arXiv:2603.08756v1 [math.HO] 7 Mar 2026

数学证明

本课程讲义为从计算微积分转向抽象数学的本科生介绍数学证明。内容包括命题逻辑、证明技巧、数学归纳法、域、集合与关系、数列与级数、实数的完备性、基数及相关基础知识。讲义中还包含大量例题和习题（均附完整解答），适用于一学期的证明课程。

版本1（初版，排版于2026年3月）

© **2026 Heinz H. Bauschke**

本作品采用知识共享署名—非商业性使用—相同方式共享 4.0 国际许可协议授权。

您可以出于非商业目的分享和改编本材料，但须注明适当出处，且衍生作品须采用相同许可协议发布。

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

前言

MATH 220 数学证明的课程简介指出

> 集合与函数；归纳法；基数；实数的性质；数列、级数与极限。全程着重强调证明的逻辑、结构、风格和清晰度。

这些内容属于经典内容，因此已有大量关于这一主题的教科书可供参考；例如，[1] [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]可参阅一些有用的相关参考资料。Th ese no tes 在我还是一名本科生时 本书的基本脉络深受 Forster 的 [6] 启发——这本书对我影响深远，研究生。

这套讲义有助于从微积分（主要依赖机械化计算）过渡到更高级的抽象数学。涵盖的主题并不算多；事实上，这些讲义中的内容一学期就能讲完。

请注意，不列颠哥伦比亚大学图书馆提供许多书籍的访问权限，其中一些（尤其是施普林格出版的书籍）可以在校园网络内下载，包括：

- Matthias Beck 和 Ross Geoghegan：《证明的艺术》
- Ethan Bloch：证明与基础
- Daniel W. Cunningham：证明的逻辑导论
- Larry J. Gerstein：数学结构与证明导论
- John M. Howie：实分析

希望你 能喜欢这些讲义，也欢迎提出反馈和建议，并指出其中的错字。

我由衷感谢那些敏锐而友善的学生，他们已经通过修正错别字、提出改进建议，为本书作出了贡献。特别感谢 Alexandra Gretchko，她在2013年秋季给了我一长串有用的意见！感谢 Nicholas Kayban 在2017年秋季提出的宝贵意见！我也很感激 Jakob Thoms，他在2018年秋季发现了几处重要的错别字！最后但同样重要的是，我要感谢 Liangjin Yao、WalaaMoursi、MinhBui、HuiOuyang 和 Shambhavi Singh，他们是本课程出色的助教，并提出了几道习题、发现了各种错别字！

Heinz Bauschke，不列颠哥伦比亚大学奥肯纳根校区

基洛纳，2026

目录

1 背景 .1
1.1 逻辑联结词.11.2 真值表及其他.11.3 数学结果的证明技巧.2习题.3

2 数学归纳法原理 .11
2.1 命题与例子.112.2 阶乘与二项式定理.14习题.17

3 域.31
3.1 加法公理.313.2 乘法公理.323.3 结合律、交换律和分配律.343.4 幂与指数.353.5 一般域.35习题.36

4 集合与关系 .47
4.1 基本概念.474.2 集合与幂集的定律.484.3 笛卡尔积与关系.49习题.52

5 有序域 .61
5.1 序公理及其推论.615.2 绝对值的性质.635.3 阿基米德域及其推论.65习题.66

6 数列 and Limits . 77
6.1 定义与例子.776.2 极限运算法则.806.3 收敛到 $\pm\infty$ .846.4 级数.84习题.86

7 完备性公理.97
7.1 $\sqrt{2}$ 的问题.977.2 柯西序列与完备性公理.977.3 实数的级数展开.987.4 子序列与博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理.1007.5 单调数列.101习题.102

8 平方根 .109
8.1 平方根的存在性.1098.2 收敛速度.111习题.113

9 Series 121
9.1 基本收敛判别法.1219.2 交错级数.1229.3 绝对收敛级数.123习题.124

10 函数与基数 .131
10.1 基本定义.13110.2 复合与逆元.13210.3 基数.13310.4 可数性.13410.5 实数子集的基数.13610.6 康托尔定理.13610.7 佐恩引理.137习题.138

11 指数函数与柯西乘积 .143
11.1 定义与绝对收敛.14311.2 两个级数的柯西乘积.14411.3 函数方程.146习题.147

12 杂项 ny . 155
12.1 下确界与上确界.15512.2 下极限与上极限.157习题.157

符号与记号 .163

参考文献.165

第一章 背景

1.1 逻辑联结词

定义 1.1 命题是一个可以判定为真（T）或假（F）的句子。

例 1.2 以下都是命题：

(i) $1+0=1$。(ii) 每个整数都是素数。(iii) **(哥德巴赫)**每个大于 2 的偶数都是两个素数之和。

这里 (i) 显然为真，而 (ii) 为假（例如，因为 $6=2\cdot 3$）。显然，(iii) 非真即假，因此(iii) 是一个命题；然而，目前尚不清楚(iii) 是否为真。命题可以取否定，也可以用“且”和“或”组合起来。

定义 1.3（非、且、或、蕴含、当且仅当）设 p 和 q 是命题。则：

(i) **“非 p”：**记作 $\neg p$。(ii) “p **且** q”：记作 $p\wedge q$。(iii) “p **或** q”：记作 $p\vee q$。(iv) “p **蕴含** q”：记作 $p\Rightarrow q$，也可表述为“如果 p，那么 q”。(v) “p **当且仅当** q”：记作 $p\Leftrightarrow q$，其含义是“$p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$”。

例 1.4 假设 p 表示“5 是奇整数”，q 表示“6 是素数”。那么 p 为真，而 q 为假。此外：

(i) $\neg p$ 表示“5 不是奇整数”，即“5 是偶数”，这是假的。(ii) $\neg q$ 表示“6 不是素数”，这是真的。(iii) $p\wedge q$ 表示“5 是奇整数且 6 是素数”，这是假的。(iv) $p\vee q$ 表示“5 是奇整数或 6 是素数”，这是真的。(v) $p\Rightarrow q$ 表示“如果 5 是奇整数，那么 6 是素数”，这是假的。(vi) $q\Rightarrow p$ 表示“如果 6 是素数，那么 5 是奇整数”，这是真的。(vii) $q\Leftrightarrow p$ 表示“5 是奇整数当且仅当 6 是素数”，这是假的。

1.2 真值表及其他

通过真值表来理解逻辑联结词很有帮助：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T

命题“$p \Rightarrow q$”和“$(\neg p) \vee q$”具有相同的真值表，因此它们**逻辑等价**。如果一个命题总是真的，那么它就是一个**重言式**；反之，如果它总是假的，那么它就是一个**矛盾**。

定义 1.5 设 p 和 q 为命题。那么：

(i) “$q \Rightarrow p$”是“$p \Rightarrow q$”的**逆命题**。(ii) “$(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$”是“$p \Rightarrow q$”的**逆元**。(iii) “$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$”是“$p \Rightarrow q$”的**逆否命题**。

当然，可以组合两个以上的命题，从而得到更大的真值表，以便涵盖所有的 c 例。

有些命题涉及包含“对于每个”“对于所有”“任意”“存在”等词语的短语。例如，“每个整数都是素数”的否定是“存在一个不是素数的整数”（例如，$10 = (2)(5)$，它作为一个**反例**）；“每个整数都不是素数”这一答案是错误的。

最后，我们指出，WolframAlpha 可以很好地为你生成真值表；例如，试试“truth table for p implies q”。

1.3 数学结果的证明技巧

数学结果通常被称为定理、命题、引理、推论或例子。定理通常是重要的数学结果，而命题或引理的重要性则稍逊一筹。推论是另一个数学结果的简单推论。例子用于说明一个更为抽象的定理。

在接下来的章节中，我们将看到许多证明。假设我们希望证明诸如$p \Rightarrow q$这样的命题。当然，如果 p 为假，那么这个命题就为真（请检查真值表）。因此，只需假设 p 为真，并推导出 q为真。

如果运气好，我们可以直接从 p 推理到 q。这条途径能带来最有洞见的证明，因为我们可以清楚地看到通向结论 q 的路径。

如果这种直接推理行不通，一种常见的做法是将假设 p 分成几种情况，然后分别证明每种情况下的结论 q。我们将此视为一种分而治之的方法。许多较难的证明都采用这种模式。

有时，考虑证明逆否命题会有所帮助。

最后，如果所有方法都行不通，建议采用反证法：假设 p 为真且 q 为假，并由此推出一个错误的命题（荒谬）。虽然这并不能让我们深入理解 $p \Rightarrow q$ 为何为真，但它是一个非常有力的工具。

命题 涉及正整数的命题通常使用数学归纳法原理来证明（参见第2 ）.

We 最后以一些简单的证明作结，展示刚才提到的一些技巧。

命题 1.6（直接证明）如果 n 是偶数，那么 n^2 也是偶数。

证明。写成 $n = 2k$，其中 k 是整数——这就是 n 为偶数的含义！那么 $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$也是偶数，因为 $2k^2$ 显然是整数。□

命题 1.7（分类证明）如果 n是一个不能被3整除的整数，那么 n^2 除以3 后的余数是 $+1$。

证明。整数 n 除以 3 后，余数只能是 1 或 2。情形 *1*： $n = 3k + 1$，其中 k 是另一个整数。那么 $n^2 = (3k + 1)^2 = (3k)^2 + 2(3k)(1) + 1 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$，如所述。情形 *2*：$n = 3k + 2$，其中 k 是另一个整数。那么 $n^2 = (3k + 2)^2 = (3k)^2 + 2(3k)(2) + 4 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$，如所述。 □

命题 1.8（反证法） 如果 n 是一个整数，且 n^2 是奇数，则 n 是奇数。

证明。反设 n 是偶数。由命题 1.6， n^2 是偶数，这是荒谬的，因为n^2 被假定为奇数。 □

要证明一个数学命题为假，需要给出一个反例。例如，“每个素数都是奇数”这一命题的反例是数2，因为2是一个不是奇数的素数。

习题

习题 1.1 设 p 与 q 为命题。计算$(\neg p) \vee q$ 的真值表，并与 $p \Rightarrow q$的真值表比较；由此推出最后这两个命题是逻辑等价的。

解答。事实上，

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

并且，由于最后两列相同，因此它们逻辑等价。 □

习题 1.2 写出：(i) 一个永真命题；(ii) 一个矛盾命题。

解答。设 p 是任意命题。(i)：那么 $p \vee (\neg p)$ 必定恒为 T，确实如此（分类讨论）：如果 p 是 T，那么 $p \vee (\neg p) = T \vee (\neg T) = T \vee F = T$。如果 p 是 F，那么 $p \vee (\neg p) = F \vee (\neg F) = F \vee T = T$。一个具体例子是“每个整数都是偶数或奇数”。(ii)：与 (i) 类似，考虑 $p \wedge (\neg p)$，它恒为 F；具体来说，“每个整数都是偶数且是奇数”。□

习题 1.3（逆否命题） 设 p 和 q 是命题。求出 $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ 的真值表，并与 $p \Rightarrow q$的真值表比较；由此推断后面这两个命题逻辑等价。

解答。事实上，

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

并且由于最后两列重合，逻辑等价随之成立。 □

练习1.4（反证法） 设 p 与 q 为命题。计算$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow F$ 的真值表，并与 $p \Rightarrow q$的真值表比较；由此推出后两个命题是逻辑等价的。

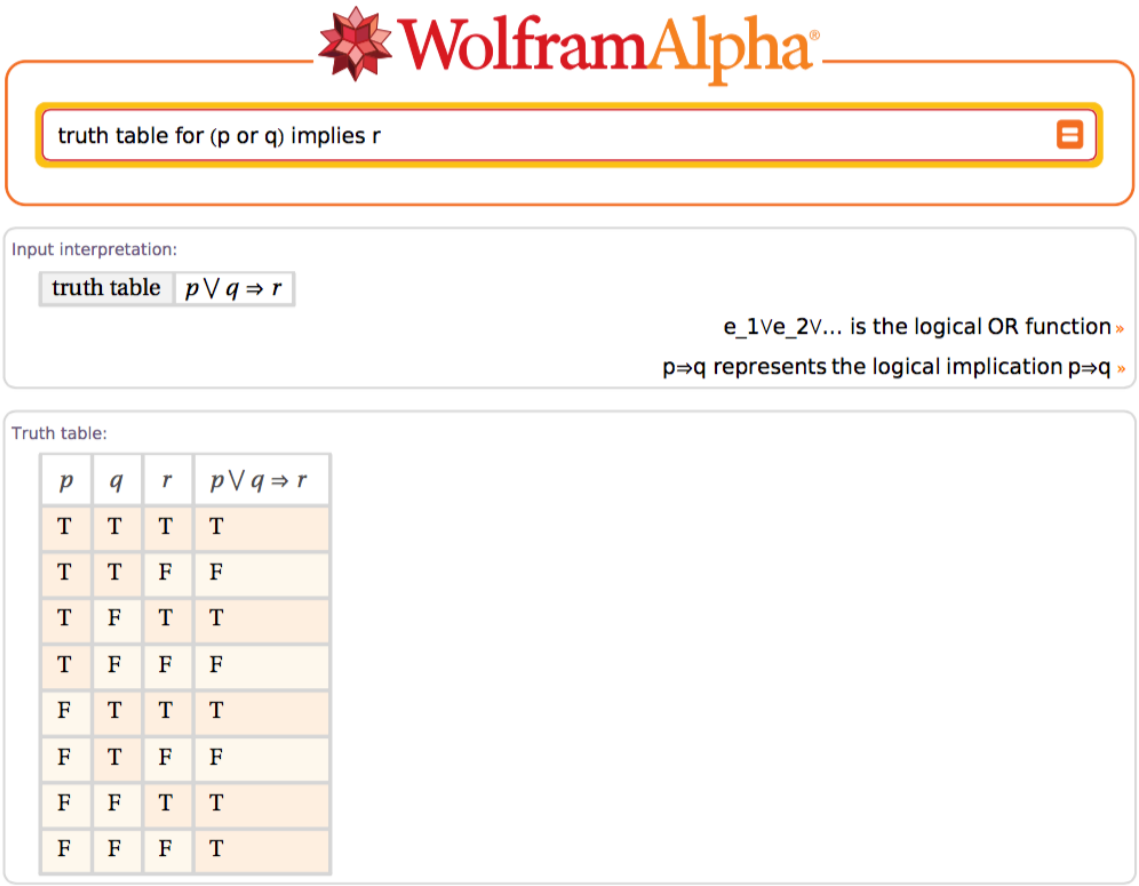
解答。确实，

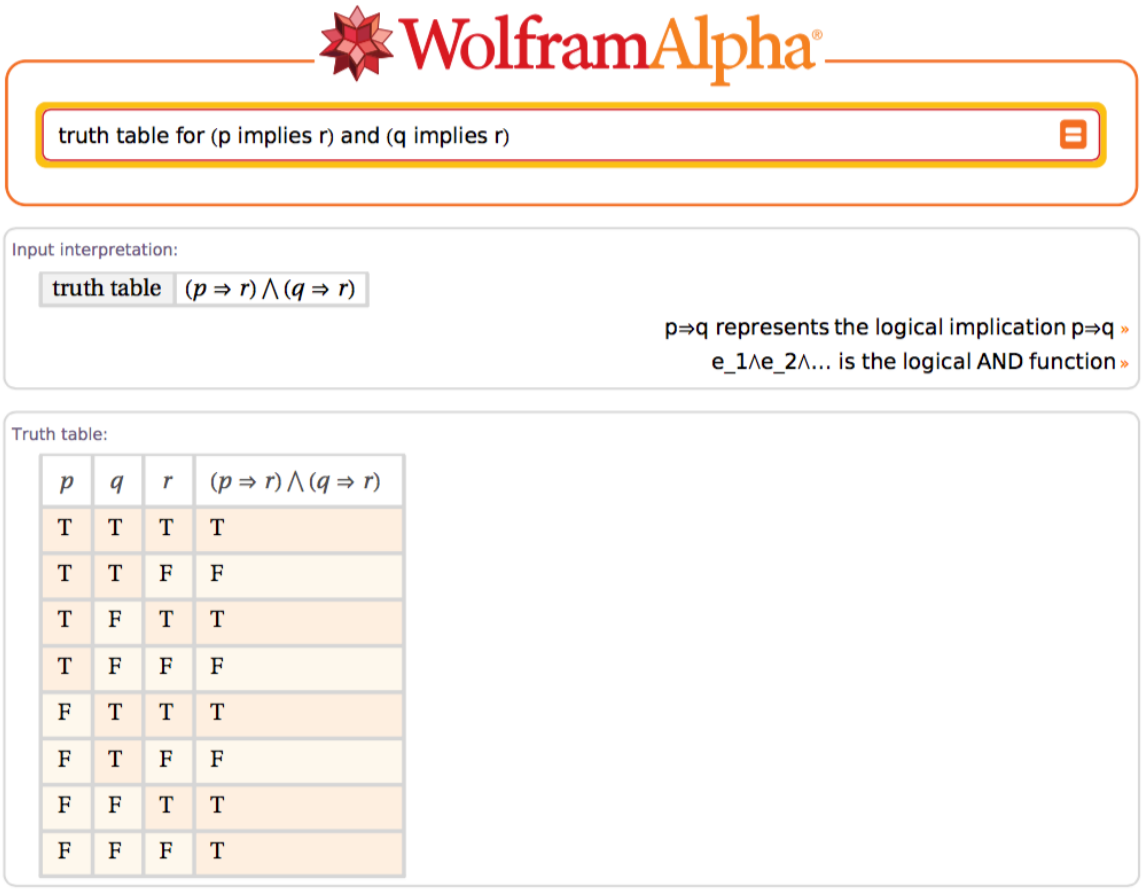
p	q	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow \mathrm{F}$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

由于最后两列相同，因此可得逻辑等价。 □

练习1.5（分类证明） 设 p、 q和 r 是命题。求 $(p \vee q) \Rightarrow r$ 和 $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ 的真值表；由此推导出后两个命题逻辑等价。

解答。我们使用 WolframAlpha 展示这些表格。





□

练习 1.6 证明：如果 n 是整数，那么 n^2 除以 4 后的余数只能是 0 或 1。提示：按情况讨论。

解答。
情形 *1*：n 是偶数，设为 $n=2k$，其中 k 是另一个整数。
则 $n^2=(2k)^2=4k^2$ 除以 4 的余数为 0。
情形 *2*：n 是奇数，设为 $n=2k+1$，其中 k 是另一个整数。
则 $n^2=(2k+1)^2=(2k)^2+2(2k)+1^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$ 除以 4 的余数为 1。□

练习 1.7 下面写出了一个命题的证明。请确定这个命题是什么。

Proof。设 $m=2k$ 和 $n=2l$，其中 k 和 l 是整数。那么 $m+n=2k+2l=2(k+l)$ 也是偶数。 □

解答。这个命题是：“两个偶整数的和是偶数。” □

练习 1.8 证明奇数与偶数的和是奇数。

解答。令 $m=2k$ 和 $n=2l+1$，其中 k 和 l 是整数，使得 m 表示偶数，n 表示奇数。那么 $m+n=2k+2l+1=2(k+l)+1$ 确实是奇数。□

习题 1.9 请举出两个例子，使得 $p \Rightarrow q$ 为正确，但其逆命题 $\neg p \Rightarrow \neg q$ 为假。

解答。第一个例子：设 p 是命题“f 的函数是可微的”，设 q 是命题“f 的函数是连续的”。根据微积分 I，我们知道 $p \Rightarrow q$ 是真的。可是，逆命题是假的：例如，当 $f = |\cdot|$ 是绝对值时，f 是连续的（所以 q 是真的，因此 $\neg q$ 是假的），而 f 不可微（所以 p 是假的且 $\neg p$ 是真的）。于是 $(\neg p) \Rightarrow (\neg q) = (\neg(\neg p)) \vee (\neg q) = (\neg T) \vee F = F \vee F = F$。换句话说，$q$ 的逆命题是 $q \Rightarrow p$ 的逆否命题，而我们知道连续性并不意味着可微性。

第二个例子：设 p 是命题“$x \geq 0$”，设 q 是命题“$x^2 \geq 0$”。由于 $x^2 \geq 0$ 不蕴含 $x \geq 0$（考虑 $x = -1$），我们得到了另一个例子。

更一般地，你可以取任意一个正确的蕴含 $p \Rightarrow q$，其中 $q \Rightarrow p$ 为假。 □

假设我们想证明蕴含 $p \Rightarrow q$。可以从 q开始进行推导，经过变形后得到 p。在这种情况下，我们证明了 $q \Rightarrow p$。如果幸运的话，所有步骤都是可逆的，那么就证明了 $p \Leftrightarrow q$，尤其也证明了 $p \Rightarrow q$。这种常见的技巧也称为**逆向推理**。

练习1.10 在一场有 n 名选手 $P_1, \ldots, P_n$参加的循环赛中，其中 $n \in \{2, 3, \ldots\}$，每名选手恰好与其他每名选手进行一场比赛。假设每场比赛必分出胜负（不会出现平局）。记 W_i 和 L_i 分别为选手 P_i 获胜和失利的比赛场数。证明：

$$W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2 = L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2.$$

提示：通过逆向推理推导出一个正确的命题。如果你的所有步骤都是可逆的，那么你就找到了一个证明。写出一个不使用逆向推理的简洁证明。

解答。我们 进行逆向推理。我们将使用 Σ 表示求和，并简单地写作 Σ 来表示一个求和式，起始于 $i = 1$ 到 $i = n$的求和。假设

$$\sum W_i^2 = \sum L_i^2.$$

那么，由于 $W_i + L_i = n - 1$,

$$\begin{aligned}
&\sum (W_i^2 - L_i^2) = 0 \\
\Rightarrow &\sum (W_i + L_i)(W_i - L_i) = 0 \\
\Rightarrow &\sum (n-1)(W_i - L_i) = 0 \\
\Rightarrow &\sum (W_i - L_i) = 0 \\
\Rightarrow &\sum W_i = \sum L_i.
\end{aligned}$$

现在，最后一个方程成立，因为获胜场次的总数与失利场次的总数相同。此外，所有蕴含都是可逆的。因此，我们可以通过逆向推理得到一个证明。

简洁证明：注意到每位玩家进行 $n-1$ 场比赛，因此 $W_i + L_i = n - 1$。同时注意到获胜场次的总数与失利场次的总数相同：$\sum W_i = \sum L_i$。因此 $\sum (W_i - L_i) = 0$。于是 $0 = (n-1) \sum (W_i - L_i) = \sum (n-1)(W_i - L_i) = \sum (W_i + L_i)(W_i - L_i) = \sum (W_i^2 - L_i^2) = (\sum W_i^2) - (\sum L_i^2)$。所以，$\sum W_i^2 = \sum L_i^2$。□

练习 1.11 证明不存在函数 f 从集合 $\{0,1\}$ 到集合 $\{0,1\}$ 使得[1] 对每一个 $x \in \{0,1\}$，我们有$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1 - x$。提示：用矛盾论证。

解答。我们用反证法。反设存在一个函数 f，使得

[1] 这类函数在 *Quantum Information Theory*中发挥作用。

$$f\big(f(x)\big) = 1 - x \tag{1.1}$$

对每一个 $x \in \{0,1\}$。只有两种可能的情况：Al

方案 *1*： $f(0) = 0$.

一方面， $f(f(0)) = f(0) = 0$。另一方面， $f(f(0)) = 1 - 0 = 1$根据 (1.1）。总之，我们得到了荒谬的结论： $0 = f(f(0)) = 1$。

方案 *2*： $f(0) = 1$。

于是，根据 (1.1）， $1 = 1 - 0 = f(f(0)) = f(1)$，因此 $f(1) = 1$。应用 f，得到 $f(f(1)) = f(1) = 1$。另一方面，再次利用 (1.1）， $f(f(1)) = 1 - 1 = 0$。总之，我们得到了荒谬的结论：$f(f(1))$ 同时等于 0 和 1。

总之，对于所有情况，我们都得到了矛盾。因此，不存在这样的函数 f。 □

习题1.12 设 f： $[0,1] \to [0,1]$满足 $f(f(x)) = 1 - x$。证明：(i) $f(1/2) = 1/2$；$0 < f(0) < 1$；以及 (ii) (iii) $0 < f(1) < 1$。

解答。(i)：我们有 $f(f(1/2)) = 1 - 1/2 = 1/2$。因此， $f(1/2) = f(f(f(1/2))) = 1 - f(1/2)$，从而$2f(1/2) = 1$，即 $f(1/2) = 1/2$。

(ii)：若 $f(0) = 0$，则 $0 = f(0) = f(f(0)) = 1 - 0 = 1$，这显然不成立。因此 $0 < f(0)$。反设 $f(0) = 1$。那么 $1 - 0 = f(f(0)) = f(1)$，从而 $f(1) = 1$。我们有 $f(0) = 1 = f(1)$。应用 f 得到 $1 - 0 = f(f(0)) = f(f(1)) = 1 - 1 = 0$，这显然不成立。因此 $f(0) < 1$。

（iii）：这与（ii）的证明类似：如果 $f(1) = 1$，那么 $1 = f(1) = f(f(1)) = 1 - 1 = 0$，这是荒谬的。因此 $f(1) < 1$。反设 $f(1) = 0$。那么 $0 = 1 - 1 = f(f(1)) = f(0)$，因此 $f(0) = 0$。所以 $f(0) = 0 = f(1)$。应用 f 得到 $1 - 0 = f(f(0)) = f(f(1)) = 1 - 1$，这是荒谬的。因此 $f(1) > 0$。□

习题 1.13（与非）设 p 和 q 是命题。求 $\neg(p \wedge q)$ 的真值表，它在电气工程中称为**负与**或**与非**。将其与 $(\neg p) \vee (\neg q)$ 的真值表进行比较。两个真值表相同吗？

解答。确实，计算真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

我们发现它们相同，因为最后两列一致。 □

练习 1.14（异或）设 p 和 q 是命题。计算（$p \wedge \neg q$） $\vee$ （$q \wedge \neg p$）的真值表，这一运算在电气工程和计算机科学中称为**异或**或**异或**。你会如何用通俗的英语表达这一运算？

解答。确实，计算真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg p$	p异或 q
T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F

用通俗的话来说，就是“ p 或 q ，但不能两者兼有”。 □

练习1.15（异或交换）设 p 和 q 是取值为 T（正确）或 F（假）的变量。现在设想你按以下顺序执行这些操作：1） $p := p$ 异或 q；2） $q := p$ 异或 q；3） $p := p$ 异或 q，其中“异或”指习题1.14中讨论的异或运算符。（因此， p 会被覆盖两次，而 q 会被覆盖一次。）证明执行这 3 个操作可以交换变量 p 和 q的内容，而无需使用临时中间变量。（这个技巧是已故的 Alan Paeth博士教给我的，他曾是我在计算机科学领域的同事。）你可以通过分类讨论或列出真值表来证明这一点。

解答。我们按列从左到右逐项填写下表，并为简洁起见，用“X”表示“异或”：

p	q	$p := p$ 异或 q	$q := p$ 异或 q	$p := p$ 异或 q
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	F

由此可见，按这种方式进行三次异或，相当于交换 p和 q的内容。 □

练习1.16 让我们重新审视习题1.21 其中涉及的命题

如果 a 和 b 是整数，且 ab是偶数，那么 a 或 b 是偶数。

通过证明逆否命题来证明这个命题。

解答。令 p 表示命题“a 和 b 是整数，且 ab 是偶数”，令 q 表示命题“a 和 b 是整数，且其中至少一个是偶数”。我们的任务是证明 $p \Rightarrow q$。

注意， $\neg p$ 表示命题“a 和 b 是整数，且 ab 是奇数”，而 $\neg q$ 表示命题“a和 b都是奇数整数”。

用逆否命题证明我们的结论，意味着要证明与之逻辑等价的 $\neg q \Rightarrow \neg p$，即

如果 a 和 b 都是奇数整数，那么 ab 是奇数。

我们来证明吧！假设 a和 b都是奇数，不妨设它们分别为 $a = 2k+1$和 $b = 2l+1$，其中 k和l是两个整数。那么

$$ab = (2k+1)(2l+1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$$

确实是奇数，因为 $2kl + k + l$ 是整数。 □

练习 1.17 让我们重新讨论习题1.21 其中涉及命题

如果 a 和 b 是整数，且 ab是偶数，那么 a 或 b 是偶数。

使用反证法证明该命题。

解答。令 p 表示命题“a 和 b 是整数，且 ab 是偶数”，令 q 表示命题“a 和 b 是整数，并且其中至少有一个是偶数”。我们的任务是证明 $p \Rightarrow q$。

注意， $\neg q$ 表示命题“a 和 b是两个均为奇数的整数”。

用反证法证明我们的结果，意味着我们假设 p 和 $\neg q$，然后我们力求得出一个矛盾：

假设 a 和 b 是整数，使得 ab 是偶数，并且 a和 b 都是奇数。

找出一个矛盾。

我们来做吧！假设 a 和 b 都是奇数，比如说 $a = 2k+1$ 和 $b = 2l+1$，并且 $ab = 2n$ 是偶数，其中 k, l, n 为三个整数。那么 $ab = a \cdot b$就是

$$2n = (2k+1)(2l+1).$$

展开右边可得

$$2n = 4kl + 2k + 2l + 1.$$

两边除以 2，得到

$$n = 2kl + k + l + \tfrac{1}{2}$$

这显然荒谬，因为左边有一个整数 n，而右边有一个整数 $2kl + k + l$，再加上 $1\,2$，所以右边不是整数！这个矛盾证明了该结果。¯□

练习 1.18 让我们重新考察习题1.21 其中涉及命题

$$\text{If } a \text{ and } b \text{ are integers such that } ab \text{ is even, then } a \text{ or } b \text{ is even.}$$

用分类证明证明这个命题。分两种情况讨论：(i) a是偶数；(ii) a 是奇数。

解答。假设 a 和 b 是整数，且 ab 是偶数，即

$$ab = 2n,$$

对于某个整数 n。

情形 *1*： a是偶数。

这样就完成了！（感觉几乎像是在作弊，但其实并没有！真正费力的部分在情形 *2*。 ）

情形 *2* a 是奇数，设为 $a = 2k + 1$，其中 k 是某个整数。

接着我们写出 $ab = a \cdot b$:

$$2n = (2k + 1)b.$$

因此 $2n = 2kb + b$；等价地， $2n - 2kb = b$ ，也等价地，

$$b = 2(n - kb).$$

由于 $n - kb$ 是整数，数 b 是偶数，这样就完成了！ □

练习 1.19 证明以下命题

$$\text{If } n \text{ is an integer, then } n^2 + n + 1 \text{ is odd.}$$

通过分类讨论：(i) n 是偶数；(ii) n 是奇数。

解答。 情形 *1*： n 是偶数，设 $n = 2k$ ，其中 k是某个整数。

Then

$$n^2 + n + 1 = (2k)^2 + (2k) + 1 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$$

是奇数，因为 $2k^2 + k$ 是一个整数。

情形 *2* n 是奇数，设 $n = 2k + 1$，其中 k是某个整数。

Then

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k + 1)^2 + (2k + 1) + 1 = (4k^2 + 4k + 1) + (2k + 1) + 1 \\ &= \big(2(2k^2 + 2k) + 1\big) + (2k + 1) + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1) + 1 \end{aligned}$$

是奇数，因为 $2k^2 + 3k + 1$ 是一个整数。 □

练习 1.20 以下每个命题都是假的。请为每个命题举出一个反例，以证明这一点:

(i) “如果 n 是偶数，那么 n^2 是奇数。” (ii) “如果 n 是奇数，那么 n 能被 3 整除。” (iii) “如果 p 是奇素数，那么 $p + 2$ 也是素数。” (iv) “ 如果 p 是奇素数，那么 $p + 2$ 不是素数。”

解答。(i)： $n = 2$ 是偶数，但 $n^2 = 2^2 = 4$ 仍然是偶数。（事实上，任何偶数 n 都是一个反例。）

(ii)： $n = 5$。(iii)： $p = 7$。(iv)： $p = 3$。

□

练习 1.21（由你来批改！）考虑以下命题：

$$\text{If } a \text{ and } b \text{ are integers such that } ab \text{ is even, then } a \text{ or } b \text{ is even.} \tag{1.2}$$

解释为什么下面的“证明”不成立：

Step 1：假设 a 是偶数，设为 $a = 2k$，其中 k 是某个整数。（b 为偶数的情形类似。）
Step 2：则 $ab = (2k)b = 2(kb)$ 是偶数，因为 kb 是整数，证明完毕。

