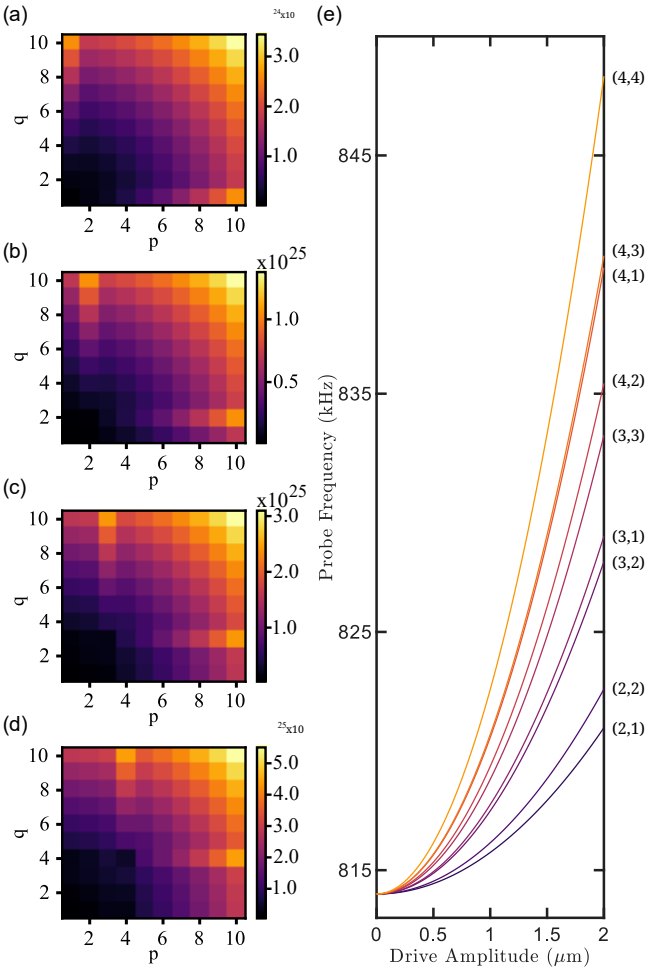

图 4. 非线性模态耦合矩阵的理论估算。(a–d) 计算得到的耦合常数随驱动模态指标（p，q）的变化，其中 p，q = 1–10，分别与探测模态 (1，1)、(2，2)、(3，3) 和 (4，4) 耦合。(e) 基模的预测频移随耦合模振幅的变化关系，使用表 I中列出的理论耦合常数计算。

对于 (1，1)–(2，1) 和 (1，1)–(2，2) 模式对，得到的数值分别为 $5.3 \times 10^{22}\ m^{-2}s^{-2}$和 $9.2 \times 10^{22}\ m^{-2}s^{-2}$。如图 3(e) 所示，提取出的耦合常数与根据公式 S40 得到的理论预测值吻合良好。在驱动振幅极高时，由于受驱模式中开始出现高阶非线性，模型不再适用；这些非线性会改变标准的杜芬响应[66, 72]。

利用基尔霍夫-洛夫板理论，我们进一步根据式 S40 计算基模与高阶模态之间的非线性耦合常数。首先考虑探测模态为 $n = m$的情况。图 4(a–d) 展示了驱动模态指标 (p, q) 从 1 变化到 10 时，耦合常数的变化情况；探测模态分别固定为 (1, 1)、(2,2)、(3, 3) 和 (4, 4)。对于满足 $p, q \neq n$ 的受驱模式，耦合常数λ_{nm}^{pq} 随着

表I. 此表展示了与（1,1）振动模态耦合的不同振型（振动模态编号为（p,q））的单位模态质量耦合常数数值。此处所有数值的量级均为 $10^{23}\,m^{-2}s^{-2}$。模内耦合常数（杜芬常数）以蓝色突出显示。

	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$
$p=1$	0.17	1.12	2.41	4.22
$p=2$	1.12	1.38	2.24	3.44
$p=3$	2.41	2.24	3.09	4.30
$p=4$	4.22	3.44	4.30	5.51

当另一个指标固定时，随 p 或 q 增大而增大。在特殊情况下，$p=n$ 或 $q=m$ 时，λ_{nm}^{pq} 会分别随 p 或 q 增大而急剧上升，这是由于模态重叠增强。当 $n=m=p=q$ 时，λ_{nm}^{pq} 化为模内耦合，且等于该振动模态的杜芬常数。对于满足 $n\neq m$ 的探测模态，对称性遭到破坏（见补充材料图 S1）。此时，当 $p=n$ 或 $q=m$ 时，λ_{nm}^{pq} 会急剧增大。当 $n<m$ 时，对于 $p=n$，耦合常数 λ_{nm}^{pq} 大于 $q=m$。反之，当 $m<n$ 时，对于 $q=m$，λ_{nm}^{pq} 大于 $p=n$。当 $p=n$ 且 $q=m$ 时，λ_{nm}^{pq} 又化为模内耦合常数。模式指标为 p、$q=1$–4 的计算耦合参数列于表I，并展示于图 4(a)。耦合矩阵关于模式指标呈现明显的对称性，并显示高阶模态的耦合强度系统性增强，正如上文所述。利用表I中的耦合参数，我们预测了基模频移随耦合模振幅的变化，如图 4(e) 所示。这些结果表明，非线性模间耦合是一种有效的频率调控机制。

总之，我们通过实验展示并定量建模了高应力氮化硅薄膜谐振器中的非线性模内与模间耦合，该耦合源于张力诱导的几何非线性。通过分别驱动选定的弯曲模态进入非线性区，我们直接测量了振幅依赖的频移，其来源既包括本征杜芬非线性，也包括正交模态之间的非线性耦合。基于 Kirchhoff–Love 板理论框架，我们推导出杜芬非线性系数和模间耦合系数的表达式，并展示了理论与多个模式对的实验测量结果定量吻合，包括 (1,1)-(2,1) 和 (1,1)-(2,2) 相互作用。除单个模式对外，我们还计算了跨模态族的完整非线性耦合矩阵，明确展示了模态对称性和空间重叠如何决定模间相互作用的大小和选择性。这些结果确立了 Si_3N_4 膜中的非线性模态耦合作为一种可预测、可控的机制，能够用于频率调谐和多模态转换。本文提出的框架为调控膜谐振器中的机械响应提供了直接途径，对多模态传感、机械介导的信号处理，以及需要精确控制模态相互作用的混合光机械与电机械系统具有直接意义[62, 73–75]。

