arXiv:2603.08698v1 [math.AC] 9 Mar 2026

具有最小奇点阈值的齐次理想

BENJAMIN BAILY

摘要。令 $(\mathcal{O}_n, \mathfrak{m})$ 表示全纯函数 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 的芽环，并令 $I \subseteq \mathcal{O}_n$ 为一个 $\mathfrak{m}$-主初等理想。Demailly 和 Pham 证明了 $\operatorname{lct}(I) \geq \frac{1}{e_1(I)} + \cdots + \frac{e_{n-1}}{(I)e_n(I)}$，其中 $e_j(I)$ 是混合重数 $e(I, \ldots, I, \mathfrak{m}, \ldots, \mathfrak{m})$，其中 I 重复 j 次，$\mathfrak{m}$ 重复 $n-j$ 次。

我们将这个下界推广到等特征的任意优秀正则局部环（或标准分次环）中的任意理想情形，在正特征下以 F-阈值 $c^{\mathfrak{m}}(I)$ 替代 $\operatorname{lct}(I)$。我们的主要结果是对多项式环中达到该下界的齐次理想进行分类，从而解决了 Bivià-Ausina 在分次情形下提出的猜想。

1. 引言

设 X 为一个光滑簇，$Y \subseteq X$ 为一个真闭子概形，$y \in Y$ 为一个点。我们研究刻画点 y 处偶对 (X, Y) 奇点的数值不变量：在特征零下，我们考虑对数典范阈值；在正特征下，我们考虑 F-纯阈值。

对数典范阈值（lct）因其与极小模型纲领和奇点理论的联系，在代数几何中备受关注。F-纯阈值（fpt）是正特征下 lct 的类似物，通过约化与特征 $p \gg 0$ [HT04]相关。fpt 为正特征几何提供了新的见解 [BS15；Kad+22；PRS24]，而模 p 约化也被用于更好地理解特征零下的奇点[Ben+15；Tak04；Tak06]。

近年来，许多作者根据嵌入的更经典不变量，得出了 lct（及 fpt）的下界 [EM21；FEM03；FEM04；Kad+22；Kim21；Mus02；TW04]。这些下界中最早的一个由 Skoda 给出 [Sko72]，他证明了

$$\frac{1}{\operatorname{mult}_y(Y)} \leq \operatorname{lct}_y(X, Y). \tag{1}$$

等式 (1) 取等的情形，专家们早已熟知：$\frac{1}{\operatorname{mult}_y(Y)}$ 等于对数典范阈值 $y(X, Y)$ 当且仅当 Y 在 y 处是光滑除子。Skoda 对等式 (1) 的原始表述涉及多重次调和函数的芽，而解析表述中的取等情形

作者获得了美国国家科学基金会（NSF）资助的 DMS-2101075 和 DMS-1840234 项目，以及西蒙斯博士论文奖学金的支持。

由 Guan 和 Zhou [GZ15] 解决。我们考察 Skoda 下界的一种推广中的取等情形。

令 I 表示 $\mathcal{O}_{X,y}$ 中 Y 的定义理想，且 $n = \dim \mathcal{O}_{X,y}$。当 $\mathcal{O}_{X,y}/I$ 为零维时，Demailly 和 Pham [DP14] 通过纳入有关嵌入的更高余维数信息，即混合重数 $e_J(I) := e(I, \dots, I, \mathfrak{m}_y, \dots, \mathfrak{m}_y)$，加强了方程 (1)；见定义 2.32。我们有

$$\frac{1}{e_1(I)} + \frac{e_1(I)}{e_2(I)} + \cdots + \frac{e_{n-1}(I)}{e_n(I)} \leq \operatorname{lct}_y(X, Y). \tag{2}$$

超越 Demailly 和 Pham 所考虑的情形，我们放宽 $\mathcal{O}_{X,y}/I$ 为零维的假设。我们回顾 Rashkovskii 对不变量 $E_l(I)$ 的定义，该定义适用于任意 $l \leq \operatorname{ht}(I)$。如 [Ras15, 定理 1.4], 所示，我们可以令 $L = V(h_{l+1}, \dots, h_n)$ 表示 $\mathcal{O}_{X,y}$ 中 $n - l$ 个一般线性形式的零点集，并令 $I|_L$ 表示 I 在环 $\mathcal{O}_{L,y}$ 中的扩张。由于 $\mathcal{O}_{L,y}/I|_L$ 是零维的，我们将方程 (2) 和 [Laz04, 例 9.5.4] 应用于 $I|_L$。由此得到

$$\frac{1}{e_1(I|_L)} + \cdots + \frac{e_{l-1}(I|_L)}{e_l(I|_L)} \leq \operatorname{lct}(I|_L) \leq \operatorname{lct}(I). \tag{3}$$

接下来定义

$$E_l(I) := \frac{1}{e_1(I|_L)} + \cdots + \frac{e_{l-1}(I|_L)}{e_l(I|_L)},$$

根据命题 2.37，对于足够一般的 L，该式定义良好。方程 (3) 的内容是 $E_l(I) \leq \operatorname{lct}(I)$。

更一般地，若 $(R, \mathfrak{m})$ 是任意正则局部环，且 $I \subseteq R$ 满足 $\operatorname{ht}(I) \geq l$，我们类似地定义 $E_l(I)$——特别地，当 $R/\mathfrak{m}$ 无限时，令 L表示 $\mathfrak{m}$ 中那些在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像足够一般的 $n-l$ 个元素的零点集，并设 $E_l(I) := E_l(I|_L)$。精确定义见定义 2.38。

我们的首个贡献是将方程 (3) 推广到任意特征。

定理 A（定理 3.9）。设（R, $\mathfrak{m}$）为正则局部环，或赋予标准分次的完美域上的多项式环。当特征 $R = 0$ 时，假设 R 为优良环。设 $I \subseteq R$ 为高度至少为 l 的理想，并假设它是齐次的；若 R 为多项式环，则也可以是 $\mathfrak{m}$-*primary*。令 $c(I)$ 表示 I 的对数典范阈值（分别为 ***fpt***）。则 $E_l(I) \leq c(I)$。

与 Skoda 的界不同，人们对等式（2）取等的情形知之甚少。这方面最好的结果归功于 Bivià-Ausina [BA17], , 他在附加假设 $\operatorname{lct}(I) = \operatorname{lct}(I^0)$ 下，对取等情形进行了分类，其中 I^0 是包含 I 的最小单项式理想。我们的主要结果与坐标无关，并在分次情形下解决了 [BA24，注 3.7] 中的猜想。

定理 B (定理 5.1). 设 k 是一个特征零的完美域（分别为 $p > 0$）。设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，并设 $I \subseteq R$ 是一个高度至少为 l 的齐次理想。若 $E_l(I) =$对数典范阈值(I)（分别为 $E_l(I) = \operatorname{fpt}(I)$），则存在整数 $d_1, \dots, d_l$

使得在适当的坐标下，我们有

$$\overline{I} = \overline{\left(x_1^{d_1}, \ldots, x_l^{d_l}\right)}.$$

我们简要概述定理 5.1 的证明，该证明归结为 $k = k$与 $l = n$ 的情形。假设 $E_n(I) = c(I)$。记 $I = I_1 + \cdots + I_r$，其中 I_j 由d_j-形式生成，且 $d_1 < \cdots < d_r$。

（1）利用来自 [BA17；May14], 的技巧，我们控制一般初始理想$\{\mathrm{gin}(I^n)\}_{n\geq 1}$。（2）利用（1），我们得到用 d_j 以及理想 $I_1 + \cdots + I_j$ 的高度表示数 $e_j(I)$ 的公式。（3）我们关于 $e_j(I)$ 的公式蕴含 $E_n(I) = B(I)$，其中 $B(I)$ 如 [BA24] 中那样用混合 Łojasiewicz 指数定义。这使我们能够归结到齐次完全交的情形。（4）我们通过对不同次数的个数 $d_1, \ldots, d_r$ 使用归纳法来证明完全交情形（命题 4.30）。

在情形 $r = 1$中，任何由 d-形式生成的 $\mathfrak{m}$-主初等理想 I 都会自动满足$I = \mathfrak{m}^d$，因此无法将 $r = 1$ 用作我们归纳法的有用基例。我们转而使用 $r = 2$。在这种情形下，我们证明（引理 4.8）： $c(I) = E_n(I)$当且仅当 $c(I_1) = \mathrm{ht}(I_1)/d_1$。由于$I = I_1 + \mathfrak{m}^{d_2}$，定理 B 在这种情形下等价于如下断言：在适当的坐标下， $I_1 = (x_1, \ldots, x_{\mathrm{ht}(I_1)})^{d_1}$。在特征零下，这由 [FEM03 的定理 3.5]推出。在正特征下，这一事实即[Bai25 的定理 3.17]。

由例 5.14 可知， k 是完美的这一假设不能减弱。定理 5.1 中的另一个主要假设是 R 是分次的且 I 是齐次的，放宽该假设是一个更为微妙的问题。在特征零下，我们猜想定理 5.1 在局部情形中至多在一次解析 坐标变换的意义下成立；精确陈述见猜想 6.2，关于赋值的更强陈述见猜想 6.3。我们在维数 2 中验证了这两个猜想。相比之下，在特征 $p > 0$下，例 6.1 表明解析坐标变换不足以刻画何时 $c(I) = E_l(I)$。

我们还要指出，对定理A和定理B，原则上还有两种可能的改进。第一种涉及 [Hie25，定理 1。2], 该定理对每个 $1 \leq k \leq n$ 定义了一个不变量 $H_k(I)$，满足 $E_k(I) \leq H_k(I) \leq$对数典范阈值(I)，其中所有理想 $I \subseteq \mathcal{O}_n$ 的高度至少为 k。有趣的是，可以研究界 $H_k(I) \leq c(I)$在正特征下是否仍然成立，以及是否存在满足$E_k(I) < H_k(I) = c(I)$的理想。

第二条备注涉及 [Kim21, 问题 1.3], ，其中提出了 Hoang Hiep Pham 的一个猜想，即（意味着） $c(I) - c(I|_H) \geq {}^{e_{n-1}(I)\, e_n(I)}$ 对于每个高度为 n 的理想$I \subseteq \mathcal{O}_n$ 以及每个经过 $0 \in \mathbb{C}^n$ 的超平面 H 都成立。Tommaso de Fernex 向作者分享了一个反例，反驳了这一猜想；我们在例 3.13 中记录了该反例。

致谢。 作者衷心感谢导师 Karen Smith 在本项目多次迭代过程中给予的支持与指导。作者还要感谢 Havi Ellers 和 Mattias Jonsson 对早期稿件提出的意见，以及 Tommaso de Fernex 进行的有益讨论。

2. 预备知识

假设 2.1. 本文中所有环均为交换的诺特含幺环。所有多项式环均取标准分次。

2.1. F-纯与对数正则阈值。

我们先给出对数典范阈值的形式化定义。详细介绍请参阅 [Mus12]。

定义 2.2（对数解消）。 设 X 为光滑簇， $Y \subseteq X$ 为真闭子簇，其定义理想为 $\mathfrak{a}$。设 W 为光滑簇。射影态射 $\pi\colon W \to X$ 称为（X, Y）的**对数解消**，如果 π 在 $X \setminus Y$ 上是同构，且逆像 $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_W$ 是卡蒂埃除子 D 的理想，使得$D + K_{W/X}$ 具有简单正规交叉。

定义-命题 2.3（对数典范阈值， [Mus12] 定理 1.1）。 设X 为特征零域上的光滑簇， $Y \subseteq X$ 为闭子簇，其定义理想为 $\mathfrak{a}$。根据平中定理（奇点解消定理），存在一对（X, Y）的对数解消 $\pi\colon W \to X$。特别地，存在一个简单正规交叉除子 $E_1 + \cdots + E_N$，使得

$$D = \sum_{i=1}^{N} a_i E_i \qquad \text{and} \qquad K_{W/X} = \sum_{i=1}^{N} k_i E_i.$$

对于 $y \in Y$，量 $\min_{i : y \in \pi(E_i)} \binom{k_i+1}{a_i}$ 不依赖于对数解消 π，记作 $\mathrm{lct}_y(X, Y)$，即 (X, Y) 在 y 处的**对数典范阈值**。若未指定点y，则定义

$$\mathrm{lct}(X, Y) = \min_{y \in Y} \mathrm{lct}_y(X, Y) = \min_i \frac{k_i + 1}{a_i}.$$

我们约定，当 $y \notin Y$ 时，$\mathrm{lct}_y(X, Y) = \infty$。此外，当$k$是特征零域， $R = k[x_1, \ldots, x_n]$，且 $I \subseteq R$ 是一个理想时，定义 $\mathrm{lct}(R, I) := \mathrm{lct}(\mathbb{A}^n, V(I))$，以及 $\mathrm{lct}_0(R, I) := \mathrm{lct}_0(\mathbb{A}^n, V(I))$。

事实上，只要 X 是一个整的优良概形，就可以定义 (X, Y) 的对数典范阈值；参见 [FM09, §2]。

关于 F-纯阈值的背景知识，请读者参阅 [TW04]。本小节将概述若干关键定义和结果。

定义 2.4。 设 R 是特征为 $p > 0$ 的环。我们用 F_*R 表示由沿弗罗贝尼乌斯映射 $F\colon R \to R$ 的标量限制赋予 R 的 R-模结构。若 F_*R 是有限模于 R 的，则称 R 为 F-有限。

定义 2.5 （[TW04]）。设 R 是一个 F-有限环， $I \subseteq R$ 是一个理想，且 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。若对于 $e \gg 0$，映射

$$I^{\lfloor t(p^e-1)\rfloor} \cdot \mathrm{Hom}(F_*^e R, R) \to R$$

是满射。数对 (R, I) 的 F-纯阈值 是所有使得 (R, I^t) 为 F-分裂的 t 的上确界。我们将这个量记为 $\mathrm{fpt}(R, I)$；当环境环明确时，也记为 $\mathrm{fpt}(I)$。

设 k 是特征为 $p > 0, R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 的 F-有限域，且 $I \subseteq R$。令 $\mathfrak{m} := (x_1, \ldots, x_n)$ 表示 R 的齐次极大理想。于是令 $\mathrm{fpt}_0(I)$ 表示量 $\mathrm{fpt}(R_{\mathfrak{m}}, IR_{\mathfrak{m}})$。

实际上，我们并不使用上述定义，而是利用 F-纯阈值作为极大理想处的 F-阈值的刻画，并将对数典范阈值视为 fpt 的极限。

定义 2.6。设 R 是一个特征为 $p > 0$ 的环。设 $\mathfrak{a}, J$ 是 R 的理想，且满足 $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{J}$。对于每个非负整数 e，定义

$$\nu_{\mathfrak{a}}^J(p^e) := \max\{t \in \mathbb{Z}^+ : \mathfrak{a}^t \not\subseteq J^{[p^e]}\}.$$

由 [DSBP18], ，序列 $\nu_{\mathfrak{a}}^J(p^e)\, p^e$ 当 $e \to \infty$时存在极限；我们将此极限记为$c^J(\mathfrak{a})$，并称其为 $\mathfrak{a}$在 J处的 F-阈值。

命题 2.7. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个 F-有限正则局部环。那么，配对 (R, I) 的 F-纯阈值等于 $c^{\mathfrak{m}}(I)$。若 R 是定义在一个 F-有限域上的多项式环，且 $I \subseteq R$ 是一个齐次理想，则令$\mathfrak{m}$表示 R的齐次极大理想时，同样的结论也成立。

证明。局部情形见 [MTW05, 注记 1.5] ，分次情形见 [DSB18, 命题 3.10]。□

命题 2.8 ([HY03], 定理 6.8)**.** 设 A 是有限型 $\mathbb{Z}$-代数， $\mathfrak{a} \subseteq A[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个理想。令 $k =$ 分式域(A)。则有

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{a} \otimes_A k) = \lim_{\mu \in \max \mathrm{Spec}\, A, |A/\mu| \to \infty} \mathrm{fpt}(A/\mu[x_1, \ldots, x_n], \mathfrak{a} \otimes_A A/\mu).$$

我们的许多结果对 fpt 和对数典范阈值都成立，因此我们引入以下记号，以免分别针对特征零和正特征重复陈述相同的结果。

记号 2.9. 设 k 为一个域， $R = k[x_1, \ldots, x_n]$、 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ ，且 $I \subseteq R$ 为一个理想。我们将量 $c(R, I)$ 定义如下:

$$c(R, I) = \begin{cases} c^{\mathfrak{m}}(I) & \text{char } R = p > 0 \\ \mathrm{lct}_0(R, I) & \text{char } R = 0. \end{cases}$$

类似地，设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个正则局部环， $I \subseteq R$ 是一个理想。我们定义

$$c(R, I) = \begin{cases} c^{\mathfrak{m}}(I) & \text{char } R = p > 0 \\ \mathrm{lct}(R, I) & \text{char } R = 0 \textit{ and } R \textit{ is excellent.} \end{cases}$$

如果环境环明确，我们将用 $c(I)$作为简写。

命题 2.10（奇点阈值的性质）。 假设记号 *2.9* 的任一情形成立，并令 I、J 为 R 的非零理想。对于 $c(-)$，以下性质成立：

(i) 如果 $I \subseteq J$，则 $c(I) \leq c(J)$。*(ii)* 对所有 $m > 0$，都有 $c(I^m) = m^{-1}c(I)$。*(iii)* 有 $c(I) = c(I)$，其中 I 表示 I 的整闭包。*(iv)* 如果 $J \subseteq R$ 是一个理想，使得 R/J 是正则的，则

$$c(R, I) \geq c(R/J, (I + J)/J).$$

(v) 有 $c(I + J) \leq c(I) + c(J)$。*(vi)* 假设 $R \subseteq S$ 是一个环扩张。如果特征 $R = 0$，则假设 S 是优良的。在以下两种情形中，均有 $c(I) = c(IS)$。

- $(R, \mathfrak{m})$ 和 $(S, \mathfrak{n})$ 是局部的且 $\mathfrak{m}S = \mathfrak{n}$；
- $R = k[x_1, \ldots, x_n]$，L/k 是一个域扩张，且 $S = L[x_1, \ldots, x_n]$。

证明。 首先，我们验证 (i)-(v)。对于特征零，参见 [Mus12，性质 1.12、1.13、1.15、1.17、1.20]。对于特征 $p > 0$，参见 [TW04，命题 2.2 (1)、(2)、(6)，命题 4.4]。

对于 (vi)，注意这两种情形都是正则且忠实平坦扩张。在特征零下，参见 [JM12，命题 1.9]。在特征 $p > 0$ 下，参见 [Hun+08，命题 2.2 (v)]。□

2.2. **单项式理想**。

记号 2.11. 对于环元素向量 $\mathbf{f} = f_1, \ldots, f_r$ 以及非负整数向量 $\mathbf{a} = a_1, \ldots, a_r$，我们用 $\mathbf{f}^{\mathbf{a}}$表示元素 $f_1^{a_1} \ldots f_r^{a_r}$。粗体小写字母始终表示整数向量或环元素向量。

定义 2.12. 设 k 是一个域，并设 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$。对于元组 $\mathbf{x} = x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$，其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$，我们用 Mon($\mathbf{x}$) 表示变量 $\mathbf{x}$ 中单项式构成的幺半群。特别地，Mon($x_1, \ldots, x_n$) 表示 R 中所有单项式的集合。

在处理单项式理想时，人们常将单项式 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$与点 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$对应起来。为便于后续讨论，我们给这种对应起一个名称。

定义 2.13. 设 k 是一个域。我们定义映射

$$\log : \mathrm{Mon}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) \to \mathbb{Z}^r_{\geq 0}, \qquad \log(x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r}) = (a_1, \ldots, a_r).$$

定义 2.14. 设 $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个单项式理想。则 $\mathfrak{a}$ 的牛顿多面体 记为 $\Gamma(\mathfrak{a})$，是 $\log(\mathfrak{a})$ 在 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 中的凸包。我们用 conv(–) 表示一个集合的凸包。

注记 2.15. 我们记录 $\Gamma(\mathfrak{a})$ 的若干性质。

(i) $\Gamma(\mathfrak{a})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的第一卦限中的一个闭、凸且无界子集。

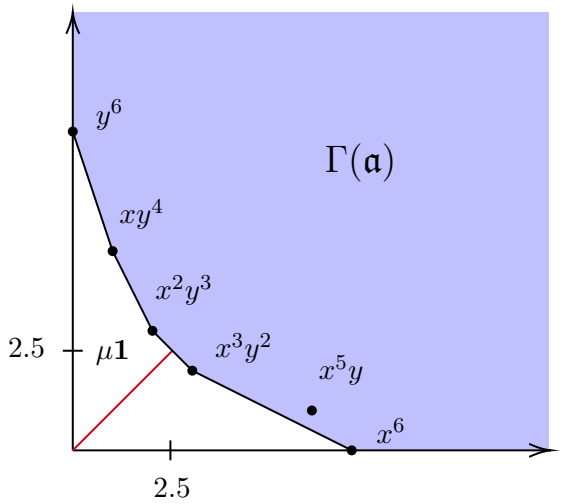

图 1. 示例 2.17 中 μ 的计算

(ii) 当 $\mathfrak{a}$ 是一个 $\mathfrak{m}$-主初等理想时，第一卦限内 $\Gamma(\mathfrak{a})$ 的补集的闭包是一个开有界多面体。(iii) 对于两个理想 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\Gamma(\mathfrak{a})$ 与 $\Gamma(\mathfrak{b})$ 的闵可夫斯基和等于 $\Gamma(\mathfrak{ab})$。特别地，$\Gamma(\mathfrak{a}^n) = n\Gamma(\mathfrak{a})$。

下面的命题表明，单项式理想的牛顿多面体决定了其奇点阈值。

命题 2.16. 设 $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个单项式理想。那么

$$c(\mathfrak{a}) = \frac{1}{\mu}, \text{ where } \mu = \inf\{t : t\mathbf{1} \in \Gamma(\mathfrak{a})\}.$$

证明. 特征零的情形参见 [How01], Example 5，正特征的情形参见 [Her16], Proposition 36。□

示例 2.17. 设 $R = k[x, y]$，并令 $\mathfrak{a} = (x^6, x^5y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^6)$。在图 1 中，我们计算出 $\mu = 2.5$，因此 $c(\mathfrak{a}) = 0.4$。

按照 [FEM04], 定理 1.4 的证明以及 [May14], 的术语，我们还定义单项式理想分次系的**极限多胞形**。

定义 2.18。 设 $\mathfrak{a}_\bullet$ 是 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个单项式理想分次系——也就是说，假设对于所有 r $\mathfrak{a}_r\mathfrak{a}_s \subseteq \mathfrak{a}_{r+s}$ $s \in \mathbb{Z}^+$，。我们将 $\Gamma(\mathfrak{a}_\bullet)$定义为 $\mathbb{R}^n$中 $\{\frac{1}{2^m}\Gamma(\mathfrak{a}_{2^m})\}_{m>0}$的上升并的闭包。

注 2.19。 在我们所考虑的情形（其中 $\mathfrak{a}_m \supseteq \mathfrak{a}_{m+1}$）下，定义 2.18 中的集合 $\bigcup_m \frac{1}{2^m}\Gamma(\mathfrak{a}_{2^m})$与 $\bigcup_m \frac{1}{m}\Gamma(\mathfrak{a}_m)$一致，但我们发现使用上升并比使用过滤并更容易。