上述错误证明实际上证明了哪个结果？

解答。设 p 为命题“a 与 b 是整数，且 ab 是偶数”，并设 q 为命题“a 与 b 是整数，且其中至少一个是偶数”。我们的任务是证明 $p \Rightarrow q$。

上述“证明”并未证明这一点，因为它从期望的结论（即 q）出发，推出了期望的假设（即 p）。换言之，这个错误的“证明”实际上是对以下命题的正确证明：

如果 a 和 b 是整数，且 a或 b是偶数，那么 ab是偶数。

□

习题 1.22（真或假？）以下每个命题都是真或假。请标出每个命题是真还是假，并简要说明理由。

(i) $p \Rightarrow q$ 与 $\neg p \Rightarrow \neg q$逻辑等价。(ii) $p \Rightarrow q$ 与 $\neg q \Rightarrow \neg p$逻辑等价。(iii) $p \Rightarrow q$ 与 $q \Rightarrow p$逻辑等价。

解答。(i)：假。反例见习题 1.9 。(ii)：正确。见习题 1.3。(iii)：假。反例见习题 1.9。□

习题 1.23（真或假？）以下每个命题都是真或假。如果命题为真，请简要说明理由；如果为假，请给出一个反例（不要“纠正”错误的命题）。

(i)“如果 a 是偶数，那么 a^2 是偶数。”(ii)“如果 p 是素数，那么 $p^2 + 1$ 是素数。”(iii)“如果 a 和 b 是奇整数，那么 ab 也是奇数。”(iv)“如果 p 是素数，那么集合 $\{p+1, p+2, p+3, p+4, p+5\}$ 也包含一个素数。”

解答。（i）：正确：因为 $a = 2k \Rightarrow a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$。（ii）：假：例如，$p = 3$ 是素数，但 $p^2 + 1 = 10$ 不是。（iii）：正确：$[a = 2k+1$ 和 $b = 2l+1] \Rightarrow ab = (2k+1)(2l+1) = 4kl+2k+2l+1 = 2(2kl+k+l)+1$。（iv）：假：$p = 23$ 是素数，但集合 $\{24, 25, 26, 27, 28\}$ 不包含任何素数。□

第2章
数学归纳法原理

2.1 命题与例子

数学归纳法原理是数学中最重要的证明技巧之一。它用于验证命题 $S(n)$ 对于所有 大于或等于某个所关注的最小整数（记为 n_0）的整数 n 均为正确。这一点非常令人惊叹，因为从概念上来说，检查无穷多个命题是困难的。

事实2.1（数学归纳法原理） 设 n_0 是一个整数，且设 $S(n)$ 是一个针对所有整数 $n \geq n_0$ 提出的命题。假设我们能够验证以下内容。

(i) 基础情形: $S(n_0)$ 正确。(ii) 归纳步骤: 如果 n 是整数 $\geq n_0$ 且 $S(n)$ 正确，那么 $S(n+1)$ 也正确。

那么，命题 $S(n)$ 对所有整数 $n \geq n_0$ 均正确。

在实际应用中，事实 2.1 所涉及的最小整数 n_0 通常是 0 或 1。我们将所有整数的集合 $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ 记为 $\mathbb{Z}$，并将非负整数的集合$\{0, 1, 2, \ldots\}$ 记为 $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -1, \ldots\} \text{ and } \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{2.1}$$

我们从一个经典例子开始。

定理 2.2 对每一个整数 $n \geq 1$，都有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.2}$$

证明。我们使用数学归纳法原理来证明这一结果，其中 $n_0 = 1$。命题 $S(n)$ 是(2.2)。

基础情形：当 $n = 1$ 时，所要证明的恒等式 (2.2) 表示为

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}, \tag{2.3}$$

这显然是正确的。

归纳步骤：现在假设 $n \in \mathbb{Z}$，且 $n \geq 1$，并且 $S(n)$ 正确，也就是说，(2.2) 对这个 n 成立。我们的任务是证明 $S(n+1)$ 成立，也就是说，当 n 替换为 $n+1$ 时，(2.2) 成立。也就是说，我们必须证明

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{2.4}$$

这似乎比验证 $S(n)$ 更难，但请记住，我们假设 $S(n)$ 成立，因此可以好好利用它！事实上，利用 $S(n)$ 成立这一假设——有时这被称为**使用归纳假设**——我们可以看到

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \big(1+2+\cdots+n\big)+(n+1) \tag{2.5a}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \tag{2.5b}$$
$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \tag{2.5c}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{2.5d}$$

因此（2.4）已得到验证，即 $S(n+1)$ 是正确的。因此，根据数学归纳法原理（事实 2.1），公式（2.2）对每一个整数 $n \geq 1$ 都是正确的。□

注2.3 定理 2.2与一个广为人知的故事有关，故事涉及年轻的卡尔·弗里德里希·高斯。他几乎瞬间在头脑中把从1到100的数相加，并宣布结果为5050，这使他的小学老师大为惊讶。虽然高斯不太可能使用了定理 2.2，但他可以把第一项与最后一项、第二项与倒数第二项等项分别相加，从而

$$1+2+\cdots+100 = (1+100)+(2+99)+\cdots+(49+52)+(50+51) \tag{2.6a}$$
$$= 50\cdot 101 = 5050. \tag{2.6b}$$

众所周知的**求和符号**在微积分II中已经遇到过，它使我们能够更简洁地写出诸如定理 2.2 中出现的命题：设 m 与 n 属于 $\mathbb{Z}$，且 $m \leq n$。设 α_k为一个实数，对每一个整数 k，使得 $m \leq k \leq n$。于是定义[1]

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha_k := \alpha_m + \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n, \tag{2.7}$$

我们也可以写成

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} \alpha_{k-1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} \alpha_{k+1}. \tag{2.8}$$

令集合为更方便】【。

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha_k := 0, \quad \text{when } m > n; \tag{2.9}$$

这就是所谓的 **空和约定**。请注意，现在我们可以将定理 2.2 改写（并稍作扩展[2]）为

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

现在让我们考虑相关的问题：将前几个奇数相加：

$$1 = 1, \tag{2.11a}$$
$$1+3 = 4, \tag{2.11b}$$
$$1+3+5 = 9, \tag{2.11c}$$
$$1+3+5+7 = 16. \tag{2.11d}$$

[1] ":="表示左侧由右侧定义——例如 Maple![2] 现在我们还涵盖了 $n=0$ 的情形，此时恒等式变为 $0=0$。

我们看出这些和是平方： $1 = 1^2$、 $4 = 2^2$、 $9 = 3^2$、 $16 = 4^2$，并由此受到启发去证明下述结果。

定理 2.4 对每一个整数 $n \geq 1$，都有

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2. \tag{2.12}$$

证明。我们用数学归纳法证明这个结果，其中 $n_0 = 1$ ，且命题 $S(n)$ 为 (2.12)。

基础情形：当 $n = 1$ 时，(2.12) 变为

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = (2\cdot 1 - 1) = 1 = 1^2, \tag{2.13}$$

这显然正确。

归纳步骤：现在假设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 1$ ，并且 $S(n)$ 正确，即 (2.12) 对这个 n成立。我们的目标是证明 $S(n+1)$ 正确，也就是说，证明当 2.12中的 n 被 $n+1$替换时，

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) \stackrel{?}{=} (n+1)^2. \tag{2.14}$$

确实，利用**归纳假设**即 $S(n)$在(2.15b)中正确这一点，我们可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right) + \big(2(n+1)-1\big) && \text{(2.15a)}\\ &= n^2 + (2n+1) && \text{(2.15b)}\\ &= (n+1)^2. && \text{(2.15c)}\end{aligned}$$

因此，(2.14)得以验证，即 $S(n+1)$正确。根据数学归纳法原理，公式(2.12)对每一个整数 $n \geq 1$都成立。□

需要注意的是，数学归纳法是验证我们认为正确的结论的有力工具——但它无法帮助我们发现这些结论：在定理2.2 和定理2.4中，我们都必须先对答案有充分把握，才能开始验证。

数学归纳法不仅可用于证明恒等式，也可用于验证不等式或其他数学命题，例如下面这个源自数论的结论。

设 a 和 b 属于 $\mathbb{Z}$。回顾一下，若存在 $a \neq 0$ 和 $b/a \in \mathbb{Z}$ 使得 $b = k\cdot a$，其中 $k \in \mathbb{Z}$，则称 a **整除** b，记作 $a|b$。因此， $4|12$ ，但 **4** 不整除 **13**，因为 $13/4 = 3\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$。

定理2.5 对每一个整数 $n \geq 0$，都有

$$3|(7^n - 4^n). \tag{2.16}$$

证明。同样，我们用数学归纳法证明这个结果，其中 $n_0 = 0$ ， 命题$S(n)$ 是 (2.16)。

Base 情形：当 $n = 0$ 时，(2.16) 变为 $3|(7^0 - 4^0)$，也就是 $3|0$ 这显然成立。

归纳步骤：现在假设 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $n \geq 0$ 且 $S(n)$ 为真，即 (2.16) 成立。我们的任务是证明 $S(n+1)$ 为真，即

$$3 \stackrel{?}{|} (7^{n+1} - 4^{n+1}). \tag{2.17}$$

现在由于 $S(n)$ 为真，我们知道存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $7^n - 4^n = 3 \cdot k$。因此，将此**归纳假设**用于 (2.18b)，我们看到

$$7^{n+1} - 4^{n+1} = 7^{n+1} - 4 \cdot 7^n + 4(7^n - 4^n) \tag{2.18a}$$
$$= 7^n(7-4) + 4(3 \cdot k) \tag{2.18b}$$
$$= 3\big(7^n + 4 \cdot k\big). \tag{2.18c}$$

由于 $7^n + 4k \in \mathbb{Z}$，显然（2.17）正确。因此，根据数学归纳法原理，我们可以看出（2.16）对每一个整数 $n \geq 0$ 都成立。□

定理 2.6（几何和）设 $x \neq 1$，并设 $n \in \mathbb{N}$。则

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{2.19}$$

证明。用数学归纳法证明。

基础情形：$n = 0$。由于等式两边均为 1，因此（2.19）显然成立。

归纳步 S 步：假设 $n \in \mathbb{N}$ 满足（2.19）。我们必须证明（2.19）也成立，将 n 替换为 $n+1$。事实上，在（**归纳假设**中使用2.20b），可得

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} \tag{2.20a}$$
$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \tag{2.20b}$$
$$= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{(n+1)+1}}{1 - x}, \tag{2.20c}$$

如所需。 □

2.2 阶乘与二项式定理

定义 2.7（乘积与阶乘函数）设 m 和 n 属于 $\mathbb{Z}$，且满足 $m \leq n$；设 α_k 为一个实数。对每一个满足 $m \leq k \leq n$的整数 k，类似于表示和的求和符号，我们定义

$$\prod_{k=m}^{n} \alpha_k = \alpha_m \cdot \alpha_{m+1} \cdots \alpha_n. \tag{2.21}$$

当 $m > n$ 时，我们采用**空积约定** $\prod_{k=m}^{n} \alpha_k := 1$，其依据是乘以 1 不会改变任何东西，正如加上 0 一样。前 n 个严格正整数的乘积称为“n **阶乘**”，记作 $n!$：

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n. \tag{2.22}$$

因此，我们有 $0! = 1$、$1! = 1$、$2! = 2$、$3! = 6$、$4! = 24$、……、$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$。阶乘函数在处理组合问题时经常出现，例如：将 3 个互异字母 A，B，C 排列起来，有多少种不同的方法？答案：$6 = 3!$，即：ABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBA。每个字母恰好使用一次组成的这类三字母词称为 $\{A, B, C\}$ 的**排列**。更一般地，我们现在可以证明以下结果。

定理 2.8（排列定理）设 n 是一个严格正整数，且 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是一个包含 n 个互异元素的集合。那么，这些n 个互异元素的所有排列的数量为 $n!$。

证明。使用数学归纳法。

基础情形：$n = 1$ 确实只允许一种排列，正如所声称的那样。

归纳步骤：对于 $k \in \{1, \ldots, n+1\}$，将 $\{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ 中最后一位为 a_k 的排列集合记为 B_k。根据归纳假设可知，每个 B_k 恰好包含 $n!$ 个排列。因此，排列总数为 $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$。□

定义 2.9（二项式系数）给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，二项式系数**“n 选 k”**定义为

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}, & \text{if } k \geq 0; \\ 0, & \text{if } k < 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

引理 2.10 设 $n \in \mathbb{N}$ 且设 $k \in \mathbb{Z}$。则以下结论成立。

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *and* $\binom{n}{1} = n$.

(ii) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ *if* $0 \leq k \leq n$.

(iii) $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n}{n-k}$ *if* $k < 0$ *or* $k > n$.

(iv) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ *if* $n \geq 1$.

证明。恒等式 (i)–(iii)可由定义直接得出。

(iv)：若 $k \leq 0$ 或 $k \geq n$，则很容易直接验证该恒等式。因此，假设 $1 \leq k \leq n-1$。利用 (ii)，可得

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\big(k + (n-k)\big)(n-1)!}{k!(n-k)!} \tag{2.24a}$$

$$= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \tag{2.24b}$$

$$= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \tag{2.24c}$$

如所需。 □

注2.11（帕斯卡三角形）引理2.10(iv)有一个非常直观的图示，如下所示：帕斯卡三角形

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

边界上的每个数都是 1，内部的每个数则可通过将上一行中最近的两个数相加得到。

展开并化简后可得以下恒等式

$$(x+y)^0 = 1, \tag{2.25a}$$
$$(x+y)^1 = x+y = 1\cdot x + 1\cdot y, \tag{2.25b}$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = 1\cdot x^2 + 2\cdot xy + 1\cdot y^2, \tag{2.25c}$$
$$(x+y)^3 = 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2y + 3\cdot xy^2 + 1\cdot y^3, \tag{2.25d}$$

其系数与帕斯卡三角形（注2.11）惊人地相似。这并非巧合——这一结果被称为二项式定理，可追溯至公元前4世纪的欧几里得。

Theo定理2.12（二项式定理）设 x 与 y 为实数，并设 $n \in \mathbb{N}$。则

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k. \tag{2.26}$$

证明。用数学归纳法。

基础情形：当 $n=0$时，（2.26）变为

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0y^0. \tag{2.27}$$

归纳步骤：现假设 $n \in \mathbb{N}$ 使得（2.26）成立。我们需要验证（2.26）在 n 被替换为 $n+1$时成立。利用**归纳假设**在（2.28b）中，事实$\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0$ 在（2.28c）中，以及引理2.10(iv) 在（2.28d）中，我们得到

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = (x+y)^n x + (x+y)^n y \tag{2.28a}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^{k+1} \tag{2.28b}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1}y^k \tag{2.28c}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k}y^k, \tag{2.28d}$$

如所要求。 □

令 $x=1$ 和 $y=\pm 1$ 在定理 2.12 中取相应值，可得以下结果。

推论2.13 设 $n \in \{1,2,3,\ldots\}$。那么

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{2.29}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \tag{2.30}$$

定理 2.14（组合定理）设 n 是严格正整数，且 $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是包含 n 个互异元素的集合。设 $k \in \{0,1,\ldots,n\}$。那么， A_n 中大小为 k 的所有子集（“组合”）的数量为 $\binom{n}{k}$。

证明。通过数学归纳法。

基础情形：$n=1$。恰有 $1=\binom{1}{0}$ 个大小为 0 的子集，即 $\varnothing$；恰有 $1=\binom{1}{1}$个大小为 1 的子集，即其自身 $\{a_1\}$ 。

归纳步骤：假设对于 $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$，其中 $n\in\mathbb{N}$ and$n\geq 1$，结论成立。所考察的集合 $A_{n+1}=\{a_1,\dots,a_n,a_{n+1}\}$ 包含 $n+1$ 个互异元素。设$k\in\{0,1,\dots,n,n+1\}$。如果 $k=0$ 或 $k=n+1$，那么结论显然成立。因此，假设$1\leq k\leq n$。设 B 是 A_{n+1} 的一个子集，包含 k 个元素。那么，要么 $a_{n+1}\in B$，要么 $a_{n+1}\notin B$。在前一种情况下，$B=C\cup\{a_{n+1}\}$，其中 C 包含来自 A_n的 $k-1$ 个元素，这表明此时 B 有 $\binom{n}{k-1}$ 种选择；在后一种情况下，B 是 A_n 的一个子集，有 $\binom{n}{k}$种选择。（这里我们两次使用了归纳假设。）根据引理2.10（iv），B总共有$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ 种选择，证毕。□

习题

习题 2.1 证明：对每一个整数 $n\geq 1$，都有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2.31}$$

解答。我们使用数学归纳法原理，并令 $n_0=1$来证明这一结果。命题 $S(n)$是2.31）。

基础情形：当 $n=1$时，所要证明的恒等式（2.31）为

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6},$$

化简为 $1=1$，显然正确。

归纳步骤：现在假设 $n\in\mathbb{N}$，假设 $n\geq 1$，并且假设 $S(n)$ 成立，即（2.31）对这个 n成立。我们的任务是证明 $S(n+1)$ 成立，也就是说，当 n 被$n+1$替换时，（2.31）成立。也就是说，我们必须证明

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2\stackrel{?}{=}\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \tag{2.32}$$

利用**归纳假设**，我们看到

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2&=\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\&=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)\\&=(n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)\\&=\frac{n+1}{6}\big((n+2)(2n+3)\big).\end{aligned}$$

因此，式 2.32 已得到验证，即 $S(n+1)$ 是正确的。因此，根据数学归纳法原理（事实 2.1），公式（2.31）对每一个整数 $n\geq 1$ 都成立。□

习题 2.2 证明：对每一个整数 $n\geq 1$，有

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}. \tag{2.33}$$

解答。我们使用数学归纳法原理证明这一结果，其中 $n_0=1$。命题 $S(n)$ 是 (2.33)。

基础情形：当 $n=1$ 时，所声称的恒等式 (2.33) 表示为

$$\frac{1}{2}=2-\frac{1+2}{2^1}$$

化简后得到 $1/2=1/2$，这显然成立。

归纳步骤：现在假设 $n\in\mathbb{N}$，并且 $n\geq 1$，且 $S(n)$ 成立，也就是说，(2.33) 对这个 n成立。我们的任务是证明 $S(n+1)$ 成立，也就是说，当用 $n+1$替换 n 时，(2.33) 成立。也就是说，我们必须证明

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\stackrel{?}{=}2-\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}. \tag{2.34}$$

利用**归纳假设**，我们可以看到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}&=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right)+\frac{n+1}{2^{n+1}}\\&=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\\&=2-\frac{2(n+2)-(n+1)}{2^{n+1}}\\&=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}\\&=2-\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

因此，(2.34) 得到验证，也就是说，$S(n+1)$ 成立。因此，根据数学归纳法原理（事实 2.1），公式 (2.33) 对每一个整数 $n\geq 1$都成立。□

练习2.3 求前 n个正的偶数 的和（`类似于定理 2.4），并用数学归纳法证明所得公式。

解答。对每一个整数 $n\geq 1$，都有

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1). \tag{2.35}$$

我们使用数学归纳法证明这一结果，其中 $n_0=1$，且命题 $S(n)$ 是 2.35。**基础情形**：当 $n=1$ 时，2.35 变为

$$\sum_{k=1}^{1}(2k)=(2\cdot 1)=2=1(2)=1(1+1),$$

这显然是正确的。

归纳步骤：现在假设 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $n\geq 1$，并且 $S(n)$ 是正确的，即（2.35）对这个 n成立。我们的目标是证明 $S(n+1)$ 是正确的，也就是说，当 n 被 $n+1$ 替换时，（2.35）仍然成立。也就是说，我们必须证明

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k)\stackrel{?}{=}(n+1)(n+2). \tag{2.36}$$

事实上，利用**归纳假设**即 $S(n)$在(2.37b)中是正确的，由此可见

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k)=\left(\sum_{k=1}^{n}(2k)\right)+\big(2(n+1)\big) \tag{2.37a}$$

$$=n(n+1)+(2n+2) \tag{2.37b}$$

$$=(n+1)(n+2). \tag{2.37c}$$

因此(2.36)已得到验证，即 $S(n+1)$是正确的。根据数学归纳法原理，公式(2.35)对每一个整数 $n \geq 1$都是正确的。□

习题 2.4 你正在 Grand 10 Movie Theatre 排队购买电影*Avengers: Infinity Matters*的票。队伍中至少有两个人，第一个人的出生年份为奇数，最后一个人的出生年份为偶数。（在本题中，如果一个人的出生年份为奇数，我们就称其为奇数；否则称其为偶数。）使用数学归纳法证明：在这列队伍中的某处，有一个偶数紧挨着排在一个奇数后面。

解答。我们使用数学归纳法原理，其中 $n_0 = 2$。命题是：对于一个整数$n \geq 2$,

$S(n)$：在一列有 n人的队伍中（第一个人为奇数，最后一个人为偶数），某处有一个偶数紧挨着排在一个奇数后面。

基础情形： 当 $n = 2$时， $S(n)$显然正确，因为队伍中只有两个人，一个奇数后面紧跟着一个偶数。

归纳步骤： 现在假设 $n \in \mathbb{N}$，使得 $n \geq 2$ ，并且 $S(n)$正确。我们的任务是证明 $S(n+1)$正确。因此，考虑一列有 $n+1$ 人的队伍，设为 p_1，……， p_n， p_{n+1}，其中 p_1 为奇数， p_{n+1} 为偶数。由于 $n \geq 2$，可得 $n+1 \geq 3$。现在考虑前 n 个人，即 p_1，……， p_n。如果 p_n 为奇数，那么 $S(n+1)$正确，因为 p_{n+1}是偶数，排在 p_n后面。否则， p_n 为偶数。但是，根据**归纳假设**，在队伍 p_1，……， p_n 中某处必定有一个偶数紧挨着排在一个奇数后面。□

习题 2.5 证明，对每一个整数 $n \geq 0$,

$$5 | (9^n - 4^n). \tag{2.38}$$

解答。这个结果与定理 2.5 非常相似。我们用归纳法证明，其中 $n_0 = 0$ ，且命题 $S(n)$ 是 (2.38)。

Base 情形：当 $n = 0$ 时，(2.38 变为 $5|(9^0 - 4^0)$，即 $5|0$ ，这显然正确。
归纳步骤：现在假设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $S(n)$ 正确，即 (2.38) 成立。我们的任务是证明 $S(n+1)$ 正确，即

$$5 \overset{?}{|} (9^{n+1} - 4^{n+1}). \tag{2.39}$$

现在，由于 $S(n)$成立，我们知道存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $9^n - 4^n = 5 \cdot k$。因此，使用这个 **归纳归纳假设** 中(2.40b)，我们看到

$$\begin{aligned} 9^{n+1} - 4^{n+1} &= 9^{n+1} - 4 \cdot 9^n + 4(9^n - 4^n) && \text{(2.40a)} \\ &= 9^n(9-4) + 4(5 \cdot k) && \text{(2.40b)} \\ &= 5\big(9^n + 4 \cdot k\big). && \text{(2.40c)} \end{aligned}$$

由于 $9^n + 4k \in \mathbb{Z}$，显然（2.39）正确。因此，根据数学归纳法原理，我们看到（2.38）对每一个整数 $n \geq 0$ 都正确。□

练习 2.6 解释下面这个关于命题（对于$n \geq 1$） $S(n)$的归纳法“证明”有什么错误：“任何一群 n 橡皮鸭的颜色都相同。”

“*Proof.* 显然 $S(1)$正确。现在假设对于某个 $n \geq 1$，命题 $S(n)$正确。考虑一群 M $n+1$ 只橡皮鸭。取一只橡皮鸭，称它为 x。将归纳假设应用于 $M \setminus \{x\}$ ，可知剩下的n 只橡皮鸭颜色都相同，设为 c。现在把它放回 x 集合中，再取出另一只橡皮鸭 y。同样，剩下的橡皮鸭 $M \setminus \{y\}$中有一只是 x，它们的颜色必定都相同 c。因此，所有$n+1$ 只橡皮鸭颜色都相同 c，由数学归纳法原理可证得结论。”

解答。这个证明看起来完美无缺，但实际上有漏洞：从 $n = 1$只橡皮鸭归纳到 $n+1 = 2$ 只橡皮鸭时，归纳步骤不成立。考虑一组有两只橡皮鸭的集合，其中一只是黄色的，另一只是红色的。取出 y 时，没有理由认为剩下的那只橡皮鸭应该和之前是相同的颜色。□

习题 2.7 考虑命题 $S(n)$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \pi + \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.41}$$

显然， S（n）对于每一个 $n \geq 1$ 都是假，因为左边的和实际上是一个整数，而右边不是整数。然而，证明实际的归纳步骤是正确的。（这说明了基础情形在归纳证明中的重要性！）

解答。设对于某个 $n \geq 1$， $S(n)$ 是正确的。那么

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 \\
&= \pi + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \quad (\text{since } S(n) \text{ is true}) \\
&= \pi + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \pi + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \pi + \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}
\end{aligned}$$

这表明 $S(n+1)$ 也成立。 □

习题 2.8 确定和 $3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ 的一个简单公式，其中 $n \geq 1$ 是一个整数。证明你的公式。

解答。利用（2.19），我们得到

$$3 + 3^2 + \cdots + 3^n = -1 + \sum_{k=0}^{n} 3^k = -1 + \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{-2}{2} + \frac{3^{n+1} - 1}{2} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}.$$

□

习题 2.9 解释为什么所有二项式系数——它们被定义为商——实际上都是整数。

解答。该命题是 $S(n)$，其中 $n \in \mathbb{N}$: “$\binom{n}{k}$ 对每一个 $k \in \mathbb{Z}$ 都是整数。”

基础情形： 当 $n = 0$， $S(n)$ 正确，因为根据定义（或引理 2.10(i)）， $\binom{0}{k}$ 不是 0 就是 1，因此是整数。

归纳步骤： 现在假设 $S(n)$ 对某个整数 $n \geq 0$ 成立。我们需要证明 $S(n+1)$ 成立，也就是说，$\binom{n+1}{k}$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 都是整数。但根据归纳假设和引理 2.10(iv)，这一点显然成立。

因此，根据数学归纳法原理，所有二项式系数都是整数。

或者，也可以参考组合定理（定理2.14），其证明与上述证明类似。□

练习 2.10（Lotto 6/49） 求 Lotto 6/49 中所有中奖号码组合的数量。

解答。根据定理 2.14，有

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13,983,816$$

从集合 $\{1,2,\ldots,49\}$ 中抽取的大小为 6 的组合。因此，猜中中奖号码的概率约为 1 比 1400 万。□

习题 2.11 设 $n \in \{1,2,\ldots\}$。证明

$$\sum_{k \text{ even}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ odd}} \binom{n}{k}.$$

解答。由（2.26）结合 $x=1$ 和 $y=-1$，可得

$$\begin{aligned} 0 = 0^n = (1-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \\ &= \sum_{k\in\{0,1,\ldots,n\} \text{ and even}} \binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{k\in\{0,1,\ldots,n\} \text{ and odd}} \binom{n}{k}(-1)^k \\ &= \sum_{k\in\{0,1,\ldots,n\} \text{ and even}} \binom{n}{k} + \sum_{k\in\{0,1,\ldots,n\} \text{ and odd}} \binom{n}{k}(-1) \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k\in\{0,1,\ldots,n\} \text{ and even}} \binom{n}{k} = \sum_{k\in\{0,1,\ldots,n\} \text{ and odd}} \binom{n}{k}. \tag{2.42}$$

另一方面，由引理 2.10(iii)，

$$\binom{n}{k} = 0, \quad \text{if } k<0 \text{ or } k>n. \tag{2.43}$$

因此，利用（2.43），可将（2.42）表述为

$$\sum_{k \text{ even}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ odd}} \binom{n}{k}.$$

至此证明完毕。 □

习题 2.12 证明：对每一个 $n \in \mathbb{N}$,

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k. \tag{2.44}$$

解答。根据二项式定理（定理 2.12），令 $x=1$ 与 $y=2$即可。 □

习题 2.13 含两个变量 x 与 y 的多项式 x^3+y^3 可分解为如下因子： $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$。事实上，证明对每一个 $n \in \mathbb{N}$， $x^{2n+1}+y^{2n+1}$ 可被 $x+y$ 整除。

解答。考虑关于 $n \in \mathbb{N}$ 的命题 $S(n)$，其内容为“多项式 $x^{2n+1}+y^{2n+1}$ 可被 $x+y$ 整除。”。我们用数学归纳法进行论证。

基础情形： $n=0$。此时 $S(0)$ 变为“$x^{2\cdot 0+1}+y^{2\cdot 0+1} = x+y$ 可被 $x+y$ 整除”，这当然是正确的。

归纳步骤：假设该命题对某个 $n \geq 0$ 正确。则存在一个关于两个变量 x， y 的多项式 q，使得

$$x^{2n+1}+y^{2n+1} = q\cdot(x+y). \tag{2.45}$$

利用**归纳假设**，我们看到

$$x^{2(n+1)+1}+y^{2(n+1)+1} = x^2x^{2n+1}+y^2y^{2n+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2\big(x^{2n+1} + y^{2n+1}\big) + (y^2 - x^2)y^{2n+1} \\
&= x^2 \cdot q \cdot (x+y) + (y+x)(y-x)y^{2n+1} \\
&= (x+y)\big(x^2 \cdot q + (y-x)y^{2n+1}\big).
\end{aligned}
$$

因此 $S(n+1)$也是正确的。根据数学归纳法原理，该结果对每一个$n \in \mathbb{N}$都是正确的。□

习题 2.14 证明，对于对每一个 $n \in \mathbb{N}$,

$$10^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^{n-k}.$$

解答。根据二项式定理（定理 2.12），令 $x = 9$ 和 $y = 1$即可得到。 □

习题 2.15（一般的微积分乘积法则） 回顾微积分法则

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

我们 假设该法则正确。证明，如果 $n \geq 2$和 $f_1, \ldots, f_n$是可微函数，那么

$$\big(f_1 f_2 \cdots f_n\big)' = f_1' f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdots f_{n-1} f_n'.$$

解答。我们对 n 使用归纳法来证明这一点。根据众所周知的乘积法则，基础情形 $n = 2$ 显然成立。现在假设对于某个整数 $n \geq 2$，结论成立。考虑 $n+1$ 个函数 $f_1, \cdots, f_{n+1}$ 及其乘积，记作 $(f_1 \cdots f_n) \cdot f_{n+1}$。然后，利用归纳假设和情形 $n = 2$，我们得到

$$
\begin{aligned}
(f_1 \cdots f_{n+1})' &= \big((f_1 \cdots f_n) f_{n+1}\big)' = (f_1 \cdots f_n)' f_{n+1} + (f_1 \cdots f_n) f_{n+1}' \\
&= (f_1' f_2 \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdots f_{n-1} f_n') f_{n+1} + (f_1 \cdots f_n) f_{n+1}' \\
&= f_1' f_2 \cdots f_{n+1} + \cdots + f_1 \cdots f_n f_{n+1}',
\end{aligned}
$$

如所需。根据数学归纳法原理，结论对每一个整数 $n \geq 2$ 都成立。 □

习题 2.16（微积分更有趣）考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

计算 f 的若干阶导数，并猜测 $f^{(n)}$（即 f 的第 n 阶导数）的公式。然后用归纳法证明你的公式。

解答。我们有 $f(x) = f^{(0)}(x) = 1/x = x^{-1}$, $f'(x) = f^{(1)}(x) = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -x^{-2}$,$f''(x) = f^{(2)}(x) = (-x^{-2})' = (-2)(-1)x^{-3} = 2x^{-3}$, 等等。这提示了如下公式

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad \text{for } n \geq 0.$$

基础情形 $n = 0$ 显然成立，因为 $f(x) = 1/x = (-1)^0 0!\ /x^{0+1}$。现在假设对于某个 $n \geq 0$，结论成立。那么

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} &= (-1)^n n! \frac{d}{dx} x^{-n-1} \\
&= (-1)^n n! (-n-1) x^{-n-2} = (-1)^{n+1} n! (n+1) x^{-((n+1)+1)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{(n+1)+1}},
\end{aligned}
$$

as 所需。根据数学归纳法原理，该结论对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立 . □

习题 2.17（微积分中的更多乐趣）考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

并将其 n 阶导数记为 $f^{(n)}$。证明：

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right), \quad \text{for } n \geq 0.$$

解答。基础情形 $n = 0$ 显然成立，因为

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{0!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{0+1}} + \frac{(-1)^0}{(1+x)^{0+1}}\right). \end{aligned}$$

现在假设结论对某个 $n \geq 0$ 成立。那么

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx}\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{n!}{2}\left(\frac{d}{dx}\left((1-x)^{-n-1}\right) + (-1)^n\frac{d}{dx}\left((1+x)^{-n-1}\right)\right) \\ &= \frac{n!}{2}\left((-n-1)(1-x)^{-n-2}(-1) + (-1)^n(-n-1)(1+x)^{-n-2}\right) \\ &= \frac{n!}{2}(n+1)\left((1-x)^{-((n+1)+1)} + (-1)^{n+1}(1+x)^{-((n+1)+1)}\right) \\ &= \frac{(n+1)!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{(n+1)+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{(n+1)+1}}\right), \end{aligned}$$

这正是所需的结论。根据数学归纳法原理，该结论对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。 □

习题 2.18（圣诞十二日）

(i) 查找圣诞颂歌《圣诞十二日》的歌词。**(ii)** 你的真爱总共送给你多少件礼物？提示：答案不是 $1+2+\cdots+12 = 78$，因为除了最后一件礼物，每件礼物都会收到不止一次。**(iii)** 假设这首颂歌名为《n 日圣诞》，其中 $n \in \mathbb{N}$。你的真爱总共送给你多少件礼物？提示：你可以使用（2.31）。

解答。例如，参见

https://www.poetryfoundation.org/poems/42913/the-twelve-days-of-christmas

事实上，利用定理2.2和习题2.1，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(1+\cdots+k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2} &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(3+2n+1) = \frac{n(n+1)}{12}(2n+4) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

当 $n = 12$ 时，我们得到 $(12)(13)(14)/6 = 364$。 □

练习2.19 证明：对每一个整数 $n \geq 8$，都存在 α，β 属于 $\mathbb{N}$，使得 $n = \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 5$。提示：这实际上是三个归纳证明，它们有一个共同的归纳步骤！

解答。将命题记作 $S(n)$。注意：

- $S(8)$ 正确，因为 $8 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5$。
- $S(9)$ 正确，因为 $9 = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5$。
- $S(10)$ 正确，因为 $10 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5$。

这就是三个**基础情形**。现在我们证明 $S(8+3n)$、$S(9+3n)$ 和 $S(10+3n)$ 都正确；幸运的是，这三者的**归纳步骤**完全相同！

因此，假设 $k \geq 8$ 和 $S(k)$ 正确。只需证明 $S(k+3)$ 正确。设 $k = \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 5$，其中 α 和 β 属于 $\mathbb{N}$。那么 $k + 3 = (\alpha + 1) \cdot 3 + \beta \cdot 5$ 且 $S(k+3)$ 正确。因此，根据数学归纳法原理，结论成立。□

练习2.20 证明：对每一个整数 $n \geq 4$，存在 α, β 属于 $\mathbb{N}$，使得 $n = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 5$。提示：这实际上是两个归纳证明，它们有一个共同的归纳步骤！

解答。用 $S(n)$ 表示该命题。注意：

- $S(4)$ 正确，因为 $4 = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5$。
- $S(5)$ 正确，因为 $5 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5$。

这就是两个**基础情形**。现在我们证明 $S(4+2n)$ 和 $S(5+2n)$ 都正确；幸运的是，两者的**归纳步骤**完全相同！

假设 $k \geq 4$，且 $S(k)$ 正确。只需证明 $S(k+2)$ 正确。设 $k = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 5$，其中 α 和 β 属于 $\mathbb{N}$。那么 $k + 2 = (\alpha + 1) \cdot 2 + \beta \cdot 5$，且 $S(k+2)$ 正确。因此，根据数学归纳法原理，结论成立。□

习题 2.21 接下来考虑数字 5。考虑顺序，我们可以将 5 写成 3 个严格正整数之和，共有六种不同的写法：

$$5 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1 = 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1.$$

考虑顺序，n（其中 $n \geq 3$）可以写成 3 个严格正整数之和的方式有多少种?