[1] Adrian Bachtold、Joel Moser 和 MI Dykman。《纳米机械系统的介观物理学》。*Reviews of Modern Physics* 94 4 045005, 2022 , ( ): .[2]Bo Xu、Pengcheng Zhang、Jiankai Zhu、Zuheng Liu、Alexander Eichler、Xu-Qian Zheng、Jaesung Lee、Aneesh Dash、S wapnil More、Song Wu 等。《纳米机械谐振器：迈向原子尺度》。*Acs Nano*, 16 10 15545 15585, 2022 ( ): – .[3] HJ Mamin 和 D Rugar。《毫开尔文温度下的亚阿托牛顿力探测》。*Applied Physics Letters*, 79 20 3358 3360, 2001 ( ): – .[4] Emanuel Gavartin、Pierre Verlot 和 Tobias J Kippenberg。《用于超灵敏力测量的混合式片上光机械换能器》。*Nature nanotechnol-ogy*, 7(8):509–514, 2012.[5]SL De Bonis、C Urgell、W Yang、C Samanta、Adrien Noury、J Vergara-Cruz、Q Dong、Y Jin 和 Adrian Bachtold。《碳纳米管机械谐振器的超灵敏位移噪声测量》。*Nano letters*, 18 8 5324 5328, 2018 ( ): – .[6] Akshay K Naik、MS Hanay、WK Hiebert、XL Feng 和 Michael L Roukes。《迈向单分子纳米机械质谱法》。*Nature nanotechnology*, 4 7 445 450, 2009 ( ): – .[7] Sergio Dominguez-Medina、Shawn Fostner、Martial De-foort、Marc Sansa、Ann-Kathrin Stark、Mohammad Abdul Halim、Emeline Vernhes、Marc Gely、Guillaume Jourdan、Thomas Alava 等。《利用纳米机械谐振器对质量超过100兆道尔顿的病毒衣壳进行中性质谱分析》。*Science*, 362(6417):918–922, 2018.[8]S Forstner、S Prams、J Knittel、ED Van Ooijen、JD Swaim、GI Harris、A Szorkovszky、WP Bowen 和 H Rubinsztein-Dunlop。《腔光机械磁力计》。*Physical review letters*, 108(12):120801, 2012.[9] N Rossi、B Gross、Florian Dirnberger、Dominique Bougeard 和 M Poggio。《利用自组装纳米线进行磁力传感》。*Nano letters* 19 2 930 936, , ( ): – .[10] 2019 Makars ˇSiˇskins、Martin Lee、Samuel Maˆnas-Valero、Eugenio Coronado、Yaroslav M Blanter、Herre SJ van der Za nt 和 Peter G Steeneken。《利用纳米机械谐振器探测磁性和电子相变》。*Nature communications*, 11(1):2698, 2020.[11] SM Enamul Hoque Yousuf、Yunong Wang、Shreyas Ramachandran、John Koptur-Palenchar、Chiara Tarantini、Li Xiang、Stephen McGill、Dmitry Smirnov、Elton JG Santos、Philip X-L Feng 等。《二维反铁磁体中自旋织构动力学的机械共振传感》。*Advanced Materials*, page 2420168, 2025.[12]Alexander G Krause、Martin Winger、Tim D Blasius、Qiang Lin 和 Oskar Painter。《高分辨率微型芯片光力学加速度计》

Nature Photon-
。*ics* 6 11 768 772, 2012 , ( ): –
.[13]Nathaniel Bawden 、 Benjamin J Carey 、 Poh-Meng Yeo 、 Nishta Arora、Leo Sementilli、Victor M Valenzuela、Erick Romero、Glen I Harris、Margaret Wegener 和 Warwick P Bowen。《通过混合式测试质量块集成实现精密光力学加速度计》。 *Physical Review Ap-*
plied 24 6 064008, 2025 , ( ): .[14]

Christoph Reinhardt、Hossein Masalehdan、Sandy Croatto、Alexander Franke、Moritz BK Kunze、Jorn Schaffran、Nils S¨ ultmann、Axel Lindner 和 Roman Schnabel。《具有10个数量级测量范围的自校准气体压力传感器》。 *ACS photonics*, 11(4):1438–1446, 2024.[15] Olivia R Green、Yiliang Bao、John R Lawall、Jason J Gorman 和 Daniel S Barker。《利用系留光机系统实现准确、精密的压力传感》。 *Physical Review*
Applied 24 2 024069, 2025 , ( ): .[16]

Yanping Chen、Shen Liu、Guiqing Hong、Mengqiang Zou、Bonan Liu、Junxian Luo 和 Yiping Wang。《用于灵敏压力传感的纳米光机械谐振器》。 *ACS Applied Materials & Interfaces*, 14(34):39211–39219, 2022. [17] Martino Poggio 和 Christian L Degen。《力探测核磁共振：最新进展与未来挑战》。
Nanotechnology, 21(34):342001, 2010.[18] CL Degen、M Poggio、HJ Mamin、CT Rettner 和 D Rugar。《纳米尺度磁共振成像》。 *Proceedings*
of the National Academy of Sciences 106 5 1313 1317, , ( ): – .[19] 2009
Urs Grob、Marc-Dominik Krass、M H´eritier、Raphael Pachlatko、Jan Rhensius、Jan Kosata、BA Moores、H Takahashi、Alexander Eichler 和 Christian L Degen。《具有0.9纳米一维分辨率的磁共振力显微镜》。 *Nano letters*, 19 11 7935 7940, 2019 ( ): – .[20] Laure Mercier De L´epinay、Benjamin Pigeau、Benjamin Besga、Pascal Vincent、Philippe Poncharal 和 Olivier Arcizet。《用于成像
2 *Nature nan-* d力场的通
otechnology 12 2 156 162, 2017
用超灵敏矢量纳米机械传感器》。, ( ): – .[21] Nicola Rossi、Floris R Braakman、Davide Cadeddu、Denis Vasyukov、G¨ozde T¨ut¨ unc¨uoglu、Anna Fontcuberta i Morral 和 Martino Poggio。《利用纳米线传感器进行矢量扫描力显微镜测量》。 *Nature nanotech-*
nology 12 2 150 155, 2017 , ( ): – .[22]

I Mahboob、E Flurin、K Nishiguchi、A Fujiwara 和 H Yamaguchi。《单个机械谐振器中的无互连并行逻辑电路》。
Nature communications, 2 1( ):198, 2011.[23]Erick Romero、Nicolas P Mauranyapin、Timothy MF Hirsch、Rachpon Kalra、Christopher G Baker、Glen I Harris 和 Warwick P Bowen。《声驱动单频机械逻辑》。 *Physical Review Ap-*
plied 21 5 054029, 2024 , ( ): .[24]

Ce Zhang、Heng Lu、Chen Yang、YuBin Zhang、FengNan Chen、Ying Yan 和 Joel Moser。《由多频数字信号驱动的少层石墨烯纳米机械谐振器》。 *Nature Communications*, 2025.[25] Gershon Kurizki、Patrice Bertet、Yuimaru Kubo、Klaus Mølmer、David Petrosyan、Peter Rabl 和 J¨org Sch miedmayer。《混合系统中的量子技术》。
Proceedings of the National Academy of Sciences, 112(13):3866–3873
, 2015年。

[26] AA Clerk、KW Lehnert、P Bertet、JR Petta 和 Y Nakamura。采用电路量子电动力学的混合量子系统。 *Nature Physics*, 16(3):257–267, 2020.[27] Shabir Barzanjeh、André Xuereb、Simon Gröblacher、Mauro Paternostro、Cindy A Regal 和 Eva M Weig。面向量子技术的光力学。 *Nature*
Physics 18 1 15 24, 2022 , ( ): – . [28]

Yiwen Chu 和 Simon Gröblacher。混合量子光力学与电力学系统展望。*plied Physics Letters* 117 15 2020 *Ap-* , ( ), .