我们约定在多项式环中使用单项式序和初始项的方式。更多背景信息，请参阅 [Eis95，第 15]章。

定义 2.20。设 k 是一个域，并设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$。R 上的单项式序 $>$ 是 $\mathrm{Mon}(x_1, \dots, x_n)$ 上与整除关系相容的偏序：也就是说，对于单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$,$\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$,$\mathbf{x}^{\mathbf{c}}$，若 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} > \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$，则 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{c}} > \mathbf{x}^{\mathbf{b}+\mathbf{c}}$。

对于元素 $f \in R$，记 $f = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \beta_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$，其中 $\beta_{\mathbf{a}} \in k$。f 的**支集**（记为 $\mathrm{supp}(f)$）是集合 $\{\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \beta_{\mathbf{a}} \neq 0\}$。$f$ 关于 $>$ 的**首项**（记为 $\mathrm{in}_>(f)$）由下式给出

$$\sum_{\substack{\mathbf{a}: \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in \mathrm{supp}(f) \\ \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \text{ maximal with respect to } >}} \beta_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}.$$

对于理想 $I \subseteq R$，初始理想$\mathrm{in}_>(I)$ 是由元素$\{\mathrm{in}_>(f) : f \in I\}$ 生成的理想。

赋值是单项式序的一个重要来源。

定义 2.21. 假设采用定义 2.20 的设定。一个单项式赋值是幺半群映射 $v : (\mathrm{Mon}(x_1, \dots, x_n), \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$。要描述单项式赋值 v，只需给出值 $v(x_1) \dots, v(x_n)$。然后我们可以如下描述 R 上的单项式序 $>_v$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} >_v \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \text{ if and only if } v(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) > v(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})$$

当对所有 i 都有 $v(x_i) \geq 0$ 时，我们可以将 v 扩展为 R 上的一个 $\mathbb{R}$-赋值：定义 $v : R \to [0, \infty]$ 为

$$v(f) = \min_{\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in \mathrm{supp}(f)} v(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}).$$

初始理想的一个关键性质是其相对于奇点阈值的半连续性。

命题 2.22. 设 $R = k[x_1, \dots, x_n], \mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$，并设 $>$ 为一个单项式序。若 $I \subseteq R$ 是一个理想，则 $c(\mathrm{in}_>(I)) \leq c(I)$。

证明。关于特征零下对数典范阈值的半连续性，参见 [DK01] 。关于正特征，参见 [TW04, Remark 4.6] 前面的论断。□

当 I 是齐次的、k 是无限域，并且 $>$ 是与按次数定义的偏序相容的全序时，“一般坐标”下的初始理想有良好定义。

定义-命题 2.23 ([Eis95]，定理 15.18)。设 k 是一个无限域，$R = k[x_1, \dots, x_n]$，且 $I \subseteq R$ 是一个齐次理想。假设 $>$ 是 R 上的单项式全序，使得 $x_1 > \cdots > x_n$，并且当 $\deg(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) > \deg(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})$ 时，$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} > \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$。那么存在 $\mathrm{GL}_n(k)$ 的一个非空开子集 $U \subseteq$，以及一个单项式理想 J，使得：

- 对于所有的 $\gamma \in U$，我们有 $\mathrm{in}_>(\gamma I) = J$；
- U 是 *Borel*-固定：如果 $B \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ 表示下三角矩阵构成的子群，那么 $BU = U$。

理想 J 称为关于 $>$ 的 I 的一般初始理想，记作 $\mathrm{gin}_>(I)$。

2.3. **理想的整闭包**。

定义 2.24。设 I 是环 R 中的一个理想。若存在一个整数 n 以及元素 $a_1, \dots, a_n$, $a_i \in I^i$，使得 $r \in R$ 是关于 I 的整元素，则

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

然后，我们将 I 的整闭包定义为由满足关于 I整的元素 $r \in R$ 组成的集合。

定义-命题 2.25 ([HS06], 推论 1.2.5)。设 $J \subseteq I$ 是环 R中的理想。如果以下等价条件之一成立，我们称 J 是 I 的一个**约化**:

(i) 存在一个正整数 n 使得 $I^n J = I^{n+1}$。(ii) 我们有 $I \subseteq J$；(iii) 我们有 $\overline{I} = \overline{J}$。

希望全面了解理想的整闭包的读者应参阅 [HS06]。现在，我们列出 I的一些基本性质。

命题 2.26 （整闭包的性质， [HS06] 第 1 章）. 设 R 为一个环， $I \subseteq R$ 为一个理想。设 $\varphi\colon R \to S$。则我们有

(i): I 是一个理想。*(ii)*: $(I) = I$。*(iii)*: $IS \subseteq \overline{IS}$。*(iv)*: 若 $J \subseteq S$ 是一个理想，则 $\overline{\varphi^{-1}(J)} = \varphi^{-1}(J)$。*(v)*: 对任意乘法闭集 $W \subseteq R$，我们有 $W^{-1}\overline{I} = \overline{W^{-1}I}$。*(vi)*: 多项式环 $k[x_1, \dots, x_n]$中单项式理想 $\mathfrak{a}$ 的整闭包由集合 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \Gamma(\mathfrak{a})$ 生成。*(vii)*: 若 φ 是忠实平坦的或为整扩张，则 $\overline{IS} \cap R = \overline{I}$。

整闭包是一种运算，它保持我们在本文中所关注的许多数值不变量。

定理 2.27 ([HS06], 命题 11.2.1，定理 11.3.1)。设$(R, \mathfrak{m})$ 是形式等维局部环，且 $I \subseteq J$ 是两个 $\mathfrak{m}$-主初等理想。那么 $e(I) = e(J)$当且仅当 $I = J$。

若 $(R, \mathfrak{m})$ 改为标准分次的情形，同样的结论仍然成立。

命题 2.28。设 $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ 是一个理想。那么 $c(I) = c(\overline{I})$。

证明。特征零的情形，参见 [Mus12], 性质 1.15。正特征的情形，参见 [TW04], 命题 2.2 (6)。□

作为本小节的总结，我们回顾 Briançon-Skoda 定理的一个版本，该版本由 Lipman 和 Sathaye 提出，其一般性恰是我们所需的。

定理 2.29。设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的正则局部环，且 $I \subseteq R$ 是一个理想。则对于所有整数 $t > 0$，我们有

$$\overline{I}^{t+d} \subseteq \overline{I^{t+d}} \subseteq I^{t+1}.$$

证明。 第一个包含关系见 [HS06，命题 5.3。1]。对于第二个包含关系，我们将问题归结为剩余域无限的情形；令 $R(X) := R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ ，如上述文献所述。由命题 2.26 可得 $I = IR(X) \cap R$，因此只需证明 $R = R(X)$ 的情形。

根据 [HS06 的命题 5.1.6 和定理 8.6，6] 存在一个理想 $J \subseteq I$ ，使得$J^t = I^t$ 对所有 $t > 0$ 均成立，并且 J 至多可由 d 个元素生成。根据[LS81 的定理 1"] ，我们推得

$$\overline{I^{t+d}} = \overline{J^{t+d}} \subseteq J^{t+1} \subseteq I^{t+1}.$$

□

2.4. **混合重数与 Demailly-Pham 不变量**。 我们回顾混合重数符号 $e(I_1, \ldots, I_d; M)$ 的定义。

定义 2.30。 设 M 是一个有限长度的 R-模。我们用 $\lambda_R(M)$ 表示 M 作为一个 R-模的长度。

定理 2.31 ([HS06], 定理 17.4.2)。 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为一个诺特局部环，$I_1, \ldots, I_k$ 为 R 中以 $\mathfrak{m}$ 为准素理想的理想，且 M 为一个有限生成的 R-模。那么存在一个有理系数、总次数至多为 维数 R 的多项式 $P(n_1, \ldots, n_k)$，使得对于所有 $n_1, \ldots, n_k \gg 0$，都有

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \lambda_R\left(\frac{M}{I_1^{n_1} \cdots I_k^{n_k} M}\right). \tag{4}$$

定义 2.32 （混合重数）。 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的诺特局部环。设 $I_1, \ldots, I_k$ 是 R 的 $\mathfrak{m}$-主初等理想，并设 $P(n_1, \ldots, n_k)$ 如方程 (4) 中所述。记 $Q(n_1, \ldots, n_k)$ 为 $P(n_1, \ldots, n_k)$ 的次数为 d 的部分。 Q 的系数定义了**混合重数** $e(I_1^{\langle d_1 \rangle}, \ldots, I_k^{\langle d_k \rangle}; M)$:

$$Q(n_1, \ldots, n_k) = \sum_{d_1 + \cdots + d_k = d} \binom{d}{d_1, \ldots, d_k}^{-1} e(I_1^{\langle d_1 \rangle}, \ldots, I_k^{\langle d_k \rangle}; M) \tag{5}$$

表达式 $e(I_1^{\langle d_1 \rangle}, \ldots, I_k^{\langle d_k \rangle}; M)$ 是以下表达式的简写

$$e(I_1, \ldots, I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_d; M),$$

其中 I_j 重复 d_j 次。

注 2.33. 其他作者 [HS06] 使用记号 $e(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M)$。为避免与理想 I_j 的 Frobenius 幂 $I_j^{[p^e]}$ 混淆，我们在指数中使用尖括号。

现在我们定义混合重数 $e_j(I)$。

定义 2.34。 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的诺特局部环，并令 I 表示一个 $\mathfrak{m}$-主初等理想。我们定义

$$e_j(I) = e(I^{\langle j \rangle}, \mathfrak{m}^{\langle d-j \rangle}; R).$$

我们记录数 $e_j(I)$ 的一些基本性质。

命题 2.35。 设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 n 、剩余域无限的正则局部环。设 $I\subseteq R$ 是一个 $\mathfrak{m}$- 主初等理想。

(i) 我们有 $e_0(I)=1, e_1(I)=ord_{\mathfrak{m}}(I)$，以及 $e_n(I)=e(I)$。*(ii)* 若 $h_1,\dots,h_n$ 是 $\mathfrak{m}$ 的元素，且它们在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像足够一般，则对所有 $0\leq j\leq n$ ，我们有

$$e_j(I)=e\left(\frac{I+(h_1,\dots,h_{n-j})}{(h_1,\dots,h_{n-j})}\right)=e\left(I+(h_1,\dots,h_{n-j})\right),$$

其中 $e(-)$ 表示通常的希尔伯特-塞缪尔重数。

*(iii) Minkowski*不等式：对于 $j\geq 1$，我们有 $e_j(I)^2\leq e_{j-1}(I)e_{j+1}(I)$。

证明。

(i) 由 (ii) 得出。(ii) 第一个等式见 [HS06，推论 17.4.7]；第二个等式见 [HS06，命题 11.1.19]。(iii) 由 [HS06，定理 17.7.2] 得出。

□

为陈述定理 3.9，我们必须将定义 2.32 扩展到理想 $I\subseteq R$ 不一定是 $\mathfrak{m}$-主初等理想的情形。

定义 2.36 ([BA08], 定义 2.4)。 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个 n 维局部环， $I_1,\dots,I_n$ 是 R 的理想。我们定义

$$\sigma(I_1,\dots,I_n)=\sup_{t>0}\ e(I_1+\mathfrak{m}^t,\dots,I_n+\mathfrak{m}^t). \tag{6}$$

作为特殊情形，对于 $1\leq j\leq n$ 和 $I\subseteq R$，我们按照定义 2.34 定义 $\sigma_j(I):=\sigma(I^{\langle j\rangle},\mathfrak{m}^{\langle n-j\rangle})$。

量 (6) 可能是无穷大。以下命题概述了 $\sigma(I_1,\dots,I_n)$ 的基本性质，其中包括对量 (6) 何时有限的刻画。

命题 2.37 ([BA08])。 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个 n 维正则局部环，且$I_1,\dots,I_n$ 是 R 的理想。

(i) 若 I_1、…、I_n 的高度为 n，则 $\sigma(I_1,\dots,I_n)=e(I_1,\dots,I_n)$。*(ii)* $\sigma(I_1,\dots,I_n)<\infty$ 当且仅当存在 $g_1\in I_1$、…、 $g_n\in I_n$，使得 $(g_1,\dots,g_n)$ 是 $\mathfrak{m}$- 主理想。在此情形下，对于其在 $I_i/\mathfrak{m}I_i$ 中的像足够一般的元素 $g_i\in I_i$ ，有 $\sigma(I_1,\dots,I_n)=e(g_1,\dots,g_n)$。*(iii)* 特别地，对于理想 $I\subseteq R$，$\sigma_j(I)<\infty$ 当且仅当 $ht(I)\geq j$。在此情形下，若 h_1、…、$h_{n-j}\in\mathfrak{m}$ 是其在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像足够一般的元素，则有

$$\sigma_j(I)=e\left(\frac{I+(h_1,\dots,h_{n-j})}{(h_1,\dots,h_{n-j})}\right)=e\left(I+(h_1,\dots,h_{n-j})\right). \tag{7}$$

（*iv*）闵可夫斯基不等式成立：如果 $\sigma_{j-1}(I)\sigma_j(I)$ 有限，则 $\sigma_j(I)^2\leq\sigma_{j-1}(I)\sigma_{j+1}(I)$ 。

证明。

(i) 对于 $t \gg 0$，对所有 $1 \leq i \leq n$，我们有 $\mathfrak{m}^t \subseteq I_i$。参见前引文献中定义 2.4 后的注释。(ii) 这是前引文献中的命题 2.4。(iii) 当 $j \leq \operatorname{ht} I$ 时，使用素理想躲避，选取 $g_1, \ldots, g_j \in I$，使得 $\operatorname{ht}((g_1, \ldots, g_j)) = j$，并选取 $g_{j+1}, \ldots, g_n \in \mathfrak{m}$，使得 $\operatorname{ht}((g_1, \ldots, g_n)) = n$。当 $j \geq \operatorname{ht}(I) + 1$ 时，对于任意 $g_1, \ldots, g_j \in I, g_{j+1}, \ldots, g_n \in \mathfrak{m}$，我们有

$$\operatorname{ht}((g_1, \ldots, g_n)) \leq \operatorname{ht}(I + (g_{j+1}, \ldots, g_n)) \leq \operatorname{ht}(I) + n - j \leq n - 1.$$

为证明公式（7）中的第一个等式成立，选取 $t \gg 0$，使得 $\sigma_j(I) = e_j(I + \mathfrak{m}^t)$。利用 (ii) 选取 $g_1, \ldots, g_j \in I, h_1, \ldots, h_{n-j} \in \mathfrak{m}$，一般而言使得 $\sigma_j(I) = e((g_1, \ldots, g_j, h_1, \ldots, h_{n-j}))$。利用命题 2.35(ii)，选取 $h_1, \ldots, h_{n-j}$，使得条件更一般，即 $e_j(I + \mathfrak{m}^t) = e(I + \mathfrak{m}^t + (h_1, \ldots, h_{n-j}))$。利用希尔伯特-塞缪尔重数的单调性，我们计算得

$$\begin{aligned}\sigma_j(I) = e_j(I + \mathfrak{m}^t) = e(I + \mathfrak{m}^t + (h_1, \ldots, h_{n-j})) \leq e(I + (h_1, \ldots, h_{n-j})) \\ \leq e(g_1, \ldots, g_j, h_1, \ldots, h_{n-j}) = \sigma_j(I).\end{aligned}$$

(iv) 由命题 2.35 (iii) 立即得出。

□

现在我们定义 Demailly-Pham 不变量 [DP14]。

定义 2.38. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个正则局部环，$l \in \mathbb{Z}^+$，且 I 是一个理想，满足 $\operatorname{ht}(I) \geq l$。于是我们定义

$$E_l(I) := \frac{1}{\sigma_1(I)} + \cdots + \frac{\sigma_{l-1}(I)}{\sigma_l(I)}.$$

反之，设 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$。令 $I \subseteq R$ 为一个 $\mathfrak{m}$-主初等理想。对于所有 $r, s > 0$，我们有

$$\lambda_R\left(\frac{R}{I^r \mathfrak{m}^s}\right) = \lambda_{R_\mathfrak{m}}\left(\frac{R_\mathfrak{m}}{I^r \mathfrak{m}^s R_\mathfrak{m}}\right),$$

因此，定理 2.31 对 $\lambda_R\left(\frac{R}{I^r \mathfrak{m}^s}\right)$ 成立，而无需假设 R 是局部的。特别地，对于 $0 \leq j \leq n$，数值 $e(I^{\langle j \rangle}, \mathfrak{m}^{\langle \overline{n-j} \rangle})$ 可以由多项式 $P(r, s)$ 内在地定义，且与量 $e_j(IR_\mathfrak{m})$ 一致。此外，在此情形下，我们有一个类似于定理 2.27 的结果。

命题 2.39. 设 R 是一个正则环，$\mathfrak{m} \subseteq R$ 是一个极大理想，且维数 $R_\mathfrak{m} = n$。设 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq R$ 是 $\mathfrak{m}$-主初等理想。那么 $E_n(I_1 R_\mathfrak{m}) \leq E_n(I_2 R_\mathfrak{m})$，当且仅当 $I_1 = I_2$ 时取等号。

证明。$(R, \mathfrak{m})$ 为局部情形时，结论见 [BA17，推论 11]。在非局部情形下，我们有 $I_1 R_\mathfrak{m} = \overline{I_2 R_\mathfrak{m}}$，因此根据 [HS06，推论 1.2，$I_1 R_\mathfrak{m}$ 是 $I_2 R_\mathfrak{m}$ 的约化5]。

根据约化的定义，存在 $t > 0$ 使得 $I_1 I_2^t R_{\mathfrak{m}} = I_2^{t+1} R_{\mathfrak{m}}$。理想$I_1 I_2^t, I_2^{t+1}$是 $\mathfrak{m}$-primary，因此我们有

$$I_1 I_2^t = I_1 I_2^t R_{\mathfrak{m}} \cap R = I_2^{t+1} R_{\mathfrak{m}} \cap R = I_2^{t+1},$$

因此 I_1 是 I_2 的约化。由 [HS06 推论 1.2.5]，我们再次推得 $I_1 = I_2$。□

我们将定义 2.38 扩展到环 $k[x_1, \ldots, x_n]$。

定义 2.40。设 $R = k[x_1, \ldots, x_n], \mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$，并设 $I \subseteq \mathfrak{m}$ 为一个理想。对于 $1 \leq j \leq \mathrm{ht}(IR_{\mathfrak{m}})$，我们定义 $\sigma_j(I) := \sigma_j(IR_{\mathfrak{m}})$ 和 $E_j(I) := E_j(IR_{\mathfrak{m}})$。

注 2.41。尽管定义 2.40 定义了一个局部不变量，我们省略对极大理想 $\mathfrak{m}$ 的提及，因为我们只考虑原点处的奇点。

命题 2.42。设 $R = k[x_1, \ldots, x_n], \mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$，并设 $I \subseteq R$ 为一个理想，满足 $\mathrm{ht}(I) \geq l$。

(a) 若 I 是 $\mathfrak{m}$-*primary*，则命题 *2.35* 对 I 成立。*(b)* 若 I 是齐次的，则命题 *2.37 (i)*、*(iii)*、*(iv)* 成立，前提是我们假设 *(iii)* 中的元素 h_1、...、h_{n-j} 是齐次的。

证明。

(a) 与命题 2.35 中一样，(i) 可由 (ii) 推出。对于 (ii)，任取 $h_1, \ldots, h_{n-j} \in \mathfrak{m}$，理想 $(I + (h_1, \ldots, h_{n-j}))$ 也是 $\mathfrak{m}$-primary。由于 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^2 R_{\mathfrak{m}}$，选取 $h_1, \ldots, h_{n-j} \in \mathfrak{m}$，使其在 $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^2 R_{\mathfrak{m}}$ 中的像充分一般，我们有

$$e_j(I) := e_j(IR_{\mathfrak{m}}) = e\left(I + (h_1, \ldots, h_{n-j})R_{\mathfrak{m}}\right) = e\left(I + (h_1, \ldots, h_{n-j})\right).$$

(ii) 中的另一个等式证明类似，而 (iii) 是显然的：

$$e_{j-1}(I)e_{j+1}(I) := e_{j-1}(IR_{\mathfrak{m}})e_{j+1}(IR_{\mathfrak{m}}) \leq e_j(IR_{\mathfrak{m}})^2 =: e_j(I)^2.$$

(b) 对于命题 2.35 (i)，注意到高度为 n 的齐次理想自动是 $\mathfrak{m}$-primary，因此可应用 (a) 部分。对于 (iii)，注意到当 $h_1, \ldots, h_{n-j}$ 齐次且充分一般时，$\mathrm{ht}(I + (h_1, \ldots, h_{n-j}))$ 是高度为 n 的齐次理想，因而是 $\mathfrak{m}$-primary。此外，注意到对于所有 $t > 0$，$I + \mathfrak{m}^t$ 都是 $\mathfrak{m}$-primary，之后我们应用本命题的 (a)(ii)。与 (a) 部分类似，命题 2.37 (iv) 可由局部情形推出。

□

引理 2.43. 假设以下情形之一成立：

(1) L/k 是域扩张，$R = k[x_1, \ldots, x_n], \mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ $S = L[x_1, \ldots, x_n]$，且 $I \subseteq R$ 是 $\mathfrak{m}$-主理想或齐次理想。*(2)* $(R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ 是 n维正则局部环的扩张，$\mathfrak{m}S = \mathfrak{n}$，且 $I \subseteq R$ 是一个理想。

那么，对于所有使 $\sigma_j(I)$ 有定义的 $1 \leq j \leq n$，都有 $\sigma_j(I) = \sigma_j(IS)$。

证明。这些假设表明，对于每个 $\mathfrak{m}$-主初等理想 $J \subseteq R$，都有 $\lambda_R(J) = \lambda_S(JS)$。特别地，这适用于所有 $a, b, t > 0$ 对应的理想 $(I + \mathfrak{m}^t)^a \mathfrak{m}^b$；结论由定义 2.32 和 2.36 得出。□

3. 定理 A 的证明

3.1. **F-纯阈值与 Demailly-Pham 不变量**。在本小节中，我们需要 [BA17, 定理 13] 在任意特征下的渐近版本。我们的结果遵循 [BA17; DP14]，并作出必要的修改。

定义 3.1。设 k 为一个域，且 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$。R 上的**反字典序**记为 $>_{\text{rlex}}$，它是满足以下条件的单项式序：仅当存在一个指标 $0 \leq i \leq n-1$，使得 $(a_n, \ldots, a_{n-i+1}) = (b_n, \ldots, b_{n-i+1})$ 且 $a_{n-i} < b_{n-i}$ 时，$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} > \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$。**分次反字典序**记为 $>_{\text{grlex}}$，是由以下条件给出的单项式序：仅当 $\deg(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) > \deg(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})$，或者 $\deg(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) = \deg(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})$ 且 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} >_{\text{rlex}} \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ 时，$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} >_{\text{grlex}} \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$。

引理 3.2。设 k 是一个域，$R = k[x_1, \ldots, x_n]$，且 $J \subseteq R$ 是一个理想。对于 $1 \leq j \leq n$，定义 $\pi_j : R \to R/(x_{j+1}, \ldots, x_n) \cong k[x_1, \ldots, x_j]$。则

$$\text{in}_{>_{rlex}} \pi_j(J) = \pi_j(\text{in}_{>_{rlex}}(J)).$$

证明。设 $f \in J$。将 $f = g + h$ 写成 $h \in (x_{j+1}, \ldots, x_n)$ 和 $g \in k[x_1, \ldots, x_j]$。若 $g = 0$，则 $\pi_j(f) = 0$。若 $g \neq 0$，则在 $>(f)$ 中，$=$ 属于 $>(g)$。在这两种情况下，我们都有 π_j（属于 $>(f)$）$=$ 属于 $>(\pi_j(f))$。 □