解答。写作

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1,$$

并注意到我们有 $n-1$ 个加号。任意选择两个，就会得到一个有序和。因此答案是 $\binom{n-1}{2}$ 根据组合定理 2.14。□

习题 2.22 证明

$$s(n) := \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都是一个整数。

解答。我们用归纳法证明这一点。基础情形 $n = 0$ 的结论显然成立，因为 $s(0)$ 显然等于 0。

现在假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，$s(n)$ 是一个整数。接着，利用帕斯卡三角形，

$$\begin{aligned} s(n+1) &= \frac{(n+1)^5}{5} + \frac{(n+1)^4}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{30} \\ &= \frac{n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1}{5} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}{2} \\
&\quad + \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3} - \frac{n+1}{30} \\
&= \left(\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right) \\
&\quad + \left(n^4+2n^3+2n^3+2n^2+3n^2+n^2+n+2n+n\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{30}\right) \\
&= s(n)+n^4+4n^3+6n^2+4n+1,
\end{aligned}
$$

这显然 y 是一个整数。因此，根据数学归纳法原理，结论得证。 □

练习 2.23（强归纳法原理）强归纳法原理强归纳法原理表述如下：

设 n_0 是一个整数，设 $T(n)$ 是一个命题，它是针对所有整数 $n \geq n_0$ 表述的。假设我们能够验证以下内容。

(i) **基础情形**：$T(n_0)$ 为真。(ii) **归纳步骤**：如果 n 是一个整数，$\geq n_0$ 且 $T(n_0)$、$T(n_0+1)$、.....、$T(n)$ 都为真，那么 $T(n+1)$ 也为真。

那么，对于 all 个整数 $n \geq n_0$，命题 $T(n)$ 为真。

用（普通）归纳法证明强归纳法原理 .

对于每一个整数 $n \geq n_0$，定义命题 解答

$$S(n) \text{ by } \text{“}T(n_0) \text{ and } T(n_0+1) \text{ and } \ldots \text{ and } T(n)\text{”}.$$

我们将用普通归纳法证明，对于所有整数 $n \geq n_0$， $S(n)$ 都正确。

由 (i) 可知，基础情形显然成立。

现在假设对于某个 $n \geq n_0$， $S(n)$ 正确。那么，由 (ii) 可知， $T(n+1)$ 正确。因此， $S(n+1)$ 也正确。

根据数学归纳法原理，对于所有 $n \geq n_0$， $S(n)$ 都正确。

因此， $T(n)$ 对所有 $n \geq n_0$ 也为真。 □

习题 2.24（分解为素数的因数分解） 回顾：一个数 $p \in \{2,3,4,\ldots\}$ 是素数，如果p 只能被 ± 1 和 $\pm p$整除（无余数）。用强归纳法原理证明每个整数 $n \geq 2$ 都可以写成素数的乘积。旁注：你将在数论中看到该因数分解是“唯一的”。

解答。显然 $n = 2$ 可以写成素数的乘积，因为 2 是素数。现在假设该命题对所有整数 2，3，.....，n 成立。考虑数 n+1。如果 n+1 是素数，则得证。因此假设$n+1$ 不是素数。则 $n+1 = ab$，其中 $2 \leq a \leq n$ 且 $2 \leq b \leq n$。根据假设，我们可以把 a 和 b 都因数分解为素数，设为 $a = p_1 p_2 \cdots p_k$ 和 $b = q_1 q_2 \cdots q_l$。则 $n+1 = ab = p_1 p_2 \cdots p_k q_1 q_2 \cdots q_l$确实是素数的乘积。因此，根据强归纳法原理，证明完毕。□

习题 2.25（无穷多个素数）证明存在无穷多个素数。提示：用反证法，假设只有有限个素数 $p_1, \ldots, p_k$。现在考虑$n := p_1 p_2 \cdots p_k + 1$。

解答。由于 n 除以任意一个 p_i 时余数都是 1，显然 n 不能被数字 p_1、.....、p_k 中的任何一个整除。另一方面，根据上一道习题，存在一个素数 q 可以整除 n。显然， $q \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$，于是我们找到了一个不在所有素数列表中的新素数，这显然荒谬。□

练习 2.26 设 $n \in \mathbb{N}$。运用数学归纳法和定理 2.2，证明

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

解答。基础情形， $n = 0$，显然成立，因为根据空和约定，我们得到 $0 = 0$ 。现在假设该恒等式对某个 $n \in \mathbb{N}$成立。于是，利用归纳假设和定理2.2 （两次），可得

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 &= \big(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\big) + (n+1)^3 \\
&= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4(n+1)\big) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \\
&= \big(1 + 2 + \cdots + (n+1)\big)^2,
\end{aligned}$$

这正是所需的结果。因此，整个结论由数学归纳法原理得证。 □

习题 2.27（三角函数微积分趣题）证明

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(\sin x\big) = \sin\big(x + \tfrac{n}{2}\pi\big)$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$。

解答。对于 $n = 0$，该结论显然成立。

现在假设该公式对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。然后，利用归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big(\sin x\big) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\big(\sin x\big)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\sin\big(x + \tfrac{n}{2}\pi\big) \\
&= \cos\big(x + \tfrac{n}{2}\pi\big).
\end{aligned}$$

另一方面，由于正弦$(y + \pi/2)$ = 余弦(y)，我们可以看出

$$\cos\big(x + \tfrac{n}{2}\pi\big) = \sin\big(x + \tfrac{n+1}{2}\pi\big).$$

总之，我们已经验证了该公式对 $n+1$ 成立。因此，根据数学归纳法原理，该恒等式得证。□

练习 2.28 设 n 为一个整数，使得 $n \geq 1$。证明

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}. \tag{2.46}$$

解答. 我们利用数学归纳法原理证明该结果，其中 $n_0 = 1$. 命题 $S(n)$ 为 (2.46)。

基础情形：当 $n = 1$ 时，所声称的恒等式（2.46）表示为

$$\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{(1+1)!} \tag{2.47}$$

这可简化为 $1/2 = 1/2$，这显然正确。

归纳步骤：现在假设 $n \in \mathbb{N}$，$n \geq 1$，并且 $S(n)$ 成立，也就是说，(2.46) 对这个 n成立。我们的任务是证明 $S(n+1)$ 成立，也就是说，当 n 替换为$n+1$时，(2.46) 成立。也就是说，我们必须证明

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{((n+1)+1)!} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{((n+1)+1)!}. \tag{2.48}$$

利用**归纳假设**，我们可知

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{((n+1)+1)!} \\
&= 1 - \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+2)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+2)!} \\
&= 1 - \frac{1}{((n+1)+1)!}
\end{aligned}$$

因此，(2.48) 得到验证，即 $S(n+1)$ 成立。因此，根据数学归纳法原理（事实2.1），公式(2.46) 对每一个整数 $n \geq 1$都成立。 □

习题 2.29（三格骨牌）由 3 个单位正方形组成、形状如图的“L形”并集

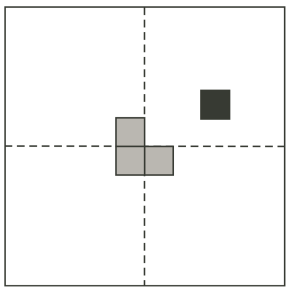


称为三格骨牌。设 n 是一个整数，使得 $n \geq 1$。证明：一个由单位正方形组成的 $2^n \times 2^n$ 网格，去掉其中一个正方形后，总可以用三格骨牌覆盖（彼此不重叠）。

解答。这是一个关于 n的巧妙归纳法证明。

基础情形 $n = 1$ 显然成立，因为从一个 2×2 网格中移除 1 个方格后，恰好剩下一个三格骨牌。

现在假设结论对 $n \geq 1$ 成立，并考虑一个移除了一个黑色方格的 $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ 网格。将网格分成四个 $2^n \times 2^n$ 网格，并如下面的图所示放置一个三格骨牌：



根据归纳假设，这四个较小的网格都可以用三格骨牌铺满，从而完成证明。

□

练习2.30（重新考察高斯）在定理2.2中，我们通过归纳法证明，对每一个整数$n \geq 1$，都有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.49}$$

在注2.3中，我们指出了这个公式的另一种证明方法。用高斯的方法证明（2.49）：（i）先考虑 n是偶数的情形；然后（ii）考虑 n 是奇数的情形，并利用（i）。

证明。（i）：假设 n 是偶数，即对于整数 $k = n/2$，有 $n = 2k$。那么可以组成 k 对，我们将它们分组如下：

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n &= (1+n)+\big(2+(n-1)\big)+\cdots+\big(k+(k-1)\big) \\ &= k(n+1) = \frac{n}{2}(n+1) \end{aligned}$$

正如所述。

（ii）：现在假设 n 是奇数。那么 $n-1$ 是偶数，因此根据（i），我们有

$$1+2+\cdots+(n-1) = \frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n &= \big(1+2+\cdots+(n-1)\big)+n \\ &= \frac{(n-1)n}{2}+n = \frac{(n-1)n+2n}{2} \\ &= \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

正如所要求的。 □

习题2.31 证明：对于每一个整数 $n \geq 0$,

$$7|(9^n - 2^n). \tag{2.50}$$

解答。这个结果与定理 2.5非常相似。我们用归纳法进行论证，其中 $n_0 = 0$，命题 $S(n)$ 是2.50。

基底 C 基：当 $n = 0$ 时，(2.50) 变为 $7|(9^0 - 2^0)$，即 $7|0$，这显然正确 .

归纳步骤：现在假设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 0$，且 $S(n)$ 正确，即 (2.50) 成立。我们的任务是证明 $S(n+1)$ 正确，即

$$7 \overset{?}{\mid} (9^{n+1} - 2^{n+1}). \tag{2.51}$$

现在，由于 $S(n)$ 正确，我们知道存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $9^n - 2^n = 7 \cdot k$。因此，将这个**归纳假设**用于 (2.40b)，我们得到

$$\begin{aligned} 9^{n+1} - 2^{n+1} &= 9^{n+1} - 2 \cdot 9^n + 2(9^n - 2^n) && \text{(2.52a)} \\ &= 9^n(9-2) + 2(7 \cdot k) && \text{(2.52b)} \\ &= 7\big(9^n + 2 \cdot k\big). && \text{(2.52c)} \end{aligned}$$

由于 $9^n + 2k \in \mathbb{Z}$，显然（2.51）是正确的。因此，根据数学归纳法原理，可知（2.50）对每一个整数 $n \geq 0$ 都成立。 □

练习2.32 求该和的一个简单公式

$$\tfrac{1}{4^n} + \tfrac{1}{4^{n-1}} + \cdots + \tfrac{1}{4} + 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n, \tag{2.53}$$

其中 $n \geq 1$ 是一个整数。请给出你的公式的证明。 提示：（2.19）。

解答。利用（2.19），可得

$$\tfrac{1}{4^n} + \tfrac{1}{4^{n-1}} + \cdots + \tfrac{1}{4} + 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n = \frac{1}{4^n}\big(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{2n}\big)$$

$$= \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1-4^{2n+1}}{1-4} = \frac{4^{2n+1}-1}{3 \cdot 4^n}.$$

□

练习 2.33 使用强 归纳法证明：对于每一个整数 $n \geq 1$， 13^n 都可以写成两个整数的平方之和。

提示： 直接验证 $n = 1$ 和 $n = 2$。然后假设结论对某个 $n \geq 2$ 成立，并利用关于 $n-1$ 的归纳假设，求出 $n+1$的分解。

解答。令 $S(n)$ 表示所讨论的命题。

基础情形：当 $n = 1$ 时，我们有

$$13^1 = 13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2.$$

当 $n = 2$ 时，我们有

$$13^2 = 169 = 25 + 144 = 5^2 + 12^2.$$

（这可以通过穷举法找到：检查 $\sqrt{169 - 1^2}$、$\sqrt{169 - 2^2}$ 等。）因此，结论对 $n = 1$和 $n = 2$成立。

归纳步骤：现假设 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $n \geq 2$ 与 $S(1)$ $S(2) \ldots, S(n)$均为正确。特别地， $S(n-1)$为正确，即

$$13^{n-1} = a^2 + b^2,$$

对某些整数 a 与 b。注意，此处我们使用 $n-1$，而非通常的 n，来对$n+1$进行归纳步骤。事实上，

$$13^{n+1} = 13^2 \cdot 13^{n-1} = 13^2(a^2 + b^2) = (13a)^2 + (13b)^2$$

且该结果对 $n+1$成立，即 $S(n+1)$为正确。因此，由强数学归纳原理可知，该命题对每一个正整数 n均为正确。□

习题2.34（由你来批改！）考虑以下命题

"Every positive integer is greater than 42."

这显　　然并不正确（例如考虑1）。这里是呈现给你的一个"证明"　　：

> 假设 n 是一个正整数。我们假定该命题对这个 n成立，因此 $n > 42$。那么 $n + 1 > 42 + 1 = 43 > 42$。所以该命题对 $n+1$成立。因此，根据数学归纳法原理，该命题成立。

这个证明错在哪里?

解答。这个证明没有基础情形——而且基础情形 $n = 1$ 不成立！归纳步骤做得没问题。（它证明了所有大于 42 的整数都大于 42。）□

练习 2.35（由你来批改！）考虑以下命题

"Every integer $n \geq 0$ satisfies $3|(7^n - 4^n)$."

下面是呈现在你面前的一个"证明"：

> 将该命题记为 $S(n)$。我们对 n 使用归纳法来证明它。基础情形 $n = 0$ 成立，因为 $3|(7^0 - 4^0)$。现在假设 $n \geq 0$，且 $S(n)$成立。由于 n 是任意的，因此该结果对所有 n 都成立，证明完毕。

这个证明错在哪里?

解答。基础情形是正确的。但归纳步骤要求该结果对某个 $n \geq 0$成立，并要求我们证明该结果随后对 $n+1$ 成立。这正是归纳法的全部要点！ □

习题 2.36（真或假?） 将下列每个命题标为真或假。简要说明你的理由。

（i）“在进行归纳法证明时，我们必须证明基础情形和归纳步骤。”（ii）“归纳法证明是尝试证明关于实数的命题的一种好方法。”（iii）“归纳法证明是发现新定理的绝佳途径。”（iv）“存在一些可以用强归纳法证明、但不能用普通归纳法证明的命题。”

解答。（i）：正确：这正是归纳法证明所要求的。（ii）：假：遗憾的是，并非如此。问题在于，实数中不存在最小的实数 n_0，而且给定n，也不存在“下一个更大的”实数 $n+1$。（iii）：假：你可以尝试用归纳法证明正确的结果——但你需要事先知道自己要证明什么！（iv）：正确：例如参见习题 2.24。（如果你知道如何因式分解 $n = 24$，那么这对因式分解 $n + 1 = 25$毫无帮助。）□

第3章 域

本章中，我们将研究域的性质。域是具有实数的一些基本性质的集合，而这些性质是我们习以为常的；实数记作 $\mathbb{R}$。我们假设实数上定义了两种运算，即**加法**

$$+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon (x,y)\mapsto x+y \tag{3.1}$$

和**乘法**

$$\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon (x,y)\mapsto x\cdot y. \tag{3.2}$$

也可以写作 xy，而不是 $x\cdot y$。假设这两种运算满足某些称为域公理的性质。

3.1 加法公理

我们从加法所定义的性质开始。

定义 3.1（加法公理）

A1（结合律）对所有 x，y，z 属于 $\mathbb{R}$，有：$(x+y)+z=x+(y+z)$。**A2（交换律）**对所有 x，y 属于 $\mathbb{R}$，有：$x+y=y+x$。**A3（零元的存在性）**存在一个数 $0\in\mathbb{R}$，使得对每一个 $x\in\mathbb{R}$，有 $x+0=x$。**A4（负元的存在性）**对每一个 $x\in\mathbb{R}$，存在一个数 $-x\in\mathbb{R}$，使得$x+(-x)=0$。

命题 3.2 以下结论成立。

（i）数0 是唯一的。（ii）对每一个 $x\in\mathbb{R}$，$-x$（即 x 的负元）是唯一的。（iii）$-0=0$。（iv）对每一个 $x\in\mathbb{R}$，有：$-(-x)=x$。（v）对所有 x，y 属于 $\mathbb{R}$，有：$-(x+y)=-x+(-y)$。

证明。(i)：假设存在另一个（可能不同的）实数 $0'\in\mathbb{R}$，它也起零的作用，即对每一个 $x\in\mathbb{R}$，$x+0'=x$；特别地（令 $x=0$），$0+0'=0$。另一方面，利用**公理A3**，取$x=0'$，可得 $0'+0=0'$。综上，利用**公理A2**，我们推得 $0=0+0'=0'+0=0'$，也就是说$0=0'$。

(ii)：设 $x\in\mathbb{R}$，并假设 y 是另一个（可能不同于 $-x$）的实数，使得

$$x+y=0. \tag{3.3}$$

因此，

$$\begin{aligned} y &= y+0 \quad [\text{by } \mathbf{A3}] \\ &= 0+y \quad [\text{by } \mathbf{A2}] \\ &= \big(x+(-x)\big)+y \quad [\text{by } \mathbf{A4}] \\ &= \big((-x)+x\big)+y \quad [\text{by } \mathbf{A2}] \\ &= (-x)+(x+y) \quad [\text{by } \mathbf{A1}] \\ &= (-x)+0 \quad [\text{by (3.3)}] \\ &= -x \quad [\text{by } \mathbf{A3}], \end{aligned}$$

正如所声称的。

(iii)：一方面，由于 **公理A4**（取 $x=0$），我们有 $0+(-0)=0$。另一方面，利用 **公理A3**（取 $x=0$），可得 $0+0=0$。综上，由于 -0 根据 (ii)是唯一的，因此可推出 $-0=0$。

(iv)：设 $x\in\mathbb{R}$。一方面，$(-x)+(-(-x))=0$ 根据 **公理A4**（应用于 $-x$）。另一方面，利用 **公理A2** 和 **公理A4**，可得 $(-x)+x=x+(-x)=0$。综上，由于 $-(-x)$ 根据 (ii)是唯一的，因此可得 $x=-(-x)$。

(v)：设 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$。那么

$$\begin{aligned} (x+y)+\big(-x+(-y)\big) &= x+\Big(y+\big(-x+(-y)\big)\Big) \quad [\text{by } \mathbf{A1}] \\ &= x+\Big(y+\big((-y)+(-x)\big)\Big) \quad [\text{by } \mathbf{A2}] \\ &= x+\Big(\big(y+(-y)\big)+(-x)\big)\Big) \quad [\text{by } \mathbf{A1}] \\ &= x+\big(0+(-x)\big) \quad [\text{by } \mathbf{A4}] \\ &= x+\big((-x)+0\big) \quad [\text{by } \mathbf{A2}] \\ &= x+(-x) \quad [\text{by } \mathbf{A3}] \\ &= 0 \quad [\text{by } \mathbf{A4}]. \end{aligned}$$

鉴于负元的唯一性（将 (ii) 应用于 $x+y$），可推出 $-(x+y)=-x+(-y)$。□

给定 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$，我们将**减法**定义为

$$x-y:=x+(-y). \tag{3.4}$$

于是，例如，我们有 $x-x=x+(-x)=(-(-x))+(-x)=0$。减法对于解含有加法的方程很有用。

命题3.3 设 a 和 b属于 $\mathbb{R}$。则方程

$$a+x=b \tag{3.5}$$

有唯一解，即 $x=b-a$。

证明。习题 3.1。 □

3.2 乘法公理

定义 3.4（乘法和分配律公理）

M1（结合律）对所有 x、y、z 属于 $\mathbb{R}$，都有：$(xy)z=x(yz)$。

M2（交换律）对所有 x、y 属于 $\mathbb{R}$，都有：$xy=yx$。

M3（单位元存在性）存在一个数 $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，使得对每一个 $x \in \mathbb{R}$，都有$x \cdot 1 = x$。

M4（逆元存在性）对每一个 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，存在一个数 $x^{-1} \in \mathbb{R}$，使得$xx^{-1} = 1$。**D（分配律）**对所有 x，y，z，属于 $\mathbb{R}$，我们有：$x(y+z) = xy + xz$。

与命题3.2和命题3.3完全类似，我们得到以下两个结论。

命题 3.5 以下结论成立。

（i）数1 是唯一的。（ii）对每一个 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$x^{-1}$（即 x 的逆元）是唯一的。（iii）$1^{-1} = 1$。（iv）对每一个 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，我们有：$(x^{-1})^{-1} = x$。（v）对所有 x，y 属于 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$，我们有：$(xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$。

给定 $x \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，我们将**除法** 定义为

$$\frac{x}{y} := x/y := xy^{-1}. \tag{3.6}$$

注意，对每一个 $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，都有 $y/y = yy^{-1} = 1$。除法对于求解涉及乘法的方程很重要。

命题 3.6 设 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $b \in \mathbb{R}$。则方程

$$a \cdot x = b \tag{3.7}$$

有唯一解，即 $x = b/a$。

证明。习题 3.3。 □

命题 3.7 以下结论成立。

(i) 对所有 x, y, z 属于 $\mathbb{R}$，我们有：$(x+y)z = xz + yz$.(ii) 对每一个 $x \in \mathbb{R}$，我们有 $x \cdot 0 = 0$.(iii) 对所有 x, y 属于 $\mathbb{R}$，我们有：$xy = 0 \Leftrightarrow [x = 0$ 或 $y = 0]$.(iv) 对每一个 $x \in \mathbb{R}$，我们有：$-x = (-1)x$.(v) 对所有 x, y 属于 $\mathbb{R}$，我们有：$(-x)(-y) = xy$.

证明。令 x, y, z 属于 $\mathbb{R}$。

(i): 反复使用 **M2** 和 **D**，我们得到 $(x+y)z = z(x+y) = zx + zy = xz + yz$。

(ii)：由于 $0 + 0 = 0$，由 **D** 可知 $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0$。从两边减去 $x \cdot 0$（即加上 $-(x \cdot 0)$）得到 $x \cdot 0 = 0$。

(iii)：“⇐”：若 $x = 0$，则由 (ii) 可得 $xy = yx = y \cdot 0 = 0$，当 $y = 0$ 时也同样如此。“⇒”：现在假设 $xy = 0$。若 $x = 0$，则结论成立；因此，我们假设 $x \neq 0$。从左侧乘以 x^{-1}，并使用 (ii)、M1、M2、M4、M2 和 M3，可得 $0 = x^{-1}0 = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = (xx^{-1})y = 1 \cdot y = y \cdot 1 = y$。因此 $y = 0$。

(iv)：根据 M3、M2、(i)、M2 和 (ii)，我们得到 $x + (-1)x = x \cdot 1 + (-1)x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1-1) \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$。因此，由于 $-x$ 是唯一的（命题 3.2(ii)），我们推得 $-x = (-1)x$。(v)：习题 3.4。 □

3.3 结合律、交换律和分配律

虽然加法在技术上仅定义于两项之间，但我们通过以下归约将其扩展到两项以上：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n := \Big(\cdots\big((x_1 + x_2) + x_3\big) + \cdots\Big) + x_n. \tag{3.8}$$

请注意，根据**A1**，右边的表达式实际上与括号的放置方式无关。乘法和**M1**也有类似的结论：

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n := \Big(\cdots\big((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3\big) \cdot \cdots\Big) \cdot x_n. \tag{3.9}$$

当然，根据**A2** 和**M2**，加法或乘法的顺序并不重要。更确切地说，设 $(i_1, \ldots, i_n)$ 是 $(1, \ldots, n)$ 的一个排列。（例如，$(4, 2, 1, 3)$ 是 $(1, 2, 3, 4)$ 的一个排列。）那么

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_n} \tag{3.10}$$

and

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \cdots \cdot x_{i_n}. \tag{3.11}$$

（这反映了 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_4 + x_2 + x_1 + x_3$ 等。）

现在我们可以陈述并证明一条处理双重求和的实用规则（有时戏称为记账基本定理，意思是：如果把表中的所有数字加起来，无论按行求和还是按列求和，结果都应该相同）：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{i,j}. \tag{3.12}$$

确实，(3.12) 的左边是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}\right) + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} x_{m,j}\right)\\ &= \big(x_{1,1} + \cdots + x_{1,n}\big)\\ &\quad + \cdots\\ &\quad + \big(x_{m,1} + \cdots + x_{m,n}\big).\end{aligned}$$

另一方面，(3.12) 的右边是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} &= \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,1}\right) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,n}\right)\\ &= \big(x_{1,1} + \cdots + x_{m,1}\big)\\ &\quad + \cdots\\ &\quad + \big(x_{1,n} + \cdots + x_{m,n}\big).\end{aligned}$$

总之，我们看到这两个双重求和恰好包含相同的项，只是顺序不同。这验证了 (3.12)。

另一个有用的恒等式是

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j, \tag{3.13}$$

这由反复应用 **D** 和命题3.7(i)得出。

3.4 幂与指数

定义 3.8 设 $x \in \mathbb{R}$ 且设 $n \in \{1, 2, \ldots\}$。我们定义

$$x^0 := 1, \tag{3.14}$$

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ terms}}, \tag{3.15}$$

and

$$x^{-n} := (x^{-1})^n, \quad \text{if } x \neq 0. \tag{3.16}$$

可以证明以下规则。

Pr命题 3.9 设 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$，且 m 和 n 属于 $\mathbb{Z}$。则以下结论成立 .