[29] A Naik、O Buu、MD LaHaye、AD Armour、AA Clerk、MP Blencowe 和 KC Schwab。利用量子反作用冷却纳米机械谐振器。 *Nature*, 443 7108 193 196, 2006 ( ): – .[30] Carlos Urgell、Wei Yang、Sergio Lucio De Bonis、Chandan Samanta、Maria José Esplandiu、Quan Dong、Yong Jin 和 Adrian Bachtold。纳米管机电谐振器中的冷却与自激振荡。 *Nature Physics*, 16 1 32( ): –37, 2020. [31] Daniel Rugar、Raffi Budakian、HJ Mamin 和 BW Chui。通过磁共振力显微镜探测单自旋。 *Nature*, 430(6997):329–332, 2004.[32] Rodrigo A Thomas、Michał Parniak、Christoffer Østfeldt、Christoffer B Møller、Christian Bærentsen、Yeghishe Tsaturyan、Albert Schliesser、Jürgen Appel、Emil Zeuthen 和 Eugene S Polzik。相距遥远的宏观机械与自旋系统之间的纠缠。*ture Physics* 17 2 228 233, 2021 *Na-* ,
( ): – .[33] Federico Fedele、Federico Cerisola、Lea Bresque、Florian Vigneau、Juliette Monsel、Jorge Tabanera-Bravo、Kushagra Aggarwal、Jonathan Dexter、Sofia Sevitz、Joe Dunlop 等。将单个自旋耦合到碳纳米管的运动。
Nature Communications, 2025年.[34] John D Teufel、Tobias Donner、Dale Li、Jennifer W Harlow、MS Allman、Katarina Cicak、Adam J Sirois、Jed D Whittaker、Konrad W Lehnert 和 Raymond W Simmonds。边带冷却微机械运动至量子基态。
Nature 475 7356 359 363, , ( ): – .[35] 2011
E Alex Wollack、Agnetta Y Cleland、Rachel G Gruenke、Zhaoyou Wang、Patricio Arrangoiz-Arriola 和 Amir H Safavi-Naeini。纠缠机械谐振器的量子态制备与层析。 *Nature*, 604 7906 463 467, 2022 ( ): – .[36] C Samanta、SL De Bonis、CB Møller、R Tormo-Queralt、W Yang、C Urgell、B Stamenic、B Thibeault、Y Jin、DA Czaplewski 等。趋近量子基态的非线性纳米机械谐振器。 *Nature*
Physics 19 9 1340 1344, 2023 , ( ): – .[37]

Yu Yang、Igor Kladarić、Maxwell Drimmer、Uwe von Lüpke、Daan Lenterman、Joost Bus、Stefano Marti、Matteo Fadel 和 Yiwen Chu。机械量子比特。 *Science*, 386 6723 783 788, 2024 ( ): – . [38] William M Campbell、Ben T McAllister、Maxim Goryachev、Eugene N Ivanov 和 Michael E Tobar。通过光子、原子和机械振荡器与基本常数的耦合搜寻标量暗物质。
Physical review letters, 126(7):071301, 2021.[39] J Manley、CA Condos、S Schlamminger、JR Pratt、DJ Wilson 和 WA Terrano。用于短程引力实验的微尺度扭转谐振器。 *Physical Re-*
view D 110 12 122005, 2024 , ( ): .[40]

Yeghishe Tsaturyan、Andreas Barg、Eugene S Polzik 和 Albert Schliesser。通过软夹持和耗散稀释实现超高相干纳米机械谐振器

Nature 。*nanotechnology* 12 8 776 783, 2017

Mingyun Yuan、Martijn A Cohen 和 Gary A Steele。毫开尔文温度下品质因数超过

108 *Applied* 的氮化硅 *Physics Letters* 107 26 2015 薄膜谐振器。 , ( ), .[42] S Chakram、YS Patil、L Chang 和 M Vengalattore。超高品质因数氮化硅薄膜谐振器中的耗散。 *Physical review letters*, 112(12):127201, 2014.[43] Xingchen Ji、Samantha Roberts、Mateus Corato-Zanarella 和 Michal Lipson。实现超高品质因数氮化硅谐振器的方法。 *APL Photonics* 6 7 2021 , ( ), .[44]

Nils Johan Engelsen、Alberto Beccari 和 Tobias Jan Kippenberg。利用耗散稀释实现超高品质因数微纳机械谐振器。 *Nature Nanotechnology* 19 6 725 737, 2024 , ( ): – .

[45] Xiang Xi、Ilia Chernobrovkin、Jan Ko˘sata、Mads B Kristensen、Eric Langman、Anders S Sørensen、Oded Zilberberg 和 Albert Schliesser。用于声子的软钳位拓扑波导。 *Nature*, pages 1–7, 2025年。[46] TP Purdy、RW Peterson、PL Yu 和 CA Regal。低温下基于氮化硅薄膜的腔光力学。 *New Journal of Physics*, 14(11):115021, 2012.[47] Thomas Gisler、Mohamed Helal、Deividas Sabonis、Urs Grob、Martin Héritier、Christian L Degen、Amir H Ghadimi 和 Alexander Eichler。毫开尔文温度下的软夹持氮化硅弦谐振器。 *Physical Review Letters* 129 10 104301, 2022 , ( ): .[48]

JD Thompson、BM Zwickl、AM Jayich、Florian Marquardt、SM Girvin 和 JGE Harris。高精细度腔与微机械薄膜之间的强色散耦合。 *Nature*, 452(7183):72–75, 2008. [49] Tom P Purdy、Robert W Peterson 和 CA Regal。观测宏观物体上的辐射压散粒噪声。 *Science*, 339(6121):801–804, 2013.[50]Massimiliano Rossi、David Mason、Junxin Chen、Yeghishe Tsaturyan 和 Albert Schliesser。基于测量的机械运动量子控制。 *Nature*, 563(7729):53–58, 2018.[51] Junxin Chen、Massimiliano Rossi、David Mason 和 Albert Schliesser。通过机械界面实现传播光学模式之间的纠缠。 *Nature communica-tions*, 11(1):943, 2020.[52] Thomas P Purdy、P-L Yu、Robert W Peterson、Nir S Kampel 和 Cindy A Regal。光的强光力学压缩。 *Physical Review X*, 3(3):031012, 2013.[53]Reed W Andrews、Robert W Peterson、Tom P Purdy、Katarina Cicak、Raymond W Simmonds、Cindy A Regal 和 Konrad W Lehnert。微波与光之间的双向高效转换。 *Nature physics* 10 4 321 326, 2014 , ( ): – .