下面给出一个将在本文其余部分反复使用的一般引理。

引理 3.3。设 L 是一个域，$S = L[x_1, \ldots, x_n]$，且 $J \subseteq S$ 是一个由次数为 $\leq d$ 的形式生成的 $\mathfrak{m}$-*primary* 齐次理想。则 $\mathfrak{m}^d \subseteq J$。

证明。我们首先证明 L 为无限域时的情形。首先，从 J 的生成元中选取形式 $f_1, \ldots, f_n$，使得 $(f_1, \ldots, f_n)$ 是 $\mathfrak{m}$-primary 的。若 $h_1, \ldots, h_n$ 是一般线性形式，则

$$J' := (h_1^{d-\deg(f_1)} f_1, \ldots, h_n^{d-\deg(f_n)} f_n)$$

这是一个包含于 J 中的 $\mathfrak{m}$-primary $(d, \ldots, d)$-完全交。由于 $J' \subseteq \mathfrak{m}^d$ 和 $e(J') = d^n = e(\mathfrak{m}^d)$，由定理 2.27 可得 $\overline{\mathfrak{m}^d} = \overline{\mathfrak{m}}^d \subseteq \overline{J'} \subseteq J$。

现在，令 L 为任意域，并设 $S' = L[x_1, \ldots, x_n]$。根据命题 2.26 (vii) 及无限域情形，我们有 $J = JS' \cap S \supseteq \mathfrak{m}^d S' \cap S = \mathfrak{m}^d$。□

引理 3.4 ([BA17], 定理 4)**.** 设 k 是一个无限域，$R = k[x_1, \ldots, x_n]$，且 I 是一个 $\mathfrak{m}$-主初等理想。若 $>$ 表示单项式序 $>_{rlex}$，并且 $\gamma \in \text{GL}_n(k)$ 是一般的，则对所有 $1 \leq j \leq n$，我们都有

$$\lim_{t \to \infty} \frac{e_j(\text{in}_>(\gamma^{-1} I^t))}{t^j} = e_j(I). \tag{8}$$

为使读者确信 Bivià-Ausina 的论证在任意特征下均成立，我们在下文概述其主要论证。

引理的证明 $3\ 4$ $2\ 35$ $\gamma \in {}_n\ k$ $e_j\ I\ = ..$ $\frac{}{e_j\left(\begin{smallmatrix} I+\gamma(x_n,\ldots,x_{n-j+1} \\ \gamma\ x_n \cdots\ x_{n-j+1}\end{smallmatrix}\right)}$ $J = \gamma^{-1}I$ $2\ 35$ $\gamma_t \in {}_n\ k$ 由命题 . (ii)，取 GL ( )，使得 ( )) (,,) 。令 . 由命题 . (ii)，取 GL ( )，使得 e_j(in>(J^t)) $= e$(π_j(γ_t^{-1}in>(J^t)))。根据 [Smi20, 定理 3.4 (ii)],，希尔伯特-塞缪尔重数是上半连续的。将此半连续性应用于特化 π_j(γ_t^{-1}in>(J^t)) $\rightsquigarrow$ π_j(in>(J^t)) 和 $J^t \rightsquigarrow$in>(J^t)，如 [BA17, 命题 2 和定理 4], 中所示，我们可推出

$$e(\pi_j(\mathrm{in}_>(J^t))) \geq e(\pi_j(\gamma_t^{-1}\,\mathrm{in}_>(J^t)) = e_j(\mathrm{in}_>(J^t)) \geq e_j(J^t). \tag{9}$$

由 [Mus02、推论 1.13], 等式 (9) 以及引理 3.2，我们有

$$\begin{aligned} e_j(I) = e_j(J) = e(\pi_j(J)) &= \lim_{t\to\infty} \frac{e(\pi_j(J)^t)}{t^j} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{e(\mathrm{in}_>(\pi_j(J^t))}{t^j} = \lim_{t\to\infty} \frac{e(\pi_j(\mathrm{in}_>(J^t)))}{t^j} \\ &\geq \lim_{t\to\infty} \frac{e_j(\mathrm{in}_>(J^t))}{t^j} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{e_j(J^t)}{t^j} = e_j(J). \end{aligned} \tag{10}$$

由此可知，等式 (10) 中的不等式必为等号，从而得证。 □

注3.5。 当 dim(R) ≥ 3 时，引理 3.4 中的一般坐标变换是必要的。考虑 $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ 和 $I = (xy,\ x^2 + z^2,\ x^4,\ y^4,\ z^4)$。令 $\succ$ 表示满足 $x \succ y \succ z$ 的分次反字典序。使用 Macaulay2 [Eis+ 中的 ReesAlgebra 软件包；GS], 我们计算得到 e(in$_\succ$(I^5)) $= 2000$。另一方面，我们有 $2000 = 5^3 \cdot e(I) = e(I^5)$。对于所有 $t > 0$，都有 in$_\succ$(I^{5t}) $\subseteq$ in$_\succ$(I^5)^t，因此

$$t^3 e(I^5) = e(I^{5t}) \leq e(\mathrm{in}_\succ(I^{5t})) \leq e(\mathrm{in}_\succ(I^5)^t) = t^3 e(I^5),$$

令 $\mathfrak{a}$ =in$_\succ$(I^5)。由定理 2.27，我们推出对所有 $t > 0$，$\overline{\text{in}_\succ(I^{5t})} = \mathfrak{a}^{\overline{t}}$。根据命题 2.39,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e_2(\mathrm{in}_\succ(I^t))}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{e_2(\mathrm{in}_\succ(I^{5t}))}{(5t)^2} = \frac{e_2(\mathfrak{a}^t)}{(5t)^2} = \frac{e_2(\mathfrak{a})}{5^2}.$$

为计算 $e_2(\mathfrak{a})$，我们使用命题 2.35 (ii)。设 $h = ax + by + cz$ 满足 $e_2(\mathfrak{a}) = e\left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{a}+(h) \\ h \end{smallmatrix}()\ \right)$。令 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$ 表示映射 $(x, y, z) \mapsto (ax, by, cz)$。由于 $\mathfrak{a}$ 是单项式理想，我们有 $\gamma^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, 因此

$$e\left(\frac{\mathfrak{a} + \gamma(x + y + z)}{\gamma(x + y + z)}\right) = e\left(\frac{\mathfrak{a} + (x + y + z)}{(x + y + z)}\right). \tag{11}$$

方程（11）中的量可以使用 ReesAlgebra 软件包直接计算，得到

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e_2(\mathrm{in}_\succ(I^t))}{t^2} = \frac{e_2(\mathrm{in}_\succ(I^5))}{5^2} = \frac{22}{5}.$$

利用引理 3.7 和 3.8，我们计算 $e_2(I) = 4 < \frac{22}{5}$。 —

定义 3.6。设 k 是一个域，$R = k[x_1, \dots, x_n]$，$\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$，并设 $\mathfrak{a}_\bullet$ 是由 $\mathfrak{m}$-主初等理想构成的分次系统。我们定义：

- 渐近混合重数：$e_J(\mathfrak{a}_\bullet) = \text{下极限}_m \frac{e_j(\mathfrak{a}_m)}{m^j}$。
- 渐近Demailly-Pham不变量：$E_n(\mathfrak{a}_\bullet) = \frac{1}{e_1(\mathfrak{a}_\bullet)} + \cdots + \frac{e_{n-1}}{e_1(\mathfrak{a}_\bullet) e_n(\mathfrak{a}_\bullet)}$
- 渐近奇点阈值：$c(\mathfrak{a}_\bullet) = \text{下极限}_m \frac{c(\mathfrak{a}_m)}{m}$。

在证明定理 3.9及 BA17 的渐近版本定理 13],之前，我们需要以下标准事实。

引理 3.7。设 L 是一个域，且 $S = L[x_1, \dots, x_n]$。设 I 是 S 的一个齐次理想，并令 $J \subseteq I$ 表示由 I 中次数为 $\leq d$ 的齐次形式生成的 S 的理想。若 $\operatorname{ht}(J) = n$，则 $J = I$。

证明。显然，$J \subseteq I$。令 $\mathfrak{m} := (x_1, \dots, x_n)$。为证明反向包含，注意到 $I \subseteq J + \mathfrak{m}^{d+1}$。由引理 3.3 可得

$$\overline{I} \subseteq \overline{J + \mathfrak{m}^{d+1}} \subseteq \overline{J + \mathfrak{m}^d} \subseteq \overline{J}.$$

□

引理 3.8。设 L 是一个域，且 $S = L[x_1, \dots, x_n]$。设 $J = (f_1, \dots, f_n)$ 是一个完全交，其中次数 $f_i = d_i$，且 $d_1 \leq \cdots \leq d_n$。则有如下结论：

(i) 若 L 是无限的，则对一般超平面截面 $H \subseteq$ 谱 S，有 $e(J|_H) = d_1 \cdots d_{n-1}$。*(ii)* 设 $1 \leq j \leq n$。对于 $|L|$，不作任何假设，我们有 $e_j(J) = d_1 \dots d_j$，因此 $\underline{E}_j(J) = \frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_j}$。

Proof。由于 $f_1, \dots, f_n$ 构成 S 的齐次参数系，因此有

$$e(J) = d_1 \dots d_n. \tag{12}$$

足够一般地选取 H，使得 $\operatorname{ht}(f_1, \dots, f_{n-1})|_H = n - 1$，引理 3.7 给出 $e(J|_H) = e((f_1|_H, \dots, f_{n-1}|_H))$，因此 (i) 由等式 (12) 得出。对于 (ii)，引理 2.43 表明 $e_j(J)$ 在基域扩张下不变，因此只需考虑无限域的情形。该结果由 (i) 和命题 2.35 (ii) 得出。□

定理 3.9. 设 n 为正整数且 $1 \leq l \leq n$。假设下列情形之一成立：

(1) $(R, \mathfrak{m})$ 是维数为 n 的正则局部环，当 $\operatorname{char} R = 0$ 时为优良的，并且 $I \subseteq R$ 是高度至少为 l 的理想；*(2)* k 是一个域，$R = k[x_1, \dots, x_n]$，$\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$，并且 $I \subseteq R$ 是 $\mathfrak{m}$-准素理想，或高度至少为 l 的齐次理想。

然后 $E_l(I) \leq c(I)$。

证明。我们将问题归约为多项式环上 $\mathfrak{m}$-主初等理想的情形。在情形 (2) 中，由命题 2.10 (vi) 和引理 2.43 可知，E_l，c 在域扩张下保持不变。若 J 是由 $n - l$ 个一般线性形式生成的理想，则根据命题 2.10 (iv) 和命题 2.42，$E_l(\frac{I+J}{J}) = E_l(I)$ 且 $c(\frac{I+J}{J}) \leq c(I)$，因此不妨设 $l = n$。

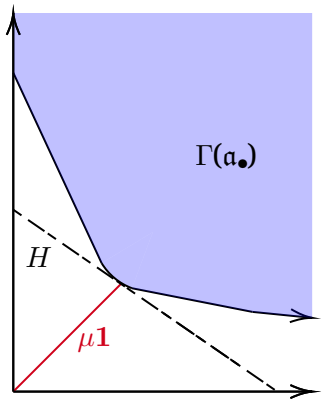

图 2. $\Gamma(\mathfrak{a}_\bullet)$，连同 $\mu\mathbf{1}$和 H。

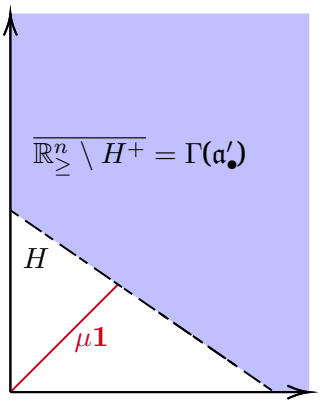

图 3. $\Gamma(\mathfrak{a}'_\bullet)$ 关于 H。

假设我们处于情形 (1)。由命题 2.10 (vi) 和引理 2.43， c, E_l 在完备化和域扩张下保持不变，因此不妨设 R 是剩余域为 k 的完备局部环。由于对任意理想 $J \subseteq R$都有 $c(I) \geq c((I+J)/J)$，我们令 J为由 $n-l$个 $\mathfrak{m}$的元素生成的理想，这些元素在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$中的像足够一般；只需证明 $c((I+J)/J) \geq E_l((I+J)/J)$，其中 $(I+J)/J$是完备正则局部环中高度为 l、维数为 l的理想。因此，不妨设 $l = n$，从而I是 $\mathfrak{m}$-主初等理想。令 $R' = k[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{m}'} = (x_1, \ldots, x_n)$。由于 I是 $\mathfrak{m}$-主初等理想，存在 $I' \subseteq R'$ 使得 $I'R = I$。再次应用命题 2.10 (vi) 和引理 2.43，得到 $c(I) = c(I'R'_{\mathfrak{m}'})$ 且 $E_n(I) = E_n(I'R'_{\mathfrak{m}'})$，因此由记号 2.9 和定义 2.40 可得 $c(I) = c(I')$ $E_n(I) = E_n(I')$。

设 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$，使得等式 (8) 成立。对 $m > 0$，令 $\mathfrak{a}_m = \mathrm{in}_>(\gamma^{-1} I^m)$。由引理 3.4 可得 $E_n(\mathfrak{a}_\bullet) = E_n(I)$，由命题 2.22 可得$c(\mathfrak{a}_\bullet) \leq c(I)$。令 $\mu = \inf\{t : t\mathbf{1} \in \Gamma\}$。由于 Γ 是凸的且 $\mu\mathbf{1} \in \partial\Gamma$，由[Roc70，推论 11.6.1] ，存在一个半空间 $H^+ \subseteq \mathbb{R}^n$ ，使得 $\Gamma \subseteq H^+$且 $\mu\mathbf{1} \in \partial H^+$。由于 Γ 在 $R^n_{\geq 0}$的元素平移下封闭，且 Γ 在 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 中的补集有界， H^+也同样如此。因此， H^+ 在 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 中的补集的闭包是一个单纯形，我们将其记为 $\mathrm{conv}(0, (a_1, 0, \ldots, 0) \ldots, (0, \ldots, 0, a_n))$。图 2 和图 3 展示了这一步。

定义一个单项式理想分次系 $\mathfrak{a}_\bullet$ by $\mathfrak{a}'_m = \{\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in mH^+\}$。根据假设 $\Gamma \subseteq H^+$，对于所有 m，我们都有 $\mathfrak{a}_m \subseteq \mathfrak{a}'_m$。因此，由命题 2.39 可得$E_n(\mathfrak{a}_\bullet) \leq E_n(\mathfrak{a}'_\bullet)$。由命题 2.16，我们还有 $c(\mathfrak{a}_\bullet) = c(\mathfrak{a}'_\bullet)$。我们可以根据数值 $a_1, \ldots, a_n$计算 $E_n(\mathfrak{a}'_\bullet)$：观察可知

$$\overline{\left(x_1^{\lceil ma_1 \rceil}, \ldots, x_n^{\lceil ma_n \rceil}\right)} \subseteq \mathfrak{a}'_m \subseteq \overline{\left(x_1^{\lfloor ma_1 \rfloor}, \ldots, x_n^{\lfloor ma_n \rfloor}\right)},$$

由引理 3.8 可得 $E_n(\mathfrak{a}'_\bullet) = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$。综上，我们有

$$E_n(I) = E_n(\mathfrak{a}_\bullet) \leq E_n(\mathfrak{a}'_\bullet) = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = c(\mathfrak{a}'_\bullet) = c(\mathfrak{a}_\bullet) \leq c(I).$$

□

注记 3.10。 图 2 和图 3 所描绘的洞见早于 Demailly、Pham 和 Bivià-Ausina 的工作，见证明 [FEM04,定理 1.1]。

推论 3.11。 设 k 为不可数无限域，$R = k[x_1, \ldots, x_n]$，且 I 为一个$\mathfrak{m}$-初齐次理想。令 $>$ 表示分次反字典序，并令 $\mathfrak{a}_m := \operatorname{gin}(I^m)$。最后，令 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的标准单位向量。如果 $E_n(I) = c(I)$，那么

$$\overline{\mathbb{R}^n_{\geq 0} \setminus \Gamma(\mathfrak{a}_\bullet)} = \operatorname{conv}\left(\mathbf{0}, e_1(I)\mathbf{b}_1, \frac{e_2(I)}{e_1(I)}\mathbf{b}_2, \ldots, \frac{e_n(I)}{e_{n-1}(I)}\mathbf{b}_n\right). \tag{13}$$

证明。 根据构造，$>$在齐次理想上与反字典序一致。因此，我们可以非常一般地选择 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$，使得公式 (8) 成立，并且对于所有 $m > 0$，$\operatorname{in}_>(\gamma^{-1} I^m) = \operatorname{gin}_>(I^m)$。在选择了$\gamma$之后，令 $\mathfrak{a}_\bullet, \mathfrak{a}'_\bullet$ 如定理 3.9 中所述。

假设 $E_n(I) = c(I)$。那么我们还有 $E_n(\mathfrak{a}_\bullet) = E_n(\mathfrak{a}'_\bullet)$。根据 [BA17，命题 10]，，我们进一步得到，对于所有 $1 \leq j \leq n$，都有 $e_j(I) = e_j(\mathfrak{a}_\bullet) = e_j(\mathfrak{a}'_\bullet)$。特别地，$e_n(\mathfrak{a}_\bullet) = e_n(\mathfrak{a}'_\bullet)$，因此根据 [Mus02，定理 2.12 和引理 2.13]，，有 $\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n_{\geq 0} \setminus \Gamma(\mathfrak{a}_\bullet)) = \operatorname{vol}(\mathbb{R}^n_{\geq 0} \setminus \Gamma(\mathfrak{a}'_\bullet))$。由于 $\Gamma(\mathfrak{a}_\bullet)$ $\Gamma(\mathfrak{a}'_\bullet)$ 是具有正体积的闭凸集，因此可得 $\Gamma(\mathfrak{a}_\bullet) = \Gamma(\mathfrak{a}'_\bullet)$。由于一般初始理想是 Borel 不变的，我们有 $a_1 \leq \cdots \leq a_n$，故对于所有 $1 \leq j \leq n$，都有 $e_j(\mathfrak{a}'_\bullet) = a_1 \ldots a_j$，从而证明了该结论。□

注记 3.12。 方程 (13) 是 $c(I) = E_n(I)$ 的必要条件，但不是充分条件。根据 [May14]，在特征零的情形下，对于任意齐次完全交 $J = (f_1, \ldots\ldots, f_n)$，方程 (13) 都成立。

事实上，等式 (13) 对正特征下的任意齐次完全交都成立，不过必须对 Mayes 在 [May14] 中的论证稍作修改。特别是，原文中的引理 3.6 在正特征下并不成立：在环 $\mathbb{F}_p[x, y]$ 中，我们有 $\operatorname{gin}(x^p, y^p) = (x^p, y^p)$。取而代之的是，可以使用定理 2.29。详细内容将见作者的学位论文。

例 3.13 ([Fer26])。 这里我们给出一个反例，反驳 [Kim21, Question 1.3]；它也构成了对正特征下相应命题的反例。设 k 为一个域，并令 $R = k[x, y, z]$。思路是从一个理想$\mathfrak{c} \subseteq R$ 以及一个一般超平面 H 出发，使等式 $c(\mathfrak{c}) - c(\mathfrak{c}|_H) = e_2(\mathfrak{c})\, e_3(\mathfrak{c})$ 成立，然后构造一个理想 $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{c}$，使得 $c(\mathfrak{a}) = c(\mathfrak{c})$ $c(\mathfrak{a}|_H) = c(\mathfrak{c}|_H)$ $e_2(\mathfrak{a}) = e_2(\overline{\mathfrak{c}})$，且 $e(\mathfrak{a}) < e(\mathfrak{c})$。

我们将定义一族满足所需条件的单项式理想，并在图4和图5中将其画出。令 $3 \leq a < b$。我们定义辅助理想 $\mathfrak{b} =$

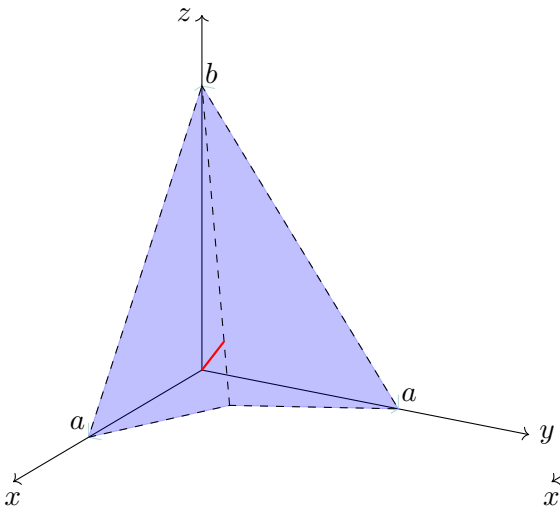

图4. $\Gamma(\mathfrak{c})$，其中用红色表示计算 $c(\mathfrak{c})$的 $\mu\mathbf{1}$。

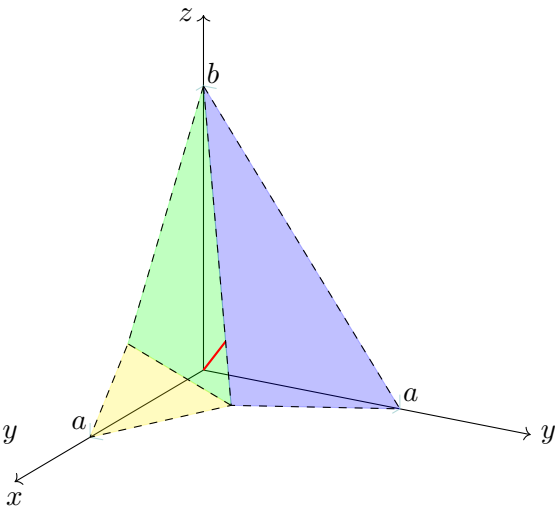

图5. $\Gamma(\mathfrak{a})$，其中用红色表示计算 $c(\mathfrak{a})$的 $\mu\mathbf{1}$。

$(x^a,\ xy,\ y^a)$。设 $\mathfrak{c}=(\mathfrak{b},\ z^b)$ 和 $\mathfrak{a}=(\mathfrak{c},\ zx^{a-1})$。由于 $a\geq 3$，我们有 $\mathfrak{a}\subseteq\overline{(x^2,\ y^2,\ z^b)}$。利用命题 2.16，我们计算得到

$$1+\frac{1}{b}=c((xy,z^b))\leq c(\mathfrak{c})\leq c(\mathfrak{a})\leq c(\overline{(x^2,y^2,z^b)})=1+\frac{1}{b}.$$

与注3.5中一样，线性形式 $h=x-y-z$ 足够一般，可以计算$e_2(\mathfrak{a})$和 $\max_\ell c(\mathfrak{a}|_{\ell=0})$。将 R/hR 与 $k[x,y]$ 等同，并令 $\mathfrak{a}'$，$\mathfrak{b}'$，$\mathfrak{c}'$ 表示 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ 在 R/hR中的像，我们有

$$\mathfrak{b}'\subseteq\mathfrak{c}'\subseteq\mathfrak{a}'=(\mathfrak{b}',(x+y)x^{a-1},(x+y)^b)\subseteq\overline{\mathfrak{b}'},$$

因此我们有$\overline{\mathfrak{a}'}=\overline{\mathfrak{b}'}=\overline{\mathfrak{c}'}$，这意味着 $e_2(\mathfrak{a})=e_2(\mathfrak{c})$且 $c(\mathfrak{a}')=c(\mathfrak{c}')$。