(i) $x^n x^m = x^{n+m}$。

(ii) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$。

(iii) $(xy)^n = x^n \cdot y^n$。

(这里假设在涉及负指数时，按需 x或 y 非零。)

3.5 一般域

定义 3.10（域）令 $\mathbb{F}$ 为一个集合，并配备两种运算

$$+ \colon \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F} \colon (x, y) \mapsto x + y \tag{3.17}$$

and

$$\cdot \colon \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F} \colon (x, y) \mapsto x \cdot y. \tag{3.18}$$

使得**公理A1– 公理A4**、**M1–M4**以及**D** 成立（当然，需将 $\mathbb{R}$ 替换为 $\mathbb{F}$）。那么， $\mathbb{F}$ 称为一个**域**。

请注意，本章节中推导出的所有规则都成立，因为我们推导这些规则时只使用了公理。

重要的域示例包括：实数 $\mathbb{R}$、有理数 $\mathbb{Q}$以及所谓的复数：

定义 3.11（复数）复数集合为

$$\mathbb{C} := \big\{ x + \mathrm{i} \cdot y \;\big|\; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \big\}, \quad \text{where} \quad \mathrm{i} := \sqrt{-1} \quad \text{so that} \quad \mathrm{i}^2 = -1. \tag{3.19}$$

两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$的加法和乘法定义如下：

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \tag{3.20}$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)。 \tag{3.21}$$

零是 $0 + \mathrm{i}0$，单位元是 $1 + \mathrm{i}0$。给定 $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$，其负元和逆元分别为

$$-(x + \mathrm{i}y) := (-x) + \mathrm{i}(-y) \quad \text{and} \quad (x + \mathrm{i}y)^{-1} := \frac{x + \mathrm{i}(-y)}{x^2 + y^2}. \tag{3.22}$$

整数集合 $\mathbb{Z}$不是域：虽然 **A1–公理A4** 和 **D**成立，但**M4** 不成立。例如，整数 3 在 $\mathbb{Z}$ 中没有乘法逆元，因为 $1/3 \notin \mathbb{Z}$。类似地，非负整数 $\mathbb{N}$不构成域（事实上，**公理A4** 也不成立）。

一个有趣的域是 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$，其运算由定义 为

$$0+0:=0 \tag{3.23a}$$
$$1+0:=1 \tag{3.23b}$$
$$0+1:=1 \tag{3.23c}$$
$$1+1:=0 \tag{3.23d}$$

and

$$0\cdot 0:=0 \tag{3.24a}$$
$$1\cdot 0:=0 \tag{3.24b}$$
$$0\cdot 1:=0 \tag{3.24c}$$
$$1\cdot 1:=1 \tag{3.24d}$$

通过考虑所有可能的情形，我们可以直接验证 $\mathbb{F}_2$ 确实是一个域。 $\mathbb{F}_2$ 和其他有限域在数论和代数中发挥着重要作用。请注意，在 $\mathbb{F}_2$ 中，我们有一个看起来相当奇特的恒等式 $1+1=0$。

在代数中，可以证明（这需要相当多的工作），每个有限域在本质上都是唯一的，并且包含 p^n 个元素，其中 p 是一个素数，且 $n\in\{1,2,\ldots\}$。

下一个结果有助于检验 $\mathbb{R}$ 的子集是否为域。

命题 3.12 设 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集，并满足以下条件：

(i) $0\in\mathbb{S}$.(ii) $1\in\mathbb{S}$.(iii) </style}若 和 属于 ，则 也属于其中。(iv) 若 x 和 y 属于 $\mathbb{S}$, 则 $x\cdot y$也属于其中。(v) </style}若 ，则 。(vi) 若 $x\in\mathbb{S}\setminus\{0\}$，则 $x^{-1}\in\mathbb{S}$。

那么 $\mathbb{S}$ 也是一个域（其加法和乘法继承自 $\mathbb{R}$）。

证明。事实上，所有公理都成立，因为它们在 $\mathbb{R}$中确实成立。所需的假设是为了保证 $\mathbb{S}$ 中存在所有必要的对象，并且加法和乘法不会使我们超出 $\mathbb{S}$。□

习题

习题3.1 验证命题3.3。（你需要检查 (i) $x=b-a$ 是（3.5）的一个解，并且 (ii) 不存在其他解。）

解答。我们需要证明 (i) 该方程有一个解，并且 (ii) 该解是唯一的。

(i)：依次使用减法的定义、**公理A2**、**公理A1**、**公理A4**、**公理A2**和**公理A3**，我们看到$a+(b-a)=a+\big(b+(-a)\big)=a+\big((-a)+b\big)=\big(a+(-a)\big)+b=0+b=b+0=b$，因此 $b-a$ 是一个解。

(ii)：现在假设 y 是另一个（可能不同于 $b-a$）解，即 $a+y=b$。在等式两边左侧都加上 $-a$，并使用 **A1**、**公理A2**、**A4** 和 **A3**，得到 $(-a)+(a+y)=(-a)+b$，即 $\big((-a)+a\big)+y=b+(-a)$，即 $\big(a+(-a)\big)+y=b-a$，即 $0+y=y+0=y=b-a$。□

练习 3.2 验证命题3.5。

解答。(i)：设 $1'$ 是一个具有单位元性质的数。那么根据 **M3**，有 $1\cdot 1'=1$ 和 $1'\cdot 1=1'$。由 **M2** 可得 $1=1\cdot 1'=1'\cdot 1=1'$。

(ii)：设 y 是一个与 x 互为逆元的数，其中 $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。那么

$$x \cdot y = 1. \tag{3.25}$$

因此,

$$\begin{aligned} y &= y \cdot 1 \quad [\text{by } \mathbf{M3}] \\ &= 1 \cdot y \quad [\text{by } \mathbf{M2}] \\ &= \left(x \cdot x^{-1}\right) \cdot y \quad [\text{by } \mathbf{M4}] \\ &= \left(x^{-1} \cdot x\right) \cdot y \quad [\text{by } \mathbf{M2}] \\ &= x^{-1} \cdot (x \cdot y) \quad [\text{by } \mathbf{M1}] \\ &= x^{-1} \cdot 1 \quad [\text{by } (3.25)] \\ &= x^{-1} \quad [\text{by } \mathbf{M3}], \end{aligned}$$

如所声称。

(iii)：由于 $1 \cdot 1 = 1$ 根据**M3**，由**(ii)**可得 $1^{-1} = 1$。

(iv)：令 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。根据**M3** 和**M2**，我们有 $1 = x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x$。另一方面， $x^{-1} \neq 0$ 且 $x^{-1} \cdot x = 1$；因此，根据 (ii)，$(x^{-1})^{-1} = x$。

(v)：由于 $x \cdot y$ 的逆元唯一，只需检验候选逆元是否满足要求。事实上，

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot \left(x^{-1} \cdot y^{-1}\right) &= x \cdot \Big(y \cdot \left(x^{-1} \cdot y^{-1}\right)\Big) \quad [\text{by } \mathbf{M1}] \\ &= x \cdot \Big(y \cdot \left(y^{-1} \cdot x^{-1}\right)\Big) \quad [\text{by } \mathbf{M2}] \\ &= x \cdot \Big(\left(y \cdot y^{-1}\right) \cdot x^{-1}\Big) \quad [\text{by } \mathbf{M1}] \\ &= x \cdot \left(1 \cdot x^{-}\right) \quad [\text{by } \mathbf{M4}] \\ &= x \cdot \left(x^{-1} \cdot 1\right) \quad [\text{by } \mathbf{M2}] \\ &= x \cdot x^{-1} \quad [\text{by } \mathbf{M3}] \\ &= 1 \quad [\text{by } \mathbf{M4}]. \end{aligned}$$

□

习题 3.3 验证命题 3.6。（你需要检验 **(i)** $x = b/a$ 是方程（3.7）的一个解，并且 **(ii)** 不存在其他解。）当 $a = 0$ 时会发生什么?

解答。（i）：依次运用 **M2**、**M1**、**M4**、**M2** 和 **M3**，可得 $a \cdot b/a = a \cdot (ba^{-1}) = a\left(a^{-1} \cdot b\right) = \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot b = 1 \cdot b = b \cdot 1 = b$，因此 b/a 是一个解。

（ii）：现在假设 y 是另一个（可能与 b/a不同的）解，即 $ay = b$。在等式两边左乘a^{-1}，并运用 **M1**、**M2**、**M4** 和 **M3**，得到 $a^{-1} \cdot (ay) = a^{-1} \cdot b$，即$\left(a^{-1}a\right)y = ba^{-1}$，即 $\left(aa^{-1}\right)y = b/a$，即 $1 \cdot y = y \cdot 1 = y = b/a$。

No我们假设 $a = 0$。然后，利用**M2** 和命题 3.7(ii)， $a \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ ·
因此，若 $b \neq 0$，则 $a \cdot x = 0 \neq b$，所以无解。
而若 $b = 0$，则 $a \cdot x = 0 = b$，所以每个 $x \in \mathbb{R}$ 都是解。 □

习题 3.4 验证命题3.7(v)。 提示：使用命题3.7(iv)。

解答。的确,

$$\begin{aligned} (-x)(-y) &= (-x)\big((-1)y\big) \quad [\text{by Proposition } 3.7\text{(iv)}] \\ &= \big((-x)(-1)\big)y \quad [\text{by } \mathbf{M1}] \\ &= \big((-1)(-x)\big)y \quad [\text{by } \mathbf{M2}] \\ &= \big(-(-x)\big)y \quad [\text{by Proposition } 3.7\text{(iv)}] \end{aligned}$$

$$= xy \quad \text{[by Proposition 3.2(iv)]}.$$

证明是完备的。 □

习题 3.5 证明如下命题：对每一个 $n \in \{2,3,4,\ldots\}$ 和实数 x_1，……，x_n，若 $x_1x_2\cdots x_n$ 的乘积等于 0，则至少有一个因子必须等于 0。

解答。将所讨论的命题记为 $S(n)$。

Base 情形：该命题对于 $n = 2$ 成立，这是由命题 ⇒“”的蕴含关系得到的。

归纳步骤：现在设 $n \in \{2,3,\ldots\}$，使得 $S(n)$ 成立。我们必须证明 $S(n+1)$ 成立。因此，假设 x_1，……，x_n，x_{n+1} 是实数，且满足 $x_1\cdots x_nx_{n+1} = 0$。将其写成 $(x_1\cdots x_n)x_{n+1} = 0$；在这里，我们得到一个含有两个因子的乘积。由于基础情形成立，我们必有 $x_1\cdots x_n = 0$ 或 $x_{n+1} = 0$。在后一种情形下，结论即得证。在前一种情形下，根据归纳假设，数 x_1，……，x_n 中必有一个等于 0，因此结论同样得证。在这两种情形下，$S(n+1)$ 均得到验证。

因此，利用数学归纳法原理证明了整个命题。 □

习题 3.6 设 x 和 y 是两个非零实数。证明 $\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)^{-1} = \begin{matrix}y\\x\end{matrix}$。

解答。根据定义，$\begin{matrix}x\\y\end{matrix} = xy^{-1}$ 和 $\begin{matrix}y\\x\end{matrix} = yx^{-1}$都有定义良好，因为 x 和 y都不等于 0。这两个商/乘积根据命题 3.7(iii)均非零。根据命题 3.5(v)、命题 3.5(iv)以及 **M2**，可得

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \left(xy^{-1}\right)^{-1} = x^{-1}(y^{-1})^{-1} = x^{-1}y = yx^{-1} = \frac{y}{x},$$

如所需。注意：类似地，你可以证明所有已学过的分数运算规则，例如 $\begin{matrix}a\\b\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}x\\y\end{matrix} = \begin{matrix}ay\\bx\end{matrix}$等。□

习题 3.7 证明命题 3.9(iii)。 提示： 考虑两种情况， $n \geq 0$ 和 $n < 0$。前一种情况使用归纳法。后一种情况化归为前一种情况。

解答。首先假设 $n \geq 0$。若 $n = 0$，则由定义可得 $(xy)^0 = 1$, $x^0 = 1$，且 $y^0 = 1$，结论显然成立。现在假设对某个非负整数 $n \geq 0$，结论成立。那么

$$(xy)^{n+1} = (xy)(xy)^n = (xy)\left(x^ny^n\right) = x \cdot y \cdot x^n \cdot y^n = \left(x \cdot x^n\right) \cdot \left(y \cdot y^n\right) = x^{n+1}y^{n+1}.$$

根据数学归纳法原理，对所有整数 $n \geq 0$，结论都成立。

现在假设 $n < 0$。那么 $m := -n > 0$ 根据定义，并利用已经验证的情形以及命题3.5(v)，我们得到

$$\begin{aligned} x^ny^n &= x^{-m}y^{-m} = (x^{-1})^m(y^{-1})^m \\ &= \left(x^{-1}y^{-1}\right)^m = \left((xy)^{-1}\right)^m = (xy)^{-m} = (xy)^n. \end{aligned}$$

（在这种情况下，必有 $x \neq 0$，且 $y \neq 0$。） □

练习 3.8 验证 $\mathbb{F}_2$ 是一个域。

解答。好吧，这里没什么选择——我们得逐一验证九条公理！

集合 A1：需要考虑 8 种分类讨论 $x \in \{0,1\}$，$y \in \{0,1\}$，$z \in \{0,1\}$。我们将重复使用（3.23） 地。

情形 *1*： $x = 0, y = 0, z = 0$: 那么 $(x+y)+z = (0+0)+0 = 0+0 = 0 = 0+0 = 0+(0+0) = x+(y+z)$。情形 *2*： $x = 0, y = 0, z = 1$:

那么 $(x+y)+z = (0+0)+1 = 0+1 = 1 = 0+1 = 0+(0+1) = x+(y+z)$。

情况 3：$x=0,\ y=1,\ z=0$:

于是 $(x+y)+z=(0+1)+0=1+0=1=0+1=0+(1+0)=x+(y+z)$。

情况 4：$x=0,\ y=1,\ z=1$:

于是 $(x+y)+z=(0+1)+1=1+1=0=0+0=0+(1+1)=x+(y+z)$。

情况 5：$x=1,\ y=0,\ z=0$:

于是 $(x+y)+z=(1+0)+0=1+0=1=1+0=1+(0+0)=x+(y+z)$。

情况 6：$x=1,\ y=0,\ z=1$:

于是 $(x+y)+z=(1+0)+1=1+1=0=1+1=1+(0+1)=x+(y+z)$。

情况 7：$x=1,\ y=1,\ z=0$:

那么 $(x+y)+z=(1+1)+0=0+0=0=1+1=1+(1+0)=x+(y+z)$。

情况 8：$x=1,\ y=1,\ z=1$:

于是 $(x+y)+z=(1+1)+1=0+1=1=1+0=1+(1+1)=x+(y+z)$。

公理A2：由（3.23）可知这显然成立。（或者分 4 种情形讨论：$x\in\{0,1\},\ y\in\{0,1\}$。）

公理A3：由（3.23）可知这显然成立。（或者分 2 种情形讨论：$x\in\{0,1\}$。）

公理A4：我们定义 $-0:=0$和 $-1:=1$。然后，由（3.23），$0+(-0)=0+0=0$和 $1+(-1)=1+1=0$如所需成立。

M1：需要考虑 8 种情形 $x\in\{0,1\},\ y\in\{0,1\},\ z\in\{0,1\}$。我们将反复使用（3.24）。

情形 1：$x=0,\ y=0,\ z=0$:

那么 $(x\cdot y)\cdot z=(0\cdot 0)\cdot 0=0\cdot 0=0=0\cdot 0=0\cdot(0\cdot 0)=x\cdot(y\cdot z)$。

情形 2：$x=0,\ y=0,\ z=1$:

那么 $(x\cdot y)\cdot z=(0\cdot 0)\cdot 1=0\cdot 1=0=0\cdot 0=0\cdot(0\cdot 1)=x\cdot(y\cdot z)$。

情况 3：$x=0,\ y=1,\ z=0$:

那么 $(x\cdot y)\cdot z=(0\cdot 1)\cdot 0=0\cdot 0=0=0\cdot 0=0\cdot(1\cdot 0)=x\cdot(y\cdot z)$。复数域

情形 4：$x=0,\ y=1,\ z=1$:

那么 $(x\cdot y)\cdot z=(0\cdot 1)\cdot 1=0\cdot 1=0=0\cdot 1=0\cdot(1\cdot 1)=x\cdot(y\cdot z)$。复数域

情况 5：$x=1,\ y=0,\ z=0$:

那么 $(x\cdot y)\cdot z=(1\cdot 0)\cdot 0=0\cdot 0=0=1\cdot 0=1\cdot(0\cdot 0)=x\cdot(y\cdot z)$。复数域

情况 6：$x=1,\ y=0,\ z=1$:

那么 $(x\cdot y)\cdot z=(1\cdot 0)\cdot 1=0\cdot 1=0=1\cdot 0=1\cdot(0\cdot 1)=x\cdot(y\cdot z)$。

*C*情况 7：$x=1,\ y=1,\ z=0$:

则 $(x\cdot y)\cdot z=(1\cdot 1)\cdot 0=1\cdot 0=0=1\cdot 0=1\cdot(1\cdot 0)=x\cdot(y\cdot z)$。

情况 8：$x=1,\ y=1,\ z=1$:

则 $(x\cdot y)\cdot z=(1\cdot 1)\cdot 1=1\cdot 1=1=1\cdot 1=1\cdot(1\cdot 1)=x\cdot(y\cdot z)$。

M2：由（3.24）可明显看出这一点成立。（或者分 4 种情况讨论：$x\in\{0,1\},\ y\in\{0,1\}$.）

M3：由（3.24）可明显看出这一点成立。（或者分 2 种情况讨论：$x\in\{0,1\}$。）

M4：定义 $1^{-1}:=1$。然后，根据（3.24），$1\cdot 1^{-1}=1\cdot 1=1$ 如所要求。

D：共有 8 种情况需要考虑 $x\in\{0,1\},\ y\in\{0,1\},\ z\in\{0,1\}$。我们将反复使用 (3.23) 和 (3.24)。

情形 1：$x=0,\ y=0,\ z=0$:

于是 $x(y+z)=0\cdot(0+0)=0\cdot 0=0=0+0=0\cdot 0+0\cdot 0=xy+xz$。

情形 2：$x=0,\ y=0,\ z=1$:

于是 $x(y+z)=0\cdot(0+1)=0\cdot 1=0=0+0=0\cdot 0+0\cdot 1=xy+xz$。

情况 3：$x=0,\ y=1,\ z=0$:

则 $x(y+z)=0\cdot(1+0)=0\cdot 1=0=0+0=0\cdot 1+0\cdot 0=xy+xz$。

情况 4：$x=0,\ y=1,\ z=1$:

则 $x(y+z)=0\cdot(1+1)=0\cdot 0=0=0+0=0\cdot 1+0\cdot 1=xy+xz$。

情况 5：$x=1,\ y=0,\ z=0$:

则 $x(y+z)=1\cdot(0+0)=1\cdot 0=0=0+0=1\cdot 0+1\cdot 0=xy+xz$。复数域

情况 6：$x=1,\ y=0,\ z=1$:

于是 $x(y+z)=1\cdot(0+1)=1\cdot 1=1=0+1=1\cdot 0+1\cdot 1=xy+xz$。复数域

例 7：$x=1,\ y=1,\ z=0$:

那么 $x(y+z)=1\cdot(1+0)=1\cdot 1=1=1+0=1\cdot 1+1\cdot 0=xy+xz$。

情况 *8*： $x=1,\ y=1,\ z=1$:
那么 $x(y+z)=1\cdot(1+1)=1\cdot 0=0=1+1=1\cdot 1+1\cdot 1=xy+xz$。 □

练习 3.9 验证 $\mathbb{Q}$ 是一个域。 提示： 命题3.12。

解答。注意到 $0=0/1$ 和 $1=1/1$ 都是有理数。设 $x=a/b$ 和 $y=c/d$ 属于 $\mathbb{Q}$，其中 a、b、c、d是整数，且 b、d非零。那么 $x+y=(ad+bc)/(bd)\in\mathbb{Q}$，并且 $xy=(ac)/(bd)\in\mathbb{Q}$。此外，$-x=(-a)/b\in\mathbb{Q}$，且如果 $x\neq 0$，也就是说 $a\neq 0$，那么 $x^{-1}=b/a\in\mathbb{Q}$ 也成立。因此，结论由命题 3.12 得出。□

习题3.10 复数 $\mathbb{C}$构成一个域[1]。

(i) 验证 **A1**、**A2**、**A3** 和**A4**。**(ii)** 验证 **M1**、**M2**、**M3** 和**M4**。**(iii)** 验证 **D**。

解答。设 z,z_1,z_2,z_3属于 $\mathbb{C}$，即 $z=x+\mathrm{i}y$、$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$、$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$、$z_3=x_3+\mathrm{i}y_3$，其中$x,x_1,x_2,x_3,y,y_1,y_2,y_3$ 属于 $\mathbb{R}$。

现在验证九条公理。我们将反复使用（3.20）和（3.22），以及实数的域公理 $\mathbb{R}$:

(i)：**A1**：事实上，对 $\mathbb{R}$同时使用**公理A1**，可得

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)+z_3&=\big((x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)\big)+(x_3+\mathrm{i}y_3)=\big((x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)\big)+(x_3+\mathrm{i}y_3)\\&=\big((x_1+x_2)+x_3\big)+\mathrm{i}\big((y_1+y_2)+y_3\big)=\big(x_1+(x_2+x_3)\big)+\mathrm{i}\big(y_1+(y_2+y_3)\big)\\&=(x_1+\mathrm{i}y_1)+\big((x_2+x_3)+\mathrm{i}(y_2+y_3)\big)=(x_1+\mathrm{i}y_1)+\big((x_2+\mathrm{i}y_2)+(x_3+\mathrm{i}y_3)\big)\\&=z_1+(z_2+z_3).\end{aligned}$$

公理A2：事实上，对 $\mathbb{R}$同时使用**公理A2**，可得

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)=(x_2+x_1)+\mathrm{i}(y_2+y_1)\\&=(x_2+\mathrm{i}y_2)+(x_1+\mathrm{i}y_1)=z_2+z_1.\end{aligned}$$

公理A3：确实，同样对 $\mathbb{R}$使用**公理A3**，我们得到

$$z+0=(x+\mathrm{i}y)+(0+\mathrm{i}0)=(x+0)+\mathrm{i}(y+0)=x+\mathrm{i}y=z.$$

公理A4：确实，同样对 $\mathbb{R}$使用**公理A4**，我们得到

$$z+(-z)=(x+\mathrm{i}y)+\big((-x)+\mathrm{i}(-y)\big)=\big(x+(-x)\big)+\mathrm{i}\big(y+(-y)\big)=0+\mathrm{i}0=0.$$

(ii)：**M1**：确实，

$$\begin{aligned}(z_1\cdot z_2)\cdot z_3&=\big((x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)\big)\cdot(x_3+\mathrm{i}y_3)=\big((x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\big)\cdot(x_3+\mathrm{i}y_3)\\&=\big((x_1x_2-y_1y_2)x_3-(x_1y_2+x_2y_1)y_3\big)+\mathrm{i}\big((x_1x_2-y_1y_2)y_3+x_3(x_1y_2+x_2y_1)\big)\\&=\big(x_1x_2x_3-y_1y_2x_3-x_1y_2y_3-y_1x_2y_3\big)+\mathrm{i}\big(x_1x_2y_3-y_1y_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3\big)\\&=\big(x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(x_2y_3+x_3y_2)\big)+\mathrm{i}\big(x_1(x_2y_3+x_3y_2)+(x_2x_3-y_2y_3)y_1\big)\\&=(x_1+\mathrm{i}y_1)\big((x_2x_3-y_2y_3)+\mathrm{i}(x_2y_3+x_3y_2)\big)=(x_1+\mathrm{i}y_1)\big((x_2+\mathrm{i}y_2)\cdot(x_3+\mathrm{i}y_3)\big)\\&=z_1\cdot(z_2\cdot z_3).\end{aligned}$$

M2：确实，

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)=(x_2x_1-y_2y_1)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)\\&=(x_2+\mathrm{i}y_2)\cdot(x_1+\mathrm{i}y_1)=z_2\cdot z_1.\end{aligned}$$

[1] 复数在现代物理学和工程学中至关重要。

M3：确实，

$$z\cdot 1=(x+\mathrm{i}y)\cdot(1+\mathrm{i}0)=(x\cdot 1-y\cdot 0)+\mathrm{i}(x\cdot 0+1\cdot y)=(x-0)+\mathrm{i}(0+y)=x+\mathrm{i}y=z.$$

M4：确实，假设 $z\neq 0$，我们有

$$\begin{aligned}z\cdot z^{-1}&=(x+\mathrm{i}y)\cdot\Big(\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}\Big)\\&=\Big(x\cdot\frac{x}{x^2+y^2}-y\frac{-y}{x^2+y^2}\Big)+\mathrm{i}\Big(x\frac{-y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}y\Big)\\&=\frac{x^2+(-y)^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{x(-y)+xy}{x^2+y^2}=1+\mathrm{i}0=1.\end{aligned}$$

(iii)：**D**：确实，我们有

$$\begin{aligned}z_1(z_2+z_3)&=(x_1+\mathrm{i}y_1)\big((x_2+\mathrm{i}y_2)+(x_3+\mathrm{i}y_3)\big)=(x_1+\mathrm{i}y_1)\big((x_2+x_3)+\mathrm{i}(y_2+y_3)\big)\\&=\big(x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3)\big)+\mathrm{i}\big(x_1(y_2+y_3)+(x_2+x_3)y_1\big)\\&=\big(x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3\big)+\mathrm{i}\big(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_3y_1\big)\\&=\big(x_1x_2-y_1y_2+x_1x_3-y_1y_3\big)+\mathrm{i}\big(x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1\big)\\&=\big((x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\big)+\big((x_1x_3-y_1y_3)+\mathrm{i}(x_1y_3+x_3y_1)\big)\\&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)+(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_3+\mathrm{i}y_3)=z_1z_2+z_1z_3.\end{aligned}$$

□

习题3.11 在本习题中，我们假设 $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，这是一个我们稍后将推导出的事实（见定理7.1）。我们定义

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}):=\big\{x+\sqrt{2}y\;\big|\;x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}\big\}.$$

证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是一个域[2]。提示：命题 3.12 和习题 3.9。

解答。首先，$0=0+\sqrt{2}0$、$1=1+\sqrt{2}0$ 和 $\{0,1\}\subseteq\mathbb{Q}$，因此 0 和 1 属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。现在设 $x+\sqrt{2}y$ 和 $u+\sqrt{2}v$ 属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，其中 $\{x,y,u,v\}\subseteq\mathbb{Q}$。于是

$$\big(x+\sqrt{2}y\big)+\big(u+\sqrt{2}v\big)=(x+u)+\sqrt{2}(y+v)\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

因为 $x+u\in\mathbb{Q}$ 且 $y+v\in\mathbb{Q}$。类似地，由于 $\sqrt{2}^2=2$，

$$\big(x+\sqrt{2}y\big)\cdot\big(u+\sqrt{2}v\big)=(xu+2yv)+\sqrt{2}(xv+yu)\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

此外，由于 $\{-x,-y\}\subseteq\mathbb{Q}$，$-(x+\sqrt{2}y)=(-x)+\sqrt{2}(-y)\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。最后，如果 $x+\sqrt{2}y\neq 0$，则

$$\frac{1}{x+\sqrt{2}y}=\frac{x+\sqrt{2}(-y)}{x^2-2y^2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

因为 $\{x,-y,x^2-2y^2\}\subseteq\mathbb{Q}$。注意，我们不除以0：$x^2\neq 2y^2$ 因为$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$。 □

练习 3.12 设 $f\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ 是一个函数，使得对所有 $\mathbb{Q}$中的 x 和 y，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。证明对每一个 $x\in\mathbb{Q}$，$f(x)=f(1)\cdot x$。

解答。我们采用“逐步逼近法”来完成，这是一种逐步推进直至得出所需结论的证明技巧。

首先，简单的归纳法可以证明

$$f(a_1+\cdots+a_n)=f(a_1)+\cdots+f(a_n).\tag{3.26}$$

[2] 这类域出现在数论和代数（伽罗瓦理论）中。

现在我们来处理这个证明

情形 *1*： $x \in \{1, 2, \ldots\}$:

显然 $f(1) = f(1) \cdot 1$。此外， $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$。由归纳法， $f(n) = nf(1)$。

情形 *2*： $x \in \{0, -1, -2, \ldots\}$:

我们有 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$，从而 $f(0) = 0 = 0f(1)$。接下来，若 $n \in \mathbb{N}$，则$0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$，于是 $f(-n) = -f(n) = -nf(1) = (-n)f(1)$。复数域

情形 *3*： $x \in \{1/1, 1/2, 1/3, \cdots\}$:

利用 (3.26) 式，我们得到

$$f(1) = f\left(\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right) = f\left(\tfrac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\tfrac{1}{n}\right) = nf\left(\tfrac{1}{n}\right).$$

因此 $f(1/n) = (1/n)f(1)$。

情况 *4*： $x \in \{-1/1, -1/2, -1/3, \ldots\}$:

类似于情形 2 的证明。

情况 *5*： $x \in \mathbb{Q}$:

设 $x = m/n$，其中 n 是非零整数。利用（3.26）和情况 4，最终得到

$$f\left(\tfrac{m}{n}\right) = mf\left(\tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{m}{n} f(1).$$

□

练习 3.13 计算 $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j}$。

解答。注意，我们对满足 $0 \le j \le i \le n$ 的指标对（i， j）求和。在所讨论的和中，我们固定 j，先对 i 求和。或者，也可以固定 i，对 j 求和，得到的结果相同；利用二项式定理可得，

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = (1+2)^n = 3^n.$$

□

练习 3.14 设 $x > 0$ 是一个满足 $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$ 的实数。证明，对于每一个 $n \in \mathbb{N}$， $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{N}$ 也成立。提示：对 n 使用归纳法。

解答。我们用强归纳法证明。显然，当 $n = 0$ 时结论成立，因为 $x^0 + 1/x^0 = 1 + 1/1 = 2 \in \mathbb{N}$。根据关于 x 的假设，当 $n = 1$ 时结论也显然成立。

现在假设 $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{N}$ 对每一个 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ 且对某个 $n \ge 1$。注意到

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \underbrace{\underbrace{\left(x + \tfrac{1}{x}\right)}_{\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(x^n + \tfrac{1}{x^n}\right)}_{\in\mathbb{N}}}_{\in\mathbb{N}} - \underbrace{\left(x^{n-1} + \tfrac{1}{x^{n-1}}\right)}_{\in\mathbb{N}}.$$

因此 $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$。但由于这个量显然是正的（因为 $x > 0$），由此可得 $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \{1, 2, \ldots\}$，即为所求。

因此，根据数学归纳法原理，该结果得证。 □

练习 3.15 一个 实有理函数 $f(x)$ 是多项式的商

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

其中所有系数均为实数， $m \in \mathbb{N}$、 $n \in \mathbb{N}$ 和 $b_n \neq 0$。

实有理函数的集合构成一个域，通常记作 $\mathbb{R}(x)$，其中

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \text{and} \quad (fg)(x) := f(x)\cdot g(x),$$

将 0 和 1 视为常数多项式，并且

$$(-f)(x) := \frac{-a_m x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \cdots - a_1 x - a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

并且

$$(1/f)(x) := \frac{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

当 $a_m \neq 0$ 时。

(i) 验证**公理A4**。(ii) 验证**M4**。

解答。写出

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

其中 $b_n \neq 0$。

(i)：**公理A4**：根据定义和**D**，我们得到

$$\begin{aligned}(-f)(x) &= \frac{-a_m x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \cdots - a_1 x - a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \\ &= -\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \\ &= -f(x).\end{aligned}$$

因此 $f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$。

(ii)：**M4**：事实上，根据定义，我们有

$$f(x)\cdot(1/f)(x) = \frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0} \cdot \frac{b_n x^n + \cdots + b_0}{a_m x^m + \cdots + a_0} = 1.$$

□

练习 3.16 设 $\mathbb{F} = \{0, 1, a, b\}$ 是包含四个（互不相同）元素的有限域：**0**，**1**，a，b。证明以下结论：

(i) $ab = 1$。
(ii) $a^2 = b$。

提示：你可以分类讨论其他可能的结果，并导出矛盾。

解答。注意，a 和 b 都不等于 **0** 或 **1**。

(i)：情形 ***1***：$ab = 0$。

由命题 3.7(iii)，$a = 0$ 或 $b = 0$ 这显然荒谬，因为二者都非零。

情形 ***2***：$ab = a$。

由于 $a \neq 0$，我们可以乘以 a^{-1}，从而推出 $b = 1$，这显然荒谬。

情况 ***3***：$ab = b$。

由于 $b \neq 0$，我们可以乘以 b^{-1}，从而推得 $a = 1$，这是荒谬的。

情况 ***4***：$ab = 1$。

由于其他可能性都刚刚导致了矛盾，这就是唯一剩下的选择，因此必然成立，因为域在乘法下是封闭的。

(ii): $C^{\text{情况 1}}$: $a^2 = 0$.

由命题 3.7(iii)，$a = 0$ 这是荒谬的。

情形 *2*： $a^2 = a$。
由于 $a \neq 0$，我们可以乘以 a^{-1}，从而推得 $a = 1$，这是荒谬的。
情况 *3*： $a^2 = 1$。
然后，利用 (i)，$a^2 = 1 = ab$，因此（乘以 a^{-1}） $a = b$，这是荒谬的。复数域
case 4： $a^2 \neq a, 1, b$.
由于其他所有可能情况都已导致矛盾，因此这就是唯一剩下的可能性，必定成立，因为域在乘法下封闭。
□

习题3.17 假设我们要求不仅每个非零数都存在逆元，而且 0 也存在逆元。证明这一假设会与本章至少一个已得到的结果相矛盾。

解答。我们假设 0^{-1} 存在；因此， $0 \cdot 0^{-1} = 1$。另一方面，命题3.7(ii) （取$x = 0^{-1}$）便会推出 $0^{-1} \cdot 0 = 0$。总之， $1 = 0$ 这显然荒谬。□

习题3.18 设 $\mathbb{F}$ 是一个有限域。对每一个 $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$，我们定义 $n \odot 1 := \sum_{i=1}^{n} 1$。（注意， n 可能属于也可能不属于 $\mathbb{F}$，但 $n \odot 1$ 必定属于 $\mathbb{F}$。）证明以下结论：

(i) 存在一个数 $c \in \{1, 2, \ldots\}$，使得 $c \odot 1 = 0$。(ii) 证明满足 $c \odot 1 = 0$ 的最小整数 $c \geq 1$ 是素数。（数 c 称为域 $\mathbb{F}$的特征。

解答。（i）：由于 $\mathbb{F}$ 只包含有限个元素，因此必定存在整数 $1 \leq m < n$ 使得 $m \odot 1 = n \odot 1$。减去 $m \odot 1$，可知 $(n - m) \odot 1 = 0$。

（ii）：反设 c 不是素数，例如 $c = p \cdot q$，其中 $p \geq 2$ 和 $q \geq 2$ 都是整数。于是 $0 = c \odot 1 =$ （pq） $\odot 1 =$ （$p \odot 1$）（$q \odot 1$）。根据命题 3.7(iii)， $p \odot 1 = 0$ 或 $q \odot 1 = 0$。由于 $p < c$ 且 $q < c$，这与假设 c 是满足 ≥ 1 的最小整数$c \odot 1 = 0$矛盾。□

练习 3.19 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，且 x、y、u、v 属于 $\mathbb{F}$。证明

$$(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2).$$

解答。这可由简单展开得到：事实上，由于 $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)\alpha + (\alpha + \beta)\beta = \alpha\alpha + \beta\alpha + \alpha\beta + \beta\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$，我们得到

$$\begin{aligned}(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 &= (xu)^2 + (-yv)^2 + 2(xu)(-yv) + (xv)^2 + (yu)^2 + 2(xv)(yu) \\ &= x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2),\end{aligned}$$

如所要求证。 □

练习 3.20 在习题 2.33中，我们证明了 13^n 对于每一个整数 $n \geq 1$，可以利用强归纳法将其写成两个整数平方数之和。在本习题中，我们的任务是利用普通归纳法证明这一结果。提示：充分利用习题3.19！

解答。将所讨论的命题记为 $S(n)$。
基础情形：当 $n = 1$ 时，我们有

$$13^1 = 13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$$

因此，基础情形得到了验证。
归纳步骤：现在假设对于某个整数 $n \geq 1$， $S(n)$成立，即

$$13^n = a^n + b^n,$$

对某些整数 a 和 b。则

$$13^{n+1} = 13 \cdot 13^n = \big(2^2 + 3^2\big)\big(a^2 + b^2\big).$$

集合 $x = 2$, $y = 3$, $u = a$, $v = b$。然后，根据练习 3.19,

$$\begin{aligned}(2^2 + 3^2)(a^2 + b^2) = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) &= (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 \\ &= (2a - 3b)^2 + (2b + 3a)^2\end{aligned}$$

是两个整数平方之和，因为 $2a - 3b$ 和 $2b + 3a$ 显然也是整数。综上,

$$13^{n+1} = (\underbrace{2a - 3b}_{\in\mathbb{Z}})^2 + (\underbrace{2b + 3a}_{\in\mathbb{Z}})^2$$

是两个整数平方之和。因此， $S(n + 1)$正确。

因此，b 根据数学归纳法原理，该结果对每一个整数 $n \geq 1$都成立。 □

练习 3.21（由你来批改！）考虑以下命题

$$\text{“}0 = 1\text{”}$$

以及以下这个“证明”:

一方面， $0 \cdot 0^{-1} = 0$ 根据命题 3.7(iii)。另一方面,
$0 \cdot 0^{-1} = 1$ 根据 **M4**。综上， $0 = 0 \cdot 0^{-1} = 1$。

这个证明错在哪里?