[54] Mads Bjerregaard Kristensen、Nenad Kralj、Eric C Langman 和 Albert Schliesser。长寿命、高效率的光力学光存储器。 *Physical Review Letters*, 132 10( ):100802, 2024. [55] Mario F Gely 和 Gary A Steele。利用超导电力学在大质量叠加态中检验广义相对论的迪奥西–彭罗斯效应。 *AVS Quantum Science* 3 3 2021 , ( ), .[56]

Jack Manley、Mitul Dey Chowdhury、Daniel Grin、Swati Singh 和 Dalziel J Wilson。利用光力学加速度计搜寻矢量暗物质。 *Physicalreview letters* ，126(6):061301 ，2021。

[57] David Mason、Junxin Chen、Massimiliano Rossi、Yeghishe Tsaturyan 和 Albert Schliesser。低于标准量子极限的连续力与位移测量。 *Nature Physics*, 15(8):745–749, 2019。[58] Johannes M Fink、Mahmoud Kalaee、Alessandro Pitanti、Richard Norte、Lukas Heinzle、Marcelo Davan,co、Kartik Srinivasan 和 Oskar Painter。氮化硅纳米膜上的量子机电学。 *Nature communi-cations*, 7(1):12396, 2016。[59] Nikaya Snell、Chang Zhang、Gengyang Mu、Alexandre Bouchard 和 Raphael St-Gelais。氮化硅鼓形谐振器中的热传输及其对热涨落诱导的频率噪声的影响。 *plied* 17 4 044019, 2022 *Physical Review Ap-* , （）： 。[60]Fan Yang、Felix Rochau、Jana S Huber、Alexandre Brieussel、Gianluca Rastelli、Eva M Weig 和 Elke Scheer。膜谐振器非线性弯曲振动的空间调制。 *Physical review letters*, 122 15( ):154301, 2019。[61] Keivan Asadi、Jun Yu 和 Hanna Cho。微纳机械谐振器中的非线性耦合与能量传递：模间耦合、内共振和同步。 *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences* 376 2127 20170141, 2018 , , （）： 。[62] Luis Mestre 、 Suyash Singh 、 Gabriel Margiani 、 Letizia Catalini、Alexander Eichler 和 Vincent Dumont。参数驱动氮化硅机械膜的网络。 *Physical Review Applied* 24 4 044072, 2025 , （）： 。[63] Parmeshwar Prasad、Nishta Arora 和 AK Naik。振动模态之间的栅极可调协同性。 *Nano Letters* 19 9 5862 5867, 2019 , （）： –。

[64] Zichao Li、Minxing Xu、Richard A Norte、Alejandro M Arag ˜A`gn、Peter G Steeneken 和 Farbod Alijani。具有软夹持的纳米机械谐振器中的模态相互作用级联。 *arXiv preprint arXiv:2507.00805*, 2025年。[65] Nishta Arora 和 Akshay K Naik。内共振对二维谐振器动力学的定性影响。 *Journal of Physics D: Applied Physics*, 55 26 265301, 2022 （）： 。[66] Nishta Arora、Priyanka Singh、Randhir Kumar、Rudra Pratap 和 Akshay Naik。压电膜中的混合非线性响应与非线性转变。*ACS Applied Electronic Materials*, 6(1):155–162, 2024。[67]Johannes G¨uttinger、Adrien Noury、Peter Weber、Axel Martin Eriksson、Camille Lagoin、Joel Moser、Christopher Eichler、Andreas Wallraff、Andreas Isacsson 和 Adrian Bachtold。纳米机械谐振器中耗散的能量依赖路径。 *Nature nanotechnol-ogy*, 12(7):631–636, 2017。[68]Ata Ke, skekler、Oriel Shoshani、Martin Lee、Herre SJ van der Zant、Peter G Steeneken 和 Farbod Alijani。通过参数—直接内共振调节石墨烯纳米谐振器中的非线性阻尼。 *Nature communications* 12 1 , （）： 1099，2021。[69] Parmeshwar Prasad、Nishta Arora 和 AK Naik。mos 2 *Applied Physics Letters* 123 26 2023 纳米谐振器中的可调非线性阻尼。, （）, 。[70] Arthur W Leissa。 *Vibration of plates*，第160卷。美国国家航空航天局科学技术信息部，1969年。

[71]Gregory William Vogl。电载荷作用下圆板的非线性动力学：用于电容式微机械超声换能器（CMUT）。2006年。[72] Chandan Samanta、Nishta Arora 和 AK Naik。超薄纳米机电系统中几何非线性的调控。 *Applied Physics Letters*，113(11)，2018年。[73] William Hvidtfelt Padkær Nielsen、Yeghishe Tsaturyan、Christoffer Bo Møller、Eugene S Polzik 和 Albert Schliesser。量子态下的多模光机械系统。 *Proceedings of the National Academy of Sciences* 114 1 62 66, 2017 ， （）：–。

[74] Chao Meng、George A Brawley、Soroush Khademi、Elizabeth M Bridge、James S Bennett 和 Warwick P Bowen。基于测量的多模机械态制备。 *Science Advances*，8(21):eabm7585，2022年。[75] Han Zhao、William David Chen、Abhishek Kejriwal 和 Mohammad Mirhosseini。通过硅纳米机械学实现量子增强的微波到光学转换。 *Nature Nanotechnology* 1 7, 2025 ，页码–。

* 这些作者对本研究做出了同等贡献。

† 通讯作者：nishta@iisc.ac.in

‡ 通讯作者：csamanta@iiserb.ac.in

致谢

A.N.感谢人力资源开发部、电子和信息技术部以及DST纳米任务通过NNetRA提供的资助支持。N.A.感谢印度电子和信息技术部（MeitY）Visvesvaraya博士计划提供的奖学金支持。C.S.感谢印度Anusandhan国家研究基金会（ANRF）在项目编号ANRF/ECRG/2024/006637/PMS下提供的经费支持。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