分别由引理 3.3和引理 3.8可得 $\mathfrak{b}'=(xy,\ x^a+y^a)$以及$\overline{e(\mathfrak{b}')=2a}$。类似的计算可得 $\mathfrak{c}=(xy,\ x^a+y^a,\ z^b)$，因此 $e(\mathfrak{c})=2ab$。另一方面，我们断言包含关系 $\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{a}$ 是严格的——特别地，我们断言$zx^{a-1}\notin\mathfrak{c}$。为此，我们注意到，$k[x,z]\cap\mathfrak{c}$ 中的单项式恰好是那些x^iz^j 使得 $i/a+j/b\geq 1$成立的单项式，并且有$(a-1)/a+1/b<1$。由定理 2.27可知，$e(\mathfrak{a})<e(\mathfrak{c})$。由此我们推得

$$c(\mathfrak{a})=1+\frac{1}{b}=c(\mathfrak{c})+\frac{e_2(\mathfrak{c})}{e(\mathfrak{c})}<c(\mathfrak{a}|_{h=0})+\frac{e_2(\mathfrak{a})}{e(\mathfrak{a})},$$

违反猜想中的不等式。

鉴于 [Kim21, 命题2.4 (i)], ，我们也可以考虑较弱的界 $c(I)-c(I|_H)\geq\frac{1}{\mathcal{L}_0(I)}$，其中 $\mathcal{L}_0(I)$ 是 Łojasiewicz 指数（定义 4.5）。这一结论确实成立；见引理 4.6。

4. 完全交情形下的定理 B

4.1. **修改下奇点阈值的变化**。在本小节中，固定使用以下记号。

假设 4.1。设 k 是一个域，$R = k[x_1, \dots, x_n]$，并令 $\mathfrak{m}$ 表示齐次极大理想。设 $I \subseteq R$ 是一个 $\mathfrak{m}$-初齐次理想。写作$I = I_1 + \cdots + I_r$，其中 I_j 由次数为 d_j 的形式生成，且 $d_1 < \cdots < d_r$。

引理 4.2 ([BS15], 引理 3.2)。设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，并令 $\mathfrak{m}$ 表示齐次极大理想。对于任意 e、$t \in \mathbb{Z}^+$，有

$$(\mathfrak{m}^{[p^e]} : \mathfrak{m}^t) = \begin{cases} R & t \geq np^e - n + 1 \\ \mathfrak{m}^{[p^e]} + \mathfrak{m}^{np^e - n + 1 - t} & t < np^e - n + 1 \end{cases}$$

更一般地，我们有如下结论。

引理 4.3。设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$。设 v 是 R 上的单项式赋值，满足$v(x_i) \geq 0$ 对所有 $1 \leq i \leq n$均成立。对于 $\lambda \in \mathbb{R}^+$，令 $\mathfrak{a}_\lambda$ 表示理想 $\{f \in R : \ v(f) \geq \lambda\}$，并令 $\mathfrak{a}_\lambda^+ = \{f \in R : \ v(f) > \lambda\}$。设 $q \in \mathbb{Z}^+$、$\lambda \in \mathbb{R}^+$。则有

$$((x_1^q, \dots, x_n^q) : \mathfrak{a}_\lambda) = (x_1^q, \dots, x_n^q) + \mathfrak{a}^+_{(q-1)v(x_1 \dots x_n) - \lambda}. \tag{14}$$

证明。论证与引理 4.2 相同。设 $m \notin (x_1^q, \dots, x_n^q)$ 是一个单项式。那么 $m \mid (x_1 \cdots x_n)^{q-1}$，因此 $\mathfrak{a}_\lambda m \subsetneq (x_1^q, \dots, x_n^q)$ 当且仅当 $\frac{(x_1 \dots x_n)^{q-1}}{m} \in \mathfrak{a}_\lambda$，而这又当且仅当 $v((x_1 \cdots x_n)^{q-1}) - v(m) \leq \lambda$。我们已经证明，等式 (14) 的两边包含相同的单项式；两边都是单项式理想，因此结论成立。□

引理 4.4 ([Bai25], 引理 4.2)。设 k 是一个特征为 $p > 0$ 的域，设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，且 $I \subseteq R$ 是一个齐次理想。对于由线性形式 ℓ 切出的超平面 H，我们令 $I|_H$ 表示 I 在 $R/\ell R$ 中的像。在这种情况下，我们有

$$\nu_{I|_H}(p^e) \leq \max\{r : I^r \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]} + \mathfrak{m}^{(n-1)(p^e-1)+1}\},$$

定义 4.5. 设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，并设 $I \subseteq R$ 为一个理想。I 的**Łojasiewicz 指数** 记为 $\mathcal{L}_0(I)$，等于使得 $\mathfrak{m}^t \subseteq I$ 成立的最小整数 t，否则在 I 不是 $\mathfrak{m}$-准素的情形下等于 ∞。

引理 4.6. 设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，并设 $I \subseteq R$ 为一个理想。若 $H \subseteq \operatorname{Spec} R$ 是一个超平面，则有 $c(I) - c(I|_H) \geq \frac{1}{\mathcal{L}_0(I)}$。

证明. 若 $\mathcal{L}_0(I) = \infty$，则无需证明，故设 $\mathcal{L}_0(I) = d < \infty$。

我们首先在特征 $p > 0$下证明该断言。结合引理 4.2 与引理4.4，我们有

$$\nu_{I|_H}(p^e) \leq \max\{s : \mathfrak{m}^{p^e} I^s \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}\}.$$

因此，我们有 $\max\{s : \ \mathfrak{m}^{p^e} I^s \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}\} \leq \nu_I(p^e) - \left\lfloor \frac{p^e}{d} \right\rfloor$，这意味着$\nu_{I|_H}(p^e) \leq \nu_I(p^e) - \left\lfloor \frac{p^e}{d} \right\rfloor$。除以 p^e并令 $e \to \infty$趋于极限，即得所要证明的结果。

现在我们在特征零的情形下证明这一断言。由命题 2.8 可得该结果；在这一情形下，我们将详细说明其中的细节（尽管在下文中我们会更加简略）。设 $A \subseteq k$ 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数，且$J \subseteq A[x_1, \dots, x_n]$ 是满足 $JR = I$的理想。通过向 $\mathbb{Z}$中添入生成集 I中出现的域系数，总可以构造出这样的子环 A；我们还将选取 A，使其包含线性形式 ℓ的系数。若 μ 是 A的极大理想，则令 I_μ 表示 J在 $(A/\mu)[x_1, \dots, x_n]$中的像。分别对 I 和 $I|_H$应用命题 2.8，我们得到

$$c(I) - c(I|_H) = \lim_{\substack{\mu \in \operatorname{Spec} A \\ \operatorname{char} A/\mu \to \infty}} c(I|_\mu) - c(I_\mu|_{H_\mu}) \geq 1/d.$$

□

推论 4.7. 设满足假设 *4.1* 的条件，并令 $H \subseteq \operatorname{Spec} R$ 为由线性形式 ℓ 切出的超平面。那么 $c(I) - c(I|_H) \geq 1/d_r$。

证明。 由引理 3.3 可得 $\mathfrak{m}^{d_r} \subseteq I$，因此 $\overline{\mathcal{L}}_0(I) \leq d_r$。结论由引理 4.6 得出。□

引理 4.8. 设满足假设 *4.1* 的条件。假设 $r = 2$。则有$c(I) = \frac{n}{d_2} + c(I_1)\frac{d_2 - d_1}{d_2}$。特别地，对于任意 $0 \leq s \leq n$，有 $c(I) = \frac{s}{d_1} + \frac{n-s}{d_2}$ 当且仅当 $c(I_1) = \frac{s}{d_1}$。

证明。 我们先在正特征下证明该结论。由引理 3.3 可得$\mathfrak{m}^{d_2} \subseteq I$，因此 $I \subseteq I_1 + \mathfrak{m}^{d_2} \subseteq I$，从而 $c(I) = c(I_1 + \mathfrak{m}^{d_2})$。因此，我们有

$$\nu_{\overline{I}}(p^e) = \max\left\{a + b : I_1^a \mathfrak{m}_\mu^{bd_n} \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}\right\} = \max\{a + b : I_1^a \not\subseteq (\mathfrak{m}_p^{[p^e]} : \mathfrak{m}_p^{bd_n})\}.$$

由引理 4.2，我们得到

$$\nu_{\overline{I}}(p^e) = \max\{a + b : I_1^a \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]} + \mathfrak{m}^{np^e - n + 1 - bd_2}\}. \tag{15}$$

理想 I_1^a 由次数为 ad_1的元素生成，因此 $I_1^a \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]} + \mathfrak{m}^t$ 当且仅当 $I_1^a \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}$且 $ad_1 < t$。基于这一点，我们改进方程 (15)：

$$\nu_I(p^e) = \max_{0 \leq a \leq \nu_{I_1}(p^e)} a + \frac{np^e - n - ad_1}{d_2}. \tag{16}$$

方程 (16) 中被最大化的量是关于 a的增函数，因此最大值在 $a = \nu_{I_1}(p^e)$ 处取得，并且

$$\nu_{\overline{I}}(p^e) = \frac{np^e - n}{d_2} + \nu_{I_1}(p^e)\frac{d_2 - d_1}{d_2}.$$

两边除以 p^e，并令 $e \to \infty$，得到

$$c(I) = \frac{n}{d_2} + c(I_1)\frac{d_2 - d_1}{d_2}.$$

对于特征零的情形，我们可以像推论 4.7 中那样扩展到正特征，并计算

$$c(I) = \lim_{\mu} c(I_\mu) = \lim_{\mu} \left(\frac{n}{d_2} + c(I_{1,\mu}) \frac{d_2 - d_1}{d_2} \right) = \frac{n}{d_2} + c(I_1) \frac{d_2 - d_1}{d_2}.$$

□

4.2. **归纳设置**。 在本小节中，我们开始证明定理 5.1，讨论 I 是完全交且 $k = k$的情形。

假设 *4.9*。我们假设一个与假设 *4.1* 类似的设置。设 k 为代数闭域。设 $a_1, \ldots, a_r, d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{Z}^+$。对于 $1 \leq i \leq r$，令 x_i 表示变量组 $x_{i,1}, \ldots, x_{i,a_i}$，并令 $R = k[x_1, \ldots, x_r]$。令 $n = a_1 + \cdots + a_r = \dim R$。设 $I \subseteq R$ 为形如 $(f_1, \ldots, f_{r,a_r})$ 的完全交，且满足 $f_{i,j}$ 是一个 d_i- 形式。对于 $1 \leq j \leq r$，记 $I_j = (f_{j,1}, \ldots, f_{j,a_j})$。令 w_d 表示满足 $w_d(x_{i,j}) = 1/d_i$ 的单项式赋值。令 $\mathfrak{D}$ 表示理想 $(x_1^{d_1}, \ldots, x_r^{d_r})$，它与满足 $w_d(z) \geq 1$ 的元素 z 的集合一致。

假设 4.10。 假设满足假设 *4.9* 中的设定。我们对理想 I 定义如下条件：

$$(\dagger) \qquad I_1 \text{ is extended from } k[\mathbf{x}_1] \text{ and } I \subseteq \mathfrak{D} + (\mathbf{x}_1)$$

定义 4.11。 对于 $r \in \mathbb{Z}^+$，我们定义陈述 A_r, B_r。

(A_r) 对于假设 4.9 中的所有 I，若 $E_n(I) = c(I)$，则 there exists $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$such that $\gamma I \subseteq \mathfrak{D}$.

(B_r) For all I as in Assumption 4.9, if $E_n(I) = c(I)$ then 存在 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$，使得 γI 满足方程 (†)。

本节的目标是证明对所有 r，都有 A_r。我们通过以下步骤实现这一目标：

(1) A_1, A_2 成立；(2) 对于 $r \geq 3$，A_{r-1} 与 A_2 结合可推出 B_r；(3) 对于 $r \geq 3$，B_r 可推出 A_r。

步骤 (1) 的证明很简短，但步骤 (2) 和 (3) 将各自安排一个专门的小节。

证明 A_1。若 I 是由次数为d 的形式生成的 $\mathfrak{m}$-初等完全交，其中某个 d，根据引理 3.3，我们有 $I = \mathfrak{m}^d$。 □

注 4.12。 当 $r = 1$时，上述论证表明，对于 I的所有取值，$c(I) = E_n(I)$均成立。遗憾的是，这意味着无法修改归纳步骤A_2，$A_{r-1} \implies A_r$ 的证明来证明 $A_1 \implies A_2$。因此，我们扩大基例的范围。

为了证明 A_2，我们引入本质维数的概念。

定义 4.13（本质维数）。设 $J \subseteq R = k[x_1, \dots, x_d]$ 是一个齐次理想。本质维数 ess(J) 等于满足以下条件的最小 r：存在如下线性形式 $\ell_1, \dots, \ell_r$，使得 J 可由 $I \subseteq k[\ell_1, \dots, \ell_r]$ 扩张得到。

我们有如下结果。

命题 4.14 ([Bai25], 命题 3.3)。设 k 为代数闭域，$R = k[x_0, \dots, x_n]$，且 $J \subseteq R$ 为齐次理想。令 $r = \mathrm{ht}(J)$。设 $L = (\ell_{r+1}, \dots, \ell_n)$，其中诸 ℓ_i 为一般选取。对 $r \le t \le n$，令 $L_t = (\ell_{t+1}, \dots, \ell_n)$ 以及 $J_t = \frac{J+L_t}{L_t}$。则对所有 $r \le t \le n$，我们有本质维数$(J_t) = \max(t+1,$ 本质维数$(J))$。

证明 A_2。由引理 4.8，若 $c(I) = E_n(I)$，则 $c(I_1) = a_1/d_1$。由 [FEM03在特征零下的定理3.5] 以及 [Bai25在正特征下的定理3.17]，可得本质维数$(I_1) = a_1$。由 [Bai25的引理 3.18]，存在 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$，使得 $\gamma(I_1) = (\mathbf{x}_1)^{d_1}$，从而 $\gamma I \subseteq (\mathbf{x}_1)^{d_1} + \mathfrak{m}^{d_2} \subseteq \mathfrak{D}$。□

4.3. 步骤（2）：由 $r \ge 3$、A_{r-1} 与 A_2 结合可得 B_r。

引理 4.15. 假设满足假设 *4.9* 的设定，并且 $r \ge 3$、$c(I) = E_n(I)$。若 A_{r-1} 成立，则存在 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$ 使得 $\gamma I_1 = (\mathbf{x}_1)^{d_1}$。

证明。注意，由引理 3.8 可知 $E_n(I) = a_1/d_1 + \cdots + a_r/d_r$。令 L 为由 $a_3 + \cdots + a_d$ 个一般线性形式生成的 R 的理想。由于 I 是完全交，$I_1 + I_2 + L$ 是 $\frac{\mathfrak{m}}{L}$-primary，因此由引理 3.7 可得 $c(R/L, \frac{I+L}{L}) = c(R/L, \frac{I_1+I_2+L}{L})$。因此，通过反复应用推论 4.7，我们得到

$$c(I) \ge c\left(R/L, \frac{I_1 + I_2 + L}{L}\right) + \frac{a_3}{d_3} + \cdots + \frac{a_r}{d_r}. \tag{17}$$

假设 $c(I) = E_n(I)$，我们有

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} \le c\left(R/L, \frac{I_1 + I_2 + L}{L}\right) \le \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2},$$

其中，左侧由定理 3.9 得出，右侧由等式（17）得出。因此两个不等式均为等式，故由 A_2 的证明可知 ess $\left(\frac{I_1+L}{L}\right) = a_1$。由命题 4.14 可得 ess$(I_1) = a_1$。结合 [Bai25，引理 3.18]，即得结论。□

引理 4.16. 设满足假设 *4.9* 中的设定。假设 $c(I) = E_n(I)$。那么存在 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$，使得 γI 满足等式(†)。

证明。由引理 4.15，可设 I_1 是从 $k[\mathbf{x}_1]$ 延拓而来的。令 $\succ$ 表示由单项式赋值 $w(x_{1,i}) = 0$ 和 $w(x_{i,j}) = 1$ 对 $i \ge 2$ 所诱导的单项式偏序。对于 $2 \le i \le r$、$1 \le j \le a_i$，令 $g_{i,j} :=$ 属于 $\succ(f_{i,j})$。由于 I 是完全交，我们有 $f_{i,j} \notin \sqrt{I_1} = (\mathbf{x}_1)$，因此 $g_{i,j} \notin (\mathbf{x}_1)$，并且还有 $f_{i,j} - g_{i,j} \in (\mathbf{x}_1)$。注意，

$$\mathrm{in}_\succ(I) \supseteq I_1 + \mathrm{in}_\succ(I_2 + \cdots + I_r) \supseteq I_1 + (g_{2,1}, \dots, g_{r,a_r}). \tag{18}$$

令 I' 表示方程 (18) 的右端。由于 $g_{i,\,j}$ 和 $f_{i,\,j}$ 模 $(\mathbf{x}_1) = \sqrt{I_1}$ 有相同的像，理想 I' 是完全交。特别地，

I' 是类型为 $(d_1, \dots, d_1, \dots, d_r, \dots, d_r)$ 的完全交。由引理 3.8 及
$a_1 \qquad\qquad a_r$
由命题 2.22，我们有

$$E_n(I) = E_n(I') \leq c(I') \leq c(\mathrm{in}_\succ(I)) \leq c(I) = E_n(I). \tag{19}$$

由于 $I_1 = (\mathbf{x}_1)^{d_1}$，我们有 $c(I_1) = a_1/d_1$。由于 I_1 和 $J := (g_{2,1}, \dots, g_{r,a_r})$ 是根据互不相交的变量集定义的，由 [TXZ24, 定理 2.4 (1)]，我们有

$$c(R, I') = c(k[\mathbf{x}_1], I_1) + c(k[\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r], J) = \frac{a_1}{d_1} + c(k[\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r], J). \tag{20}$$

由方程 (19) 和 (20) 可得 J 是 $k[\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r]$ 中的一个完全交，并满足 $E_{a_2+\cdots+a_r}(J) = c(J)$。根据 A_{r-1}，存在 $\gamma \in \mathrm{GL}_{n-a_1}(k)$，使得 $\gamma J \subseteq (\mathbf{x}_2^{d_2}, \dots, \mathbf{x}_r^{d_r})$。

我们定义 $\gamma' := \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{0}^{a_1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$，并声称 $\gamma' I$ 满足方程 (†)。根据构造，$\gamma' I'$ 满足方程 (†)。由于对于所有 $2 \leq i \leq r$，$1 \leq j \leq a_i$，都有 $g_{i,j} - f_{i,j} \in (\mathbf{x}_1)$，我们有

$$\gamma'(I_2 + \cdots + I_r) \subseteq \gamma'(g_{1,1}, \dots, g_{r,a_r}) + (\mathbf{x}_1),$$

这证明了 $\gamma' I$ 也满足方程（†）。 □

注 4.17。在引理 4.16 的证明中，我们使用假设 A_{r-1} 来证明 $I|_H \subseteq \mathfrak{D}|_H$。该条件是必要的，但并不足以保证 $I \subseteq \mathfrak{D}$ ——即使 I 也满足方程（†）。例如，考虑理想 $I = (x^2, y^3 + xyz, z^7)$ 和 $\mathfrak{D} = (x^2, y^3, z^7)$。

4.4. 步骤（3）：B_r 蕴含 A_r。

4.4.1. 证明概要。根据 B_r，满足假设 4.9 且具有 $c(I) = E_n(I)$ 的任意理想 I 都可以写成如下形式

$$I = (f_{1,1}, \dots, f_{1,a_1}) + ((f'_{2,1} + f''_{2,1}) + \cdots + (f'_{r,a_r} + f''_{r,a_r}))$$

其中 $f'_{i,j} \in k[\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r]$ 以及 $f''_{i,j} \in (\mathbf{x}_1)$，而 $f_{1,1}, \dots, f_{1,a_1}, f'_{2,1}, \dots, f'_{r,a_r}$ 均包含于 $\mathfrak{D}$ 中，并构成一个正则序列。若对于所有 i, j 都有 $f''_{i,j} \in \mathfrak{D}$，则 $I \subseteq \mathfrak{D}$，且由命题 2.39 可知 $I = \mathfrak{D}$，如所需。

为处理 $I \not\subseteq \mathfrak{D}$ 的情形，我们假设 I 尽可能接近 $\mathfrak{D}$，同时不满足 $I \subseteq \mathfrak{D}$。具体而言，我们考虑一个理想 I，它有唯一的指标 $2 \leq m \leq r-1$ 满足 $f''_{i,j} = 0$ 对所有 $i \neq m$ 都成立，且 $f'_{i,j} = x_{i,j}^{d_i}$。我们还假设，对于这个固定的指标 m，$f''_{m,j}$ 不全为零，并且 $f''_{m,j}$ 的任何单项式项都不包含在 $\mathfrak{D}$ 中。由于 I 的结构（相对而言）较为简单，我们能够运用正特征论证直接证明 $c(I) > E_n(I)$（引理 4.29）。

在一般情形（引理 4.28）中，我们证明：任何满足等式（†）但带有 $I \not\subseteq \mathfrak{D}$ 的完全交都可以退化到一个理想 I'，该理想如上一节所述：接近 $\mathfrak{D}$，同时满足 $I' \not\subseteq \mathfrak{D}$。由命题 2.22，我们有 $c(I) \geq c(I') > E_n(I') = E_n(I)$。

4.4.2. 构造退化序。

记号 4.18. 设 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ 表示 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基向量。对于 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$，令 $|\mathbf{u}| = u_1 + \cdots + u_n$。对于 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$，我们还定义 $\nu_{\mathbf{d}} \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$ 为 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) = \frac{u_1}{d_1} + \cdots + \frac{u_n}{d_n}$。

引理 4.19. 设 $0 < d_1 < \cdots < d_n \in (\mathbb{Z}^+)^n$，并令 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$。设 $S \subseteq (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$。记为 $S = S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_{n-1}$。假设 S 满足以下条件：
(1) 对所有 $\mathbf{u} \in S_i$，都有 $|\mathbf{u}| = d_i$。 *(2)* 对所有 $\mathbf{u} \in S$，要么 $u_1 \geq 1$，要么 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) \geq 1$。 *(3)* 对所有 $2 \leq i \leq n-1$，都有 $d_i \mathbf{b}_i \notin S_i$。 *(4)* 存在 $\mathbf{u} \in S$，使得 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) < 1$（因此 $u_1 \geq 1$）。

那么，存在一个线性映射 $\lambda \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ 以及唯一的指标 $2 \leq m \leq n-1$，使得

（***A.i***）对所有的 $2 \leq i \leq n-1$、$i \neq m$，$\mathbf{u} \in S_i$，我们都有 $\lambda(\mathbf{u}) < \lambda(d_m \mathbf{b}_m)$。（***A.ii***）我们有

$$\max_{\mathbf{u} \in S_m} \lambda(\mathbf{u}) = \lambda(d_m \mathbf{b}_m). \tag{21}$$

（***A.iii***）对于在方程（21）中取得最大值的任意 $\mathbf{u}$，我们有 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) < 1$，并且 $u_1 \geq 1$。

为证明引理 4.19，我们构造一列辅助线性映射 $\lambda_0, \dots, \lambda_s \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$。

引理 4.20。假设满足引理 *4.19* 的设定。存在一个线性映射 $\lambda_0 : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$，使得：