解答。 0^{-1} 不存在：**M4**只适用于非零数。 □

练习 3.22（真或假?）判断以下各命题是真还是假，并简要说明理由。

（i）“整数集 $\mathbb{Z}$ 在通常的加法和乘法定义下构成一个域。”（ii）“有理数集 $\mathbb{Q}$ 在通常的加法和乘法定义下构成一个域。”（iii）“如果 $n \in \{1, 2, \ldots\}$，那么存在一个恰好包含 n 个数的域。”（iv）“如果 $a \neq 0$ 属于一个域，那么方程 $ax = 1$ 总有解。”

解答。（i）：假：例如，数字 2 没有逆元。（ii）：正确：这可由命题3.12得出。（iii）：假：例如，不存在恰好包含一个数字的域，因为每个域至少包含两个数字：0 和 1（并且假设 1 不等于 0）。（iv）：正确：命题 3.6。

□

第4章 集合与关系

4.1 基本概念

集合是由称为元素的对象构成的“定义明确”的汇集。通常用花括号表示集合。例如，由前4个正整数构成的集合记作

$$\{1, 2, 3, 4\}. \tag{4.1}$$

如果 A 是一个集合，我们写作 $x \in A$，表示 x 属于 A；否则，我们写作 $x \notin A$。因此，

$$3 \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{but} \quad -7 \notin \{1, 2, 3, 4\}. \tag{4.2}$$

集合不一定局限于数字，我们也可以谈论这个班所有学生组成的集合，或某个生物体中的所有细胞组成的集合，等等。

通常，集合是从给定的潜在元素“全集”中构造出来的。例如，我们写作

$$\big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; n \text{ is a prime number}\big\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} \tag{4.3}$$

用来表示所有素数组成的集合；这个集合的另一种常用记法是 $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ 是素数}\}$。这些构造方式允许我们形成不包含任何东西的集合。例如，集合

$$S := \big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; n \text{ is a prime number between 14 and 16}\big\} \tag{4.4}$$

不包含任何元素，因为数字 14、15、16 都是合数：$14 = 2 \cdot 7$、$15 = 3 \cdot 5$和$16 = 2 \cdot 8$。因此，$S = \{\,\}$，也就是更常见的写法

$$S = \varnothing; \tag{4.5}$$

用文字表示：S 是**空集**。

设 A 和 B 是两个集合。这些集合可能具有可比较的关系，即一个集合包含于另一个集合中。例如，素数集显然包含于全体非负整数集之中。又如，全体男性组成的集合包含于全体人类组成的集合之中。再如，全体元音字母组成的集合包含于字母表中的所有字母组成的集合之中。

定义 4.1（子集）设 A 和 B 是集合。若 A 中的每个元素都属于 B，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$。若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则集合 A 和 B 相等，即 $A = B$。若 A 不是 B 的子集，也就是说，存在一个元素 $x \in A$ 使得 $x \notin B$，则记作 $A \not\subseteq B$。

现在我们可以写出 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$。要验证两个集合 A 和 B 相同，我们检查 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，即

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad [A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A]. \tag{4.6}$$

注意， $\varnothing \subseteq A$，这意味着空集是唯一的。

定义4.2（并集、交集、补集）设 A 与 B 为集合。则[1]

（i） $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 是 A 与 B的**并集**；（ii） $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 是 A 与 B的**交集**；（iii） $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ 是 B 在 A中的**补集**。

若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B **不相交**。

人们常常处理某个全集 X 的子集（例如，实数的子集）。若全集 X 已明确，且 $A \subseteq X$，则也用 A^c 表示 $X \setminus A$；上标“c”表示“补集”。

这些概念都可以推广到多于 2 个集合的情形，甚至可以推广到无限多个集合。例如，设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一个集合指标族。那么它们的并集为

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ for some } i \in I\}, \tag{4.7}$$

它们的交集为

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ for every } i \in I\}. \tag{4.8}$$

4.2 集合与幂集的定律

上一节介绍的运算满足若干优美的规则，我们现在将它们汇总如下。

命题 4.3 设 X 是一个集合， A、 B、 C 是 X 的子集。则以下结论成立。

(i)（幂等律） $A \cup A = A$ 和 $A \cap A = A$。*(ii)*（结合律）$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 和 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。*(iii)*（交换律） $A \cup B = B \cup A$ 和 $A \cap B = B \cap A$。*(iv)*（分配律）$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 和 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。*(v)*（恒等律） $A \cup \varnothing = A$、 $A \cap X = A$、 $A \cup X = X$、 $A \cap \varnothing = \varnothing$。*(vi)*（对合律）$(A^c)^c = A$。*(vii)*（补集律） $A \cup A^c = X$、 $A \cap A^c = \varnothing$、 $X^c = \varnothing$、 $\varnothing^c = X$。*(viii)*（德摩根定律）$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 和 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$。

证明。 (viii)：设 $x \in X$。则

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cup B && (4.9a)\\ &\Leftrightarrow [x \notin A \text{ and } x \notin B] && (4.9b)\\ &\Leftrightarrow [x \in A^c \text{ and } x \in B^c] && (4.9c)\\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. && (4.9d) \end{aligned}$$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 的证明与此类似。 □

回顾本章节开头，我们并未完整定义“集合”的含义。事实上，这是一个相当微妙的概念，正如伯特兰·罗素在1901年所发现的那样。

注 4.4（罗素悖论）考虑所有不包含自身的集合 X：

$$R := \{X \mid X \notin X\}. \tag{4.10}$$

[1] 很好的记法：(i) $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B]$; (ii) $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]$。

R 是否是 R 的元素?

情形 *1*：假设 $R \in R$。

那么，根据 R、 $R \notin R$ 的定义，这显然是荒谬的。

情形 *2*：假设 $R \notin R$。

那么，根据 R、 $R \in R$ 的定义，这再次显然是荒谬的。

这个悖论的解答在于， R 不是集合。因此，集合论需要格外谨慎，以避免遇到此类悖论。然而，实际从事研究的科学家和数学家基本上从未遇到过这种形式的悖论——这类悖论是逻辑学家研究的对象。

定义 4.5 设 X 是一个集合。 X 的所有子集组成的集合记作 $\mathcal{P}(X)$，称为 X的**幂集**。

例如，若 $X = \{A, B, C\}$，则幂集

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\varnothing, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\big\} \tag{4.11}$$

恰好包含 8 个元素。如下一个结果所示，这并非巧合。

定理 4.6 设 X 是一个包含 n 个互异元素的集合，其中 $n \in \mathbb{N}$。则幂集$\mathcal{P}(X)$包含 2^n 个元素[2]。

证明。利用定理 2.14和（2.29），可得

$$\text{number of elements in } \mathcal{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \text{number of subsets of } X \text{ of size } k \tag{4.12a}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tag{4.12b}$$

$$= 2^n, \tag{4.12c}$$

如所述。或者可以注意到， X 的每个元素要么属于给定的子集，要么不属于该子集，因此有 2^n 种可能。□

4.3 笛卡尔积与关系

定义 4.7（积集）设 A 和 B 是集合。那么，**（笛卡尔）积集**由 A和B 定义为

$$A \times B := \big\{(a, b) \;\big|\; a \in A \text{ and } b \in B\big\}. \tag{4.13}$$

因此，如果 $A = \{a, b, c\}$ 和 $B = \{1, 2\}$，那么

$$A \times B = \big\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\big\}. \tag{4.14}$$

一个重要的例子是**欧几里得平面**

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \big\{(x, y) \;\big|\; x \in \mathbb{R} \text{ and } y \in \mathbb{R}\big\}; \tag{4.15}$$

这里，笛卡尔积由所有实数的有序对组成。请注意，顺序很重要：点 (1，2) 与点 (2，1) 并不相同。（尽管对于集合，我们确实有 $\{1, 2\} = \{2, 1\}$。）在欧几里得平面中，笛卡尔积 $[0, 1] \times [1, 3]$ 恰好由位于以 (0，1)、(0，3)、(1，1) 和 (1，3) 为顶点的矩形中的所有点组成。

[2] 这启发了一种有时在文献中出现的幂集替代记法，即 2^X .

定义 4.8（关系）设 A 和 B 是集合。从 A 到 B 的**关系**就是 $A\times B$ 的一个子集。现在设 R 是从 A 到 B 的一个关系，并且 $a\in A$ 和 $b\in B$。如果 $A=B$，我们就称 R 是 A 上的关系。如果 $(a,\ b)\in$ R，就称 a 与 b 有关系（或称与 R 相关），并记作 aRb。

考虑 $A=B=\mathbb{R}$ 的情形。如果 R $=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid x=y\}$，那么 R 就是欧几里得平面上的对角线，而 xRy 的含义恰好是 $x=y$。如果 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个函数（比如微积分 I 中学到的指数函数），那么 R $=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid y=f(x)\}=\{(x,\ f(x))\mid x\in\mathbb{R}\}$ 就是一个关系。因此，关系是对函数的推广；事实上，关系在现代分析学中发挥着重要作用，因为分析学会研究输出为集合的“函数”（例如，像绝对值这样的函数的“导数”；绝对值在经典意义下于 0 处不可微）。

以下类型的关系在数学的许多领域中都很重要，尤其是在数论和代数中。

定义 4.9（等价关系）设 R 是集合 A 上的一个关系。如果 R 对所有 $a,\ b,\ c$ 属于 A 满足以下性质，则 R 是一个**等价关系**。

(i)（自反性）aRa。(ii)（对称性）若 aRb，则 bRa。(iii)（传递性）若 aRb 且 bRc，则 aRc。

人们也会使用记号 $a\equiv b$ 或 $a\sim b$ 来代替 aRb，尤其是在等价关系的语境中。注意，aR$b:\Leftrightarrow a=b$ 在 A 上定义了一个等价关系，这也解释了这些记号的由来。

例 4.10（模 5）对于 a 和 b，若它们属于 $\mathbb{Z}$，我们称 a 和 b 模 5 同余，并记作

$$a\equiv b\pmod 5, \tag{4.16}$$

若 5 整除 $b-a$，即 $(b-a)/5\in\mathbb{Z}$。（因此 $7\equiv -13$ 模 5，但 $5\not\equiv 12$ 模 5。）这在 $\mathbb{Z}$ 上定义了一个等价关系。

证明。设 $a,\ b,\ c$ 属于 $\mathbb{Z}$。为方便起见，我们将 $a\equiv b$ (模 5) 简记为 $a\equiv b$。

“自反性”：由于 $a-a=0$ 和 $5|0$，我们得到 $a\equiv a$。

“对称性”：假设 $a\equiv b$。那么存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $b-a=5\cdot k$。因此 $a-b=5\cdot(-k)$。由于 $-k\in\mathbb{Z}$，我们得到 $b\equiv a$。

“传递性”：假设 $a\equiv b$ 且 $b\equiv c$。那么存在 k 和 l 属于 $\mathbb{Z}$ 使得[3]

$$b-a=5\cdot k \tag{4.17}$$

and

$$c-b=5\cdot l. \tag{4.18}$$

将最后两个方程相加可得

$$c-a=(b-a)+(c-b)=5\cdot k+5\cdot l=5\cdot(k+l). \tag{4.19}$$

由于 $k+l\in\mathbb{Z}$，可知 $a\equiv c$。 □

再次检查例题证明 4.10 可以看出，数字 5 并没有什么特别之处；事实上，如果将 5 替换为任意非零整数（通常是正整数），证明也同样成立。让我们记录下这一重要观察。

命题 4.11（模 m）设 m 为一个正整数，并在 $\mathbb{Z}$ 上定义一个关系

$$a\equiv b\pmod m \quad:\Leftrightarrow\quad \frac{b-a}{m}\in\mathbb{Z}. \tag{4.20}$$

于是，人们称 a与 b 模同余 m；此外，该关系是一个等价关系。

[3] 一个常见的错误是没有使用一个（可能）不同的整数 l ——但商 $(b-a)/5$和 $(c-b)/5$ 没有理由必须相同!

定义在集合 A 上的等价关系的一个有用性质是：该关系诱导出集合 A 的一个“划分”，将其分成彼此都有关系的元素的子集。

定义 4.12（等价类与商集）设 A 为一个集合，且 R 是 A上的一个等价关系。对每个 $a \in A$，用 $[a]$ 表示与 a相关的元素所组成的集合，这也称为 a的**等价类**，即

$$[a] := \big\{ b \in A \;\big|\; a\mathsf{R}b \big\}. \tag{4.21}$$

该**商集**是所有等价类的集合，记作

$$A/\mathsf{R} := \big\{ [a] \;\big|\; a \in A \big\}. \tag{4.22}$$

例 4.13（模 5，续）让我们重新考察例4.10。固定 $a \in \mathbb{Z}$，并令 $b \in \mathbb{Z}$。则 $a \equiv b$（模 5） $\Leftrightarrow$ $(b-a)/5 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b - a \in 5 \cdot \mathbb{Z} = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots\} \Leftrightarrow b \in \{a, a \pm 5, a \pm 10, a \pm 15, \ldots\}$。因此

$$[0] = \{0, \pm 5, \pm 10, \ldots\} = \{\ldots, -5, 0, 5, \ldots\} \tag{4.23a}$$
$$[1] = \{1, 6, -4, 11, -9, \ldots\} = \{\ldots, -4, 1, 6, \ldots\} \tag{4.23b}$$
$$[2] = \{\ldots, -3, 2, 7, \ldots\} \tag{4.23c}$$
$$[3] = \{\ldots, -2, 3, 8, \ldots\} \tag{4.23d}$$
$$[4] = \{\ldots, -1, 4, 9, \ldots\} \tag{4.23e}$$

因此

$$\cdots = [-5] = [0] = [5] = \cdots \tag{4.24a}$$
$$\cdots = [-4] = [1] = [6] = \cdots \tag{4.24b}$$
$$\cdots = [-3] = [2] = [7] = \cdots \tag{4.24c}$$
$$\cdots = [-2] = [3] = [8] = \cdots \tag{4.24d}$$
$$\cdots = [-1] = [4] = [9] = \cdots. \tag{4.24e}$$

因此，商集

$$\mathbb{Z}/(\mathrm{mod}\, 5) = \big\{ [0], [1], [2], [3], [4] \big\}, \tag{4.25}$$

也写作 $\mathbb{Z}/(5\mathbb{Z})$ 或 $\mathbb{Z}_5$，由 5 个元素组成。请注意，原集合 $\mathbb{Z}$被“划分”为 5 个“部分” $[0], [1], [2], [3], [4]$；这些集合互不重叠，并且合起来覆盖了 $\mathbb{Z}$。

或许并不太令人意外，命题 4.11 可以像前一个例子扩展例 4.10那样进一步推广：

例 4.14（模 m 续）让我们重新考察命题 4.11。那么商集为

$$\mathbb{Z}/(\mathrm{mod}\, m) = \big\{ [0], [1], [2], \ldots, [m-1] \big\}, \tag{4.26}$$

并且它包含 m 个互异元素。

此外，事实上，划分性质对任何等价关系都成立。

定理 4.15 设 A 是一个集合，且 R 是定义在 A 上的等价关系。那么以下结论成立。

(i) 对每一个 $a \in A$，都有 $a \in [a]$。(ii) 对所有 a 和 b，若它们属于 A，则有 $[a] = [b] \Leftrightarrow a\mathsf{R}b$。(iii) 对所有 a 和 b，若它们属于 A，则有 $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$。

证明。设 a, b, c 属于 A。

(i)：由于 实数集 具有自反性，因此有 a实数集a，从而 $a \in [a]$。

(ii)：“⇒”：由 (i)， $b \in [b] = [a]$；因此 $b \in [a]$，即 a实数集b。

“⇐”：取 $c \in [a]$。于是 a实数集c，并且 a实数集b。由对称性， b实数集a，进而由传递性， b实数集c。因此 $c \in [b]$。于是， $[a] \subseteq [b]$，类似的论证可得 $[b] \subseteq [a]$。综上， $[a] = [b]$。

(iii)：我们证明逆否命题。因此，假设 $[a] \cap [b] \neq \varnothing$，设 $c \in [a] \cap [b]$。那么 $a\mathsf{R}c$ 且 $b\mathsf{R}c$。由对称性， $c\mathsf{R}b$；由传递性， $a\mathsf{R}b$。因此，由 (ii)， $[a] = [b]$。 □

习题

习题4.1 证明空集是唯一的。

解答。回忆一下，空集是每个集合的子集。设 $\varnothing$ 和 $\varnothing'$ 都是空集。由于$\varnothing$ 是空集且 $\varnothing'$ 是集合，因此有 $\varnothing \subseteq \varnothing'$。同理，由于 $\varnothing'$ 是空集且 $\varnothing$ 是集合，因此有 $\varnothing' \subseteq \varnothing$。综上， $\varnothing = \varnothing'$。 □

习题4.2 设 A 和 B 是集合。证明 $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$。

解答。“$A \cap B \subseteq A$”：我们有 $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A$ 和 $x \in B] \Rightarrow x \in A$。“$A \subseteq A \cup B$”：我们有 $x \in A \Rightarrow [x \in A$ 或 $x \in B] \Leftrightarrow x \in A \cup B$。 □

习题4.3 设 A 和 B 是集合。证明以下命题等价。

(i) $A \subseteq B$。
(ii) $A \cap B = A$。
(iii) $A \cup B = B$。

解答。证明多个命题等价，最有效的方法是在可能的情况下，沿着一个循环路径证明蕴含关系。

“(i)⇒(ii)”：设 $A \subseteq B$。

显然有 $A \cap B \subseteq A$（见习题 8.6）。现在取 $x \in A$。由于 $A \subseteq B$，我们也有 $x \in B$。合并起来可推出 $x \in A \cap B$。总之， $A \cap B = A$。

“(ii)⇒(iii)”：设 $A \cap B = A$。显然， $B \subseteq A \cup B$。现在取 $x \in A \cup B$。若 $x \in A$，则由于 $A = A \cap B$， $x \in A \cap B$，因此 $x \in B$。若 $x \in B$，则显然 $x \in B$。无论哪种情况， $x \in B$。因此， $A \cup B \subseteq B$。综上， $A \cup B = B$。

“(iii)⇒(i)”：现在假设 $A \cup B = B$。取 $x \in A$。由于 $A \cup B \subseteq B$，我们有 $x \in B$。因此，$A \subseteq B$。 □

习题 4.4 设 X 是一个（全体）集合，且 A 和 B 是 X 的子集。证明 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$。

解答。事实上，

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow [x \notin A \text{ or } x \notin B] \Leftrightarrow [x \in A^c \text{ or } x \in B^c] \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c.$$

□

练习 4.5 设 X 是一个（全集）， A 和 B 是 X 的子集。证明： $A \subseteq B$ 当且仅当 $B^c \subseteq A^c$。

解答。“⇒”：设 $y \in B^c$。那么 $y \in X \setminus B$。我们断言 $y \in A^c$。反设 $y \notin A^c$。那么 $y \in (A^c)^c = A$。假设推出 $y \in B$，这与 y（在 B^c 中）的选取矛盾。

“⇐”：设 $x \in A$。我们断言 $x \in B$。反设 $x \notin B$，即 $x \in B^c$。该假设蕴含 $x \in A^c$，这是荒谬的，因为 $x \in A$。 □

练习 4.6 设 A，B是集合，并且 X_1，……，X_n是满足 $A \cup B \subseteq X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$。此外，假设只要 x属于某个 X_i，那么要么（$x \in A$且 $x \in B$），要么（$x \notin A$ 且 $x \notin B$）。证明 $A = B$。

解答。反设 $A \neq B$。那么存在 $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$。先假设 $x \in A \setminus B$。由于 $A \setminus B \subseteq A \cup B$，存在 i使得 $x \in X_i$。根据假设，要么 x同时属于 A和 B（不可能），要么 x既不属于 A也不属于 B（同样不可能），这就荒谬了。$x \in B \setminus A$的情形可类似处理。总之，我们得到了矛盾；因此，结论得证。□

练习 4.7（对称差）两个集合的对称差 A 和 B 定义为

$$A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

证明以下结论对三个任意集合 A，B，C成立：

(i) $A \oplus \varnothing = A$和 $A \oplus A = \varnothing$。(ii) $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$。(iii) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$。(iv) $A \oplus B = B \oplus A$。(v) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$。(vi) $(A \oplus B) \oplus (B \oplus C) = A \oplus C$。(vii) 若 $A \oplus B = A \oplus C$，则 $B = C$。

解答。(i)：$A \oplus \varnothing = (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = A \cup \varnothing = A$和 $A \oplus A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$。

(ii)：首先令 $x \in A \oplus B$。那么 $x \in A \setminus B$或 $x \in B \setminus A$。情形 *1*：$x \in A \setminus B$。那么 $x \in A \subseteq A \cup B$。此外，$x \notin B$因此 $x \notin A \cap B$因为 $A \cap B \subseteq B$。由此可得 $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$。情形 *2*：$x \in B \setminus A$。那么 $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$，与情形 1 的证明类似。我们已经证明

$$A \oplus B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

现在假设 $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$。那么 $x \in A \cup B$且 $x \notin A \cap B$。情形 *1*：$x \in A$。由于$x \notin A \cap B$，必有 $x \notin B$。因此 $x \in A \setminus B$，从而 $x \in A \oplus B$。情形 *2*：$x \in B$。同理可得 $x \in A \oplus B$。综上，

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \oplus B,$$

以及（ii）的证明完备。

（iii）：我们使用习题 4.6 来处理此问题，并考虑 8 种可能情况。

情形 *1*：$x \in A \cap B \cap C$。于是 $x \in A \setminus (B \oplus C)$，从而 $x \in A \oplus (B \oplus C)$。同样，$x \in (A \oplus B) \oplus C$。情形 *2*：$x \in A^c \cap B \cap C$。由于 $x \in B \cap C$，$x \notin B \oplus C$。此外，$x \notin A$。因此 $x \notin A \oplus (B \oplus C)$。由于 $x \in A^c \cap B$，我们有 $x \in A \oplus B$。此外，$x \in C$。因此 $x \notin (A \oplus B) \oplus C$。

情况 *3*：$x \in A \cap B^c \cap C$。由于 $x \in B^c \cap C$，$x \in B \oplus C$。现在 $x \in A$，因此 $x \notin A \oplus (B \oplus C)$。由于 $x \in A \cap B^c$，$x \in A \oplus B$。现在 $x \in C$，因此 $x \notin (A \oplus B) \oplus C$。

情况 *4*：$x \in A \cap B \cap C^c$。由于 $x \in B \cap C^c$，$x \in B \oplus C$。现在 $x \in A$，因此 $x \notin A \oplus (B \oplus C)$。由于 $x \in A \cap B$，$x \notin A \oplus B$。由于 $x \notin C$，$x \notin (A \oplus B) \oplus C$。

情况 *5*：$x \in A \cap B^c \cap C^c$。由于 $x \in B^c \cap C^c$，$x \notin B \oplus C$。现在 $x \in A$，因此 $x \in A \oplus (B \oplus C)$。由于 $x \in A \cap B^c$，$x \in A \oplus B$。现在 $x \notin C$，因此 $x \in (A \oplus B) \oplus C$。

情况 *6*：$x \in A^c \cap B \cap C^c$。由于 $x \in B \cap C^c$，$x \in B \oplus C$。现在 $x \notin A$，因此 $x \in A \oplus (B \oplus C)$。由于 $x \in A^c \cap B$，$x \in A \oplus B$。现在 $x \notin C$，因此 $x \in (A \oplus B) \oplus C$。

情况 *7*：$x \in A^c \cap B^c \cap C$。由于 $x \in B^c \cap C$，$x \in B \oplus C$。现在 $x \notin A$，因此 $x \in A \oplus (B \oplus C)$。由于 $x \in A^c \cap B^c$，$x \notin A \oplus B$。现在 $x \in C$，因此 $x \in (A \oplus B) \oplus C$。

情况 *8*：$x \in A^c \cap B^c \cap C^c$。由于 $x \in B^c \cap C^c$，$x \notin B \oplus C$。现在 $x \notin A$，因此 $x \notin A \oplus (B \oplus C)$。由于 $x \in A^c \cap B^c$，$x \notin A \oplus B$。现在 $x \notin C$，因此 $x \notin (A \oplus B) \oplus C$。

(iv)：根据定义显而易见。

(v)：我们使用习题 4.6 来处理此问题，并考虑 8 种可能情况。

情形 *1*： $x \in A \cap B \cap C$。由于 $x \in B \cap C, x \notin B \oplus C$。因此 $x \notin A \cap (B \oplus C)$。由于 $x \in A \cap B$ 和 $x \in A \cap C, x \notin (A \cap B) \oplus (A \cap C)$。

情形 *2*： $x \in A^c \cap B \cap C$。由于 $x \notin A$、 $x \notin A \cap (B \oplus C)$。此外，再次由于 $x \notin A$、 $x \notin A \cap B$和 $x \notin A \cap C$，因此 $x \notin (A \cap B) \oplus (A \cap C)$。

情况 *3*： $x \in A \cap B^c \cap C$。由于 $x \in B^c \cap C$、 $x \in B \oplus C$。现在 $x \in A$，因此 $x \in A \cap (B \oplus C)$。由于 $x \in A \cap B^c$和 $x \in A \cap C$，我们有 $x \notin A \cap B$和 $x \in A \cap C$，因此 $x \in (A \cap B) \oplus (A \cap C)$。

情况 *4*： $x \in A \cap B \cap C^c$。由于 $x \in A$和 $x \in B \cap C^c$，我们有 $x \in A \cap (B \oplus C)$。由于 $x \in A \cap B$和 $x \notin A \cap C$，我们有 $x \in (A \cap B) \oplus (A \cap C)$。

情况 *5*： $x \in A \cap B^c \cap C^c$。我们有 $x \in A$和 $x \notin B \oplus C$，因此 $x \notin A \cap (B \oplus C)$。现在 $x \notin A \cap B$和 $x \notin A \cap C$，因此 $x \notin (A \cap B) \oplus (A \cap C)$。

情况 *6*： $x \in A^c \cap B \cap C^c$。由于 $x \notin A$， $x \notin A \cap (B \oplus C)$。同理， $x \notin A \cap B$和$x \notin A \cap C$，因此 $x \notin (A \cap B) \oplus (A \cap C)$。

情况 *7*： $x \in A^c \cap B^c \cap C$。由于 $x \notin A$， $x \notin A \cap （B \oplus C）$。同理， $x \notin A \cap B$且$x \notin A \cap C$，因此 $x \notin （A \cap B） \oplus （A \cap C）$。

情况 *8*： $x \in A^c \cap B^c \cap C^c$。由于 $x \notin A$， $x \notin A \cap （B \oplus C）$。同理， $x \notin A \cap B$且$x \notin A \cap C$，因此 $x \notin （A \cap B） \oplus （A \cap C）$。

(vi)：将左边记为 L 并将右边记为 R。我们使用习题 4.6 来处理此问题，并考虑 8 种可能情况。

情形 1： $x \in A \cap B \cap C$。则 $x \notin A \oplus B$且 $x \notin B \oplus C$，因此 $x \notin L$。此外， $x \notin R$。情形 2： $x \in A^c \cap B \cap C$。则 $x \in A \oplus B$且 $x \notin B \cap C$，因此 $x \in L$。此外， $x \in R$。情况 3： $x \in A \cap B^c \cap C$。则 $x \in A \oplus B$且 $x \in B \oplus C$，因此 $x \notin L$。此外， $x \notin R$。情况 4： $x \in A \cap B \cap C^c$。则 $x \notin A \oplus B$且 $x \in B \oplus C$，因此 $x \in L$。此外， $x \in R$。情况 5： $x \in A \cap B^c \cap C^c$。则 $x \in A \oplus B$且 $x \notin B \oplus C$，因此 $x \in L$。此外， $x \in R$。情况 6： $x \in A^c \cap B \cap C^c$。则 $x \in A \oplus B$ 且 $x \in B \oplus C$，因此 $x \notin L$。此外， $x \notin R$。情况 7： $x \in A^c \cap B^c \cap C$。则 $x \notin A \oplus B$且 $x \in B \oplus C$，因此 $x \in L$。此外， $x \in R$。情况 8： $x \in A^c \cap B^c \cap C^c$。则 $x \notin A \oplus B$且 $x \notin B \oplus C$，因此 $x \notin L$。此外， $x \notin R$。

(vii)：我们证明其逆否命题，即 $B \neq C \Rightarrow A \oplus B \neq A \oplus C$。假设 $B \neq C$。那么$B \oplus C \neq \varnothing$，设 $x \in B \smallsetminus C$（情形 $C \smallsetminus B$ 类似）。情形 *1*： $x \in A$。那么 $x \in A \cap B$，因此$x \notin A \oplus B$。并且 $x \in A \cap C^c$，因此 $x \in A \oplus C$。情形 *2*： $x \notin A$。那么 $x \in A^c \cap B$，因此 $x \in A \oplus B$。并且 $x \in A^c \cap C^c$，因此 $x \notin A \oplus C$。

无论哪种情形，我们都可以得出 $A \oplus B \neq A \oplus C$。 □

练习 4.8 设 $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}) = \{(x,\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y \neq 0\}$ 并在 A 上定义关系 R:

$$(x, y)\mathsf{R}(u, v) \quad :\Leftrightarrow \quad xv = yu. \tag{4.27}$$

证明 R 是一个等价关系。这个关系的“含义”是什么？你能将商集与什么等同起来?