补充信息

氮化硅膜谐振器中的非线性模态耦合

Soumya Kanti Das,[1,*] Nishta Arora,[2,*] Hridhay A S,[1] Akshay Naik,[2] Chandan Samanta[1]
印度科学教育与研究学院博帕尔分校物理系，印度中央邦博帕尔 462066[2]印度科学学院纳米科学与工程中心，印度卡纳塔克邦班加罗尔 560012

目录

1 理论描述 **1**
1.1 杜芬非线性.1 1.2 非线性模态耦合.4 1.3 非线性频率牵引.6

2 实验部分 **7**
2.1 器件参数.7 2.2 位移校准.8 2.3 模态频率响应 (2,1) 和 (2, 2).8

1 理论描述

我们采用基尔霍夫–洛夫板理论，对方形氮化硅（Si_3N_4）膜谐振器的非线性模态耦合行为进行建模。我们首先分析谐振器的模内耦合（本征杜芬非线性），然后引入模间耦合项，以建立通用耦合框架。文中推导了杜芬常数，以及探测模态（n, m）与驱动模态（p, q）之间耦合常数的一般表达式。理论结果与实验观测吻合良好。

1.1 杜芬非线性

利用基尔霍夫-洛夫板理论[1], ，表征薄板横向位移 $w(x, y, t)$的一般方程可写为

$$D\nabla^4 w(x,y,t) - \left(N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{S1}$$

其中， $w(x, y, t) = \phi(x, y)\ z(t) = sin(\frac{n\pi x}{L})\ sin(\frac{m\pi y}{L})\ z(t)$，D 为弯曲刚度， N_{xx}、 N_{yy} 和 N_{xy} 为面内应力合力，其定义为

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}\, dz, \tag{S2}$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}\, dz, \tag{S3}$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}\, dz, \tag{S4}$$

这里， σ_{xx}、 σ_{yy} 和 σ_{xy} 定义为

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}), \tag{S5}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}), \tag{S6}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{xy}. \tag{S7}$$

由于我们的膜很薄，我们假设泊松比（ν）为零。在存在非线性位移时，尤其是由几何非线性引起的情况下，应变分量定义为 [2]

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{S8}$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{S9}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - z(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{S10}$$

对于薄膜，我们假设面内中面位移很小，即u_0， $v_0 = 0$，并且由横向变形引起的面内位移可以忽略不计。在这些假设下，应力合力简化为

$$N_{xx} = Eh\left(\epsilon_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right), \tag{S11}$$

$$N_{yy} = Eh\left(\epsilon_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right), \tag{S12}$$

$$N_{xy} = \frac{1}{2}Eh\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{S13}$$

代入控制方程（S1），并采用伽辽金法，将 $w(x,\ y,\ t) = sin(\frac{n\pi x}{L})\ sin(\frac{m\pi y}{L})\ z(t)$，同时在高应力情形 [3]下忽略 D，可得

$$\begin{aligned} &-\int_0^L \int_0^L \left(N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\phi(x,y)\, dx\, dy \\ &+ \rho h \int_0^L \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\phi(x,y)\, dx\, dy = 0 \end{aligned} \tag{S14}$$

N_{xx}、 N_{yy}和 N_{xy} 的表达式为

$$N_{xx} = Eh\left[\epsilon_0 + \frac{1}{2}z^2(t)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \times \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right], \tag{S15}$$

$$N_{yy} = Eh\left[\epsilon_0 + \frac{1}{2}z^2(t)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \times \cos^2\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\right], \tag{S16}$$

$$N_{xy} = \frac{1}{2}Ehz^2(t)\left(\frac{n\pi}{L}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right). \tag{S17}$$

代入方程（S14）后，我们可以求出这些积分

$$K_1 = \int_0^L \int_0^L N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\phi(x,y)\,dxdy \tag{S18}$$

$$K_2 = \int_0^L \int_0^L N_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,\phi(x,y)\,dxdy \tag{S19}$$

$$K_3 = \int_0^L \int_0^L 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,\phi(x,y)\,dxdy \tag{S20}$$

通过求解该积分并将这些数值代入方程（S14），我们推导出了该方程

$$\rho h\frac{L^2}{4}\frac{d^2z}{dt^2} + Eh\epsilon_0\frac{L^2}{4}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2(n^2+m^2)z(t) + \frac{3}{2}Eh\frac{L^2}{64}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left[n^4+m^4-\frac{2}{3}n^2m^2\right]z^3(t) = 0 \tag{S21}$$

由此我们可以得到,

$$\omega_{nm}^2 = \frac{E\epsilon_0\pi^2(n^2+m^2)}{\rho L^2} \tag{S22}$$

And,

$$\alpha_{nm} = \frac{3E}{32\rho}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left[n^4+m^4-\frac{2}{3}n^2m^2\right] \tag{S23}$$

为确定共振频率和杜芬非线性，我们采用了方程（S21）；然而，通常还会存在阻尼分量和驱动力项。为分析非线性响应，必须纳入驱动力项，如文中所述。同时包含驱动力和阻尼项的运动方程可表示为

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \nu\frac{dz}{dt} + \omega_{nm}^2 z + \alpha_{nm}z^3 = f_d\cos(\omega t) \tag{S24}$$

此处， ν 表示阻尼因子，而 $f_d\cos(\omega t)$ 表示驱动力。根据驱动力幅值 f_d，驱动力分为高和低两种。

1.2 非线性模态耦合

我们此前尚未考察过模态耦合项。可以调节面内张力以实现模态耦合。考虑非线性模态耦合时， ϵ_{xx}, ϵ_{yy}, ϵ_{xy} 的数值将为

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right] - z_1(t)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \tag{S25}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2\right] - z_1(t)\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \tag{S26}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\right] - z_1(t)\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} \tag{S27}$$

此处， $w_1 = \phi_1(x,y)z_1(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)z_1(t)$, 其中 (n,m) 表示探测模态的模态编号，而 $w_2 = \phi_2(x,y)z_2(t) = \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right)z_2(t)$, 其中 (p,q) 表示与泵浦模态对应的模态编号。我们再次可以应用上述薄膜近似。面内应力合力现在可以表示为

$$N_{xx} = Eh\left[\epsilon_0 + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2\right\}\right] \tag{S28}$$

$$N_{yy} = Eh\left[\epsilon_0 + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2\right\}\right] \tag{S29}$$

$$N_{xy} = \frac{1}{2}Eh\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\right] \tag{S30}$$

各项 N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} 对模态耦合因子的贡献如下

$$N_{xx,\lambda} = \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \tag{S31}$$

$$N_{yy,\lambda} = \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2 \tag{S32}$$

$$N_{xy,\lambda} = \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right) \tag{S33}$$