（*B.i*）对所有 $2 \leq i \leq n-1$，$u \in S_i$，我们有 $\lambda_0(u) \leq \lambda_0(d_i b_i)$。（*B.ii*）对于 $u \in S_i$，若 $\lambda_0(u) = \lambda_0(d_i b_i)$，则 $\nu_{\mathbf{d}}(u) \leq 1$。（*B.iii*）对于 $u \in S_i$，若 $\lambda_0(u) = \lambda_0(d_i b_i)$ 且 $u_1 \geq 1$，则 $\nu_{\mathbf{d}}(u) < 1$。（*B.iv*）存在一个指标 $2 \leq j \leq n-1$ 以及某个 $u \in S_j$，使得 $u_1 \geq 1$ 且 $\lambda_0(u) = d_j \lambda_0(b_j)$。

证明。 首先，设

$$t_0 := \min_{\mathbf{u} \in S \text{ with } u_1 \geq 1} \frac{\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) - 1}{u_1}. \tag{22}$$

我们定义 $\lambda_0 : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$ 如下

$$\lambda_0(\mathbf{u}) = t_0 u_1 - \nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}).$$

我们声称 λ_0 满足（B.i）-（B.iv）。

（B.i） 设 $2 \leq i \leq n-1$，$\mathbf{u} \in S_i$。我们对 $\lambda_0(\mathbf{u}) \leq \lambda_0(d_i \mathbf{b}_i)$ 的证明分为两种情况。

$u_1 = 0$：根据引理 4.19 的假设 (2)，我们有 $\lambda_0(\mathbf{u}) = -\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) \leq -1$。$u_1 \geq 1$：我们有 $\lambda_0(\mathbf{u}) \leq \left(\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u})_{u_1}^{-1}\right) u_1 - \nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) = -1$。性质 (B.i) 随即由以下事实推出：对所有 $2 \leq i \leq n-1$，$\lambda_0(d_i \mathbf{b}_i) = \nu_{\mathbf{d}}(d_i \mathbf{b}_i) = -1$。

（B.ii）首先，我们注意到，如果 $\lambda_0(\mathbf{u}) = \lambda_0(d_i\mathbf{b}_i) = -1$，那么

$$\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) = t_0u_1 - \lambda_0(\mathbf{u}) = 1 + t_0u_1. \tag{23}$$

根据引理 4.19 的假设（4），存在$\mathbf{u} \in S$，使得 $u_1 \geq 1$ 且$\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) < 1$。由此可知，方程（22）中的最小值为负，从而证明了（B.ii）。

（B.iii）由方程（23）以及$t_0u_1 < 0$这一事实，即可得出（B.iii）中的结论。

（B.iv）如果$\mathbf{u} \in S_j$ 实现了方程（22）中的最小值，那么

$$\lambda_0(\mathbf{u}) = \left(\frac{\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) - 1}{u_1}\right) u_1 + \nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) = -1 = \lambda_0(d_j\mathbf{b}_j).$$

□

记号 4.21。沿用引理 *4.19* 中的记号，并令 λ_0 如引理 *4.20* 所述。对于 $2 \leq i \leq n-1$, 我们定义

$$S_i^{(0)} = \{\mathbf{u} \in S_i : \lambda_0(\mathbf{u}) = \lambda_0(d_i\mathbf{b}_i)\}$$

并令 $S^{(0)} = S_2^{(0)} \sqcup \cdots \sqcup S_{n-1}^{(0)}$。

由引理 4.20 可知，我们对 $S^{(0)}$ 有一定的掌握。

- 根据定义，我们有 $S_{(0)} \subseteq S$。
- 由（B.ii）和（B.iii），对于每个 $\mathbf{u} \in S_{(0)}$，我们都有 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) \leq 1$，且等号成立当且仅当 $u_1 = 0$。
- 由（B.iv），$S_{(0)}$ 非空。特别地，$S_{(0)}$ 包含一个元素 $\mathbf{u}$，满足$u_1 \geq 1$。

引理 4.22。采用记号 *4.21* 中的记号。存在一个线性映射$\lambda_1 : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$，使得：

（*C.i*）对于所有 $2 \leq i \leq n-1$，若 $\boldsymbol{u} \in S_i^{(0)}$ 且 $u_1 = 0$，则 $\lambda_1(\boldsymbol{u}) < \lambda_1(d_i\boldsymbol{b}_i)$。
（*C.ii*）对于所有 $2 \leq i \leq n-1$，若 $\boldsymbol{u} \in S_i^{(0)}$ 且 $u_1 \geq 1$，则有 $\lambda_1(\boldsymbol{u}) \leq \lambda_1(d_i\boldsymbol{b}_i)$。
（*C.iii*）存在一个指标 $2 \leq j \leq n-1$ 和某个 $\boldsymbol{u} \in S_j^{(0)}$，使得 $u_1 \geq 1$ 且$\lambda_1(\boldsymbol{u}) = \lambda_1(d_j\boldsymbol{b}_j)$。

证明。我们设

$$t_1 := \min_{2\leq i\leq n-1} \min_{\substack{\mathbf{u}\in S_i^{(0)} \\ \text{with } u_1\neq 0}} \frac{d_n^2u_2 + \cdots + d_n^nu_n - d_id_n^i}{u_1}, \quad \lambda_1(\mathbf{u}) := t_1u_1 - d_n^2u_2 - \cdots - d_n^nu_n. \tag{24}$$

我们断言 λ_1 满足性质（C.i）-（C.iii）。

（C.i） 根据假设（2）和（B.ii），我们有 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) \leq 1$。因此，我们推出

$$1 \geq \nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) = \frac{u_1}{d_1} + \cdots + \frac{u_i}{d_i} \geq \frac{u_1 + \cdots + u_i}{d_i}. \tag{25}$$

若 $u_1+\cdots+u_i=d_i$，则方程（25）中的每个不等式均为等式，从而 $\mathbf{u}=d_i\mathbf{b}_i$。这将违反假设（3），因此必定存在某个指标 $i<j\le n$ 使得 $u_j\ge 1$。于是我们有

$$\lambda_1(\mathbf{u})=-d_n^2u_2-\cdots-d_n^nu_n\le -d_n^j<-d_id_n^i=\lambda_1(d_i\mathbf{b}_i).$$

（C.ii）我们计算

(26)
$$\lambda_1(\mathbf{u})\le\left(\frac{d_n^2u_2+\cdots+d_n^nu_n-d_id_n^i}{u_i}\right)u_i-d_n^2u_2-\cdots-d_n^nu_n=-d_id_n^i=\lambda_1(d_i\mathbf{b}_i).$$

（C.iii）由（B.iv）可知，集合 $\{\mathbf{u}\in S^{(0)}:u_1\ge 1\}$ 非空。若$\mathbf{u}$ 在方程（24）中取得最小值，则方程（26）中的不等式取等号。

□

记号 4.23（涵盖记号 4.21）。设 $k\ge 0$。假设 $\lambda_0,\dots,\lambda_k$ 已定义。对于 $1\le\ell\le k$，$2\le i\le n-1$，我们定义

$$S_i^{(\ell)}=\{\mathbf{u}\in S_i^{\ell-1}:\lambda_\ell(\mathbf{u})=d_i\lambda_\ell(\mathbf{b}_i)\}$$

并令 $S^{(\ell)}=S_2^{(\ell)}\sqcup\cdots\sqcup S_{n-1}^{(\ell)}$。最后，令 $\Lambda_\ell=\{2\le i\le n-1:\ \ S_i^{(\ell)}\neq\varnothing\}$。

与 $S^{(0)}$ 的情形类似，引理 4.22 和 4.24 使我们能够控制 $S^{(\ell)}$ 对于 $\ell\ge 1$。假设我们已构造出 λ_{k+1}，并已证明 $k\le\ell-1$ 的引理 4.24。

- 根据定义，我们有 $S_{(\ell)}\subseteq S_{(\ell-1)}$。
- 根据（B.iii）、（C.i）和（C.ii），对所有 $\mathbf{u}\in S_{(\ell)}$，我们有 $u_1\ge 1$，且 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u})<1$。
- 根据（C.iii），若 $\ell=1$；根据（D.iii），若 $\ell\ge 2$，则存在一个元素 $\mathbf{u}\in S_{(\ell)}$，使得$u_1\ge 1$。

引理 4.24。设 $k\ge 0$，并假定 λ_0、……、λ_k 已定义。采用记号 *4.23* 中的记号，并假定 $|\Lambda_k|\ge 2$。令 $i_k=$最小值 Λ_k。存在λ_{k+1}：$\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Q}$，使得：

（*D.i*）对于 $u\in S_{i_k}^{(k)}$，我们有 $\lambda_{k+1}(u)<\lambda_{k+1}(d_{i_k}b^{i_k})$。（*D.ii*）对于 $j>i_k$，$u\in S_j^{(k)}$，我们有 $\lambda_{k+1}(u)\le\lambda_{k+1}(d_jb^j)$。（*D.iii*）存在某个指标 $j>i_k$ 和某个 $u\in S_j^{(k)}$，使得 $\lambda_{k+1}(u)=\lambda_{k+1}(d_jb^j)$。

证明。我们定义

(27)
$$t_{k+1}:=\max_{j>i_k,\mathbf{u}\in S_j^{(k)}}\frac{u_{i_k}}{u_1},\quad \lambda_{k+1}(\mathbf{u}):=-t_{k+1}u_1+u_{i_k}.$$

我们声称 λ_{k+1} 满足 (D.i)-(D.iii)。

(D.i) 对于$\mathbf{u}\in S_{i_k}^{(k)}$，由于$\mathbf{u}\neq d_{i_k}\mathbf{b}^{i_k}$，我们有

$$\lambda_{k+1}(\mathbf{u})\le u_{i_k}<d_{i_k}=d_{i_k}\lambda_{k+1}(\mathbf{b}_{i_k}).$$

(D.ii) 对于 $j > k$，$\mathbf{u} \in S_j^{(k)}$，我们有

$$\lambda_{k+1}(\mathbf{u}) \leq -\left(\frac{u_{i_k}}{u_1}\right) u_1 + u_{i_k} = 0 = \lambda_{k+1}(d_j \mathbf{b}_j). \tag{28}$$

（D.iii）如果$\mathbf{u}$ 在方程（27）中取到最大值，那么方程（28）中的不等式是紧的。

□

引理4.25（参见 [Eis95], 习题15.12）。设 μ_0、…、μ_s：$\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$ 为线性映射，$U \subseteq \mathbb{Z}^n$ 为有限集。存在映射 μ：$\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$，使得对所有$\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in U$，都有 $\mu(\mathbf{u}) < \mu(\mathbf{v})$ 当且仅当

$$\begin{aligned} &\textit{there exists } 0 \leq k \leq s \textit{ such that } \mu_k(\mathbf{u}) < \mu_k(\mathbf{v}) \\ &\textit{and } \mu_\ell(\mathbf{u}) = \mu_\ell(\mathbf{v}) \textit{ for all } 0 \leq \ell \leq k-1 \end{aligned} \tag{29}$$

现在我们可以证明引理 4.19。

证明。首先，我们构造辅助映射 λ_0、…、λ_s。将引理4.20和引理4.22应用于 S，得到线性映射 λ_0、λ_1。由（B.iv）和（C.iii），可得 $|\Lambda_1| \geq 1$。我们继续归纳：假设已经构造出 λ_0、…、λ_k。若 $|\Lambda_k| = 1$，则令$s = k$，并转到下一段的开头进行下一步论证。否则，应用引理 4.24 得到映射 λ_{k+1}。由（D.i）可得$\Lambda_{k+1} \subseteq \Lambda_k \setminus \{i_k\}$，由（D.iii）可得 $|\Lambda_{k+1}| \geq 1$。由于 $n-2 \geq |\Lambda_1| > |\Lambda_2| > \cdots \geq 1$，最终我们会得到一个指标 s，使得 $|\Lambda_s| = 1$。

将引理4.25应用于序列 $\lambda_0, \ldots, \lambda_s$，得到映射 λ：$\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$。我们证明 λ满足 (A.i) 和 (A.ii)，其中指标 m 是Λ_s的唯一元素。由引理 4.20、4.22 和 4.24，对于所有 $2 \leq i \leq n-1$，$\mathbf{u} \in S_i, 0 \leq k \leq s$，都有$\lambda_k(\mathbf{u}) \leq \lambda_k(d_i \mathbf{b}_i)$。因此，$\lambda(\mathbf{u}) \leq \lambda(d_i \mathbf{b}_i)$。如果 $\lambda(\mathbf{u}) = \lambda(d_i \mathbf{b}_i)$，那么对于所有 $0 \leq k \leq s$，必有 $\lambda_k(\mathbf{u}) = \lambda_k(d_i \mathbf{b}_i)$。每一个后续等式 $\lambda_k(\mathbf{u}) = \lambda_k(d_i \mathbf{b}_i)$ 都会对 $\mathbf{u}$ 施加进一步限制：

(a) 由于 $\lambda_0(\mathbf{u}) = \lambda_0(d_i \mathbf{b}_i)$，由引理 4.20 的（B.ii）和（B.iii），我们有 $u_1 = 0$ 和 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) \leq 1$，或者 $u_1 \geq 1$ 和 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) < 1$。(b) 由于 $\lambda_1(\mathbf{u}) = \lambda_1(d_i \mathbf{b}_i)$，由引理 4.22 的（C.i），实际上必有 $u_1 \geq 1$ 且$\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) < 1$。(c) 由于对于所有 $1 \leq i \leq s$，都有 $\lambda_k(\mathbf{u}) = \lambda_k(d_i \mathbf{b}_i)$，因此 $i \in \Lambda_1 \cap \cdots \cap \Lambda_s = \{m\}$。

上述列表中的点 (c) 蕴含 (A.i)，而点 (a)、(b) 蕴含 (A.iii)。对于 (A.ii)，根据构造，$\Lambda_s = \{m\}$ 非空，因此存在 $\mathbf{u}^* \in S_m^{(s)} \subseteq S_m$。根据记号 4.23，集合 $S_m^{(s)}$归纳定义为满足以下条件的 $\mathbf{u} \in S_m$：对于所有 $0 \leq k \leq s$，$\lambda_k(\mathbf{u}) = \lambda_k(d_m \mathbf{b}_m)$。因此，我们有 $\lambda(\mathbf{u}^*) = \lambda(d_m \mathbf{b}_m)$，从而方程（21）成立。□

4.4.3. 应用退化序。

引理 4.26. 设 R 如假设 *4.9* 中所述。假设 f_1、…、f_{a_i} 是 d_i-形式，并且在 R中构成一个正则序列；同时，假设对于所有 $1 \leq j \leq a_i$，都有 $f_j \in k[\mathbf{x}_i]$。那么，J在 R 中的整闭包等于 $(\mathbf{x}_i)^{d_i}$。

证明. 由于 $k[\mathbf{x}_i] \to R$ 是忠实平坦的， $f_1, \ldots, f_{a_i}$ 在 $k[\mathbf{x}_i]$中构成一个正则序列。由定理 2.27，$(f_1, \ldots, f_{a_i})$ 在 $k[\mathbf{x}_i]$ 中的整闭包为 $(\mathbf{x}_i)^{d_i}$。由命题 2.26 (vii)，有 $(\mathbf{x}_i)^{d_i} \subseteq J$。另一方面，有 $(f_1, \ldots, f_{a_i}) \subseteq (\mathbf{x}_i)^{d_i}$。根据 [HS06，命题 1.4，6], $(\mathbf{x}_i)^{d_i}$ 在 R中是整闭的，因此 $J = (\mathbf{x}_i)^{d_i}$。□

引理 4.27。 假设处于假设 *4.9* 的情形下。设 I 满足等式 (†)。则有以下结论：

(a) 对于所有 $1 \le i \le r$、$1 \le j \le a_i$，存在 $f'_{i,j} \in k[\mathbf{x}_i]$ 以及 $f''_{i,j} \in (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1})$，使得 $f_{i,j} = f'_{i,j} + f''_{i,j}$。*(b)* 对于所有 $1 \le i \le r$，有 $\sqrt{I_1 + \cdots + I_i} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i)$。*(c)* 对于所有 $1 \le i \le r$，元素 $f'_{i,1}$、…、f'_{i,a_i} 构成一个正则序列。

证明。 证明的关键是以下简单观察。设 $g = x^{e_{1,1}}_{1,1} \cdots x^{e_{r,a_r}}_{r,a_r}$ 是一个次数为 d_i 的单项式，满足 $w_d(g) \ge 1$。如果 $g \notin (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1})$，那么我们有

$$
\begin{aligned}
1 \le w_d(g) &\le \frac{e_{i,1} + \cdots + e_{i,a_i}}{d_i} + \frac{e_{i+1,1}, \cdots + e_{r,a_r}}{d_{i+1}} \\
&= \frac{e_{i,1}, \cdots + e_{r,a_r}}{d_i} + (d_{i+1} - d_i)\left(\frac{e_{i+1,1}, \cdots + e_{r,a_r}}{d_i d_{i+1}}\right)
\end{aligned} \tag{30}
$$

由于 $e_{i,1} + \cdots + e_{r,a_r} = d_i$ 且 $\deg(g) = d_i$，我们有 $e_{k,\ell} = 0$ 对所有 $k < i$ 都成立。同时，方程(30)意味着 $e_{i+1,1} + \cdots + e_{r,a_r} = 0$，因此 $g \in k[\mathbf{x}_i]$。

对于任意 $1 \le i \le r$，$1 \le j \le a_i$，由方程(†)可得 $\operatorname{supp}(f_{i,j}) \subseteq \mathfrak{D} \sqcup (\mathbf{x}_1)$。由上一段可得 $\operatorname{supp}(f_{i,j}) \cap \mathfrak{D} \subseteq k[\mathbf{x}_i] \sqcup (\mathbf{x}_1, \ldots\ldots, \mathbf{x}_{i-1})$。记作 $f_{i,j} = \sum_{y \in \operatorname{supp}(f_{i,j})} \beta_y^{(i,j)} y$，因此我们可以定义

$$
f'_{i,j} := \sum_{y \in \operatorname{supp}(f_{i,j}) \cap k[\mathbf{x}_i]} \beta_y^{(i,j)} y, \qquad f''_{i,j} = \sum_{y \in \operatorname{supp}(f_{i,j}) \cap (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1})} \beta_y^{(i,j)} y,
$$

这证明了(a)。

我们通过归纳法同时证明(b)和(c)。由方程(†)，I_1 是从 $k[\mathbf{x}_1]$ 扩张得到的齐次理想，且 $\operatorname{ht}(I_1) = a_1$，因此(b)对 $i = 1$成立。由于 $f_{1,j} = f'_{1,j}$ 对 $1 \le j \le a_1$成立，(c)对 $i = 1$ 也成立。假设(b)、(c)对$i - 1$成立。则 $\sqrt{I_1 + \cdots + I_{i-1}} = (\mathbf{x}_1, \ldots\ldots, \mathbf{x}_{i-1})$，因此我们有

$$
\begin{aligned}
\sqrt{I_1 + \cdots + I_i} &= \sqrt{(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}) + (f_{i,1}, \ldots, f_{i,a_i})} \\
&= \sqrt{(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}) + (f'_{i,1}, \ldots, f'_{i,a_i})}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

取方程（31）中所有项的高度，我们观察到元素 $f_1, 1, \ldots, f_{i-1,a_{i-1}}, f'_{i,1}, \ldots, f'_{i,a_i}$ 构成一个正则序列。特别地，$f'_{i,1}, \ldots, f'_{i,a_i}$ 是一个正则序列，从而证明了断言（c）。由于 $\operatorname{ht}((f'_{i,1}, \ldots, f'_{i,a_i})) = a_i$，且 $(f'_{i,1}, \ldots, f'_{i,a_i})$ 是从 $k[\mathbf{x}_i]$ 扩张而来的齐次理想，因此我们有 $\sqrt{(f'_{i,1}, \ldots, f'_{i,a_i})} = (\mathbf{x}_i)$。再次应用方程（31），即可推出断言（b）。□

引理 4.28。 假设处于假设 *4.9* 的情形。设 I 满足方程 (†) 且 $I \not\subseteq \mathfrak{D}$。则存在一个整数 $2 \leq m \leq r-1$ 以及 d_m-形式$h_{m,\,1}, \ldots, h_{m,\,a_m}$，使得令

$$J := (\mathbf{x}_1)^{d_1} + \cdots + (\mathbf{x}_{m-1})^{d_{m-1}} + (h_{m,1}, \ldots, h_{m,a_m}) + (\mathbf{x}_{m+1})^{d_{m+1}} + \cdots + (\mathbf{x}_r)^{d_r},$$

我们有

(i) For all $1 \leq j \leq a_m$, we have $h_{m,j} = h'_{m,j} + h''_{m,j}$, where $h'_{m,j} \in k[\mathbf{x}_m], h''_{m,j} \in (\mathbf{x}_1)$, and $w_d(y) < 1$ for all $y \in \operatorname{supp}(h''_{m,j})$;
(ii) There exists some j such that $h''_{m,j} \neq 0$;
(iii) J is $\mathfrak{m}$-primary with $E_n(J) = E_n(I)$;
(iv) $c(J) \leq c(I)$.