解答。设 $(x, y), (u, v), (a, b)$ 属于 A。

自反性：因为 $xy = yx$，显然 $(x, y)\mathsf{R}(x, y)$。

对称性：假设 $(x, y)\mathsf{R}(u, v)$，即 $xv = yu$。那么 $uy = vx$，因此 $(u, v)\mathsf{R}(x, y)$。

传递性：假设 $(x, y)\mathsf{R}(u, v)$，即 $xv = yu$。再假设 $(u, v)\mathsf{R}(a, b)$，即 $ub = va$。注意， y、 v 和 b 均非零。因此 $x/y = u/v$ 且 $u/v = a/b$。综合可知 $x/y = a/b$。于是 $xb = ya$，即 $(x, y)\mathsf{R}(a, b)$。

因此，我们证明了 R 是一个等价关系！

我们有 $(x, y)\mathsf{R}(u, v)$ 当且仅当 $x/y = u/v$。

因此，商集本质上就是有理数的集合 $\mathbb{Q}$ 因为所以 $[(x, y)]$ 可以视为 $\mathbb{Q}$中的 x/y；等价类包含所有给出同一有理数的分数！□

练习 4.9 构造关系 R，使得：

（i）R 是自反且对称的，但不是传递的；（ii）R 是自反且传递的，但不是对称的；

(iii) R 是对称且传递的，但不是自反的。

解答。
(i)： $A := \{1,2,3\}$ 且 R := {(1，1)，(2，2)，(3，3)，(1，2)，(2，1)，(2，3)，(3，2)}。一眼即可看出其具有自反性和对称性。传递性不成立：(1，2) ∈ R 且 (2，3) ∈ R，但 (1，3) ∉ R。
(ii)： $A := \{1,2\}$ 且 R := {(1，1)，(2，2)，(1，2)}。一眼即可看出，R 是自反且传递的，但不对称：(1，2) ∈ R，但 (2，1) ∉ R。
(iii)： $A := \{1,2\}$ 且 R := {(1，1)}。那么 R 是对称且传递的，但不是自反的：(2，2) ∉ R。□

习题4.10 构造关系 R，使得：

(i) R 是自反的，但既不对称也不传递；(ii) R 是对称的，
但既不自反也不传递；(iii) R 是传递的，但既不自反也不对称。

解答。(i)： $A := \{1,2,3\}$ 且 R := {(1，1)，(2，2)，(3，3)，(1，2)，(2，3)}。显然，R 是自反的。由于 (1，2) ∈ R，但 (2，1) ∉ R，R 不对称。由于 (1，2) ∈ R 且 (2，3) ∈ R，然而 (1，3) ∉ R，因此 R 不传递。

(ii)： $A := \{1,2\}$ 且 R := {(1，2)，(2，1)}。显然，R 是对称的。然而，(1，1) ∉ R，因此 R 不自反。此外，(1，2) ∈ R 且 (2，1) ∈ R，然而 (1，1) ∉ R，因此传递性也不成立。
(iii)： $A := \{1,2\}$ 且 R: = {(1,2)}。传递性平凡地为真（由于$2 \neq 1$，没有需要检验的内容）。自反性不成立，因为 (1,1) ∉ R。最后，R 显然不是对称的。□

练习 4.11 设 A 为欧几里得平面上所画的所有直线的集合。在 A上定义关系 R，如下

$$\ell_1 \mathsf{R} \ell_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \text{the lines } \ell_1 \text{ and } \ell_2 \text{ are perpendicular.}$$

判定 R 是否 (i) 自反；(ii) 对称；(iii) 传递；(iv) 是等价关系 .

解答。设 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 为 A 中的直线。
(i)：R 是非自反的，因为没有直线与自身垂直。(ii)：R 是对称的，因为若 ℓ_1 垂直于 ℓ_2，则 ℓ_2 垂直于 ℓ_1。(iii)：R 不是传递的： x轴垂直于 y轴，且 y轴垂直于 x轴；然而， x轴并不垂直于自身。(iv)：鉴于 (i) 或 (iii)，显然 R 是非等价关系。

□

习题4.12 设 A 为欧几里得平面上所有直线组成的集合。在 A上定义关系 R:

$$\ell_1 \mathsf{R} \ell_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \text{the lines } \ell_1 \text{ and } \ell_2 \text{ are parallel.}$$

判断 R 是否满足：(i) 自反；(ii) 对称；(iii) 传递；(iv) 是等价关系 .

解答。设 ℓ_1， ℓ_2， ℓ_3 为 A中的直线。
(i)：R 是自反的，因为每条直线都与自身平行。(ii)：R 是对称的，因为如果 ℓ_1 与 ℓ_2平行，那么 ℓ_2 也与 ℓ_1平行。(iii)：R 是传递的，因为如果 ℓ_1 与 ℓ_2 平行，且 ℓ_2 与 ℓ_3平行，那么 ℓ_1 与 ℓ_3平行。(iv)：鉴于 (i)–(iii)，显然 R 是等价关系。□

习题4.13 设 $n \in \{1,2,3,\ldots\}$，并设 A为一个包含 n个互异元素的集合。考虑以下两个关系：

(i) 实数集$_1 = \{(a,\ a) \mid a \in A\}$。 (ii) 实数集$_2 = A \times A$。

判断以下每个关系是否为等价关系。如果是，请确定商集中的元素个数。

解答. (i)：容易验证，R_1 是一个等价关系。商集 $A/\mathrm{R}_1 = \{[a] \mid a \in A\}$可以视为 A 本身，因为 $[a] = \{a\}$ 对每一个 $a \in A$ 都成立；因此，它有 n 个元素。

(ii)：容易验证，R_2 是一个等价关系。商集 $A/\mathrm{R}_2 = \{[a] \mid a \in A\} = \{A\}$ 恰好有1个元素，因为对于每一个 $a \in A$ 和每一个 $b \in A$，$b \in [a]$。□

习题4.14 设 A 是一个集合，且R是 A上的一个关系。如果R满足以下性质，则称其为反对称：对于 A中的所有 a 和 b，若 $a\mathrm{R}b$ 且 $b\mathrm{R}a$，则 $a = b$。构造以下对象：

(i) 一个既是等价关系又是反对称关系的例子。(ii) 一个是等价关系
但不是反对称关系的例子。

解答。(i)：设 A 是一个非空集，并定义 $a\mathrm{R}b :\Leftrightarrow a = b$。那么 R 是一个等价关系，同时也是反对称的。

(ii)：考虑例4.10中的等价关系。它不是反对称的，因为 $5 \equiv 10$ 且$10 \equiv 5$，然而 $5 \neq 10$。□

习题4.15 设 A是从 $\mathbb{R}$到 $\mathbb{R}$的函数集合。在 A 上定义关系 R 如下：

$$f\mathrm{R}g \quad :\Leftrightarrow \quad \big(f(0) = g(0) \text{ or } f(1) = g(1)\big).$$

判断 R 是否：(i) 自反；(ii) 对称；(iii) 传递；(iv) 是等价关系。

解答。设 f，g，h属于 A，即 f，g，h是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$的函数。

(i)：由于 $f(0) = f(0)$ 且 $f(1) = f(1)$，显然 $f\mathrm{R}f$，因此 R 是自反的。

(ii)：由于 $f(0) = g(0) \Rightarrow g(0) = f(0)$，并且 $f(1) = g(1) \Rightarrow g(1) = f(1)$，因此 R 是对称的。

(iii)：假设 $f(x) = x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 1$，且 $h(x) = (x-2)^2$。那么 $f(0) = -1 = g(0)$，因此 $f\mathrm{R}g$。此外，$g(1) = 1 = h(1)$，因此 $g\mathrm{R}h$。然而，$f(0) = -1 \neq 4 = h(0)$ 且 $f(1) = 0 \neq 1 = h(1)$，因此 $f/\mathrm{R}h$。由此可知，R不是传递的。

(iv)：由于传递性不成立，R不是等价关系。 □

练习 4.16 令 A为从 $\mathbb{R}$到 $\mathbb{R}$的函数集合。在 A 上定义关系 R 如下：

$$f\mathrm{R}g \quad :\Leftrightarrow \quad \big(f(x) - g(x) = 1 \text{ for every } x \in \mathbb{R}.\big).$$

判定 R 是否（i）自反；（ii）对称；（iii）传递；（iv）为等价关系 .

解答。令 f, g, h属于 A，即 f, g, h是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$的函数。

(i)：由于 $f(x) - f(x) = 0 \neq 1$对每一个 $x \in \mathbb{R}$，显然 $f/\mathrm{R}\ f$，因此 R 不是自反的。

(ii)：若 $f\mathrm{R}g$，即 $f(x) - g(x) = 1$对每一个 $x \in \mathbb{R}$，那么 $g(x) - f(x) = -1 \neq 1$对每一个 $x \in \mathbb{R}$。因此$g/\mathrm{R}\,f$，所以 R 不是对称的。

(iii)：若 $f\mathrm{R}g$且 $g\mathrm{R}h$，即 $f(x) - g(x) = 1$且 $g(x) - h(x) = 1$对每一个 $x \in \mathbb{R}$，那么（通过相加）$f(x) - h(x) = 2$对每一个 $x \in \mathbb{R}$，从而 $f/\mathrm{R}\ h$。因此 R 不是传递的。

(iv)：由于每个性质都不成立，R 不是等价关系。 □

习题4.17 设 A 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数集合。在 A 上定义关系 R：$f\mathrm{R}g :\Leftrightarrow$ 存在一个常数 $c \in \mathbb{R}$（可能取决于 f 和 g），使得 $f(x) - g(x) = c$ 对每一个 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。

判断 R 是否满足：(i) 自反；(ii) 对称；(iii) 传递；(iv) 等价关系。

解答。设 f，g，h 属于 A，即 f，g，h 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数。

(i)：由于对每一个 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) - f(x) = 0$，显然 $f\mathrm{R}f$，因此 R 是自反的。

(ii)：如果 $f\mathrm{R}g$，即存在某个 $c \in \mathbb{R}$，使得对每一个 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) - g(x) = c$，那么对每一个$x \in \mathbb{R}$ 都有 $g(x) - f(x) = -c$。因此 $g\mathrm{R}f$，所以 R 是对称的。

(iii)：若 $f\mathrm{R}g$ 且 $g\mathrm{R}h$，即对每一个 $x \in \mathbb{R}$，存在常数 c 和 d 属于 $\mathbb{R}$，使得 $f(x) - g(x) = c$ 且 $g(x) - h(x) = d$，那么（将两式相加）对每一个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $f(x) - h(x) = c + d$，因此 $f\mathrm{R}h$。所以 R 是传递的。

(iv)：由于每条性质都成立，R 是一个等价关系。

□

习题4.18 设 $A=\mathbb{R}^2$，并在 A 上定义关系 R：$(x,y)\mathsf{R}(u,v) :\Leftrightarrow |x|+|y|=|u|+|v|$。
证明 R 是一个等价关系。几何地描述等价类 $[(1,0)]$。哪个等价类恰好只有一个元素?

解答. 设 (x,y)、(u,v) 和 (a,b) 属于 $\mathbb{R}^2$。
(i)：显然，$(x,y)\mathsf{R}(x,y)$，因为 $|x|+|y|=|x|+|y|$。因此 R 是自反的。
(ii)：如果 $(x,y)\mathsf{R}(u,v)$，那么 $|x|+|y|=|u|+|v|$，因此 $|u|+|v|=|x|+|y|$，这说明 $(u,v)\mathsf{R}(x,y)$。因此 R 是对称的。
(iii)：如果 $(x,y)\mathsf{R}(u,v)$ 且 $(u,v)\mathsf{R}(a,b)$，那么 $|x|+|y|=|u|+|v|$，并且 $|u|+|v|=|a|+|b|$，所以$|x|+|y|=|a|+|b|$，这说明 $(x,y)\mathsf{R}(a,b)$。因此 R 是传递的。
等价类 $[(1,0)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|=1\}$ 是一个顶点为 $(\pm1,0)$ 和 $(0,\pm1)$ 的“菱形”。

除 $[(0,0)]=\{(0,0)\}$ 外，所有等价类都是这个菱形的缩放版本——因此都包含无限多个元素。□

习题4.19 设 A为从 $\mathbb{R}$到 $\mathbb{R}$的函数集合。在 A 上定义关系 R 如下:

$$f\mathsf{R}g \quad :\Leftrightarrow \quad \big(f(0)=g(1) \text{ and } f(1)=g(0)\big)$$

判断 R 是否 (i) 自反；(ii) 对称；(iii) 传递；(iv) 为等价关系。

解答. 设 f，g，h属于 A，即 f，g，h是从 $\mathbb{R}$到 $\mathbb{R}$的函数。
(i)：假设 $f(x)=x$。那么 $f(0)=0\neq 1=f(1)$，因此 $f/\mathsf{R}f$，所以 R 不是自反的。
(ii)：如果 $f\mathsf{R}g$，那么 $f(0)=g(1)$ 且 $f(1)=g(0)$；因此，$g(0)=f(1)$ 且 $g(1)=f(0)$，也就是说，$g\mathsf{R}f$。因此，R 是对称的。
(iii)：假设 $f(x)=h(x)=|x-1|$ 且 $g(x)=x$。那么 $f(0)=1=g(1)$ 且 $f(1)=0=g(0)$。因此 $f\mathsf{R}g$，从而（由 (ii) 或直接可得）$g\mathsf{R}f$，所以 $g\mathsf{R}h$。然而，$f(0)=1\neq 0=f(1)=h(1)$，因此 $f/\mathsf{R}h$。所以 R不是传递的。

(iv)：由于有两条性质不成立，R不是等价关系。 □

习题4.20 设 $S=\{1,2,3\}$，并用 A 表示其幂集。在 A 上定义关系 $X\mathsf{R}Y$：$\Leftrightarrow$ X 和 Y 具有相同数目的元素。证明 R 是等价关系，并确定商集。商集有多少个元素?

解答。设 X，Y，Z为 A中的元素，即 S的子集。
(i)：由于 X 与 X 的元素个数相同，我们有 $X\mathsf{R}X$，因此R是自反的。
(ii)：若 X 与 Y 的元素个数相同，则 Y 与 X的元素个数也相同；因此，R是对称的。
(iii)：若 X 与 Y 的元素个数相同，设为 m，且 Y 与 Z 的元素个数相同，设为 n，则 $m=n$，从而R是传递的。

因此，R是一个等价关系。
我们有

$$\begin{aligned} A/\mathsf{R} &= \big\{[\varnothing],[\{1\}],[\{1,2\}],[\{1,2,3\}]\big\} \\ &= \Big\{\{\varnothing\},\big\{\{1\},\{2\},\{3\}\big\},\big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\big\},\big\{\{1,2,3\}\big\}\Big\} \end{aligned}$$

并且该商集有 4 个元素。 □

练习4.21 设 $S=\{1,2,3,4,5\}$，并将其幂集记为 A。在 A上定义关系 $X\mathsf{R}Y$:
$\Leftrightarrow$ $X\cap\{1,3,5\}=Y\cap\{1,3,5\}$。证明R是一个等价关系，并确定等价类 $[\{1,2,3\}]$。

解答。设 X， Y， Z是 A中的元素，即 S的子集。
(i)：由于 $X \cap \{1,3,5\} = X \cap \{1,3,5\}$，我们有 $X\mathrm{R}X$，且 R 是自反的。
(ii)：若 $X \cap \{1,3,5\} = Y \cap \{1,3,5\}$，则 $Y \cap \{1,3,5\} = X \cap \{1,3,5\}$，因此 R 是对称的 .
(iii)：若 $X \cap \{1,3,5\} = Y \cap \{1,3,5\}$ 且 $Y \cap \{1,3,5\} = Z \cap \{1,3,5\}$，则 $X \cap \{1,3,5\} = Z \cap \{1,3,5\}$，因此 R 是传递的。

因此，R 是一个等价关系。
现在 $Z \in [\{1,2,3\}] \Leftrightarrow \{1,2,3\}\mathrm{R}Z \Leftrightarrow \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} = Z \cap \{1,3,5\} \Leftrightarrow \{1,3\} = Z \cap \{1,3,5\} \Leftrightarrow$（$\{1,3\} \subseteq Z$和 $5 \notin Z$） $\Leftrightarrow Z \in \{\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$。因此

$$[\{1,2,3\}] = \{\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}.$$

□

习题4.22（抽屉原理）如果有 n 个桶（或鸽笼），并且要分配的物品（或鸽子）多于 n个，那么至少有一个桶中会有 2 个物品。这称为抽屉原理。现在假设你的班级里有 15+名学生。推断你的班级中有两名学生的生日在同一个日历月份。

解答。我们有12个桶，也就是一年中的12个月。你的班级有 15+名学生，因此学生人数超过12名。因此，必定有两名学生的生日在同一个月。

□

习题4.23（头发！）假设人类头上的头发最多有150,000根，证明温哥华至少有五个人头上的头发数量完全相同。提示：用反证法论证，并查出温哥华的人口！

解答。这是抽屉原理的一种变体。我们用反证法，假设结论为假。那么对每一个数字 $n \in \{0,1,2,\ldots,150000\}$，头发数量为该数字 n 的人不超过4人。因此，温哥华的人口至多为 $4 \cdot 150001 = 600004$。另一方面，温哥华的人口超过660000——矛盾！（数字来源：WolframAlpha。）□

习题4.24 设 $A = \mathbb{Q}$ 为有理数集，并在 A 上定义关系如下：

$$\frac{a}{b}\mathrm{R}\frac{c}{d} \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}.$$

证明 R 是等价关系。此外，求等价类 [0].

解答。取 $A = \mathbb{Q}$ 中的元素 a/b、 c/d、 e/f （显然 b, d, f 都非零 ）.
(i)：我们有 $(a/b) - (a/b) = 0 \in \mathbb{Z}$，因此 $(a/b)\mathrm{R}(a/b)$，且 R 是自反的。
(ii)：假设 $(a/b)\mathrm{R}(c/d)$，即 $(a/b) - (c/d) = k \in \mathbb{Z}$。那么 $(c/d) - (a/b) = -k \in \mathbb{Z}$，因此 $(c/d)\mathrm{R}(a/b)$。故 R 是对称的。
(iii)：假设 $(a/b)\mathrm{R}(c/d)$，即 $(a/b) - (c/d) = m \in \mathbb{Z}$，且 $(c/d)\mathrm{R}(e/f)$，即 $(c/d) - (e/f) = n \in \mathbb{Z}$。那么

$$(a/b) - (e/f) = \big((a/b) - (c/d)\big) + \big((c/d) - (e/f)\big) = m + n \in \mathbb{Z},$$

因此（a/b）R（e/f）。所以，R 是传递的。
因此，R 是一个等价关系。
最后， （$a/\ b$） $\in [0] \Leftrightarrow 0\mathrm{R}$（$a/b$） $\Leftrightarrow$ （a， b）R0 $\Leftrightarrow$ （a/b） $- 0 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ （a/b） $\in \mathbb{Z}$。因此， $[0] = \mathbb{Z}$。□

习题4.25 集合 $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，并在 A 上定义关系 R：

$$(x,y)\mathrm{R}(u,v) \quad :\Leftrightarrow \quad x + v = y + u. \tag{4.28}$$

证明 R 是等价关系。此外，求等价类 [(0， 0)]。

解答。设 $(x,y),(u,v),(a,b)$ 属于 A。

自反性：因为 $x+y=y+x$，显然 $(x,y)\mathrm{R}(x,y)$。

对称性：假设 $(x,y)\mathrm{R}(u,v)$，即 $x+v=y+u$。那么 $u+y=v+x$，因此 $(u,v)\mathrm{R}(x,y)$。传递性：假设 $(x,y)\mathrm{R}(u,v)$，即 $x+v=y+u$。再假设 $(u,v)\mathrm{R}(a,b)$，即 $u+b=v+a$。因此 $x-y=u-v$ 且 $u-v=a-b$。于是 $x-y=a-b$，即 $x+b=y+a$，所以 $(x,y)\mathrm{R}(a,b)$。

最后，设 $(u,v)\in A$。那么 $(u,v)\in[(0,0)]\Leftrightarrow(0,0)\mathrm{R}(u,v)\Leftrightarrow 0+v=0+u\Leftrightarrow v=u$。因此$[(0,0)]=\{(n,n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$。□

习题 4.26（由你来批改！）考虑以下命题

"The usual $\leq$ is an equivalence relation on $\mathbb{R}$." (4.29)

以及以下"证明"：

自反性：显然，因为 $a\leq a$。对称性：若 $a\leq b$ 且 $b\leq a$，则 $a=b$，因此 $a\leq b$。传递性：若 $a\leq b$ 且 $b\leq c$，则显然 $a\leq c$。

这个证明错在哪里?

解答。自反性和传递性的证明是正确的。但对称性的证明是错误的。对称性意味着，如果 $a\leq b$，那么我们必须证明 $b\leq a$ （不能假设这一点）。而这显然是错误的：例如， $1\leq 2$ 为真，但 $2\leq 1$ 显然为假。□

习题 4.27（由你来批改！）考虑以下命题

"如果 R 是 A 上的对称且传递的关系，那么 R 也是自反的。"

以及下面这个"证明"：

设 $x\in A$。现在取 $y\in A$，使得 $x\mathrm{R}y$。根据对称性， $y\mathrm{R}x$。现在 $x\mathrm{R}y$ 且 $y\mathrm{R}x$，因此由传递性可得 $x\mathrm{R}x$，证明完毕。

这个证明为什么是错的?

解答。其他部分都没问题，**只是**我们无法保证对所有 $x\in A$，都存在某个 $y\in A$，使得 $x\mathrm{R}y$，而证明正是在这里出了问题。

一个反例是 $A=\{1,2\}$，以及关系 $\mathrm{R}=\{(2,2)\}$。它是对称且传递的，但不是自反的，因为 $(1,1)\notin\mathrm{R}$。□

习题 4.28（真或假?）判断下列命题的真假。请简要说明理由。

(i) "如果 $x\in A$ 和 $A\subseteq B$，那么 $x\in B$。" (ii) "如果 $x\notin A$ 和 $A\subseteq B$，那么 $x\notin B$。" (iii) "每个关系都是等价关系。" (iv) "如果 A 是一个含有 10 个元素的集合，且 R 是 A上的等价关系，那么商集 A/R 至少有 2 个元素。"

解答。

(i)：正确：根据定义。(ii)：假： $-1\notin\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ 但 $-1\in\mathbb{Z}$。(iii)：假：有许多反例，例如"$<$"。(iv)：假：如果 $\mathrm{R}=A\times A$，也就是说，每个 $a\in A$ 都与每个 $b\in A$相关，那么商集恰好有一个元素，即集合 A 本身。□

第5章 有序域

不等式是数学的重要组成部分。现在，我们从这个角度重新审视实数。

5.1 序公理及其推论

定义 5.1（序公理） $\mathbb{R}$ 中的某些元素称为**正的**；若 $x \in \mathbb{R}$ 为正的，我们记作 $x > 0$。以下性质成立。

O1 对每一个 $x \in \mathbb{R}$，以下情况恰有一种成立： $x > 0$、 $x = 0$或 $-x > 0$。**O2** 对所有 x, y属于 $\mathbb{R}$，都有： $[x > 0$ 且 $y > 0] \Rightarrow x + y > 0$。**O3** 对所有 x, y 属于 $\mathbb{R}$，都有： $[x > 0$ 且 $y > 0] \Rightarrow xy > 0$。

若 $-x$ 为正的，我们就称 x 为**负元**。粗略地说，**O1** 表明每个实数都是 0、正数或负数；而 **O2** 和**O3** 表明正数的和与乘积仍为正数。

给定 x, y属于 $\mathbb{R}$，我们记： $x > y$若 $x - y > 0$； $x \geq y$若 $[x > y$或 $x = y]$； $y < x$若 $x > y$；以及 $y \leq x$若$x \geq y$。若 $x \geq 0$，我们称 x 是 **非负**[1]；若 $x \leq 0$，则 x 是 **非正的**。

命题 5.2 设 u、 v、 x、 y、 z 属于 $\mathbb{R}$。则下列结论成立。

(i) $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$。(ii)（“<”是传递的） $[x < y$ 且 $y < z] \Rightarrow x < z$。(iii) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$。(iv) $[x < y$ 且 $u < v] \Rightarrow x + u < y + v$。(v) $[x \leq y$ 且 $u \leq v] \Rightarrow x + u \leq y + v$。(vi) $[x < y$ 且 $u > 0] \Rightarrow ux < uy$。(vii) $[x < y$ 且 $u < 0] \Rightarrow ux > uy$。(viii) $[x \leq y$ 且 $u > 0] \Rightarrow ux \leq uy$。(ix) $[x \leq y$ 且 $u < 0] \Rightarrow ux \geq uy$。(x) $[0 \leq x < y$ 且 $0 \leq u < v] \Rightarrow ux < vy$。(xi) $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$。(xii) $1 > 0$。(xiii) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$。(xiv) $x < 0 \Leftrightarrow x^{-1} < 0$。(xv) $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$。

[1] 警告：有些作者在谈到正数时会把 0 也包括在内。

证明。 (i)： $x<0 \Leftrightarrow 0>x \Leftrightarrow 0-x>0 \Leftrightarrow -x>0$。

(ii)：由于 $x<y$ 且 $y<z$，我们有 $y-x>0$ 且 $z-y>0$。利用 **O2**，可得$z-x=(y-x)+(z-y)>0$, 即 $z>x$。

(iii)： $x<y \Leftrightarrow y-x>0 \Leftrightarrow (y+z)-(x+z)>0 \Leftrightarrow x+z<y+z$。

(iv)：事实上，利用 **O2**，我们有 $[y-x>0$ 且 $v-u>0] \Rightarrow (y+v)-(x+u)=(y-x)+(v-u)>0$ $\Leftrightarrow x+u<y+v$。

(vi)：事实上，利用 **O3**，我们有 $[x<y$ 且 $u>0] \Leftrightarrow [y-x>0$ 且 $u>0] \Rightarrow uy-ux=yu-xu=(y-x)$ $u>0 \Leftrightarrow uy>ux \Leftrightarrow ux<uy$。

(vii)：事实上，利用 **O3**，我们有 $[x<y$ 且 $u<0] \Leftrightarrow [y-x>0$ 且 $-u>0] \Rightarrow -uy+ux=y(-u)-x(-u)=(y-x)(-u)>0 \Leftrightarrow uy<ux$。

(viii)：习题 5.1。

(ix)：习题 5.2。

(x)：习题 5.3。

(xi)：“⇒”：设 $x\neq 0$。若 $x>0$，则 $x^2=x\cdot x>0$，此由 **O3** 推出。若 $x<0$，则 $-x>0$，从而 $x^2=x\cdot x=(-x)(-x)=(-x)^2>0$，此由命题 3.7(v) 与 **O3** 推出。

“⇐”：设 $x=0$。于是 $x^2=x\cdot x=0$，此由命题 3.7(ii) 推出。因此若 $x^2>0$，则 $x\neq 0$。(xii)：我们有 $1\neq 0$，此由 **M3** 推出。因此，由 **M3** 与 (xi)，得 $1=1^2>0$。

(xiii)： “⇒”：若 $x>0$，则 $x\neq 0$，并且（根据 (xi)）$(x^{-1})^2>0$；因此，根据 **O3**， $x^{-1}=x(x^{-1})^2>0$.

“⇐”：将“⇒”应用于 x^{-1}，并利用以下事实：$(x^{-1})^{-1}=x$ 根据命题 3.5(v)。(xiv)：这与 (xiii).

(xv)：我们有 $0<x$，并且根据 (ii)， $0<y$。因此，根据 **O3**， $xy>0$。于是，利用命题 3.5(v) 以及(xiii)，$u:=x^{-1}y^{-1}=(xy)^{-1}>0$。根据 (vi)， $xu<yu$，因此 $y^{-1}=xx^{-1}y^{-1}=xu<yu=yx^{-1}y^{-1}=x^{-1}$。□

以下两个结论在数学证明中实际上经常用到。

推论 5.3 设 $n\in\{2,3,\ldots\}$，且设 $x_1,\ldots,x_n$ 为非负数。那么[2]

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=x_2=\cdots=x_n=0. \tag{5.1}$$

证明。考虑 $n=2$ 的情况。

“⇐”：这很明显，因为根据 **公理A3**， $0+0=0$。

“⇒”：我们用反证法，假设其中一个数（设为 x_1）是正的： $x_1>0$。那么，根据命题 5.2(iii)，$0\leq x_2=x_2+0<x_2+x_1=0$，这显然荒谬。

一般情形可由数学归纳法推出，此处留作习题 5.4。 □

推论 5.4 设 $n\in\{2,3,\ldots\}$，且设 $x_1,\ldots,x_n$ 属于 $\mathbb{R}$。那么[3]

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=x_2=\cdots=x_n=0. \tag{5.2}$$

证明. 习题 5.5。 □

注 5.5 关于命题5.2 有几点评论。

(i) 有序域 **是指满足序公理** O1、**O2**、**O3** 的域。因此， $\mathbb{R}$ 是一个有序域， $\mathbb{Q}$也如此，它是有理数域。由于命题 5.2 的证明只用到了序公理，因此该命题的所有性质在任意有序域中都成立，例如 $\mathbb{Q}$。

（ii）考虑复数 $\mathbb{C}$，其中 $\mathrm{i}^2=-1$，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。由于 $\mathrm{i}\neq 0$，条目 （xi）将意味着 $-1=\mathrm{i}^2>0$，因此 $0>1$，这与条目 （xii）相矛盾。这表明，无论我们如何尝试在复数中定义序，都不可能将复数构成一个有序域。

[2] 这一结果在工程数学和凸优化课程中用于证明对偶定理。[3] 这一结果在线性代数和矩阵分析中很有用，可用于证明长度为 0 的向量只能是零向量： $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=(0,\ldots\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$。

（iii）自然数通过 $0 \mapsto 0$ 嵌入实数中，并且

$$n \mapsto \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ terms}}. \tag{5.3}$$

利用 **O2** 和命题 5.2(xii)，我们可以用数学归纳法证明 $n > 0$ 对于$n \in \{1,2,3,\ldots\}$。

(iv) 第 $\mathbb{F}_2$ 节 3.5 中遇到的有限域 无法定义序。因为如果可以定义序，那么命题 5.2(xii) 将推出 $1 > 0$，因此根据命题 5.2(iii)，$0 = 1 + 1 > 0 + 1 = 1$，这显然荒谬。

5.2 绝对值的性质

定义 5.6（绝对值）对于 $x \in \mathbb{R}$，绝对值为

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{if } x \geq 0; \\ -x, & \text{if } x < 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

命题5.7 设 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$。则下列结论成立。

(i) $|x| \geq 0$。(ii)
$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$。(iii)
$x \leq |x|$。(iv)
$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$。(v)
$|-x| = |x|$。(vi)
$-x \leq |x|$。(vii)
$y \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$。——

证明。(i)：情形 1：$x \geq 0$。则 $|x| = x \geq 0$ 由定义。情形 2：$x < 0$。则由定义及命题 5.2(i)，$|x| = -x > 0$。

(ii)："⇐"：若 $x = 0$，则 $|x| = x = 0$。"⇒"：我们用矛盾法证明这一点。假设 $|x| = 0$且 $x \neq 0$。则要么 $x > 0$ 要么 $x < 0$。若 $x > 0$，则 $|x| = x > 0$，这是荒谬的；否则，$x < 0$，于是 $|x| = -x > 0$，这也是荒谬的。

（iii）：若 $x \geq 0$，则 $|x| = x$因此 $x \leq |x|$。若 $x < 0$，则 $|x| = -x > 0$因此 $x = -|x| < 0 < |x|$。（iv）：我们分类讨论 4 种情形。

情形 *1*：$x \geq 0$ 且 $y \geq 0$。
于是 $|x| = x$ 且 $|y| = y$；因此，

$$|x| \cdot |y| = xy. \tag{5.5}$$

现在，若 $y > 0$，则 $xy \geq 0$ 根据命题 5.2(viii)。若 $y = 0$，则 $xy = x \cdot 0 = 0$ 根据命题 3.7(ii)。无论哪种情形，$xy \geq 0$ 因此

$$|xy| = xy \geq 0. \tag{5.6}$$

结合（5.5）和（5.6），可知 $|x| \cdot |y| = |xy|$。

情形 *2*：$x \geq 0$ 且 $y < 0$。
首先，假设 $x = 0$。那么 $x \cdot y = 0 \cdot y = 0$、$|xy| = |0| = 0$ 和 $|x| \cdot |y| = |0| \cdot (-y) = 0 \cdot (-y) = 0$。因此，$|xy| = 0 = |x| \cdot |y|$。
现在假设 $x > 0$。那么 $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = x \cdot (-1)y = (-1)(xy) = -(xy)$ 且 $xy < 0$（参见命题3.7(iv)和命题5.2(vi)），从而 $|xy| = -(xy)$。

情况 *3*：$x < 0$ 和 $y \geq 0$。

情况 *4*： $x<0$ 和 $y<0$。

（v）：在（iv）中令 $y=-1$。现在 $1>0$（根据命题 5.2(xii)），因此 $-1<0$，从而 $|-1|=-(-1)=1$。于是 $|xy|=|x|\cdot|y|$ 变为 $|-x|=|x(-1)|=|x|\cdot|-1|=|x|\cdot 1=|x|$。（vi）：由（iii）（应用于 $-x$）和（v），我们得到 $-x\le|-x|=|x|$。（vii）：我们有 $x=(x/y)\cdot y$。因此，根据（iv），$|x|=|x/y|\cdot|y|$，从而 $|x|/|y|=|x/y|$。 □

以下结果在检验不等式时很有用。

引理5.8 设 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$。那么

$$|x|\le y \quad\Leftrightarrow\quad x\le y \text{ and } -x\le y. \tag{5.7}$$

证明。“⇒”：假设 $|x|\le y$。那么，根据命题 5.7(iii)&(vi)，$x\le|x|$ 且 $-x\le|x|$。因此，$\pm x\le|x|\le y$。