代入 w_2 的数值得

$$N_{xx,\lambda} = \frac{Eh}{2}\left[\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 cos^2\left(\frac{p\pi x}{L}\right) sin^2\left(\frac{q\pi y}{L}\right)\right] \tag{S34}$$

$$N_{yy,\lambda} = \frac{Eh}{2}\left[\left(\frac{q\pi}{L}\right)^2 sin^2\left(\frac{p\pi x}{L}\right) cos^2\left(\frac{q\pi y}{L}\right)\right] \tag{S35}$$

$$N_{xy,\lambda} = \frac{1}{2}Eh\left[\left(\frac{p\pi}{L}\right) cos\left(\frac{p\pi x}{L}\right) sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right)\left(\frac{q\pi}{L}\right) sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{q\pi y}{L}\right)\right] \tag{S36}$$

要计算耦合常数，需要求解这些积分

$$\int_0^L \int_0^L N_{xx.\lambda} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \ \phi_1(x,y)\, dxdy \tag{S37}$$

$$\int_0^L \int_0^L N_{yy.\lambda} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \ \phi_1(x,y)\, dxdy \tag{S38}$$

$$\int_0^L \int_0^L 2N_{xy.\lambda} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \ \phi_1(x,y)\, dxdy \tag{S39}$$

耦合常数的表达式为

$$\lambda_{nm}^{pq} = \frac{-\int_0^L \int_0^L \left(N_{xx,\lambda} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \ \phi_1(x,y) \ + \ N_{yy,\lambda} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \ \phi_1(x,y) \ + \ 2N_{xy,\lambda} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \ \phi_1(x,y) \right) dxdy}{\rho h \left(\frac{L^2}{4} \right)} \tag{S40}$$

分母来自式 (S21)。考虑振动模态编号（p, q），其中 $p = q > 1$，当其与振动模态 (1,1) 耦合时，耦合常数的表达式可定义为

$$\lambda_{11}^{pq} = \frac{E}{8\rho} (\frac{\pi}{L})^4 [p^2 + q^2] \tag{S41}$$

我们推导出了一个与式 (S24) 类似、包含模态耦合项的方程。该方程可表示为

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \nu_1 \frac{dz_1}{dt} + \omega_{nm}^2 z_1 + \alpha_{nm} z_1^3 + \lambda_{nm}^{pq} z_1 z_2^2 = f_p \cos(\omega t) \tag{S42}$$

该方程描述的是探测模态与驱动模态之间的模态耦合：探测模态沿 z 轴（z_1）发生位移，而驱动模态的位移为 z_2。 ν_1、 ω_{nm}、 α_{nm} 和 λ_{nm}^{pq} 分别表示探测模态的阻尼常数、固有频率和杜芬常数； λ_{nm}^{pq} 是探测模态（n, m）与驱动模态（p, q）之间的耦合常数。我们使用方程 (S40) 数值求得了耦合常数。当 $p = n$ 和 $q = m$ 时，耦合常数 λ_{pq}^{nm} 简化为 α_{nm}，对应于模内耦合，其本质上就是杜芬常数。

表 1：振动模态（p, q）的单位模态质量耦合常数，其中 p, q 从 1 到 5 变化，并与（2,2）振动模态耦合。耦合常数的值约为 $10^{23}\ m^{-2}s^{-2}$。模内耦合常数（杜芬常数）以蓝色突出显示。

	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$
$p=1$	1.38	2.41	6.88	11.70	17.89
$p=2$	2.41	2.75	10.67	17.89	27.19
$p=3$	6.88	10.67	12.39	17.21	23.40
$p=4$	11.70	17.89	17.21	22.03	28.22
$p=5$	17.89	27.19	23.40	28.22	34.42

表2：与(3,3)振动模态耦合的振动模态（p, q）的单位模态质量耦合常数，其中 p, q 从1到5。耦合常数的量级为$10^{23}\ m^{-2}s^{-2}$。模内耦合常数（Duffing常数）以蓝色标出。

	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$
$p=1$	3.09	7.74	9.29	26.33	40.27
$p=2$	7.74	12.39	16.26	30.97	44.91
$p=3$	9.29	16.26	13.93	44.14	65.05
$p=4$	26.33	30.97	44.14	53.60	63.50
$p=5$	40.27	44.91	65.05	63.60	77.44

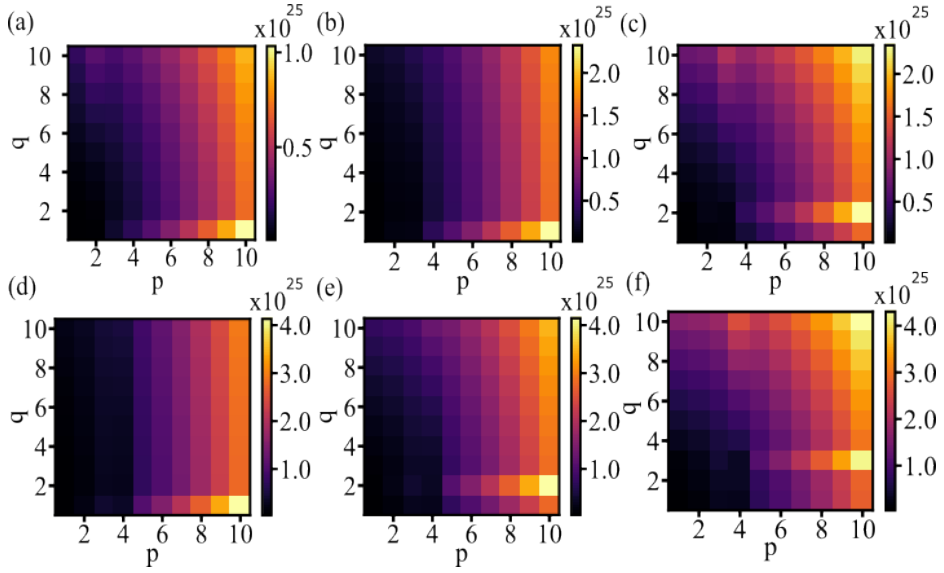

图 S1：非线性模态耦合矩阵的理论估算。(a–f) 对于 p，$q = 1$–10，驱动模态指标 (p，q) 所对应的耦合常数的计算值，它们分别与探测模态 (2，1)、(3，1)、(3，2)、(4，1)、(4，2) 和 (4，3) 耦合。

1.3 非线性频率牵引

模态耦合的频率失谐方程采用多重尺度法[4]推导。该方法对时间尺度作如下改变

$$T_n = \epsilon^n t, \tag{S43}$$

其中 $T_0 = t$，ϵ 是缩放参数。采用多重尺度法时，方程 (S42) 可改写为

$$\ddot{z}_1 + 2\epsilon\mu_1\dot{z}_1 + \omega_{nm}^2 z_1 + \epsilon\alpha_{nm} z_1^3 + \epsilon\lambda_{nm}^{pq} z_1 z_2^2 = \epsilon k_d \, cos(\omega_{nm} T_0 + \sigma T_1). \tag{S44}$$