证明。 设 $f'_{i,j}, f''_{i,j}$如引理 4.27 中所述。定义一个半群同态 $\rho\colon \mathrm{Mon}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r) \to \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$，使得 $\rho(x_{i,j}) = \mathbf{b}_i$。对于 $2 \leq i \leq r$，我们定义

$$S_i := \bigcup_{j=1}^{a_i} \rho\left(\operatorname{supp}(f''_{i,j})\right).$$

令 $S = S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_{r-1}$。我们断言 S满足引理 4.19 的假设 (1)-(4)。

(1) 该断言由以下事实得出：$f''_{i,j}$ 是次数为 d_i 的齐次式，并且对于任意单项式 $y \in R$，$\deg(y) = |\rho(y)|$。(2) 设 $y \in \operatorname{supp}(f''_{i,j})$ 是一个单项式。若 $y \in (\mathbf{x}_1)$，则 $\rho(y)_1 \geq 1$。否则，由于 I 满足等式 (†)，我们有 $1 \leq w_d(y) = \nu_{\mathbf{d}}(\rho(y))$。(3) 根据构造，若 $y \in \operatorname{supp}(f''_{i,j})$，则 $y \in (\mathbf{x}1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1})$，因此 $\rho(y)_1 + \cdots + \rho(y)_{i-1} \geq 1$，从而 $\rho(y) \neq d_i\mathbf{b}_i$。(4) 根据假设，我们有 $I \not\subseteq \mathfrak{D}$，因此对于某些 $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq a_i$，有 $f_{i,j} \notin \mathfrak{D}$。根据等式 (†)，$I_1$ 由 $k[\mathbf{x}_1]$, 扩张而来，因此 $I_1 \subseteq (\mathbf{x}_1)^{d_1} \subseteq \mathfrak{D}$。此外，由引理 3.3 可知 $\mathfrak{m}^{d_r} \subseteq \mathfrak{D}$，从而 $I_r \subseteq \mathfrak{D}$。我们得出结论：存在某个 $2 \leq i \leq r-1$ 和某个 $1 \leq j \leq a_i$，使得 $f_{i,j} \notin \mathfrak{D}$。由于 $f'_{i,j} \in \mathfrak{m}^{d_i} \cap k[\mathbf{x}_i] \subseteq \mathfrak{D}$ 且 $f'_{i,j} + f''_{i,j} = f_{i,j} \notin \mathfrak{D}$，因此必有$f''_{i,j} \notin \mathfrak{D}$。特别地，在 f''_i的支集中存在一个单项式 y，使得 $y \notin \mathfrak{D}$。回顾一下，$\mathfrak{D}$ 恰由满足$w_d(f) \geq 1$的元素 $f \in R$ 构成，对于这个单项式 y，我们有 $\rho(y) \in S$ 且 $\nu_{\mathbf{d}}(\rho(y)) = w_d(y) < 1$。

现在，我们将引理 4.19 应用于集合 S，从而得到映射 $\lambda\colon \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ 以及一个指标 $2 \leq m \leq r-1$，使得

(A.i) 对于所有 $2 \leq i \leq r-1$，$i \neq m$，$\mathbf{u} \in S_i$，都有 $\lambda(\mathbf{u}) < \lambda(d_m\mathbf{b}_m)$。**(A.ii)** 我们有

$$\max_{\mathbf{u} \in S_m} \lambda(\mathbf{u}) = \lambda(d_m\mathbf{b}_m). \tag{21}$$

(A.iii) 对于方程（21）中取到最大值的任意 $\mathbf{u}$，我们有 $\nu_{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) < 1$ and$u_1 \geq 1$。

令 in_λ 表示由 $y <_\lambda z$ if $\lambda(\rho(y)) < \lambda(\rho(z))$ 给出的单项式偏序。对于 $2 \le i \le r-1$, $1 \le j \le a_i$, 我们考察 $\mathrm{in}_\lambda(f_{i,j})$ 的首项。对于任意$y \in \mathrm{supp}(f'_{i,j})$, 我们有 $\rho(y) = d_i\mathbf{b}_i$, 特别地, $\lambda(\rho(y)) \le \lambda(d_i\mathbf{b}_i)$。由 (A.i) 和 (A.ii), 对于所有 $y \in \mathrm{supp}(f''_{i,j})$, 我们有 $\lambda(\rho(y)) \le \lambda(d_i\mathbf{b}_i)$。因此

$$\max_{y\in\mathrm{supp}(f_{i,j})} \lambda(\rho(y)) \le \lambda(d_i\mathbf{b}_i).$$

由引理 4.27, 元素 $f'_{i,\,j}$构成一个正则序列。特别地, $f'_{i,\,j} \neq 0$, 因此 $\mathrm{supp}(f_{i,\,j}) \cap k[\mathbf{x}_i] = \mathrm{supp}(f'_{i,\,j}) \neq \varnothing$。如果 $y_{i,\,j} \in \mathrm{supp}(f'_{i,\,j})$, 那么我们有

$$\max_{y\in\mathrm{supp}(f_{i,j})} \lambda(\rho(y)) \ge \lambda(\rho(y_{i,j})) = \lambda(d_i\mathbf{b}_i).$$

现在我们得到了 $\lambda(f_{i,\,j})$ 中首项的表达式。若记 $f_{i,\,j} = \sum_{y\in\mathrm{supp}(f_{i,\,j})}\beta_y^{(i,j)}y$, 那么 $\mathrm{in}_\lambda(f_{i,\,j})$ 是对所有满足 $\lambda(\rho(y))$ 尽可能大的 $\gamma_y^{(i,j)}y$ 求和。具体来说, 我们有

(32)
$$\mathrm{in}_\lambda(f_{i,j}) = \sum_{y\in\mathrm{supp}(f_{i,j}):\lambda(\rho(y))=\lambda(d_i\mathbf{b}_i)} \beta_y^{(i,j)}y = f'_{i,j} + \sum_{y\in\mathrm{supp}(f''_{i,j}):\lambda(\rho(y))=\lambda(d_i\mathbf{b}_i)} \beta_y^{(i,j)}y.$$

对于 $1 \le i \le a_m$, 令 $h_{m,\,j} := \mathrm{in}_\lambda(f_{m,\,j})$。取这样的 $h_{m,\,1}$, ..., $h_{m,\,a_m}$ 后, 我们验证 J 满足该引理的结论 (i)-(iv)。

(i) 我们令 $h'_{m,j} := f'_{m,j}$ and $h''_{m,j} := \sum_{y\in\mathrm{supp}(f''_{i,j}):\lambda(\rho(y))=\lambda(d_i\mathbf{b}_i)} \gamma_y^{(i,j)}y$。由等式 (32), 可得 $h'_{m,j} + h''_{m,j} = \mathrm{in}_\lambda(f_{m,j}) = h_{m,j}$。根据引理 4.27 中 $f'_{m,j}$ 的定义, 可得 $\mathrm{supp}(h'_{m,j}) \subseteq k[\mathbf{x}_m]$。对于任意 $y \in \mathrm{supp}h''_{m,j}$, 我们有$y \in \mathrm{supp}(f''_{m,j})$, 因此 $\rho(y) \in S_m$。我们还可得 $\lambda(\rho(y)) = \lambda(d_m\mathbf{b}_m)$, 故由 (A.iii) 可得 $\rho(y)_1 \ge 1$ and $\nu_{\mathbf{d}}(\rho(y)) < 1$, 因此 $y \in (\mathbf{x}_1)$ and $w_d(y) < 1$。

(ii) 根据 (A.ii), 存在$\mathbf{u} \in S_m$ 使得 $\lambda(\mathbf{u}) = \lambda(d_m\mathbf{b}_m)$。根据 S_m 的定义, 存在某个指标 $1 \le j \le a_m$ 和某个 $y \in \mathrm{supp}(f''_{m,j})$, 使得 $\rho(y) = \mathbf{u}$。由方程 (32), 可得 $y \in \mathrm{supp}(h''_{m,j})$。

(iii) 我们采用与方程（31）类似的论证。由引理 4.26, 可得 $\sqrt{(f'_{m,1},\ldots,f'_{m,a_m})} = (\mathbf{x}_m)$。由方程 (32), 可得 $h_{m,j} \equiv f'_{m,j} \bmod (\mathbf{x}_1)$, 因此

$$\begin{aligned}\sqrt{J} &= \sqrt{(\mathbf{x}_1)+\cdots+(\mathbf{x}_{m-1})+(h_{m,1},\ldots,h_{m,a_m})+(\mathbf{x}_{m+1})+\cdots+(\mathbf{x}_r)} \\ &= \sqrt{(\mathbf{x}_1)+\cdots+(\mathbf{x}_{m-1})+(f'_{m,1},\ldots,f'_{m,a_m})+(\mathbf{x}_{m+1})+\cdots+(\mathbf{x}_r)} = \mathfrak{m}.\end{aligned}$$

为证明 $E_n(J) = E_n(I)$, 注意到 J 与该理想具有相同的整闭包

$$J' = (x_{1,1}^{d_1},\ldots,x_{m-1,a_{m-1}}^{d_{m-1}},h_{m,1},\ldots,h_{m,a_m},x_{m+1,1}^{d_{m+1}},\ldots,x_{r,a_r}^{d_r}).$$

由于 J' 是完全交, 根据引理 3.8, 我们有

$$E_n(J) = E_n(J') = \frac{a_1}{d_1}+\cdots+\frac{a_r}{d_r} = E_n(I).$$

(iv) 令 $I' = (\mathrm{in}_\lambda(f_1), 1 \ldots, \mathrm{in}_\lambda(f_r, a_r))$。我们断言 $J \subseteq I'^{\sim}$ 根据方程 (32) 和 (A.iii)，对于 $i \neq m$，我们有 $\mathrm{in}_\lambda(f_{i,j}) = f'_{i,j}$。对于 $i \neq m$，由引理 4.26 和 4.27 可知 $(\mathbf{x}_i)^{d_i} = (f'_i, 1, \ldots, f'_{i,a_i}) \subseteq I'$。注意到 $h_{m,j} = \mathrm{in}_\lambda(f_{i,j}) \in I'$ 后，$J \subseteq I'^{\sim}$ 的断言便可得出。为证明 $c(J) \leq c(I)$，根据命题 2.10 和 2.22，我们有

$$c(J) = c(J') \leq c(\overline{I'}) = c(I') \leq c(\mathrm{in}_\lambda(I)) \leq c(I).$$

□

引理 4.29. 设满足假设 *4.9* 的情形。令 $J \subseteq R$ 为满足引理 *4.28* 条件 *(i)–(iii)* 的理想。则 $c(J) > E_n(J)$。

证明。设 $J_m = (h_{m,1}, \ldots, h_{m,a_m})$。我们先在特征 $p > 0$下证明此结果。

我们断言，关于 J_m 的假设蕴含 $\mathrm{ess}(J_m) > a_m$。为此，反设 $\mathrm{ess}(J_m) \leq a_m$。由于 $\mathrm{ht}(J_m) = a_m$，必有 $\mathrm{ess}(J_m) = a_m$。根据 Bai25 的引理 3.14]，我们有 $J_m \subseteq (\ell_1, \ldots, \ell_{a_m})^d$，其中某些一次形式 $\boldsymbol{\ell} = \ell_1, \ldots, \ell_{a_m} \in R$线性无关。特别地，$\sqrt{J_m} = (\ell_1, \ldots, \ell_{a_m})$。

我们可以从另一个角度计算 $\sqrt{J_m}$。根据假设，对所有 $y \in \mathrm{supp}(h''_{m,j})$，都有 $y \in (\mathbf{x}_1) \setminus \mathfrak{D}$。特别地，$y \notin (\mathbf{x}_1)^{d_m}$，因此我们改为有$y \in (\mathbf{x}_1) \cap (\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r)$。由此可得

$$(\boldsymbol{\ell}) = \sqrt{J_m} \subseteq \sqrt{(\mathbf{h}'_m) + (\mathbf{h}''_m)} \subseteq (\mathbf{x}_m) + (\mathbf{x}_1) \cap (\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r)$$

这意味着 $(\boldsymbol{\ell}) = (\mathbf{x}_m)$。这与假设 $h''_{m,j} \neq 0$ 对某个指标 $1 \leq j \leq a_m$ 成立相矛盾，因此我们得出 $\mathrm{ess}(J_m) > a_m$。根据 [Bai25 定理 3.17]，我们有 $c(J_m) > \frac{a_m}{d_m}$。

设 $f = h_{1,m}^{t_1} \ldots h_{m,a_m}^{t_{a_m}}$ 为 $(J_m)^{\nu_{J_m}(p^e)}$ 的一个齐次生成元，使得$f \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$。记

$$f = \sum_{y \in \mathrm{supp}(f)} \beta_y y, \quad f' := \sum_{y \in \mathrm{supp}(f) \setminus \mathfrak{m}^{[p^e]}} \beta_y y.$$

由于模 $\mathfrak{m}^{[p^e]}$ 的 $f \equiv f'$，我们有 $f' J_m \subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}$。

将定理 2.29 和引理 4.26 应用于理想 $J_m +_{(\mathbf{x}_1)} (\mathbf{x}_1)$，我们有

$$\frac{(\mathbf{x}_m)^{a_m d_m} + (\mathbf{x}_1)}{(\mathbf{x}_1)} \subseteq \frac{J_m + (\mathbf{x}_1)}{(\mathbf{x}_1)}.$$

设 $\mu_1, \ldots, \mu_M$为 $(\mathbf{x}_m)^{a_m d_m}$ 的最小单项式生成元集。随后，我们令 $\widetilde{\mu_1}, \ldots, \widetilde{\mu_M} \in J_m$为齐次元素，使得对所有 $1 \leq i \leq M$ 有 $\mu_i - \widetilde{\mu}_i \in (\mathbf{x}_1)$。设 $\succ$ 表示将变量按 $\mathbf{x}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{x}_r$ 的顺序排列后的反字典序。由反字典序的定义，对任意 $y \in (\mathbf{x}_1)$ $z \in k[\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r]$，我们有 $y \prec z$。特别地，我们有 $\mathrm{in}_\succ(\widetilde{\mu}_i) = \mathrm{in}_\succ(\mu_i + (\widetilde{\mu}_i - \mu_i)) = \mu_i$。由此可得 $(\mathbf{x}_m)^{a_m d_m} \subseteq \mathrm{in}_\succ(J_m)$。

根据构造，我们有 $f \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$和 $f J_m \subseteq J^{\nu_{J_m}(p^e+1)} \subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}$。由于 $f' \equiv f$ 模 $\mathfrak{m}^{[p^e]}$，我们有 $f' \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$和 $f' J_m \subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]} + J^{\nu_{J_m}(p^e+1)} \subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}$。令 $y :=$

在$\succ(f')$中。由于 $\operatorname{supp}(f')$ 中没有元素属于 $\mathfrak{m}^{[p^e]}$，因此我们有 $y \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$。此外，我们有

$$\operatorname{in}_\succ(f')\operatorname{in}_\succ(J_m) \subseteq \operatorname{in}_\succ(f'J_m) \subseteq \operatorname{in}_\succ(\mathfrak{m}^{[p^e]}) = \mathfrak{m}^{[p^e]}.$$

由引理 4.3，我们有

$$(\mathfrak{m}^{[p^e]} : J_m) \subseteq (\mathfrak{m}^{[p^e]} : (\mathbf{x}_m)^{a_m d_m}) = \mathfrak{m}^{[p^e]} + (\mathbf{x}_m)^{a_m(p^e-1)-a_m d_m+1}.$$

由于 $y \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$，我们有

$$\operatorname{ord}_{(\mathbf{x}_m)}(y) \geq a_m(p^e-1) - a_m d_m + 1. \tag{33}$$

此外，我们记

$$f = \prod_{j=1}^{a_m}(h'_{m,j} + h''_{m,j})^{t_j} = \prod_{j=1}^{a_m} \sum_{\substack{0\leq t'_j, t''_j \leq t_j \\ t'_j + t''_j = t_j}} \binom{t_j}{t'_j} (h'_{m,j})^{t_j}(h''_{m,j})^{t''_j}.$$

由于 $\operatorname{supp}(f') \subseteq \operatorname{supp}(f)$，存在 $(t'_1, t''_1)\ldots,(t'_{a_m}, t''_{a_m})$，使得 $t'_j + t''_j = t_j$对所有 $1 \leq j \leq a_m$ 成立，并且

$$y \in \operatorname{supp}\left((h'_{m,1})^{t'_1}(h''_{m,1})^{t''_1} \ldots (h'_{m,a_m})^{t'_{a_m}}(h''_{m,a_m})^{t''_{a_m}}\right).$$

令 $J'_m = (h'_{m,\ 1}, \ldots, h'_{m,\ a_m})$。由于 J'_m 是由 $k[\mathbf{x}_m]$ 扩展而来，由引理 4.26 可得 $J'_m \subseteq (\mathbf{x}_m)^{d_m}$，因此

$$t'_1 + \cdots + t'_{a_m} \leq \nu_{J'_m}(p^e) \leq \nu_{(\mathbf{x}_m)^{d_m}}(p^e) \leq \left\lfloor \frac{a_m(p^e-1)}{d_m} \right\rfloor.$$

根据假设，$J_m \not\subseteq \mathfrak{D}$。定义

$$\sigma := \max_{\substack{1\leq j\leq a_m \\ y\in \operatorname{supp}(h_{m,j})\setminus(\mathbf{x}_m)^{d_m}}} w_d(y),$$

根据条件 (ii) 和 (iv)，$\sigma < 1$ 满足该条件。因此，我们有

$$\begin{aligned} w_d(y) &\leq \sum_{j=1}^{a_m} t'_j w_d(h'_{m,j}) + \sum_{j=1}^{a_m} t''_j \left(\max_{z\in\operatorname{supp}(h''_{m,j})} w_d(z) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{a_m} t'_j + \sum_{j=1}^{a_m} t''_j \left(\max_{z\in\operatorname{supp}(h''_{m,j})} w_d(z) \right) \leq \sum_{j=1}^{a_m} t'_j + \sigma \sum_{j=1}^{a_m} t''_j \\ &\leq \left\lfloor \frac{a_m(p^e-1)}{d_m} \right\rfloor + \sigma \left(\nu_{J_m}(p^e) - \left\lfloor \frac{a_m(p^e-1)}{d_m} \right\rfloor \right). \end{aligned} \tag{34}$$

如引理 4.3，令 $\mathfrak{a}_\beta, \mathfrak{a}^+_\beta$ 分别表示理想 $\{f \in R\colon w_d(f) \geq \beta\}, \{f \in R\colon w_d(f) > \beta\}$。令 t_e 表示方程（34）中的量；由于 $w_d(y) \leq t_e$，我们有$y \notin \mathfrak{a}^+_{t_e}$。根据假设，$y \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$，且由于 y 是一个单项式，我们有 $y \notin \mathfrak{m}^{[p^e]} + \mathfrak{a}^+_{t_e}$。设 $u_e := (p^e-1)(\frac{a_1}{d_1} + \cdots + \frac{a_r}{d_r})$。由引理 4.3 可得

$$y \notin \mathfrak{m}^{[p^e]} + \mathfrak{a}^+_{t_e} = (\mathfrak{m}^{[p^e]} : \mathfrak{a}_{u_e - t_e}).$$

令 $z \in \mathfrak{a}_{u_e - t_e}$ 使得 $yz \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$。写作 $z = z'z''$，其中 $z'' \in k[\mathbf{x}_m]$ 且 $z' \in k[\mathbf{x}_1, \dots, \widehat{\mathbf{x}_m}, \dots, \mathbf{x}_r]$。由于 $yz \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$，由方程（33）可得

$$\operatorname{ord}_{(\mathbf{x}_m)}(z'') \leq (p^e - 1)a_m - \operatorname{ord}_{(\mathbf{x}_m)}(y) \leq a_m d_m,$$

因此 $w_d(z') = w_d(z) - w_d(z'') \geq u_e - t_e - a_m$。由于 $\mathfrak{D} = (\mathbf{x}_1)^{d_1} + \overline{\cdots + (\mathbf{x}_r)^{d_r}}$，根据定理 2.29，我们有

$$z' \in \mathfrak{D}^{\lfloor u_e - t_e \rfloor - a_m} \subseteq ((\mathbf{x}_1)^{d_1} + \cdots + (\mathbf{x}_r)^{d_r})^{\lfloor u_e - t_e \rfloor - a_m - n}.$$

由于 $z' \notin (\mathbf{x}_m)$，我们实际上有

$$z' \in ((\mathbf{x}_1)^{d_1} + \cdots + (\mathbf{x}_{m-1})^{d_{m-1}} + (\mathbf{x}_{m+1})^{d_{m+1}} (\mathbf{x}_r)^{d_r})^{\lfloor u_e - t_e \rfloor - a_m - n} \subseteq (J)^{\lfloor u_e - t_e \rfloor - a_m - n}.$$

由于 $z'f \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$，由此可得 $\nu_J(p^e) \geq \nu_{J_m}(p^e) + \lfloor u_e - t_e \rfloor - a_m - n$。除以 p^e 并令 $e \to \infty$，我们得到

$$\begin{aligned} c(J) &\geq c(J_m) + \lim_{e \to \infty} \frac{u_e}{p^e} - \lim_{e \to \infty} \frac{t_e}{p^e} \\ &= c(J_m) + \left(\frac{a_1}{d_1} + \cdots + \frac{a_r}{d_r} \right) - \left(\frac{a_m}{d_m}(1 - \sigma) + \sigma c(J_m) \right) \\ &= (1 - \sigma) \left(c(J_m) - \frac{a_m}{d_m} \right) + \left(\frac{a_1}{d_1} + \cdots + \frac{a_r}{d_r} \right) \end{aligned}$$

由于 $\sigma < 1$ 且 $c(J_m) > \frac{a_m}{d_m}$，由此可得上述量超过 $E_n(J)$。

在特征零中，我们注意到，对于满足条件 (i)-(iii) 的任意理想 J，偶对 (R, J) 到特征 $p \gg 0$ 的约化满足条件 (i)-(iii)。此外，量 σ 对 $p \gg 0$ 是常数。采用假设 4.1 的约化记号，我们有

$$\begin{aligned} c(J) = \lim_{\substack{\mu \in \operatorname{Spec} A \\ \operatorname{char} A/\mu \to \infty}} c(J_\mu) &\geq (1 - \sigma) \left(\lim_{\substack{\mu \in \operatorname{Spec} A \\ \operatorname{char} A/\mu \to \infty}} c(J_{m,\mu}) - \frac{a_m}{d_m} \right) + E_n(J) \\ &= (1 - \sigma) \left(c(J_m) - \frac{a_m}{d_m} \right) + E_n(J) > E_n(J). \end{aligned}$$

□

引理 4.16、4.28 和 4.29 合在一起，便得到了 $\mathfrak{m}$-原完全交情形下定理 5.1 的证明。

命题 4.30。假设满足假设 *4.9* 的设定，并且 $c(I) = E_n(I)$。那么存在 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$ 使得 $\gamma I = \mathfrak{D}$。

证明。利用引理 4.16，我们构造出 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$，使得 γI 满足方程（†）。由引理 4.28 和 4.29，可得 $\gamma I = \mathfrak{D}$。□

5. 定理 B 的证明

本节将证明本文的主要结果，现将其重述如下。

定理 5.1。设 k 是完美域。设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，并设 $I \subseteq R$ 是一个齐次理想，且满足 $\mathrm{ht}(I) \geq l$。若 $E_l(I) = c(I)$，则存在整数 d_1、.....、d_l 以及 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$，使得

$$\gamma \overline{I} = \overline{\left(x_1^{d_1}, \dots, x_l^{d_l}\right)}.$$

5.1. 代数闭域。

在本小节中，固定以下假设。

假设 5.2。设 L 是一个不可数的代数闭域。设 $S = L[x_1, \dots, x_n]$，并设 $I \subseteq S$ 是齐次的。与引理 *3.2* 中一样，对于 $1 \leq j \leq n$，令 $S_j := L[x_1, \dots, x_j]$，$\pi_j \colon S \to S_j$ 为自然投影映射，以及 $\iota_j \colon S_j \to S$ 为自然嵌入。令 $>$ 表示 $>_{grlex}$ 上的分次反字典序。

定义 5.3。设 k 是一个域，$R = k[x_1, \dots, x_n]$，$I \subseteq R$ 是一个齐次理想，且 $t \in \mathbb{Z}^+$。我们用 $[I]_t$ 表示 I 中 t 次形式构成的向量空间，并用 $[I]_{\leq t}$ 表示当 $s \leq t$ 时所有 $[I]_s$ 的直和。

定义 5.4。设 k 是一个域，$R = k[x_1, \dots, x_n]$，且 $I \subseteq R$ 是高度为 $l > 0$ 的齐次理想。对于 $1 \leq i \leq l$，令 $d_i(I) = \min\{j : \mathrm{ht}[I]_{\leq j} R \geq i\}$。

引理 *5.5*（参见 [*May*14]）。假设满足假设 *5.2* 的设定。令 $\gamma \in GL_n(L)$ 为非常一般的：目前，我们施加条件，要求对所有 $m > 0$，在 $>(\gamma I^m)$ 中有 $= gin_>(I^m)$；我们将在引理 *5.10* 中施加可数多个附加条件。对于 $1 \leq j \leq n$，$m > 0$，令 $\mathfrak{a}_{j,\,m} := in_>(\pi_j(\gamma I^m)) \subseteq S_j$。对于 $j > 0$，$1 \leq i \leq j$，令 $\boldsymbol{b}_i^{(j)}$ 表示 $\mathbb{R}^j$ 的第 i 个单位向量。对于 $j \geq i$，令 $p_j(i) := inf\{t : t\boldsymbol{b}_i^{(j)} \in \Gamma(\mathfrak{a}_{j,\bullet})\}$。那么对于所有 j，有 $p_j(j) = p_n(j)$。