“⇐”：假设 $\pm x\le y$。根据定义，$|x|=x$ 或 $|x|=-x$。因此，$|x|\le y$。 □

定理 5.9（三角不等式） 设 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$。那么

$$|x+y|\le|x|+|y|. \tag{5.8}$$

证明。根据命题 5.7(iii)，$x\le|x|$ 且 $y\le|y|$。因此，根据命题 5.2(v)，

$$x+y\le|x|+|y|. \tag{5.9}$$

同理，根据命题 5.7(vi)，$-x\le|x|$ 且 $-y\le|y|$；因此，

$$-(x+y)=-x+(-y)\le|x|+|y|. \tag{5.10}$$

综上，利用引理 5.8，可知 $|x+y|\le|x|+|y|$。 □

推论5.10 设 x和 y 属于 $\mathbb{R}$。那么

$$\big||x|-|y|\big|\le|x-y|. \tag{5.11}$$

证明。一方面，利用定理 5.9，$|x|=|(x-y)+y|\le|x-y|+|y|$。另一方面，$|y|\le|y-x|+|x|=|x-y|+|x|$。综上，

$$|x|-|y|\le|x-y| \quad\text{and}\quad -\big(|x|-|y|\big)=|y|-|x|\le|x-y|, \tag{5.12}$$

这意味着 $\big||x|-|y|\big|\le|x-y|$ 根据引理 5.8。 □

引理 5.11（一般三角不等式） 设 $n\ge 2$ 是一个整数，且 x_1、x_2、...、x_n 都是实数。那么

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|. \tag{5.13}$$

证明。习题 5.6。 □

引理 5.12 设 x和 y 属于 $\mathbb{R}$。那么

$$\max\{x,y\}=\frac{x+y+|x-y|}{2} \quad and \quad \min\{x,y\}=\frac{x+y-|x-y|}{2}. \tag{5.14}$$

5.3 阿基米德域及其推论

定义 5.13（阿基米德性质）对所有 x，y 属于 $\mathbb{R}$，使得 $x>0$ 且 $y>0$，都存在$n\in\mathbb{N}$ 使得 $ny>x$。

引理 5.14 对每一个 $x>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n>x$。

证明。这由阿基米德性质显然可得。 □

对每一个 $x\in\mathbb{R}$，存在唯一的整数 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $k\le x<k+1$。记作 $\lfloor x\rfloor=k$，并称“k 等于 下取整 x”。因此有 $\lfloor 4/3\rfloor=1$，$\lfloor 0\rfloor=0$，且 $\lfloor -4/3\rfloor=-2$。在引理 5.14中，我们可以选取 $n=\lfloor x+1\rfloor$。

推论5.15 对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n>0$ 且 $\frac{1}{n}<\varepsilon$。

证明。设 $x=1/\varepsilon$。那么 $x>0$ 由命题 5.2(xiii)可知。因此，由引理 5.14可知，存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $n>x>0$。进而，由命题 5.2(xv)可知，$\frac{1}{n}<\frac{1}{x}=\varepsilon$。 □

定理 5.16（伯努利不等式）设 $x\ge -1$ 且设 $n\in\mathbb{N}$。那么

$$(1+x)^n\ge 1+nx. \tag{5.15}$$

证明。对 $n\ge 0$ 使用数学归纳法。

基础情形：当 $n=0$ 时，显然有 $(1+x)^0=1=1+0=1+nx$。

归纳步骤：现在假设 $n\ge 0$ 满足 (5.15) 成立。我们需要证明，当 n 替换为 $n+1$时，(5.15) 仍然成立。根据假设 $1+x\ge 0$ 以及 (5.16b) 中的归纳假设，我们可知

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1}&=(1+x)(1+x)^n &\text{(5.16a)}\\ &\ge (1+x)(1+nx) &\text{(5.16b)}\\ &=1+(n+1)x+nx^2 &\text{(5.16c)}\\ &\ge 1+(n+1)x, &\text{(5.16d)}\end{aligned}$$

这表明（5.15）对 $n+1$成立。根据数学归纳法原理，证明完毕。□

定理 5.17 设 $y>1$。那么对每一个 $M>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $y^n>M$。

证明。置 $x:=y-1>0$。利用阿基米德性质，我们得到 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $nx>M$。由于 $x>0>-1$，由伯努利不等式可得

$$y^n=(1+x)^n\ge 1+nx>1+M>M \tag{5.17}$$

如上所述。 □

推论 5.18 设 $z\in\mathbb{R}$ 使得 $0<z<1$。那么对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得$z^n<\varepsilon$。

证明。根据命题 5.2(xv)，$y:=\frac{1}{z}>1$。令 $\varepsilon>0$。现在，定理 5.17 推出存在$n\in\mathbb{N}$使得 $\frac{1}{z^n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n=y^n>\frac{1}{\varepsilon}$。再次利用命题 5.2(xv)，我们看到 $z^n<\varepsilon$。□

注 5.19 具有阿基米德性质的有序域称为 **阿基米德域**。因此，$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Q}$ 都是阿基米德的。然而，确实存在并非阿基米德的有序域；例如，实有理函数 $\mathbb{R}(x)$（见习题 3.15 和 5.16）。

习题

习题 5.1 证明命题 5.2(viii)。

解答。设 $x \le y$ 且 $u > 0$。我们必须证明 $ux \le uy$。首先， $x \le y$ 意味着 $y \ge x$，而这又等价于 $[y > x$ 或 $y = x]$。情形 *1*： $y = x$。于是 $uy = ux$。由此可得 $uy \ge ux$，即得证。情形 *2*： $y > x$。于是 $y - x > 0$。由于 $u > 0$，**O3** 给出 $(y - x)\, u > 0$。另一方面，

$$\begin{aligned}
(y-x)u &= u(y-x) && \text{(by } \mathbf{M2}\text{)}\\
&= u(y+(-x)) && \text{(def of subtraction)}\\
&= uy + u(-x) && \text{(by } \mathbf{D}\text{)}\\
&= uy + u((-1)x) && \text{(by Proposition 3.7(iv))}\\
&= uy + (u(-1))x && \text{(by } \mathbf{M1}\text{)}\\
&= uy + ((-1)u)x && \text{(by } \mathbf{M2}\text{)}\\
&= uy + (-1)(ux) && \text{(by } \mathbf{M1}\text{)}\\
&= uy + (-(ux)) && \text{(by Proposition 3.7(iv))}\\
&= uy - ux && \text{(def of subtraction)}
\end{aligned}$$

综上， $uy - ux > 0$。因此， $uy > ux$，从而 $uy \ge ux$ ，所以 $ux \le uy$。 □

习题 5.2 证明命题 5.2(ix)。

解答。假设 $x \le y$ 且 $u < 0$。我们必须证明 $ux \ge uy$。
首先， $x \le y$ 表示 $y \ge x$，而后者又是 $[y > x$ 或 $y = x]$。
情形 *1*： $y = x$。于是 $uy = ux$。由此可得 $ux \ge uy$，证毕。
情形 *2*： $y > x$。于是 $y - x > 0$。由于 $u < 0$，我们有 $-u > 0$ ，并且**O3** 得到$(y - x)(-u) > 0$。另一方面，

$$\begin{aligned}
(y-x)(-u) &= (-u)(y-x) && \text{(by } \mathbf{M2}\text{)}\\
&= (-u)(y+(-x)) && \text{(def of subtraction)}\\
&= (-u)y + (-u)(-x) && \text{(by } \mathbf{D}\text{)}\\
&= ((-1)u)y + ux && \text{(根据命题 3.7(iv)\&(v))}\\
&= (-1)(uy) + ux && \text{(by } \mathbf{M1}\text{)}\\
&= -(uy) + ux && \text{(by Proposition 3.7(iv))}\\
&= ux + (-(uy)) && \text{(by } \mathbf{A2}\text{)}\\
&= ux - uy && \text{(def of subtraction)}
\end{aligned}$$

总之， $ux - uy > 0$。因此 $ux > uy$，从而 $ux \ge uy$。 □

习题 5.3 证明命题 5.2(x)。

解答。设 $0 \le x < y$ 且 $0 \le u < v$。我们必须证明 $ux < vy$。注意到 $y > 0$ 且 $v > 0$，因此由 **O3** 可得 $vy > 0$ 。

*Ca*情形 *1*： $x = 0$ 或 $u = 0$。那么 $ux = 0$ 由命题 3.7(ii) 可得，本情形得证。
情形 *2*： $x > 0$ 且 $u > 0$。由命题 5.2(vi)， $ux < uy$。现在 $u < v$ 且 $y > 0$，因此再次由命题 5.2(vi)，$yu < yv$。
综上， $ux < uy = yu < yv = vy$ 因此 $ux < vy$。 □

习题 5.4 请通过展示缺失的归纳步骤，补全推论 5.3 的证明。（无需验证基础情形。）

解答。推论 5.3的证明中已经处理了基础情形。将所讨论的命题记为 $S(n)$。

归纳步骤： 假设 $n \geq 2$ 是一个整数，使得该命题成立。现在令 x_1，……，x_n，x_{n+1} 为非负实数。

如果它们全都等于 0，那么 $(x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1} = 0 + 0 = 0$，其中第一次等式使用了归纳假设。现在考虑逆命题，即假设 $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0$，将其改写为

$$0 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}.$$

令 $y_1 := x_1 + \cdots + x_n$，以及 $y_2 := x_{n+1}$。y_1 和 y_2 都是非负的，并且它们的和为 0。由于我们已经证明 $S(2)$ 成立，因此可得 $y_1 = x_1 + \cdots + x_n = 0$ 和 $y_2 = x_{n+1} = 0$。再次使用归纳假设（作用于 y_1！），可得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x_{n+1} = 0$。因此，我们也证明了 $S(n+1)$ 成立。

因此，根据数学归纳法原理，整个结论得证。 □

习题 5.5 证明推论 5.4。 提示：可以使用推论 5.3。

解答。“⇐”这一蕴含显然成立（也可以很容易地利用归纳法和**公理A3**证明）。

因此，只需证明蕴含“⇒”。设 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$。注意，每个 x_i^2 都是非负的：事实上，若 $x_i = 0$，则 $x_i^2 = 0^2 = 0$ 由命题 3.7(ii)得出；否则，$x_i \neq 0$此时 $x_i^2 > 0$ 由命题 5.2(xi)得出。因此，由推论 5.3 （应用于非负数 $x_1^2, \ldots, x_n^2$）可得 $x_1^2 = \cdots = x_n^2 = 0$。此外，命题 3.7(iii) 又可推出每个 $x_i = 0$，如前所述。 □

习题5.6 证明引理 5.11。

解答。对 n 使用数学归纳法。

基础情形：$n = 2$。接下来需要证明 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$，这确实由经典三角不等式（定理 5.9）成立。

归纳步骤：假设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 2$，且（5.13）成立。我们必须证明，将 n 替换为 $n+1$后，结论 (5.13) 仍然成立，即

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| \overset{?}{\leq} \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|. \tag{5.18}$$

事实上，在（5.9）中使用三角不等式（定理 5.19b），并在（**5.19c**）中使用归纳假设后，

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + x_{n+1}\right| && \text{(5.19a)}\\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}| && \text{(5.19b)}\\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) + |x_{n+1}| && \text{(5.19c)}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|, && \text{(5.19d)}
\end{aligned}$$

我们验证了（5.18），这正是所需的。因此，根据数学归纳法原理，引理 5.11 得证。 □

练习 5.7 证明引理 5.12。

解答。 情形 *1*： $x \geq y$。
一方面，

$$\max\{x,y\} = x \quad \text{and} \quad \min\{x,y\} = y.$$

另一方面， $x - y \geq 0$ 因此 $|x-y| = x - y$。由此可得

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(x-y)}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

and

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y.$$

综上，本情形下结论成立。
情形 *2*： $x < y$。
一方面，

$$\max\{x,y\} = y \quad \text{and} \quad \min\{x,y\} = x.$$

另一方面， $x - y < 0$ 因此 $|x-y| = -(x-y) = y - x$。由此可得

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(y-x)}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

and

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(y-x)}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

综合起来，在这种情形下结论成立。 □

练习 5.8 设 $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$。证明

$$n^2 \leq 2^n$$

提示：对 $n \geq 4$ 使用归纳法。

解答。该命题对 $n \in \{0,1,2,4\}$ 显然正确，因为 $0^2 = 0 \leq 1 = 2^0$、 $1^2 = 1 \leq 2 = 2^1$、$2^2 = 4 \leq 4 = 2^2$ 和 $4^2 = 16 \leq 16 = 2^4$。
现在假设该不等式对某个整数 $n \geq 4$ 成立。则 $4n \leq n^2$ 从而

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + \frac{n^2}{2} + 1 \quad [\text{since } 4n \leq n^2] \\ &= n^2\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + 1 \leq \frac{3}{2}2^n + 1 \quad [\text{induction hypothesis}] \\ &< \frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2}2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.\end{aligned}$$

因此，利用数学归纳法原理即可证明该结论。
或者，我们可以这样论证：$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq 2^n\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$。如果最后一项小于或等于 $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$，那么证明就完成了，因此只需证明 $1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2$，也就是说，$2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1$。但这没有问题，因为 $n \geq 4$ 推出 $2 \cdot \frac{1}{n} \leq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \leq \frac{1}{2}$。 □

练习 5.9 证明

$$2^n < n!$$

对每一个整数 $n \geq 4$。

解答。我们使用归纳法。

当 $n=4$ 时，我们有 $2^4=16<24=4!$ 。
现在假设对于某个整数 $n\geq 4$，有 $2^n<n!$ 那么

$$2^{n+1}=2\cdot 2^n<2\cdot n!<(n+1)\cdot n!=(n+1)!$$

因此，结论由数学归纳法原理得出。 □

习题 5.10 设 $x>0$。证明

$$x+\frac{1}{x}\geq 2,$$

并且等号成立当且仅当 $x=1$。

*Sol*论。利用命题 5.2(xi)、命题 3.7(ii)和命题 5.2(viii)，我们有

$$(x-1)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2.$$

因此，最后一个不等式为等式，当且仅当（$x-1$）$^2=0\Leftrightarrow x-1=0$（根据命题 3.7(iii)）$\Leftrightarrow x=1$。□

习题 5.11 设 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，且 $k\in\mathbb{N}$。证明:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\leq\frac{1}{k!}.$$

解答。若 $k\geq n+1$，则不等式成立，因为$\binom{n}{k}=0<\frac{1}{k!}$。因此，我们假设$k\in\{0,1,\ldots,n\}$。那么 $\frac{n!}{(n-k)!}=(n)(n-1)\cdots(n-k+1)$，所以

$$\frac{1}{n^k}\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{(n)(n-1)\cdots(n-k+1)}{\underbrace{(n)(n)\cdots(n)}_{k\text{ factors}}}=\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\leq 1.$$

因此，根据引理 2.10(ii)，

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{n^k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{k!},$$

如所要证明的。 □

练习 5.12 设 $n\geq 1$ 是一个整数。证明:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

提示： 习题5.11。

解答。事实上，利用二项式定理（定理2.12）和习题 5.11，我们得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

正如所要求的。 □

练习 5.13 设 $n\geq 4$ 是一个整数。利用习题 5.9 和定理 2.6 证明

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<3.$$

解答。由习题 5.9，可得

$$\frac{1}{k!} < \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^{-k} \qquad \text{for all integers } k \geq 4.$$

因此，再利用几何和公式（定理 2.6），我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} = \left(1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\right) + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} = \left(2 + \tfrac{2}{3}\right) + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} \\
&< \left(2 + \tfrac{2}{3}\right) + \sum_{k=4}^{n} 2^{-k} = \left(2 + \tfrac{2}{3}\right) + 2^{-4} \sum_{k=4}^{n} 2^{-k+4} = \left(2 + \tfrac{2}{3}\right) + 2^{-4} \sum_{k=0}^{n-4} 2^{-(k+4)+4} \\
&= \left(2 + \tfrac{2}{3}\right) + 2^{-4} \sum_{k=0}^{n-4} (1/2)^k = \left(2 + \tfrac{2}{3}\right) + 2^{-4} \frac{1 - (1/2)^{n-3}}{1 - (1/2)} \\
&< \left(2 + \tfrac{2}{3}\right) + 2^{-4} \frac{1 - 0}{1/2} = 2 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{8} = 2 + \tfrac{19}{24} < 3.
\end{aligned}$$

□

习题 5.14 设 $n \geq 4$ 是一个整数。利用习题 5.12 和 5.13 证明

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq \frac{n!}{3}.$$

解答。对 n 使用归纳法。

当 $n = 1$ 时，我们确实有 $(1/3)^1 = 1/3 \leq 1/3 = 1!/3$。

现在假设对于某个整数 $n \geq 1$，该不等式成立。那么，利用这两道习题和归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} &= \frac{n+1}{3}\left(\frac{n+1}{3}\right)^n = \frac{n+1}{3}\left(\frac{n\left(1+1/n\right)}{3}\right)^n = \frac{n+1}{3}\left(\frac{n}{3}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\leq \frac{n+1}{3}\left(\frac{n}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{n+1}{3}\left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot 3 = (n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq (n+1)\frac{n!}{3} = \frac{(n+1)!}{3}.
\end{aligned}$$

因此，该结论由数学归纳法原理得出。 □

习题 5.1 设 $n \geq 3$ 为整数。利用二项式定理（和数学归纳法）证明

$$n^n > (n+1)!\,.$$

解答。对 n 使用归纳法。

当 $n = 3$ 时，我们确实有 $3^3 = 27 > 24 = 4!$ 。

现在假设该不等式对某个整数 $n \geq 3$ 成立。那么，利用二项式定理和归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}
(n+1)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} n^{n+1-k} = n^{n+1} + (n+1)n^n + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} n^{n+1-k} \\
&= n^n \left(n + (n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} n^{1-k}\right) \\
&> n^n(2n+1) > n^n(n+2) > (n+1)!(n+2) = (n+2)!.
\end{aligned}$$

因此，根据数学归纳法原理即可得出该结果。 □

习题 5.16（一个非阿基米德有序域）考虑实有理函数域$\mathbb{R}(x)$（参见习题3.15），并定义

$$f(x)=\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

当 $a_mb_n>0$ 时为正。（这并不意味着函数 f 处处为正！）证明按照这个定义， $\mathbb{R}(x)$ 成为一个有序域，即验证 **O1–O3**。此外，证明对每一个 $n\in\mathbb{N}$， $x>n$，因此 $\mathbb{R}(x)$ 是非阿基米德的。

解答。设 f 具有如下表示，其中我们也将分子和分母多项式简记为：

$$f(x)=\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=:\frac{a(x)}{b(x)}.$$

于是 $b_n\neq0$。因此 a_mb_n 有定义；若 $a_mb_n>0$，则它是正元素；若$a_mb_n<0$，则它是负元素；而 0 是 $a_m=0$，也就是说， f 是零有理函数。这证明了 **O1**。

现在假设 f 为正，即 $a_mb_n>0$，并且

$$g(x)=\frac{c_px^p+c_{p-1}x^{p-1}+\cdots+c_1x+c_0}{d_qx^q+d_{q-1}x^{q-1}+\cdots+d_1x+d_0}=:\frac{c(x)}{d(x)}$$

也为正，即 $c_pd_q>0$。于是

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=\frac{a(x)}{b(x)}+\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)d(x)}{b(x)d(x)}+\frac{c(x)b(x)}{d(x)b(x)}=\frac{a(x)d(x)+b(x)c(x)}{b(x)d(x)}\\&=\frac{(a_mx^m+\cdots)(d_qx^q+\cdots)+(b_nx^n+\cdots)(c_px^p+\cdots)}{(b_nx^n+\cdots)(d_qx^q+\cdots)}\\&=\frac{(a_md_qx^{m+q}+\cdots)+(b_nc_px^{n+p}+\cdots)}{b_nd_qx^{n+q}+\cdots}.\end{aligned}$$

情形 *1*： $b_n>0$ 和 $d_q>0$。于是 $a_m>0$ 和 $c_p>0$。因此 $a_md_q>0$、 $b_nc_p>0$和 $b_nd_q>0$，这表明 $f+g$ 是正的。

情形 *2*： $b_n<0$ 和 $d_q<0$。于是 $a_m<0$ 和 $c_p<0$。因此 $a_md_q>0$、 $b_nc_p>0$和 $b_nd_q>0$，这表明 $f+g$ 是正的。

情况 *3*： $b_n>0$ 和 $d_q<0$。于是 $a_m>0$ 和 $c_p<0$。因此 $a_md_q<0$、 $b_nc_p<0$和 $b_nd_q<0$，这表明 $f+g$ 是正的。

情况 *4*： $b_n<0$ 和 $d_q>0$。这与情况 *3*类似。

总之，**O2** 成立。

现在考虑

$$(f\cdot g)(x)=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)c(x)}{b(x)d(x)}=\frac{(a_mx^m+\cdots)(c_px^p+\cdots)}{(b_nx^n+\cdots)(d_qx^q+\cdots)}=\frac{a_mc_px^{m+p}+\cdots}{b_nd_qx^{n+q}+\cdots}.$$

情形 *1*： $b_n>0$ 且 $d_q>0$。于是 $a_m>0$ 且 $c_p>0$。因此 $a_mc_p>0$，且 $b_nd_q>0$，这表明$f\cdot g$ 是正的。

情形 *2*： $b_n<0$ 且 $d_q<0$。于是 $a_m<0$ 且 $c_p<0$。因此 $a_mc_p>0$，且 $b_nd_q>0$，这表明$f\cdot g$ 是正的。

情况 *3*： $b_n>0$ 且 $d_q<0$。于是 $a_m>0$ 且 $c_p<0$。因此 $a_mc_p<0$，且 $b_nd_q<0$，这表明$f\cdot g$ 是正的。

情况 *4*： $b_n<0$ 且 $d_q>0$。这与情况 *3*类似。

总之，我们验证了**O3**。

最后，考虑

$$f(x)=x=\frac{1\cdot x^1+0}{1}\quad\text{and}\quad g(x)=n=\frac{n}{1}.$$

Then

$$(f-g)(x)=\frac{1\cdot x^1+0}{1}-\frac{n}{1}=\frac{1\cdot x^1-n}{1}$$

又由于 $1\cdot 1=1>0$，可得 $f-g>0$，即 $f>g$。

根据引理 5.14，我们可以看出 $\mathbb{R}(x)$ 不具有阿基米德性质。 □

习题 5.17（柯西-施瓦茨不等式）设 x_1,x_2,y_1,y_2 是有序域 $\mathbb{F}$ 中的数。证明：

$$(x_1y_1+x_2y_2)^2\leq(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2).$$

提示：习题3.19。

解答。利用习题 3.19，对所有 x,y,u,v：

$$(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2).$$

令 $x=x_1,v=y_1,y=x_2,u=y_2$，由此可知

$$(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_1+x_2y_2)^2=(x_1^2+x_2^2)(y_2^2+y_1^2).$$

另一方面，根据命题5.2(xi)， $0^2=0\geq 0$ 以及注 5.5(i)。综上，我们推得

$$(x_1y_1+x_2y_2)^2\leq(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_1+x_2y_2)^2=(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2),$$

如所述。 □

习题 5.18 设 x 和 y 是 $\mathbb{R}$ 中的数（事实上，也可以是任意有序域中的数），且满足 $x<y$。证明存在一个数 m 使得 $x<m<y$。

解答。回想一下， $1>0$（命题 5.2(xii)）。因此 $2=1+1>0$ 由 **O2**可得。由此可知 $1/2>0$（命题 5.2(xiii)）。现在令

$$m:=(x+y)/2.$$

利用命题 5.2，我们得到： $x<y\Rightarrow 2x=x+x<x+y\Rightarrow x=$ （$2x$）$/2<$ （$x+y$）$/2=m$。证明 $m<y$ 的方法类似（从将 y 而非 x 加到不等式 $x<y$开始）。□

习题 5.19 证明或证伪：

“如果 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$，那么存在 $M>0$ 使得 $|x|+|y|\leq M\cdot|x+y|$。”

解答。这个命题是假的。反设这个命题为真。令 $x=1$ 和$y=-1$。由于我们假设这个命题为真，根据命题，存在 $M>0$。那么

$$2=1+1=|x|+y|\leq M\cdot|x+y|=M\cdot|1+(-1)|=M\cdot 0=0,$$

这就导致矛盾，因为 $2>0$。 □

习题 5.20 证明或证伪：

“如果 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$，那么 $|x|^2+|y|^2\geq|x+y|^2$。”

解答。该命题为假：考虑 $x=y=1$。此时左边等于 $1^2+1^2=2$，而右边等于 $(1+1)^2=4$。□

习题 5.21 证明或证伪：

“存在 $M>0$，使得如果 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$，那么 $|x|^2+|y|^2\geq M\cdot|x+y|^2$。”

解答。这个命题正确，例如取 $M = 1/2$ （或更小的值）即可。设 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$。我们必须证明

$$|x|^2 + |y|^2 \overset{?}{\geq} \tfrac{1}{2}|x+y|^2.$$

注意到 $|z| \in \{z, -z\}$ 因此 $|z|^2 \in \{z^2, (-z)^2\}$ 因此 $|z|^2 = z^2$。所以，我们必须证明$x^2 + y^2 \overset{?}{\geq} \frac{1}{2}(x+y)^2$，或者等价地，

$$2x^2 + 2y^2 \overset{?}{\geq} (x+y)^2.$$

展开右边可得

$$2x^2 + 2y^2 \overset{?}{\geq} x^2 + y^2 + 2xy$$

或者 $x^2 + y^2 - 2xy \overset{?}{\geq} 0$。但这显然成立，因为 $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$ 是一个平方，因此是非负的！ □

习题 5.22 证明，对于每一个实数 $x > -1$，都有

$$1 - x \leq \frac{1}{1+x}.$$

解答。我们知道平方是非负的（参见命题 5.2(xi)），所以 $x^2 \geq 0$ 因此 $1 - x^2 \leq 1$。另一方面，$1 - x^2 = (1+x)(1-x)$。综上所述，

$$(1+x)(1-x) \leq 1. \tag{5.21}$$

因为 $x > -1$，我们有 $1 + x > 0$。将（5.21）除以 $1 + x$ 并回想命题5.2(viii)，即可得到所需结果。□

习题 5.23 证明：对所有满足 $-1 < x < y$ 的实数 x 和 y，我们有

$$\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y};$$

换句话说，函数 $z \mapsto z/(1+z)$ 在 $]-1, +\infty[$ 上严格递增。

解答。设 $-1 < x < y$。那么 $0 < 1 + x < 1 + y$。取逆元（命题5.2(xv)），得到 $(1+x)^{-1} > (1+y)^{-1}$。因此 $1 - (1+x)^{-1} < 1 - (1+y)^{-1}$ 于是

$$\frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)-1}{1+x} = 1 - (1+x)^{-1} < 1 - (1+y)^{-1} = \frac{(1+y)-1}{1+y} = \frac{y}{1+y}$$

正如所要证明的。

或者，我们也可以（但不必，见上文！）使用微积分：

$$\left(\frac{z}{1+z}\right)' = \frac{1}{(1+z)^2} > 0$$

对于 $z > -1$，因此该函数是严格递增的。 □

练习题 5.24 假设 $0 \leq x \leq 1$，$0 < \alpha \leq 1$，$0 \leq x_0 \leq 1$，$n \in \mathbb{N}$，并且

$$x \leq \frac{x_0}{n x_0 + \alpha^{-n}}. \tag{5.22}$$

Let

$$0 \leq y \leq \alpha(1-x)x. \tag{5.23}$$

证明

$$y \le \frac{x_0}{(n+1)x_0 + \alpha^{-(n+1)}}. \tag{5.24}$$

提示： 习题 5.22和 5.23。

解答。我们首先指出， y 实际上是可以选取的，因为 $\alpha > 0$、 $x \ge 0$、 $1 - x \ge 0$蕴含 $\alpha(1-x)x \ge 0$。因此，

$$\begin{aligned}
y &\le \alpha(1-x)x = (\alpha x)(1-x) && \text{(by (5.23))} \\
&\le \alpha \frac{x}{1+x} && \text{(by Exercise 5.22)} \\
&\le \alpha \frac{\frac{x_0}{nx_0+\alpha^{-n}}}{1+\frac{x_0}{nx_0+\alpha^{-n}}} && \text{(by (5.22) and Exercise 5.23)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} \frac{x_0}{nx_0 + \alpha^{-n} + x_0} \\
&= \frac{x_0}{\frac{1}{\alpha}(n+1)x_0 + \alpha^{-(n+1)}} \\
&\le \frac{x_0}{(n+1)x_0 + \alpha^{-(n+1)}} && \text{(because } 1/\alpha \ge 1\text{)}
\end{aligned}$$

正如所断言的。 □

习题 5.25 证明：若 $x \in \mathbb{R}$ 满足 $|x| \ge 4$，则 $-x^2 + x \le -3|x|$。

解答。我们有 $|x| \ge 4 \Leftrightarrow -|x| \le -4 \Leftrightarrow -|x| \cdot |x| \le -4|x| \Leftrightarrow -x^2 \le -4|x| \Rightarrow -x^2 \le -x - 3|x| \Leftrightarrow -x^2 + x \le -3|x|$。 □

习题 5.26 证明：如果 x 和 y 是两个非零实数，那么

$$\frac{1}{2}\left|\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}\right| \le \frac{|x+y|}{|x|+|y|}.$$

解答。 情形 *1*： $x > 0$ 且 $y < 0$。
于是 $x/|x| = 1$ ，而 $y/|y| = -1$。因此，左边 $= 0$ ，证毕。
情形 *2*： $x < 0$ 且 $y > 0$。
这与情形 *1*类似。
情形 *3*： $x > 0$ 且 $y > 0$。
那么 $x/|x| = y/|y| = 1$ 而左边 $= \frac{1}{2}|1+1| = 1$。幸运的是，右边 $= (x+y)/(x+y) = 1$ □

练习 5.27（由你来批改！） 考虑以下命题

"If x and y are in $\mathbb{R}$, then $|x+y| = |x| + |y|$."