采用多重尺度法后，我们得到如下方程:

$$\sigma = \frac{3\alpha_{nm}}{8\omega_{nm}}(z_1^{peak})^2 \pm \sqrt{\frac{k_d^2}{4\omega_{nm}^2 (z_1^{peak})^2} - \mu_1^2} + \frac{\lambda_{nm}^{pq}}{2\omega_{nm}} z_2^2. \tag{S45}$$

在稳态下，右端项中的中间项为零。因此可得到如下方程:

$$\sigma = \frac{3\alpha_{nm}}{8\omega_{nm}}(z_1^{peak})^2 + \frac{\lambda_{nm}^{pq}}{2\omega_{nm}} z_2^2. \tag{S46}$$

这里，$\sigma = \omega - \omega_{nm}$ 表示频率失谐。该方程表示由模态耦合产生的频率失谐，可用于确定耦合常数（λ_{nm}^{pq}）。不存在模态耦合时，该方程的形式如下

$$\sigma = \frac{3\alpha_{nm}}{8\omega_{nm}}(z_1^{peak})^2. \tag{S47}$$

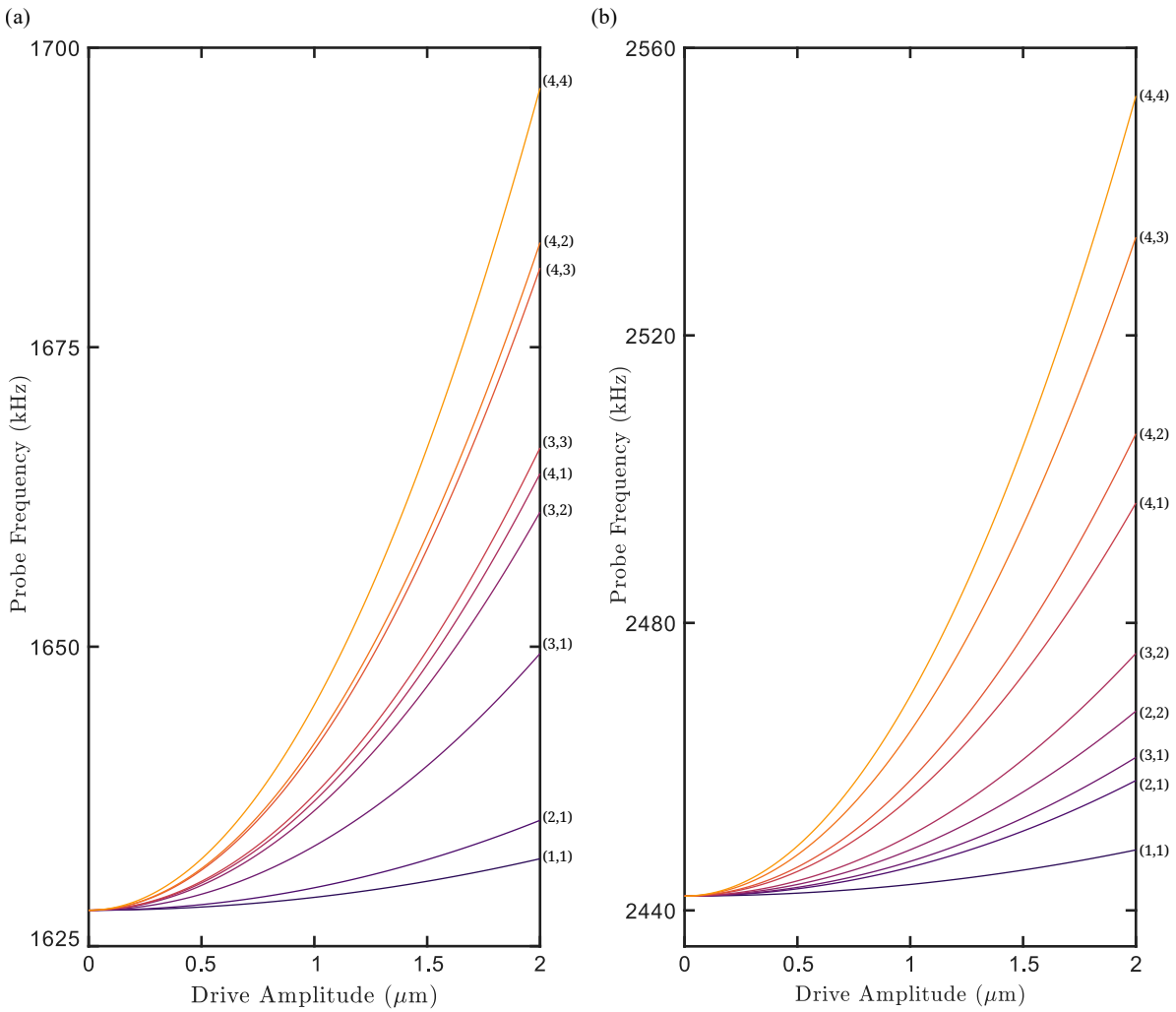

图 S2：基模频移随耦合模振幅的变化：(a)(2,2)，(b)(3,3)。

方程（S47）有助于计算实验杜芬常数（α_{nm}）。当施加力足够小时，可以忽略方程（S45）中的非线性项。利用耦合常数，可以绘出探测模态共振频率的频移与驱动模振幅之间的关系。图 S2 展示了（2,2）和（3,3）振动模态的共振频率随其他耦合振型峰值振幅变化的情况。该图说明，当耦合振型具有指定振幅时，各振型的共振频率可能发生多大变化。

2 实验部分

2.1 器件参数

本研究中使用的器件参数汇总于表3。应变根据式(S22)给出的共振频率关系计算。利用提取出的应变和杨氏模量，估算得到相应的拉伸应力约为1.05 吉帕，与先前报道的数值一致 [5]。

物理参数	数值
杨氏模量 (E)	280×10^9Pa
密度 (ρ)	3170 kg/m^3 [6]
内建应变（ϵ_0）	3.751×10^{-3}
长度 (L)	500×10^{-6}米
厚度 (h)	100×10^{-9}米

表3：器件参数

2.2 位移校准

使用激光多普勒测振仪（LDV）对膜的位移进行校准，该仪器可对面外位移进行绝对测量。为建立电读出电压与物理位移之间的换算关系，在以已知振幅的低频正弦激励驱动器件的同时，使用LDV记录位移，并使用锁相放大器记录相应的电压信号。图S3展示了测得的位移随检测电压变化的关系。对数据进行线性拟合得到校准因子 $\frac{\partial z}{\partial V} = 0.2\ \mu$m/V，其中 z 为机械位移， V 为锁相放大器测得的电压。