证明。由引理 3.2，对所有 $1 \leq j \leq n$，我们有 $\iota_j(\mathfrak{a}_{j,\bullet}) \subseteq \mathfrak{a}_{n,\bullet}$，因此 $p_n(j) \leq p_j(j)$。对于相反方向，令 $t = p_n(j)$。由于 $t\mathbf{b}_j^{(n)} \in \bigcup_{m>0} \frac{1}{2^m}\Gamma(\mathfrak{a}_{n,2^m})$，存在序列 $\{\mathbf{a}_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,n})\}_{m>0}$，使得对所有 m 有 $\mathbf{a}_m \in \Gamma(\mathfrak{a}_{n,2^m})$，且 $\lim_{m\to\infty} 2^{-m}\mathbf{a}_m = t\mathbf{b}_j^{(n)}$。对 $\{\mathbf{a}_m\}_{m>0}$ 的任意选取，我们也有 $(\lceil a_{m,1} \rceil, \dots, \lceil a_{m,n} \rceil) \in \Gamma(\mathfrak{a}_{n,2^m})$，且 $\lim_{m\to\infty} \frac{(\lceil a_{m,1} \rceil, \dots, \lceil a_{m,n} \rceil)}{2^m} = t\mathbf{b}_j^{(n)}$。因此，我们可~~以不失一般性地~~假设对所有 $m > 0$，$1 \leq i \leq n$ 有 $\mathbf{a}_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$，从而对所有 $m > 0$，我们有 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} \in \mathfrak{a}_{n,2^m}$。

根据 [GW15 定理 2.1]，$\mathfrak{a}_{n,2^m}$ 是 Borel-固定的，因此

$$x_1^{a_{m,1}} \cdots x_{j-1}^{a_{m,j-1}} x_j^{a_{m,j}+\cdots+a_{m,n}} \in \overline{\mathfrak{a}_{n,2^m}}.$$

我们还注意到，根据引理 3.2，$\mathfrak{a}_{j,m} = \pi_j(\mathfrak{a}_{n,m})$。由命题 2.26(iii)，我们得出

$$\pi_j(x_1^{a_{m,1}} \cdots x_{j-1}^{a_{m,j-1}} x_j^{a_{m,j}+\cdots+a_{m,n}}) \in \pi_j(\overline{\mathfrak{a}_{n,2^m}}) \subseteq \overline{\pi_j(\mathfrak{a}_{n,2^m})} = \overline{\mathfrak{a}_{j,2^m}}.$$

由此可得

$$t\mathbf{b}_j^{(j)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(a_{m,1}, \dots, a_{j-1}, a_j + \cdots + a_n)}{m} \in \Gamma(\mathfrak{a}_{j,\bullet}),$$

这证明了 $p_j(j) \leq t = p_n(j)$。 □

注记 5.6. 假设引理 5.5 中的设定。先验地，存在一个序列

$$\{\mathbf{a}_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,j})\}_{m>0} \subseteq \mathbb{R}^j_{\geq 0}$$

使得对所有 $m > 0$，我们有 $\lim_{m\to\infty} 2^{-m}\mathbf{a}_m = t\mathbf{b}_j^{(j)}$ 且 $\mathbf{a}_m \in \Gamma(\mathfrak{a}_{2^m})$。引理 5.7 是一个小幅改进，它使我们可以假设 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} \in \mathfrak{a}_{2^m}$。

引理 5.7. 假设引理 *5.5* 中的设定。存在一个序列 $\{\mathbf{a}'_m\}_{m>0} \subseteq \mathbb{Z}^j$，使得 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}'_m} \in \mathfrak{a}_{j,2^m}$ 对所有 $m > 0$ 成立，并且 $\lim_{m\to\infty} 2^{-m}\mathbf{a}'_m = p_j(j)\mathbf{b}_j^{(j)}$。

证明. 令 $\{\mathbf{a}_m\}_m$ 如注记 5.6 中所述，并设 $\mathbf{a}'_m = (2^{m-\lfloor m/2\rfloor} + j - 1)\mathbf{a}_{\lfloor m/2\rfloor}$。由定理 2.29，我们有

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}'_m} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}_{\lfloor m/2\rfloor}})^{2^{m-\lfloor m/2\rfloor}+j-1} \in \overline{\mathfrak{a}_{2\lfloor m/2\rfloor}^{2^{m-\lfloor m/2\rfloor}+j-1}} \subseteq \mathfrak{a}_{2\lfloor m/2\rfloor}^{2^{m-\lfloor m/2\rfloor}} \subseteq \mathfrak{a}_{2^m}.$$

只要注意到

$$\lim_{m\to\infty} 2^{-m}\mathbf{a}'_m = \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m-\lfloor m/2\rfloor} + j - 1}{2^{m-\lfloor m/2\rfloor}} 2^{-\lfloor m/2\rfloor}\mathbf{a}_{\lfloor m/2\rfloor} = p_j(j)\mathbf{b}_j^{(j)}.$$

□

引理 5.8。 设 k 是一个代数闭域，且 $R = k[x_1, \dots, x_j]$。设 $\mathfrak{q}$ 是一个高度为 $j-1$ 的齐次素理想，并且满足 $x_j \notin \mathfrak{q}$。如果 $>$ 表示反字典序，那么对于所有 $m > 0$，我们有 $\text{在}_>(\mathfrak{q}^m) = (x_1, \dots, x_{j-1})^m$。

证明。 由于 k 是代数闭域，存在若干线性形式 $\ell_1, \dots, \ell_{j-1} \in R_1$，使得 $q = (\ell_1, \dots, \ell_{j-1})$。根据 [Eis95，定理 15.17]，$\mathfrak{q}$ 和在 $_>(\mathfrak{q})$ 具有相同的希尔伯特级数。此外，在 $_>(\mathfrak{q})$ 是一个不包含 x_j 的单项式理想，因此必有在 $_>(\mathfrak{q}) = (x_1, \dots, x_{j-1})$。对于 $m > 1$，我们有标准包含关系 $(x_1, \dots, x_{j-1})^m = \text{在}_>(\mathfrak{q})^m \subseteq \text{在}_>(\mathfrak{q}^m)$。由于 $(x_1, \dots, x_{j-1})^m$ 与 $\mathfrak{q}^m$ 具有相同的希尔伯特级数，结论得证。□

引理 5.9. 设 k 是一个域，$R = k[x_1, \dots, x_j]$，且 $\mathfrak{n} = (x_1, \dots, x_j)$。若 $I \subseteq R$ 是一个齐次理想，则

$$[I\mathfrak{n}^t]_u = [[I]_{u-t}R]_u.$$

证明. 首先，我们验证如下结论：若 f 是次数为 $u-t$的齐次元素，则$[f\mathfrak{n}^t]_u = [fR]_u$。包含关系 $\subseteq$显然。对于 $\supseteq$，若 g是齐次的且$gf \in [fR]_u$，则 $g \in \mathfrak{n}^t$，因此 $gf \in [f\mathfrak{n}^t]_u$。

现在，设 $f_1, \dots, f_r$是张成 $[I]_{u-t}$的齐次元素，并设 $g_1, \dots, g_s$是齐次元素，使得 $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s$生成 I且 $\deg(g_i) > u - t$。根据第一段，我们计算

$$[I\mathfrak{n}^t]_u = [(f_1, \dots, f_r)\mathfrak{n}^t]_u + [(g_1, \dots, g_s)\mathfrak{n}^t]_u = \sum_{i=1}^r [f_i\mathfrak{n}^t]_u = \sum_{i=1}^r [f_i]_u = [[I_{u-t}]R]_u.$$

□

引理 5.10。 假设满足引理 *5.5* 和 *5.7* 的设定。那么对所有 $1 \leq j \leq n$，我们有 $p_n(j) = d_j(I)$。

证明。设 $d_j := d_j(I)$。在开始证明之前，我们先陈述关于 γ 的附加一般性条件。对所有 $m > 0$，假设 $\operatorname{in}_>(\pi_j(\gamma I^m)) = \operatorname{gin}_>(\pi_j(\gamma I^m))$。由于 $\operatorname{ht}\pi_j(\gamma[I]_{\leq d_j-1}R) \leq \operatorname{ht}\gamma[I]_{\leq d_j-1}R) < j$，存在某个 $1 \leq i \leq j$ 使得 $x_i \notin \sqrt{\pi_j(\gamma[I]_{\leq d_j-1})R}$；我们选择 γ 使得 $x_j \notin \sqrt{\pi_j(\gamma[I]_{\leq d_j-1}R)}$。这些条件中的每一个都可通过对 γ 作一般选择而满足，因此通过对 γ 作非常一般的选择，可以同时实现这些条件。

令 $J = \pi_j(\gamma I)$。记 $J_1 = [J]_{\leq d_j-1}R$，并令 J_2 为由 J 的次数至少为 d_j 的极小齐次生成元生成的理想，使得 $J = J_1 + J_2$ 且 $J_2 \subseteq \mathfrak{m}^{d_j}$。根据 γ 的构造，用引理 5.5 的术语来说，我们有 $\mathfrak{a}_{j,\,m} = \text{属于}_>(J^m)$。同样根据构造，我们有 $x_j \notin \sqrt{[J]_{\leq d_j-1}}$，因此可以选取一个包含 J_1 的极小素理想 $\mathfrak{p}$，使得 $x_j \notin \mathfrak{p}$。由于 $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \leq j-1$，我们可以选取一个齐次素理想 $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$，使得 $\operatorname{ht}\mathfrak{q} = j-1$ 且 $x_j \notin \mathfrak{q}$。由引理 5.8 可知，对于所有 $m > 0$，在 $_>(\mathfrak{q}^m)$ 中有 $= (x_1, \ldots\ldots, x_{j-1})^m$。

由引理 5.7，选取一个序列 $\{\mathbf{a}_m\}_{m>0}$，使得对所有 $m > 0$，都有 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} \in \mathfrak{a}_{2^m}$，且 $\lim_{m\to\infty} 2^{-m}\mathbf{a}_m = p_j(j)\mathbf{b}_j^{(j)}$。令 $e_m := a_{m,1} + \cdots + a_{m,j}$。对所有 $m > 0$，我们有

$$[J^{2^m}]_{e_m} = \left[\sum_{\substack{a+b=2^m \\ a+bd_j \leq e_m}} J_1 + J_2\right]_{e_m} \tag{35}$$

我们已证明 $J_1 \subseteq \mathfrak{q}$ 和 $J_2 \subseteq \mathfrak{m}^{d_j}$。由等式 (35) 和引理 5.9，可得

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} \in [J^{2^m}]_{e_m} \subseteq \left[\sum_{\substack{a+b=2^m \\ a+bd_j \leq e_m}} \mathfrak{q}^a\mathfrak{m}^{bd_j}\right]_{e_m} = \sum_{\substack{a+b=2^m \\ a+bd_j \leq e_m}} \left[\mathfrak{q}^a\mathfrak{m}^{bd_j}\right]_{e_m}$$
$$= \sum_{\substack{a+b=2^m \\ a+bd_j \leq e_m}} = \left[\mathfrak{q}^{2^m - \left\lfloor \frac{e_m}{d_j} \right\rfloor}\right]_{e_m}.$$

取两边的首项，得到 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} \in (x_1, \ldots, x_{j-1})^{2^m - \left\lfloor \frac{e_m}{d_j} \right\rfloor}$。因此，我们有 $a_{m,1} + \cdots + a_{m,j-1} \geq 2^m - \left\lfloor \frac{e_m}{d_j} \right\rfloor$。由于 $\lim_{m\to\infty} 2^{-m}(a_{m,1} + \cdots + a_{m,j-1}) = 0$，这便得到

$$0 \geq \liminf_{m\to\infty} 2^{-m}\left(2^m - \left\lfloor \frac{e_m}{d_j} \right\rfloor\right) = 1 - \frac{1}{d_j}\limsup_{m\to\infty} \frac{a_{m,j}}{2^m} = 1 - \frac{p_j(j)}{d_j}.$$

由上式可得 $p_j(j) \geq d_j$。对于反向包含关系，根据引理 3.3，有 $\mathfrak{m}^{d_j} \subseteq J$。由定理 2.29 可知，对于所有 $m > \overline{0}$，$x_j^{(m+j-1)d_j} \in J^m$，因此 $p_j(j) \leq d_j$。□

引理 5.11。设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，且令 $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$。设 $I \subseteq R$ 是一个齐次理想，$J \subseteq \mathfrak{m}$ 是任意理想。则有

$$\bigcap_{t>0} \overline{I + J^t} = \overline{I}.$$

证明。根据 [HS06，推论 6.8，5]，我们有

$$\overline{IR_{\mathfrak{m}}} \subseteq \bigcap_{t>0} \overline{IR_{\mathfrak{m}} + J^t R_{\mathfrak{m}}} \subseteq \bigcap_{t>0} \overline{IR_{\mathfrak{m}} + \mathfrak{m}^t R_{\mathfrak{m}}} = \overline{IR_{\mathfrak{m}}}.$$

由命题 2.26 (v)，我们有 $IR_{\mathfrak{m}} = I\overline{R}_{\mathfrak{m}}$。根据[HS06，推论 5.2，理想 I 3], 是齐次的，因此 $IR_{\mathfrak{m}} \cap R = I$。我们有以下结论，由此即可推出所要证明的结论。

$$\overline{I} \subseteq \bigcap_{t>0} \left(\overline{IR_{\mathfrak{m}} + J^t R_{\mathfrak{m}}} \cap R \right) \subseteq \overline{IR_{\mathfrak{m}}} \cap R = \overline{I}.$$

□

现在我们可以在 k 是代数闭域的情形下证明定理 5.1。

证明。如果 ht$(I) \geq l+1$，那么 $c(I) \geq E_{l+1}(I) > E_l(I)$，所以必有 ht$(I) = l$。令$\ell_{l+1}$, ..., ℓ_n 为一般线性形式，并设 $L = V(\ell_{l+1}$, ..., $\ell_n)$。由命题 2.42，我们有 $E_l(I)$ $= E_l(I|_L) \leq c(I|_L) \leq c(I)$，因此再次有 $E_l(I) = c(I|_L)$。我们将计算 $d_1(I|_L)$ ....., d_l $(I|_L)$。域扩张是忠实平坦的，因此 ht$([I]_{\leq t}|_L)$ 在域扩张下保持不变，相应地，量 $d_1(I|_L)$ ....., $d_l(I|_L)$ 也保持不变。不失一般性，我们可以假设 k 是不可数且代数闭的。

令 $\gamma \in$GL$_n(k)$ 如引理 5.5 和 5.10 中所述，并以理想 $I|_L$ 为对象，设 $\mathfrak{a}_m =$in$>(\gamma(I|_L)^m) =$gin$>((I|_L)^m)$。由于 $c(I|_L) = E_l(I)$，由推论 3.11 可得

$$\overline{\mathbb{R}^l_{\geq 0} \setminus \Gamma(\mathfrak{a}_\bullet)} = \operatorname{conv}\left(\mathbf{0}, e_1(I|_L)\mathbf{b}_1^{(l)}, \frac{e_2(I|_L)}{e_1(I|_L)}\mathbf{b}_2^{(l)}, \dots, \frac{e_l(I|_L)}{e_{l-1}(I|_L)}\mathbf{b}_l^{(l)} \right). \tag{36}$$

量 $p_n(1) \dots, p_l(l)$ 可由方程 (36) 直接读出，因此对于所有 $1 \leq i \leq l$，我们有$\frac{e_j(I|_L)}{e_{j-1}(I|_L)} = d_j(I|_L)$。

对于 $1 \leq j \leq l$，令 f_i 为 $[I]_{d_j}$ 的一个元素，使其模 $(\ell_{l+1}, \dots, \ell_n)$ 的像为一般的。由于 ht$[I|_L]_{d_j} \geq j$，可知 $f_1, \dots, f_l, \ell_{l+1}, \dots, \ell_n$ 是一个正则序列。令 $J = (f_1, \dots, f_l)$。由引理 3.8，我们有 $E_l(J) = E_l(I)$。对于 $t > 0$，置$J_t = J + (\ell_{l+1}^t, \dots, \ell_n^t)$，并置 $I_t = I + (\ell_{l+1}^t$, $\dots, \ell_n^t)$。由于 $J_t \subseteq I_t$ 是一个完全交，引理 3.8 以及命题 2.10 和 2.39 给出

$$E_l(J) + \frac{n-l}{t} = E_l(J_t) \leq E_l(I_t). \tag{37}$$

结合方程（37）、定理 3.9 和命题 2.10（v），可得

$$E_l(J) + \frac{n-l}{t} \leq E_l(I_t) \leq c(I_t) \leq c(I) + c((\ell_{l+1}^t, \dots, \ell_n^t)) = E_l(I) + \frac{n-l}{t}.$$

特别地，我们有 $E_l(I_t) = E_l(J_t) = c(J_t)$。令

$$\mathfrak{D}_t := \overline{(x_1^{d_1(I)}, \dots, x_l^{d_l(I)}, x_{l+1}^t, \dots, x_l^t)}.$$

由命题 4.30，存在 $\gamma \in \mathrm{GL}_n(k)$ 使得 $\gamma_t J_t = \mathfrak{D}_t$。因此，由于$\overline{\mathfrak{D}_t} \subseteq \overline{\gamma_t I_t}$ 且 $E_l(I_t) = E_l(\mathfrak{D}_t)$，根据命题 2.39，我们有 $\mathfrak{D}_t = I_t$。

令 $\mathfrak{D} = (x^{d_1}{}_{(I)\,1}, \ldots, x^{d_l}{}_{(I)\,l})$。令 d为 $\mathfrak{D}$ 或 I的不可约生成元的最大次数。k-向量空间中次数为 $\leq d$ 且属于 R 的形式构成有限维空间，因此无限下降链 $[\mathfrak{D}_1]_{\leq d} \supseteq [\mathfrak{D}_2]_{\leq d} \supseteq \ldots$ ——根据引理 5.11，其极限为 $[\mathfrak{D}]_{\leq d}$ ——必定稳定；存在 $t_0 \gg 0$，使得对所有 $t \geq t_0$，都有$[\mathfrak{D}_t]_{\leq d} = [\mathfrak{D}]_{\leq d}$。类似地，存在$t_1 \gg 0$，使得对所有 $t \geq t_1$，都有 $[I_t]_{\leq d} = [I]_{\leq d}$。对于 $t = \max(t_1, t_2)$，我们有

$$\gamma_t[\overline{I}]_{\leq d} = \gamma_t[\overline{I_t}]_{\leq d} = [\mathfrak{D}_t]_{\leq d} = [\mathfrak{D}]_{\leq d}.$$

由于 $\overline{\gamma_t I}$，$\mathfrak{D}$ 由次数为 $\leq d$的元素生成，因此可得 $\gamma_t \overline{I} = \mathfrak{D}$。 □

5.2. **完美域**。以下引理与定理 5.1 的代数闭情形一起，使我们能够将结果推广到完美域的情形。

引理 5.12。设 L 是一个域。对于 $1 \leq i \leq r$，令 $\mathbf{x}_i = x_{i,1}, \ldots, x_{i,a_i}$ 为 L 上的变量组。设 $S = L[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, y_1, \ldots, y_s]$。令 $e_1 < \cdots < e_r$ 为正整数，并设

$$\mathfrak{D} = \overline{(x_{1,1}^{e_1}, \ldots, x_{r,a_r}^{e_r})}.$$

若 $\gamma \in \mathrm{GL}_{a_1+\cdots+a_r+s}$ 保持旗不变

$$\Big(0 \subseteq span_L(\mathbf{x}_1) \subseteq \ldots span_L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)\Big),$$

则 $\gamma\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$。

证明。令 $w_{\mathbf{e}}$ 表示满足 $w_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}_{i,j}) = \frac{1}{e_i}$ 且 $w_{\mathbf{e}}(y_i) = 0$ 的单项式赋值。则 $\mathfrak{D}$ 恰由满足 $w_{\mathbf{e}}(f) \geq 1$ 的元素 $f \in S$ 组成。根据关于 γ 的假设，我们有 $\gamma(x_{i,j}^{e_i}) \in (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i)^{e_i}$，因此 $w_{\mathbf{e}}(\gamma x_{i,j}^{e_i}) \geq 1$。由此可得

$$\gamma\mathfrak{D} = \overline{(\gamma x_{1,1}^{e_1}, \ldots, \gamma x_{r,a_r}^{e_r})} \subseteq \overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}.$$

由对称性，我们得出 $\gamma\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$。 □

引理 5.13。设 k 为一个域，L/k 为一个可分域扩张。令 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $S = L[x_1, \ldots, x_n]$。令 $d_1, \ldots, d_l \in \mathbb{Z}^+$，并令 $\mathfrak{D} = (x_1^{d_1}, \ldots, x_l^{d_l}) \subseteq R$。假设 $I \subseteq R$ 是一个齐次理想，并且存在 $\gamma_L \in GL_n(L)$，使得

$$\gamma_L \overline{IS} = \mathfrak{D}S. \tag{38}$$

那么存在 $\gamma_k \in \mathrm{GL}_n(k)$，使得

$$\gamma_k \overline{I} = \mathfrak{D}. \tag{39}$$

证明。根据 [HS06、命题 19.1.1、19.1.2 以及推论 19.5.2]，，我们有 $IS = IS$，因此可以用 I 替换 I，并忽略方程（38）和（39）中的整闭包。

假设 $d_1, \ldots, d_l$ 分别以重数 $a_1, \ldots, a_r$取值 $e_1, \ldots, e_r$，并且 $e_1 < \cdots < e_r$。将变量 $x_1, \ldots, x_l$, $x_{l+1}, \ldots, x_n$重新编号为$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, y_{l+1}, \ldots, y_n$，其中$\mathbf{x}_i = x_{i,1}, \ldots, x_{i,a_i}$。对于 $1 \leq i \leq r$，令 I_i表示

由 $[I]_{\leq e_i}$生成的理想。由于 L/k 是可分的，环 $S/\sqrt{I_i}S$ 是约化的，因此 $\overline{\sqrt{I_i}S} = \sqrt{I_i}S$。由于$\overline{\sqrt{I_i}S} = \gamma_L^{-1}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i)$，从而 $\sqrt{I_i}$ 由$a_1 + \cdots + a_i$ 个线性形式生成。

令 $\gamma_k \in \mathrm{GL}_n(k)$ 满足

$$\gamma_k\Big(\Big[\sqrt{I_1}\Big]_1 \subseteq \cdots \subseteq \Big[\sqrt{I_r}\Big]_1\Big) = \Big(\mathrm{span}_k(\mathbf{x}_1) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{span}_k(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)\Big)$$

作为 $\mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$ 中的旗。根据构造，$\gamma_k\gamma_L^{-1} \in \mathrm{GL}_n(L)$ 固定了该旗

$$\Big(\mathrm{span}_L(\mathbf{x}_1) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{span}_L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)\Big).$$

由引理 5.12，我们推得

$$\gamma_k\overline{IS} = \gamma_k\gamma_L^{-1}\gamma_L\overline{IS} = \gamma_k\gamma_L^{-1}\mathfrak{D}S = \mathfrak{D}S.$$

由 $R \to S$ 的忠实平坦性，我们得出

$$\gamma_k I = (\gamma_k I)S \cap R = (\mathfrak{D}S) \cap R = \mathfrak{D}.$$

□

现在我们推得定理 5.1。

定理 *5.1* 的证明。令 $L = k$，并设 $S = L[x_1, \ldots, x_n]$。由命题 2.10 (vi) 和引理 2.43，得到 $c(IS) = c(I) = E_l(I) = E_l(IS)$。根据代数闭情形下的定理 5.1，可知存在 $\gamma_L \in \mathrm{GL}_n(L)$ d_1，……，$d_l \in \mathbb{Z}^+$使得等式 (38) 成立。由于 k 是完美的，扩张 L/k 是可分的，因此由引理 5.13 可知存在 $\gamma_k \in \mathrm{GL}_n(k)$ 使得等式 (39) 成立，从而证明了该定理。□

最后，我们指出，关于 k 的假设不能减弱。

例 5.14。设 k 是特征为 $p > 0$ 的域，且 $t \in k \setminus k^p$。令 $R = k[x, y]$，并设 $I = (x^p + ty^p)$。那么 $c(I) = \frac{1}{p} = E_1(I)$，但 I 不是由线性形式的幂生成的。

6. 特征零下定理 B 的推广

我们可以探讨定理 5.1 是否能够推广到局部情形。值得注意的是，在正特征下答案是否定的；我们提出一个猜想，将定理 5.1 推广到复数域上。

例 6.1。设 $R = \mathbb{F}_p[\![x, y]\!]$，并设 $I = (x^p + y^{p+1}) \subseteq R$。则 $E_1(I) = \frac{1}{p} = \mathrm{fpt}(I)$，但是 $I = I$ 且不存在任何坐标使得 R 中的 I 成为单项式理想。

关于在正特征下何时 $E_1(I) = c(I)$ 的完整描述，请参见[Bai26]。虽然定理 5.1 无法推广到特征 $p > 0$ 下的局部情形，但我们乐观地认为，在特征零下可以得到更强的结果。我们的猜想将 [BA24, Remark 3.7] 推广到任意余维的情形。

猜想 6.2。设 $R=\mathbb{C}[\![x_1,\dots,x_n]\!]$。设 $I\subseteq R$ 是一个理想，且 $\mathrm{ht}(I)\geq l$。那么对数典范阈值$(I)=E_l(I)$ 当且仅当存在一个关于 R 的正则参数系 $y_1,\dots,y_n$，以及正整数 $d_1,\dots,d_l$，使得 $I=(y_1^{d_1},\dots,y_l^{d_l})$。

我们注意到，若猜想 6.2 得到证明，就足以给出定理 5.1 在 $\mathbb{C}$ 上的另一种证明。

证明。设 $R=\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$。设 I 是一个齐次理想，满足 ht$(I)\geq l$ 且 $E_l(I)=$lct(I)。令 $S=\mathbb{C}[\![x_1,\dots,x_n]\!]$。记号 2.9 和定义 2.40 表明 $E_l(IS)=E_l(I)$ 且 lct$(IS)=$ lct(I)，因此由猜想 6.2，存在 S 的一个正则参数系 $y_1,\dots,y_n$，使得 $IS=(y_1^{d_1},\dots,y_l^{d_l})$。

将每个 y_i 写成关于 $x_1,\dots,x_n$ 的幂级数，并令 $z_1,\dots,z_n$ 为 $y_1,\dots,y_n$ 的齐次一次项。由于模 $\mathfrak{m}^2$，$z_1,\dots,z_n$ 这些形式在 R 中生成 R 的齐次极大理想。

由于 I 是齐次的，I 也如此，因此 $I=IS\cap R$。特别地，我们有 $z_1^{d_1},\ \dots\dots,\ z_l^{d_l}\in I$。考虑齐次理想 $I+(z_{l+1}^t,\ \dots\dots,\ z_n^t)$，其中 $t>0$（显然满足 $E_n=$ 对数典范阈值），并运用与定理 5.1 类似的论证，可得 $I=(z_1^{d_1},\ \dots\dots,\ z_l^{d_l})$。□

我们提出一个关于赋值的更强猜想。设 $R=\mathbb{C}[\![x_1,\ \dots\dots,\ x_n]\!]$。设 $v\colon R\to[0,\infty]$ 为一个赋值，且令 $A_R(v)$ 为 [JM12] 中所述的对数不一致性。对于每个正整数 n，定义 $\mathfrak{a}_n(v)=\{f\in R\colon v(f)\geq n\}$。根据 [JM12，推论 6.9] 和 [Blu18，引理 3.5]，，我们有

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}_\bullet(v))\leq A_R(v) \tag{40}$$

若 v 以高度至少为 l 的素理想 $\mathfrak{p}$ 为中心，则对 $m\gg 0$，有 $\sqrt{\mathfrak{a}_m(v)}=\mathfrak{p}$，因此 ht$(\mathfrak{a}_m(v))\geq l$。由此可得 $E_l(\mathfrak{a}_\bullet(v))\leq A_R(v)$。

猜想 6.3. 令 $R,v,\mathfrak{a}_n(v)$ 如上所述，并假设 v 以高度至少为 l 的素理想为中心。若 $E_l(\mathfrak{a}_\bullet(v))=A_R(v)$，则 v 是一个单项式赋值。

本文最后将证明猜想 6.3 蕴含猜想 6.2。首先给出一些准备性结果。

定义 6.4. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，$I\subseteq R$ 是一个理想。I 的**纤维锥** 是环

$$\mathcal{F}_I=\bigoplus_{n\geq 0}\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}.$$

I的**解析扩张度** 记为 $\ell(I)$，等于 $\mathcal{F}_I$ 的维数。

定理 6.5 ([HS06], 定理 8.3.7)。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 $R/\mathfrak{m}$ 是无限的。若 $I\subseteq R$ 是一个真理想，则 $\ell(I)$ 等于满足 $I=J$ 的某个理想 $J\subseteq I$ 的最少生成元个数。

引理 6.6. 设$(R,\mathfrak{m})$ 是维数为 n 的正则局部环。设 $1\leq l\leq n$，且 $I\subseteq J$ 是高度为 l 的理想。若 $\sigma_l(I)=\sigma_l(J)$，并且 J 的解析扩张度等于 l，则 $I=J$。

证明.将 R 替换为 $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$，不会改变假设或结论，依据 [HS06，引理 8.4.2]; 不妨设 $R/\mathfrak{m}$ 是无限的。由命题 2.37 (ii) 和 (iii)，取 $f_1, \dots, f_l \in I$，使得对于 $I' = (f_1, \dots, f_l)$，有 $\sigma_l(I) = \sigma_l(I')$。此外，由定理 6.5，有 $\ell(I') = l$。

令 $c_0(I) \dots, c_n(I)$ 表示 Achilles 和 Manaresi[AM97，定义 2.2]中的**重数序列**。由 [AMP19，推论 2.6 和 2.7],，对于 $K \in \{I', J\}$，我们有 $c_{n-l}(K) = \sigma_l(K)$。此外，由 [AM97，命题 2.3 (i)]，我们有 $c_i(K) = 0$，对于 $i \neq n-d$，因此 I', J 具有相同的重数序列。由此可知, 根据[Pol+20，定理 4.2]，有 $I' = J$，这就得到了所需结论。□

命题 6.7。若猜想 *6.3* 在维数 n、余维数 l的情形下成立，则猜想 *6.2* 在维数 n、余维数 l的情形下成立。

证明。设 $I \subseteq R$ 是一个高度至少为 l 的理想，使得 $E_l(I) = \operatorname{lct}(I)$。根据定义-命题 2.3，选取一个除子赋值 $v : R \to [0, \infty]$，使得 $\operatorname{lct}(I) = \frac{A_R(I)}{v(I)}$。令 $w = v_I()$，则有 $w(I) = 1$ 且 $A_R(w) = \operatorname{lct}(I)$。由于 $w(I) = 1$，对于所有 $n > 0$，都有 $I^n \subseteq \mathfrak{a}_n(w)$，因此 $\operatorname{ht}(w) \geq l$ 且 $E_l(\mathfrak{a}_\bullet(w)) \geq E_l(I)$。

由定理 3.9 与式 (40) 可知

$$\operatorname{lct}(I) = E_l(I) \leq E_l(\mathfrak{a}_\bullet(w)) \leq \operatorname{lct}(\mathfrak{a}_\bullet(w)) \leq A_R(w) = \operatorname{lct}(I), \tag{41}$$

因此特别地 $E_l(\mathfrak{a}_\bullet(w)) = A_R(w)$。由猜想 6.3，$w$ 是 R的某些局部坐标 z_1，.....，z_n 下的单项式赋值，且 $w(z_1) \geq w(z_2) \geq \cdots \geq w(z_n)$。由于对 $1 \leq j \leq l$ 有 $\sigma_j(I) \leq \sigma_j(\mathfrak{a}_\bullet(w))$，且 $E_l(I) = E_l(\mathfrak{a}_\bullet(w))$，由 [BA17，命题 10]，我们得出 $\sigma_j(I) = \sigma_j(\mathfrak{a}_\bullet(w))$。我们可以从权 $w(z_i)$ 读出不变量 $\sigma_1(\mathfrak{a}_\bullet(w))$ .....，$\sigma_l(\mathfrak{a}_\bullet(w))$。特别地，我们有 $\sigma_j(\mathfrak{a}_\bullet(w)) = \frac{1}{w(z_1)\dots w(z_j)}$，因此对所有 $1 \leq j \leq l$ 有 $w(z_j) = \sigma_{j-1}(I)\,\sigma_j(I)$。此外，由拟单项式赋值的对数不一致性的定义，我们有 $A_R(w) = w(z_1) + \cdots + w(z_n)$，故必有 $w(z_{l+1}) = \cdots = w(z_n) = 0$。

根据构造，$I \subseteq \mathfrak{a}_1(w)$。如果数值 $\frac{1}{w(z_1)} \cdots \frac{1}{w(z_l)}$ 不全是整数，那么 $\Gamma(\mathfrak{a}_1(w)) \subsetneq \Gamma(\mathfrak{a}_\bullet(w))$ – 但这将意味着

$$\operatorname{lct}(I) \leq \operatorname{lct}(\mathfrak{a}_1(w)) < \operatorname{lct}(\mathfrak{a}_\bullet(w)),$$

根据方程（41），这是不可能的。记 $d_i = \frac{1}{w(z_i)}$ 为 $1 \leq i \leq l$。现在我们处于这样的情形：$I \subseteq (z_1^{d_1}, \dots, z_l^{d_l}) =: \mathfrak{D}$ 且 $E_l(I) = E_l(\mathfrak{D})$。由于 $\mathfrak{D}$ 是由 l 个元素生成的理想的整闭包，我们有 $\ell(\mathfrak{D}) = l$。由引理 6.6 可得 $I = \mathfrak{D}$。□

以下论证为专家所熟知。

命题 6.8. 猜想 *6.3* 在余维数 $l = 1$ 中成立。

证明。如果 v 的中心是高度至少为 2 的素理想，那么 $\operatorname{ht}(\mathfrak{a}_\bullet(v)) \geq 2$，因此 $A_R(v) \geq \operatorname{lct}(\mathfrak{a}_\bullet(v)) \geq E_2(v) > E_1(v)$。因此，若要使$E_1(v) = A_R(v)$，其中心必定是一个主素理想。

fR，因此对某个不可约的 $f \in R$ 和某个 $c \in \mathbb{R}^+$，有 $v = c\,\mathrm{ord}_f$。由此可得$E_1(f) = \mathrm{lct}(f)$，因此根据 [GZ15]，f 是局部坐标的幂。□

命题 6.9. 猜想 *6.3* 在维数2时成立。

证明。由命题 6.8，只需考虑情形 $l = 2$。设 $E_2(v) = A_R(v)$。不失一般性，将 v 归一化，使得 $v(\mathfrak{m}) = 1$。令 $\alpha(v) = \sup_{f \in \mathfrak{m}} v(f)/\,\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f)$ 表示 α 的偏斜度，如 [FJ04] 中所述。由 [BFJ14，注 4.9]，可得 $e_1(\mathfrak{a}_\bullet(v)) = e_2(\mathfrak{a}_\bullet(v)) = \alpha^{-1} v(\,)$，因此 $E_2(v) = 1 + \alpha(v)$。由 [FJ04，命题 3.48 (i)]，可得 $1 + \alpha(v) \leq A_R(v)$，且等号成立当且仅当 v 是单项式赋值，从而证明了该断言。□

参考文献

[AM97] R. Achilles 和 M. Manaresi。《双分次环的重数与交理论》。载于：《数学年刊》309.4（1997），第 573–591 页。ISSN：0025-5831,1432-1807。doi：10.1007/s002080050128。[AMP19] R. Achilles、M. Manaresi 和 T. Pruschke。《混合重数、塞格雷数与塞格雷类》。载于：《代数杂志》525（2019），第 390–415 页。ISSN：0021-8693,1090-266X。doi：10.1016/j.jalgebra.2019.01.028。[BA08] Carles Bivià-Ausina。《单项式理想的联合约化与复解析映射的重数》。载于：*Math. Res. Lett.* 15.2（2008），第 389–407 页。ISSN：1073-2780。doi：10.4310/MRL.2008.v15.n2.a15。[BA17] Carles Bivià-Ausina。《对数典范阈值与对角理想》。载于：《美国数学会会刊》145.5（2017），第 1905–1916 页。ISSN：0002-9939,1088-6826。doi：10.1090/proc/13382。[BA24] Carles Bivià-Ausina。理想乘积的对数典范阈值与混合 *Łojasiewicz* 指数。2024年。arXiv：2409.14251 [math.AC]。[Bai25] BENJAMIN BAILY。等生成理想的 *F*-纯阈值下界。2025年。arXiv：2506.18891 [math.AC]。[Bai26] BENJAMIN BAILY。正则局部环中的极值 *F* 阈值。2026年。arXiv：2601.19885 [math.AC]。[Ben+15] Angélica Benito 等。《局部无环簇代数的奇点》。载于：《代数与数论》9.4（2015），第 913–936 页。ISSN：1937-0652,1944-7833。doi：10.2140/ant.2015.9.913。[BFJ14] Sébastien Boucksom、Charles Favre 和 Mattias Jonsson。《Izumi 定理的改进》。载于：交互中的赋值理论。欧洲数学会会议报告丛书。欧洲数学会，苏黎世，2014年，第 55–81 页。ISBN：978-3-03719-149-1。[Blu18] Harold Blum。《具有最小归一化体积的赋值的存在性》。载于：《组合数学》154.4（2018），第 820–849 页。ISSN：0010-437X,1570-5846。doi：10.1112/S0010437X17008016。[BS15] Bhargav Bhatt 和 Anurag K. Singh。《Calabi-Yau 超曲面的 F-纯阈值》。载于：《数学年刊》362.1-2（2015），第 551–567 页。ISSN：0025-5831,1432-1807。doi：10.1007/s00208-014-1129-0。

[DK01] Jean-Pierre Demailly 和 János Kollár。《复奇点指数的半连续性与 Fano轨形上的 Kähler-Einstein度量》。载于：Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 34.4（2001），第 525–556 页。ISSN：0012-9593。doi：10.1016/S0012-9593(01)01069-2。[DP14] Jean-Pierre Demailly 和 Hoang Hiep Pham。《对数典范阈值的尖锐下界》。载于：Acta Math. 212.1（2014），第 1–9 页。ISSN：0001-5962,1871-2509。doi：10.1007/s11511-014-0107-4。[DSB18] Alessandro De Stefani 和 Luis Núñez Betancourt。《分次环的 F-阈值》。载于：Nagoya Math. J. 229（2018），第 141–168 页。ISSN：0027-7630,2152-6842。doi：10.1017/nmj.2016.65。[DSBP18] Alessandro De Stefani、Luis Núñez Betancourt 和 Felipe Pérez。《关于 F-阈值的存在性及相关极限》。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 370.9（2018），第 6629–6650 页。ISSN：0002-9947,1088-6850。doi：10.1090/tran/7176。[Eis+] David Eisenbud 等。ReesAlgebra：一个 Macaulay2 软件包。版本 2.3。Macaulay2 软件包，网址：https://github.com/Macaulay2/M2/tree/master/M2/Macaulay2/packages。[Eis95] David Eisenbud。《交换代数》。第 150 卷。数学研究生教材。兼论代数几何。施普林格出版社，纽约，1995年，第 xvi+785 页。ISBN：0-387-94268-8；0-387-94269-6。doi：10.1007/978-1-4612-5350-1。[EM21] Eva Elduque 和 Mircea Mustaţă。《关于 Teissier 的一个猜想：对数典范阈值情形》。载于：Mat. Sb. 212.3（2021），第 175–192 页。ISSN：0368-8666,2305-2783。doi：10.4213/sm9442。[FEM03] Tommaso de Fernex、Lawrence Ein 和 Mircea Mustaţă。《对数典范阈值的界及其在双有理刚性中的应用》。载于：Math. Res. Lett. 10.2-3（2003），第 219–236 页。ISSN：1073-2780。doi：10.4310/MRL.2003.v10.n2.a9。[FEM04] Tommaso de Fernex、Lawrence Ein 和 Mircea Mustaţă。《重数与对数典范阈值》。载于：J. Algebraic Geom. 13.3（2004），第 603–615 页。ISSN：1056-3911,1534-7486。doi：10.1090/S1056-3911-04-00346-7。[Fer26] Tommaso de Fernex。个人通信。2026年。[FJ04] Charles Favre 和 Mattias Jonsson。《赋值树》。第 1853 卷。数学讲义。施普林格出版社，柏林，2004年，第 xiv+234 页。ISBN：3-540-22984-1。doi：10.1007/b100262。[FM09] Tommaso de Fernex 和 Mircea Mustaţă。《对数典范阈值的极限》。载于：Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 42.3（2009），第 491–515 页。ISSN：0012-9593,1873-2151。doi：10.24033/asens.2100。[GS] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www2.macaulay2.com。

[GW15] Jin Guo 和 Tongsuo Wu。《理想运算下的单项式理想》。载于：《代数通讯》43.11（2015），第 4745–4762 页。ISSN：0092-7872,1532-4125。DOI：10.1080/00927872.2014.952012。[GZ15] Qi'an Guan 和 Xiangyu Zhou。《具有 Lelong 数为一的权的乘子理想层的刻画》。载于：《数学进展》285（2015），第 1688–1705 页。ISSN：0001-8708,1090-2082。DOI：10.1016/j.aim.2015.08.002。[Her16] Daniel J. Hernández。《多项式的 F-纯性与对数典范性》。载于：Nagoya Math. J. 224.1（2016），第 10–36 页。ISSN：0027-7630,2152-6842。DOI：10.1017/nmj.2016.14。[Hie25] Pham Hoang Hiep。《多重次调和函数与复空间的奇点不变量》。2025年。arXiv：2304.02238 [math.CV]。[How01] J. A. Howald。《单项式理想的乘子理想》。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 353.7（2001），第 2665–2671 页。ISSN：0002-9947,1088-6850。DOI：10.1090/S0002-9947-01-02720-9。[HS06] Craig Huneke 和 Irena Swanson。《理想、环与模的整闭包》。第 336 卷。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，2006年，第 xiv+431页。ISBN：978-0-521-68860-4。[HT04] Nobuo Hara 和 Shunsuke Takagi。《测试理想的一种推广》。载于：Nagoya Math. J. 175（2004），第 59–74 页。ISSN：0027-7630,2152-6842。DOI：10.1017/S0027763000008904。[Hun+08] Craig Huneke 等。《F-阈值、紧闭包、整闭包与重数界》。载于：第 57 卷。Melvin Hochster 荣誉专辑。2008年，第 463–483 页。DOI：10.1307/mmj/1220879419。[HY03] Nobuo Hara 和 Ken-Ichi Yoshida。《紧闭包与乘子理想的一种推广》。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 355.8（2003），第 3143– 3174 页。ISSN：0002-9947,1088-6850。DOI：10.1090/S0002-9947-03-03285- 9。[JM12] Mattias Jonsson 和 Mircea Mustaţă。《理想序列的赋值与渐近不变量》。载于：《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）62.6（2012），第 2145–2209 页。ISSN：0373-0956,1777-5310。DOI：10.5802/aif. 2746。[Kad+22] Zhibek Kadyrsizova 等。《 F-纯阈值的下界与极端奇点》。载于：Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 9（2022），第 977–1005 页。ISSN：2330-0000。DOI：10.1090/btran/106。[Kim21] Dano Kim。《关于 Teissier 的一个问题》。载于：《纯粹与应用数学年刊》（第 4 系列）200.5（2021），第 2305–2311 页。ISSN：0373-3114,1618-1891。DOI：10.1007/ s10231-021-01081-x。[Laz04] Robert Lazarsfeld。《代数几何中的正性》第二卷。第 49 卷。《数学及其边缘领域成果》第 3 辑。《数学及相关领域成果》第 3 系列。《现代数学概览丛书》 [《数学及相关领域成果》。第 3 系列。《现代数学概览丛书》]。《向量丛与乘子理想的正性》

施普林格出版社，柏林，2004年，第 xviii+385页。ISBN：3-540-22534-X。DOI：10.1007/978-3-642-18808-4。[LS81] Joseph Lipman 和 Avinash Sathaye。《雅可比理想与 Briançon-Skoda 定理》。载于：《密歇根数学杂志》28.2（1981），第 199–222 页。ISSN：0026-2285,1945-2365。[May14] Sarah Mayes。《完全交的一般初始系的极限形状》。载于：《代数通讯》 42.5（2014），第 2299–2310 页。ISSN：0092-7872,1532-4125。DOI：10.1080/00927872.2012.758271。[MTW05] Mircea Mustaţă、Shunsuke Takagi 和 Kei-ichi Watanabe。《F 阈值与 Bernstein-Sato 多项式》。载于：欧洲数学大会。欧洲数学会，苏黎世，2005年，第 341–364 页。ISBN：3-03719-009-4。[Mus02] Mircea Mustaţă。《理想分次序列的重数》。载于：《代数杂志》 256.1（2002），第 229–249 页。ISSN：0021-8693,1090-266X。DOI：10.1016/S0021-8693(02)00112-6。[Mus12] Mircea Mustaţă。《IMPANGA 对数正则阈值讲义》。载于：《代数几何论文集》。EMS 大会报告系列。Tomasz Szemberg 记录。欧洲数学会，苏黎世，2012年，第 407–442 页。ISBN：978-3-03719-114-9。DOI：10.4171/114-1/16。[Pol+20] Claudia Polini 等。《重数序列与整依赖》。载于：《数学年刊》 378.3-4（2020），第 951–969 页。ISSN：0025-5831,1432-1807。DOI：10.1007/s00208-020-02059-5。[PRS24] Janet Page、Tim Ryan 和 Karen E. Smith。《具有最大直线的光滑曲面》。2024年。arXiv：2406.15868 [math.AG]。[Ras15] Alexander Rashkovskii。《对数正则阈值的极端情形》。载于：《巴黎科学院数学报告》 353.1（2015），第 21–24 页。ISSN：1631- 073X,1778-3569。DOI：10.1016/j.crma.2014.11.002。[Roc70] R. Tyrrell Rockafellar。《凸分析》。第 28 号卷。普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1970年，第 xviii+451

[Sko72] Henri Skoda. “$\mathbf{C}^n$中有限阶或无限阶的解析子集”. 载于：《法国数学会通报》100 (1972)，第 353–408 页 . issn: 0037-9484.[Smi20] Ilya Smirnov. “ 关于族中重数的半连续性”. 载于：《数学文献》25 (2020)，第381–400页. issn: 1431-0635,1431-0643.[Tak04] Shunsuke Takagi. “对的F-奇异性与任意余维的伴随反演”. 载于：《数学发明》 157.1 (2004)，第123–146页. issn: 0020-9910,1432-1297. doi: 10.1007/s00222-003-0350-3.[Tak06] Shunsuke Takagi. “奇异簇上乘子理想的公式”. 载于：《美国数学杂志》128.6 (2006)，第1345–1362页. issn: 0002-9327,1080- 6377.[TW04] Shunsuke Takagi与Kei-ichi Watanabe. “关于F-纯阈值”. 载于：《代数杂志》 282.1 (2004)，第278–297页. issn: 0021-8693,1090-266X. doi: 10.1016/j.jalgebra.2004.07.011.[TXZ24] Siyong Tao、Zida Xiao与HuaiqingZuo. 正特征下加权齐次奇异性的*Bernstein-Sato* 根. 2024年. arXiv: 2410. 20188v1 [math.AC].