—

该校准因子随后被用于将使用锁相放大器测得的所有电压信号转换为绝对位移单位。具体而言，位移振幅由 $z(t) = \alpha V(t)$得到，其中 $\alpha = 0.2\ \mu$m/V为实验确定的转换因子。由于激光多普勒测振仪提供可溯源至光学波长标准的绝对位移参考，该流程能够在不依赖器件参数的情况下实现定量位移测量。

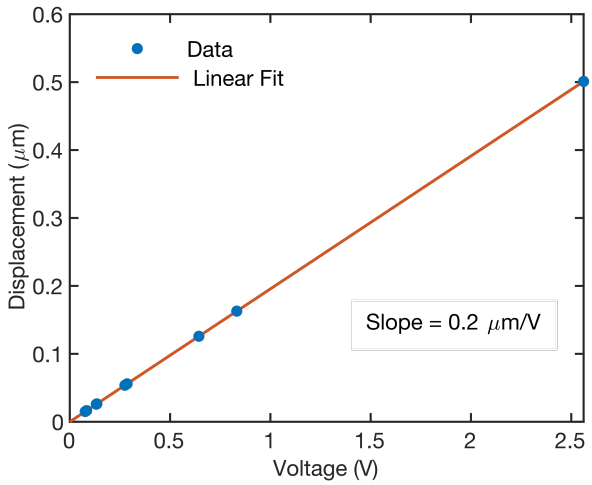

图 S3：测得的机械位移 z 随检测到的锁相放大器电压V的变化关系。对数据进行线性拟合，得到位移校准因子为 $\partial z/\partial V = 0.2\ \mu$m V^{-1}。

2.3 模态频率响应 $(2,1)$ 和 $(2,2)$

图 S4(b,e) 分别展示了 (2,1) 和 (2,2) 振动模态的线性频率响应。实线表示对数据进行的洛伦兹拟合，得到的品质因数为 12.5×10^4 （对应 (2,1)）

振动模态）和 11.5×10^4（对应振动模态 (2,2)）。随着驱动力增大，频率响应逐渐呈现非线性，如图 S4(a,d) 所示。图 S4(c,f) 展示了提取出的频移随峰值振幅的变化。实线表示使用公式 (S47) 进行的拟合，由此得到振动模态 (2,1) 和 (2, 2) 的实验杜芬系数分别为 $2.5 \times 10^{23}\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-2}$ 和 $4.7 \times 10^{23}\,\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-2}$。

在整个测量过程中，激光多普勒测振仪的激光光斑固定在膜的中心。该位置对应于 (1,1) 振型的波腹，但接近高阶 (2,1) 和 (2,2) 振型的波节区域。因此，这些振型测得的位移振幅较小，导致振幅波动增大，如图 S4(a,d) 所示。为考虑这一影响，我们根据正文图 1 所示空间振型的极值估算了缩放因子。(2,1) 振型的缩放因子为 10.2 ± 4.0，(2,2) 振型的缩放因子为 25.2 ± 11.0。不确定性源于激光多普勒测振仪光斑尺寸（$\sim 1\ \mu$m）与振型测量所用步长（$\sim 50\ \mu$m）之间的不匹配。此外，~ 1628 kHz 附近的局部峰值归因于参数驱动基模产生的高次谐波贡献。

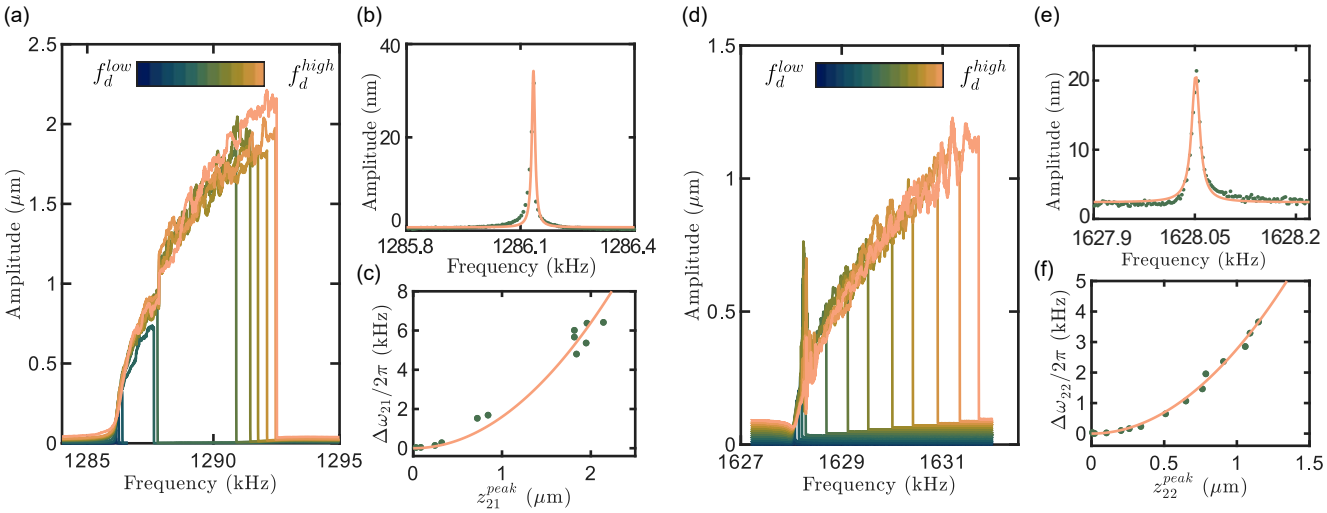

图 S4：（a、d）驱动力逐渐增大时振动模态 (2，1) 和 (2，2) 的非线性频率响应。（b、e）最低驱动振幅下 (2，1) 和 (2，2) 振型的线性响应；实线表示用于提取共振频率和品质因数的洛伦兹拟合。（c、f）与从（a、d）中提取的最大位移振幅对应的振幅依赖频移。实线表示用于提取杜芬系数的拟合结果。

参考文献

[1] Arthur W Leissa。《板的振动》。第160卷。美国国家航空航天局科学技术信息部，1969年。[2] E Ventsel、T Krauthammer 和 E Carrera。《薄板与壳体：理论、分析与应用》。2002年。[3] D Cattiaux 等。“圆板与薄膜的几何非线性：一种替代方法”。载于：《应用物理学杂志》128.10（2020年）。[4] Inna Kozinsky。“非线性纳米机电系统”。载于：《博士论文》（2007年）。

[5] Bin Shu 等。“应变硅技术中高压缩应力氮化硅薄膜的制造”。载于：《2009年 IEEE 电子器件与固态电路国际会议（EDSSC）》。IEEE。2009年，第365–367页。[6] Luis Mestre 等。“参数驱动的氮化硅机械膜网络”。载于：《物理评论应用》24.4（2025年），第044072页。