以及以下"证明"：

> 设 x 和 y 是 $\mathbb{R}$中的元素。*Case 1*： $x \ge 0$ 和 $y \ge 0$。于是 $x + y \ge 0$ ，因此 $|x+y| = x + y = |x| + |y|$。*Case 2*： $x < 0$ 和 $y < 0$。于是 $-x > 0$ 和 $-y > 0$，因此 $-(x+y) = (-x) + (-y) > 0$。因此 $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$。
> 总之，我们验证了该命题。

这个证明为什么错了？

证明。所写的一切在数学上都是严谨的，唯独最后一句除外：我们还没有完成，因为存在未被考虑的缺失分类，例如 $x > 0$ 和 $y < 0$。（而且结果是错误的：考虑 $x = 1$ 和 $y = -1$。） □

习题 5.28（真或假？）判断下列命题为真还是假，并简要说明理由。

(i)“存在一个不能成为有序域的域。”(ii)“在有序域中，两个负数的和是负数。”(iii)“在有序域中，两个负数的乘积是负数。”(iv)“如果 $x \in \mathbb{R}$，那么 $(1+x)^3 \geq 1+3x$。”

解答。(i)：正确：含有两个元素的域 $\mathbb{F}_2$ 不能成为有序域，因为 $1+1=0$。(ii)：正确：$[x<0$ 和 $y<0] \Leftrightarrow [-x>0$ 以及 $-y>0] \Rightarrow -(x+y) = (-x)+(-y) > 0 \Rightarrow x+y<0$。(iii)：假：$-1<0$，但 $(-1)(-1) = (1)(1) = 1>0$。(iv)：假：考虑 $x=-11$。那么 $(1+x)^3 = (-10)^3 = -1000$，但 $1+3(-11) = -32$。 □

习题 5.29（真或假？）判断下列每个命题是真还是假。如果为真，请解释原因；如果为假，请给出一个反例。

(i) $|x+y| = |x|+|y|$。
(ii) $|x-y| \leq |x|-|y|$。
(iii) $|x-y| \leq |x|+|y|$。

解答。(i)：这是假的。例如，设 $x=1$ 和 $y=-1$。那么 $|x+y| = |1+(-1)| = |0| = 0$，而 $|x|+|y| = |1|+|-1| = 1+1 = 2$。

(ii)：这是假的。例如，考虑 $x=0$ 和 $y=1$。那么 $|x-y| = |0-1| = 1$，但 $|x|-|y| = |0|-|1| = 0-1 = -1$。

(iii)：这是正确的。对 x 和 $-y$应用三角不等式和命题5.7(v) 可得$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$。 □

第6章
数列与极限

6.1 定义与例子

定义 6.1（数列）实数数列在形式上是一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数，记作 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 或 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ \ldots\ldots)$。如果 $n_0\in\mathbb{Z}$，那么也可以方便地将 $(a_n)_{n\geq n_0}=(a_{n_0},\ a_{n_0+1},\ \ldots\ldots)$ 称为一个数列。

请注意，数列不同于集合（集合中的元素没有顺序）。因此，例如，

$$(0,1,0,1,0,1,\ldots)\neq(1,0,1,0,1,0,\ldots) \tag{6.1}$$

而

$$\{0,1,0,1,0,1,\ldots\}=\{0,1\}=\{1,0\}=\{1,0,1,0,1,0,\ldots\}. \tag{6.2}$$

例6.2 以下是一些数列。

(i) 若 $a_n\equiv a$，对某个常数 $a\in\mathbb{R}$，则得到常数数列 $(a,a,a,\ldots)$。(ii) 若 $a_n=\frac{1}{n}$对每一个 $n\geq 1$，则得到数列 $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots)$。(iii) 若 $a_n=(-1)^n$ 对每一个 $n\in\mathbb{N}$，则得到 $(1,-1,1,-1,\ldots)$。(iv) 若 $a_n=1/3^n$对每一个 $n\in\mathbb{N}$，则得到 $(1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots)$。(v) 更一般地，设 $\alpha\in\mathbb{R}$ 并令 $a_n=\alpha^n$ 对每一个 $n\in\mathbb{N}$。则得到 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^n,\ldots)$。(vi) 若 $a_n=\frac{n}{n+1}$ 对每一个 $n\in\mathbb{N}$，则得到 $(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots)$。(vii) 令 $f_0=0$、$f_1=1$，且 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ 对 $n\geq 2$。则得到递归定义的斐波那契数列：$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$。

（viii）令 $r\in\mathbb{R}$ 和 $x_0\in\mathbb{R}$，且对 $n\geq 0$，$x_{n+1}=r(1-x_n)x_n$。这就是（再次递归定义的）**逻辑斯蒂序列**。

定义6.3（收敛、极限、发散）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列，且 $\ell\in\mathbb{R}$。那么 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **收敛**到 ℓ，记作 $\lim_{n\in\mathbb{N}}a_n=\ell$、$\lim_{n\to+\infty}a_n=\ell$、$\lim a_n=\ell$ 或 $a_n\to\ell$，如果

对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得 $n\geq N(\varepsilon)$
$\Rightarrow|a_n-\ell|<\varepsilon$（即，对于 *every* $n\geq N(\varepsilon)$，$|a_n-\ell|<\varepsilon$）。

如果发生这种情况，ℓ 就称为数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$的**极限**。如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 没有极限，那么它就**发散**。

等价地，我们可以说，如果数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的所有项最终都落在开区间[1]内，那么它就收敛于 ℓ

$$]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[:=\big\{x\in\mathbb{R}\;\big|\;|x-\ell|<\varepsilon\big\}=\big\{x\in\mathbb{R}\;\big|\;\ell-\varepsilon<x<\ell+\varepsilon\big\},\tag{6.3}$$

对每一个 $\varepsilon>0$。

现在让我们重新审视例 6.2。

例 6.4 如果 $a_n\equiv a$ 对某个常数 $a\in\mathbb{R}$，则极限 $a_n=a$。事实上，令 $\varepsilon>0$ 并取（例如）$N(\varepsilon)=0$。则对每一个 $n\geq N(\varepsilon)=0$，我们有

$$|a_n-a|=|a-a|=|0|=0<\varepsilon,\tag{6.4}$$

如所欲证。

在定义 6.3中，我们谈到该数列的极限。下一个结果表明这种说法是合理的。

定理6.5（极限的唯一性）一个数列至多有一个极限。

证明。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列。若该数列不收敛，则无须证明。因此，假设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。我们需要证明极限是唯一的，并反设存在两个极限 ℓ_1 和 ℓ_2，其中 $\ell_1\neq\ell_2$。

现在任取 $0<\varepsilon\leq|\ell_1-\ell_2|$。由于 $a_n\to\ell_1$，存在 $N_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$n\geq N_1\quad\Rightarrow\quad|a_n-\ell_1|<\tfrac{1}{2}\varepsilon.\tag{6.5}$$

又由于 $a_n\to\ell_2$，存在 $N_2\in\mathbb{N}$ 使得

$$n\geq N_2\quad\Rightarrow\quad|a_n-\ell_2|<\tfrac{1}{2}\varepsilon.\tag{6.6}$$

因此，对每一个 $n\geq\max\{N_1,N_2\}$，都有

$$\begin{aligned}|\ell_1-\ell_2|=|(\ell_1-a_n)-(\ell_2-a_n)|&\leq|\ell_1-a_n|+|\ell_2-a_n|&\text{(6.7a)}\\&<\tfrac{1}{2}\varepsilon+\tfrac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon&\text{(6.7b)}\\&\leq|\ell_1-\ell_2|,&\text{(6.7c)}\end{aligned}$$

这显然荒谬。 □

例6.6 设 $a_n=\frac{1}{n}$，对每一个 $n\geq1$，并设 $\varepsilon>0$。现在取[2] $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$使得 $N(\varepsilon)>\frac{1}{\varepsilon}$。于是

$$|a_n-0|=\big|\tfrac{1}{n}-0\big|=\tfrac{1}{n}<\varepsilon,\quad\text{for all } n\geq N(\varepsilon).\tag{6.8}$$

因此，

$$\tfrac{1}{n}\to0.\tag{6.9}$$

例 6.7 由 $a_n=(-1)^n$ 定义的数列发散。

证明。我们用矛盾法进行论证。假设存在 $\ell\in\mathbb{R}$ 使得 $a_n\to\ell$。那么，对于 $\varepsilon=1$，存在 $N=N(1)\in\mathbb{N}$ 使得

$$|a_n-\ell|<1,\quad\text{for all } n\geq N.\tag{6.10}$$

因此，对所有 $n\geq N$，三角不等式（定理 5.9）由此可得

$$2=|a_{n+1}-a_n|=|(a_{n+1}-\ell)+(\ell-a_n)|\tag{6.11a}$$

[1] 此处我们采用欧洲（尤其是法国）关于开区间的记法 $]a,\ b[$, 这种记法便于与一对数（$a,\ b$）区分。[2] 这之所以可行，是因为推论 5.15 ，并且此处我们用到了实数的阿基米德性质。

$$\leq |a_{n+1}-\ell|+|\ell-a_n| = |a_{n+1}-\ell|+|a_n-\ell| < 1+1 = 2, \tag{6.11b}$$

这显然荒谬。这正是所需的矛盾，因此 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散。 □

例 6.8 $\dfrac{n}{n+1} \to 1.$

证明。设 $\varepsilon > 0$。那么

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \varepsilon, \quad \text{for every } n \geq \frac{1}{\varepsilon}. \tag{6.12}$$

（因此，任意整数 $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ 都可以。） □

定义 6.9（有界性）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列。那么，如果存在 $\beta \in \mathbb{R}$ 使得对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $a_n \leq \beta$，则称 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界。类似地，如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\alpha \leq a_n$，则称 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有下界。最后，如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 既有上界又有下界，则称 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。

容易得出（习题 6.2），$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，当且仅当

$$\text{there exists } \gamma \geq 0 \text{ such that } |a_n| \leq \gamma, \text{ for every } n \in \mathbb{N}. \tag{6.13}$$

下一个结果至关重要，它给出了收敛的一个必要条件。

定理 6.10 每个收敛数列都是有界的。

证明。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，极限为 ℓ。那么（对于 $\varepsilon = 1$），存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - \ell| < 1, \quad \text{for all } n \geq N. \tag{6.14}$$

因此，根据定理 5.9，

$$|a_n| = |(a_n-\ell)+\ell| \leq |a_n-\ell|+|\ell| < 1+|\ell|, \quad \text{for all } n \geq N. \tag{6.15}$$

因此，

$$|a_n| \leq \gamma := \max\big\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1+|\ell|\big\}, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}, \tag{6.16}$$

也就是说，数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界的。 □

注 6.11 由下式定义的数列 $a_n = (-1)^n$ 显然有界（因为 $|a_n| = |(-1)^n| = 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立），但 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 并非收敛（例 6.7）。因此，定理 6.10 的逆命题不成立。

例 6.12（几何序列）设 $\alpha \in \mathbb{R}$。那么以下情形恰有一种成立。

(i) $|\alpha| < 1$ 且 $\alpha^n \to 0$。**(ii)** $\alpha = 1$ 且 $\alpha^n = 1 \to 1$。**(iii)** $\alpha = -1$ 且 $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散。**(iv)** $|\alpha| > 1$ 且 $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散。

证明。(i)：若 $\alpha = 0$，则 $\alpha^n = 0^n = 0$ 对每一个 $n \geq 1$ 都成立，因此 $\alpha^n \to 0$ 由例 6.4得证。现在假设 $\alpha \neq 0$，并令 $\varepsilon > 0$。应用推论 5.18 （取 $z = |\alpha| \in]0,\ 1[$）可得 $N \in \mathbb{N}$ 使得$|\alpha|^N < \varepsilon$。因此，

$$|\alpha^n - 0| = |\alpha^n| = |\alpha|^n \leq |\alpha|^N < \varepsilon, \quad \text{for every } n \geq N. \tag{6.17}$$

因此，$\alpha^n \to 0$。

(ii)：由例6.4显然可知。

(iii)：由例6.7显然可知。

(iv)：反设$\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。根据定理 6.10，$\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，设$|\alpha^n| \leq \gamma$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及某个 $\gamma > 0$都成立。另一方面，定理 5.17 意味着存在某个整数 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|\alpha^n| = |\alpha|^n > \gamma$，这显然矛盾。因此，$\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散。

□

命题 6.13（通向微积分的桥梁）设 a 和 L 是两个实数，且 $f\colon \mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$。回顾一下，根据定义，

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

当且仅当

$$\begin{aligned}&\textit{for every } \varepsilon>0 \ \textit{ there exists } \delta>0 \textit{ such that},\\ &0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.\end{aligned}\tag{$\star$}$$

事实上，我们有极限$\lim_{x\to a} f(x) = L$ 当且仅当每当$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ 中满足 $a_n\to a$的数列时，则有 $f(a_n)\to L$。

证明. 习题 6.5. □

注记6.14（量词陈述及其否定） 有时，用量词来书写复杂的命题会比较方便。例如，为了表示数列$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 ℓ，我们可以将该定义改写为

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\{N,N+1,\ldots\}) \quad |a_n-\ell|<\varepsilon. \tag{6.18}$$

注意，这要从左向右读取。“∀”是全称量词，“∃”是存在量词。虽然这看起来很专业，但其优点是这类表达式很容易进行逻辑否定。例如，(6.18)的逻辑否定是

$$(\exists\,\varepsilon>0)(\forall N\in\mathbb{N})(\exists\, n\in\{N,N+1,\ldots\}) \quad |a_n-\ell|\geq\varepsilon. \tag{6.19}$$

注意，求否定的方法是将所有的 $\forall$ 与 $\exists$ 互换，并对最右边的命题取否定。更一般地，设 $Q_1,\ldots,Q_n$ 是量词陈述， p 是一个命题。那么以下内容的逻辑否定

$$(Q_n)(Q_{n-1})\cdots(Q_1) \quad p \tag{6.20}$$

is

$$(Q_n^*)(Q_{n-1}^*)\cdots(Q_1^*) \quad (\neg p), \tag{6.21}$$

其中 Q_k^* 是 Q_k ，但将 $\forall$ 和 $\exists$ 互换。这个实用规则成立的事实，可以通过对量词的个数应用我们钟爱的数学归纳法原理来证明！最后，让我们对命题 $\lim_{x\to a} f(x) = L$中的 lim 6.13取否定。首先，$\lim_{x\to a} f(x) = L$表示

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}) \quad |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-L|<\varepsilon. \tag{6.22}$$

回想一下， $p\Rightarrow q$ 表示 $(\neg p)\vee q$。因此 $\neg(p\Rightarrow q) = (\neg(\neg p))\wedge(\neg q) = p\wedge(\neg q)$。由此可得，(6.22) 的否定是

$$(\exists\,\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists\, x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}) \quad |x-a|<\delta \ \wedge \ |f(x)-L|\geq\varepsilon. \tag{6.23}$$

（这在命题 6.13 的证明中非常有用。）

6.2 极限运算法则

定理 6.15（和法则）设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是收敛数列，其极限分别为 α 和 β。定义数列$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $c_n := a_n+b_n$，对每一个 $n\in\mathbb{N}$均成立。则$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $\alpha+\beta$；简言之：

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n + \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n. \tag{6.24}$$

证明。设 $\varepsilon > 0$。由于 $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ 和 $a_n \to \alpha$ 以及 $b_n \to \beta$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 和 $N_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \alpha| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{6.25}$$

and

$$n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n - \beta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{6.26}$$

取 $N := \max\{N_1, N_2\}$。那么，对每一个 $n \geq N$，都有

$$|c_n - (\alpha+\beta)| = |(a_n + b_n) - (\alpha+\beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \tag{6.27a}$$

$$\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \tag{6.27b}$$

因此，$c_n \to \alpha + \beta$。 □

例 6.16 $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{3^n} \to 1$。

证明。一方面，$\frac{n}{n+1} \to 1$ 由例 6.8。另一方面，$\frac{1}{3^n} = (1/3)^n \to 0$ 由例 6.12(i)。综合起来，利用定理 6.15，$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{3^n} \to 1 + 0 = 1$。 □

定理6.17（乘法法则）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是分别以 α 和 β 为极限的收敛数列。定义数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $c_n := a_n b_n$，对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。那么$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $\alpha\beta$；简言之：

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} (a_n b_n) = \Big(\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n\Big)\Big(\lim_{n\in\mathbb{N}} b_n\Big). \tag{6.28}$$

证明。数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，因此根据定理6.10，它有界。

$$\text{there exists } \gamma_1 \geq 0 \text{ such that for every } n \in \mathbb{N}, \text{ we have } |a_n| \leq \gamma_1. \tag{6.29}$$

现在任取

$$\gamma > \max\big\{\gamma_1, |\beta|\big\} \geq 0, \tag{6.30}$$

并令 $\varepsilon > 0$。由于 $a_n \to \alpha$ 和 $b_n \to \beta$，对于 $\frac{\varepsilon}{2\gamma} > 0$，存在 N_1 和 N_2 属于 $\mathbb{N}$，使得

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2\gamma} \text{ for every } n \geq N_1 \quad \text{and} \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2\gamma} \text{ for every } n \geq N_2. \tag{6.31}$$

因此，对每一个 $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$，都有

$$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta| \tag{6.32a}$$

$$\leq |a_n(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)\beta| = |a_n| \cdot |b_n - \beta| + |a_n - \alpha| \cdot |\beta| \tag{6.32b}$$

$$< \gamma\frac{\varepsilon}{2\gamma} + \gamma\frac{\varepsilon}{2\gamma} = \varepsilon. \tag{6.32c}$$

因此，$a_n b_n \to \alpha\beta$。 □

推论6.18（常数倍法则）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 α，且令 $c \in \mathbb{R}$。那么 $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $c\alpha$；简言之：

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} (ca_n) = c \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n. \tag{6.33}$$

证明。常数数列 $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 c 根据例 6.4。因此，结论由定理6.17得出。 □

推论 6.19（差法则） 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为收敛数列，其极限分别为 α与 β。定义数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $c_n := a_n - b_n$，对每一个 $n \in \mathbb{N}$。则 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$收敛于 $\alpha - \beta$；简言之：

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} (a_n - b_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n - \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n. \tag{6.34}$$

证明。这由定理 6.15 与推论 6.18 得出，因为 $c_n = a_n + (-1)b_n$。 □

命题6.20（倒数法则）设$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $\beta \neq 0$。那么，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对每一个 $n \geq n_0$都有 $b_n \neq 0$ 。此外，数列$(1/b_n)_{n\geq n_0}$ 收敛到 $1/\beta$。

证明。由于 $\beta \neq 0$，根据命题 $|\beta| > 0$ ，由5.7(i)&(ii)可知。因此，由于 $\frac{1}{2}|\beta| > 0$,- 存在$n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}. \tag{6.35}$$

另一方面, $|b_n - \beta| \geq \big||b_n| - |\beta|\big| \geq |\beta| - |b_n|$ 5 10 $|\beta| - |b_n| \leq$ 根据推论。。综上, $|b_n - \beta| < \frac{1}{2}|\beta|$ – 因此

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |b_n| > \frac{|\beta|}{2} > 0; \tag{6.36}$$

特别地， $b_n \neq 0$，并且

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|\beta|}. \tag{6.37}$$

现在令 $\varepsilon > 0$。则 $|\beta|^2\varepsilon/2 > 0$ ，因此存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ ，使得

$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon|\beta|^2}{2}. \tag{6.38}$$

综上，对于 $n \geq N :=$ max$\{n_0, n_1\}$，我们有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta - b_n}{b_n\beta}\right| = \frac{1}{|\beta|}\frac{1}{|b_n|}|b_n - \beta| < \frac{1}{|\beta|}\frac{2}{|\beta|}\frac{\varepsilon|\beta|^2}{2} = \varepsilon. \tag{6.39}$$

因此， $1/b_n \to 1/\beta$。 □

推论 6.21（商法则）令 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为收敛数列，其极限分别为 α 和 β。假设 $\beta \neq 0$。则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ ，使得对于每一个 $n \geq n_0$ ，都有 $b_n \neq 0$ ，并且数列 $(c_n)_{n\geq n_0}$ 定义为 $c_n :=$ a_n/b_n 对于每一个 $n \geq n_0$，收敛于 α/β；简而言之：

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n}{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n}. \tag{6.40}$$

证明。由于 $c_n = a_n/b_n = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$，结合定理 6.17 和命题 6.20即可得到该结论。

□

例 6.22 $\dfrac{2n^2 + 4n + 5}{n^2 + 1} \to 2.$

证明。对每一个 $n \geq 1$，我们写作：

$$\frac{2n^2 + 4n + 5}{n^2 + 1} = \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}. \tag{6.41}$$

Now

- $2 \to 2$ （根据例 6.4）；
- $\frac{4}{n} \to 0$ （根据（6.9）和推论 6.18）；
- $\frac{5}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{5}{n} \to 0$ （根据（6.9）、推论 6.18和定理 6.17）；
- $1 \to 1$ （根据例 6.4）；

- $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0$ (by (6.9) and Theorem 6.17).

因此，反复运用定理 6.15可得 $2+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2} \to 2+0+0=2$以及 $1+\frac{1}{n^2} \to 1+0=1 \neq 0$。最后，运用推论 6.21，可得

$$\frac{2n^2+4n+5}{n^2+1} = \frac{2+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{2}{1} = 2. \tag{6.42}$$

□

定理 6.23 设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是两个收敛数列，满足 $a_n \leq b_n$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$。那么

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n. \tag{6.43}$$

证明。分别用 α 和 β表示数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限。我们用反证法，假设 $\alpha > \beta$。那么 $\varepsilon := (\alpha-\beta)/2 > 0$，因此存在 N_1和 N_2属于 $\mathbb{N}$，使得

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{and} \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon. \tag{6.44}$$

令 $N := \max\{N_1, N_2\}$。那么，对每一个 $n \geq N$，

$$\alpha - a_n \leq |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{and} \quad b_n - \beta \leq |b_n - \beta| < \varepsilon. \tag{6.45}$$

因此，对每一个 $n \geq N$，

$$b_n < \varepsilon + \beta = \frac{\alpha-\beta}{2} + \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha - \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha - \varepsilon < a_n, \tag{6.46}$$

这与假设 $a_n \leq b_n$ 相矛盾。 □

推论 6。 **24** 设 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个收敛数列，使得对每一个 $n \in \mathbb{N}$， $\alpha \leq b_n \leq \gamma$。则

$$\alpha \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n \leq \gamma. \tag{6.47}$$

证明。结合例6.4 与定理 6.23。 □

定理 6.25（夹逼定理）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为数列，使得对每一个 $n \in \mathbb{N}$，$a_n \leq b_n \leq c_n$。假设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到同一个极限 ℓ。则$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 也收敛到 ℓ 。

证明。设 $\varepsilon > 0$。由于 $a_n \to \ell$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon. \tag{6.48}$$

由于 $c_n \to \ell$，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |c_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon. \tag{6.49}$$

现在令 $N := \max\{N_1, N_2\}$。综合以上，我们看到对每一个 $n \geq N$，

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon; \tag{6.50}$$

因此， $|b_n - \ell| < \varepsilon$。 □

命题 6.26 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 α。则 $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $|\alpha$ $|$.

证明。习题 6.24。 □

6.3 收敛到 $\pm\infty$

符号 $+\infty$和 $-\infty$ 便于描述绝对值可以任意增大的数列的行为。这些符号不是实数；例如，$\infty+1=+\infty=+\infty+0$ 但 $1\neq 0$等等。

定义6.27（发散到无穷）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列。那么 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$**发散到** $+\infty$，记作 $a_n\to+\infty$ 或 $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n=+\infty$，如果

对每一个 $\gamma\in\mathbb{R}$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得
$n\geq N\Rightarrow a_n>\gamma$。

类似地，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **发散到** $-\infty$，记作 $a_n\to-\infty$ 或 $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n=-\infty$，如果

对每一个 $\gamma\in\mathbb{R}$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得
$n\geq N\Rightarrow a_n<\gamma$。

注意，如果 $a_n\to+\infty$，那么 (a_n) 没有上界；然而，逆命题不成立。

例6.28

(i) $(3n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散到 $+\infty$。 (ii) $(-3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散到 $-\infty$。 (iii) $((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散，但它既不发散到 $+\infty$，也不发散到 $-\infty$。

对这类数列的研究可以归结为对零数列（即收敛到 0 的数列）的研究。证明留作习题 6.13 和习题 6.14。

定理 6.29 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的数列。那么存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对于对每一个 $n\geq n_0$，都有 $a_n\neq 0$。此外，数列 $(1/a_n)_{n\geq n_0}$ 收敛，且

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{a_n}=0. \tag{6.51}$$

定理 6.30 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足 $a_n\to 0$ 的正的（分别为负的）实数数列。那么 $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散到 $+\infty$（分别为 $-\infty$）。

6.4 级数

设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数数列。由下式定义的部分和数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$：

$$s_n:=\sum_{k=0}^{n}a_k,\qquad \text{for every } n\in\mathbb{N}, \tag{6.52}$$

称为**无穷级数**，记作

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\quad\text{or}\quad\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k. \tag{6.53}$$

如果数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，那么称级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ 收敛，其极限也记作 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$。

因此，记号

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k \tag{6.54}$$

有两种含义：它表示数列

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{6.55}$$

部分和；如果这个部分和数列收敛，那么它也表示该数列的极限。与数列一样，有时从不同于 0 的整数开始对级数进行编号会更方便。

注记 6.31 看起来，级数比数列特殊得多。事实上，这两个概念是等价的：给定任意数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，令

$$a_0 := c_0 \qquad \text{and} \qquad a_n := c_n - c_{n-1}, \text{ for } n \geq 1. \tag{6.56}$$

那么，对每一个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = c_0 + (c_1 - c_0) + \cdots + (c_n - c_{n-1}) = c_n. \tag{6.57}$$

因此，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$。

例 6.32 考虑级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}, \tag{6.58}$$

具有部分和

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \quad \text{for all integers } n \geq 1. \tag{6.59}$$

可以通过归纳法证明（见习题6.15）

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \text{for all integers } n \geq 1. \tag{6.60}$$

根据例6.8，我们可以推得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \tag{6.61}$$

定理 6.33（几何级数） 设 $x \in \mathbb{R}$ 满足 $|x| < 1$。则

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{6.62}$$

证明。事实上，对于部分和，利用定理 2.6，有

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{6.63}$$

另一方面，$x^{n+1} \to 0$ 根据例 6.12(i)。综上，

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \cdot x^{n+1} \to \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \cdot 0 = \frac{1}{1-x}, \tag{6.64}$$

由推论 6.18和推论 6.19。 □

由于级数不过是部分和序列，因此由定理 6.15、推论6.18和推论 6.19 可得以下[3] 级数运算法则。

[3] 乘积并不那么容易，它们将在后面研究。

定理 6.34 设 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ 是收敛级数，且 $c \in \mathbb{R}$。那么级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$、$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - b_k)$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$ 也收敛；此外，我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k \qquad and \qquad \sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{6.65}$$

最后两个结果非常强大。让我们举例说明。

例 6.35 假设

$$x = 0.13424242\ldots = 0.13\overline{42}. \tag{6.66}$$

这意味着

$$x = \frac{13}{100} + \frac{42}{10^4} + \frac{42}{10^6} + \cdots = \frac{13}{100} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{42}{10^{4+2k}}. \tag{6.67}$$

根据定理 6.33 和定理 6.34，该无穷级数等于

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{42}{10^{4+2k}} = \frac{42}{10^4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^k = \frac{42}{10^4}\cdot\frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{42}{10^4-10^2} = \frac{42}{9900} = \frac{7}{1650}. \tag{6.68}$$

因此，

$$x = \frac{13}{100} + \frac{7}{1650} = \frac{443}{3300}. \tag{6.69}$$

习题

练习 6.1 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列，并令 $\ell \in \mathbb{R}$。我们称 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ “超收敛”到 ℓ，如果存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对每一个 $\varepsilon > 0$，都有 $n \geq N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$。证明：如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 超收敛到 ℓ，那么 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 ℓ（在通常意义下）。逆命题如何?

解答。显然，每个超收敛数列都是收敛数列，因为存在一个“超” N，它不依赖于 ε。

现在假设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 超收敛到 ℓ。于是取满足对每一个 $\varepsilon > 0$ 都有 $n \geq N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$的 $N \in \mathbb{N}$。令 $n \geq N$。那么，对于每一个 $\varepsilon > 0$，都有 $|a_n - \ell| < \varepsilon$。于是 $|a_n - \ell| = 0$（否则我们就可以选取 $\varepsilon = |a_n - \ell|/2$ 并得到一个矛盾）。因此 $a_N = a_{N+1} = \cdots = \ell$。这意味着，超收敛数列恰好是那些最终为常数的数列。这个习题也说明，“对每一个”和“存在”的量词顺序至关重要。此外，$(1/n)_{n\geq 1}$ 收敛到 0，但不超收敛到 0。□

习题 6.2 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列。证明，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界当且仅当（6.13）成立。

解答。“⇒”：首先，假设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，即有上界 β 且有下界 α：

$$\alpha \leq a_n \leq \beta, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

注意，$-|\alpha| \leq \alpha$ 和 $\beta \leq |\beta|$。集合

$$\gamma := \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

Then

$$-\gamma \leq -|\alpha| \leq \alpha \leq a_n \leq \beta \leq |\beta| \leq \gamma, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

特别是，

$$a_n \le \gamma \text{ and } -a_n \le \gamma, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

由引理 5.8， $|a_n| \le \gamma$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$。

“⇐”：现在假设对于某个 $\gamma \ge 0$， $|a_n| \le \gamma$对每一个 $n \in \mathbb{N}$。那么，对于每一个 $n \in \mathbb{N}$，由引理 5.8， $\pm a_n \le \gamma$ 因此 $-\gamma \le a_n \le \gamma$。于是，数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界 γ 且有下界 $-\gamma$。因此， $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。 □

习题 6.3 证明，在例6.2(vii)中讨论的斐波那契数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $f_n \ge n-1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。 提示：使用强归纳法（见习题 2.23 ），并选取适当的 n_0。然后得出结论： $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 无界，因此不收敛。

解答。我们将对 $n_0 = 3$ 使用强归纳法。首先，我们直接处理 $n \in \{0,1,2\}$：
(i) 如果 $n = 0$，那么 $f_0 = 0 \ge -1 = 0-1$，符合要求。
(ii) 如果 $n = 1$，那么 $f_1 = 1 \ge 0 = 1-1$，符合要求。
(iii) 如果 $n = 2$，那么 $f_2 = 1 \ge 1 = 2-1$，符合要求。

现在我们开始进行实际的归纳法。
基础情形： 如果 $n = 3$，那么 $f_3 = 2 \ge 2 = 3-1$，符合要求。
归纳步骤： 设对于某个 $n \ge 3$，我们有 $f_k \ge k-1$ 对每一个 $k \in \{3,\dots,n\}$。注意，根据我们的前期工作，我们知道这实际上对每一个 $k \in \{0,1,\dots,n\}$ 都成立！因此我们得出

$$\begin{aligned} f_{n+1} = f_n + f_{n-1} &\ge (n-1) + \big((n-1)-1\big) && \text{(6.70a)}\\ &= 2n-3 && \text{(6.70b)}\\ &\ge n && \text{(6.70c)}\\ &= (n+1)-1, && \text{(6.70d)}\end{aligned}$$

其中（6.70c）之所以成立，恰恰是因为 $n \ge 3$。这就完成了归纳步骤的证明。
因此，根据强数学归纳原理，该命题得证。 □

练习 6.4 证明 $\dfrac{n}{2^n} \to 0$。 提示：练习 5.8。

解答。根据练习 5.8，对每一个 $n \ge 4$，

$$\frac{n^2}{2^n} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2^n} \le \frac{1}{n}.$$

现在令 $\varepsilon > 0$，并取 $N(\varepsilon) >$最大值 $\{4, \frac{1}{\varepsilon}\}$属于 $\mathbb{N}$。于是

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon, \quad \text{for every } n \ge N(\varepsilon).$$

或者，也可以使用夹逼定理！ □

习题 6.5 证明命题 6.13。

解答。“⇒”：假设 $\lim_{x\to a} f(x) = L$，并设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列，使得 $a_n \to a$，且对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \ne a$。现在令 $\varepsilon > 0$。根据极限的定义，存在 $\delta > 0$，使得$0 < |x-a| < \delta$ 蕴含 $|f(x) - L| < \varepsilon$。现在对于这个 δ，我们取 N，使得 $n \ge N$ 蕴含$|a_n - a| < \delta$。若 $n \ge N$，则 $0 < |a_n - a| < \delta$，因此 $|f(a_n) - L| < \varepsilon$。我们已经证明$f(a_n) \to L$。

“⇐”：我们用反证法。于是，假设存在某个 $\varepsilon > 0$，使得对每一个$\delta > 0$，都存在 x，满足 $0 < |x-a| < \delta$ 且 $|f(x) - L| \ge \varepsilon$。特别地，对于 $\delta = 1/(n+1)$，其中 $n \in \mathbb{N}$，我们找到 x_n，使得 $0 < |x_n - a| < 1/(n+1)$，但 $|f(x_n) - L| \ge \varepsilon$。注意，对于

如此生成的数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们有 $x_n \to a$ 且对于每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $x_n \neq a$。根据假设，对于充分大的 n，应有 $|f(x_n) - L| < \varepsilon$；然而，对于每一个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有 $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$——这简直荒谬！□

习题6.6 证明推论 6.18，直接使用收敛的定义。

解答。如果 $c = 0$，那么 $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛到 $0 = c\alpha$ 的常数数列。We thus 假设 $c \neq 0$。令 $\varepsilon > 0$。由于 $\varepsilon/|c| > 0$ 和 $a_n \to \alpha$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

由此可知，对每一个 $n \geq N$，我们有

$$|ca_n - c\alpha| = |c(a_n - \alpha)| = |c| \cdot |a_n - \alpha| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

如所需。□

习题6.7 直接使用收敛的定义证明推论 6.19。

解答。令 $\varepsilon > 0$。由于 $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ 和 $a_n \to \alpha$ 和 $b_n \to \beta$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 和 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \alpha| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

and

$$n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n - \beta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

令 $N := \max\{N_1, N_2\}$。那么对每一个 $n \geq N$，我们有

$$\begin{aligned} |c_n - (\alpha - \beta)| &= |(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)| = |(a_n - \alpha) + (\beta - b_n)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此，$c_n \to \alpha - \beta$。□

练习 6.8 使用极限运算法则，求数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$的极限，其中

$$a_n := \frac{7n^3 + 3n - 7}{2n^3 + 2n + 3}, \quad \text{where } n \in \mathbb{N}.$$

解答。除以 n^3 并按照例 6.22中的方法推理，我们可得对每一个 $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{7 + 3\frac{1}{n}\frac{1}{n} - 7\frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{2 + 2\frac{1}{n}\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n}} \to \frac{7 + 3\cdot 0\cdot 0 - 7\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{2 + 2\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 0\cdot 0} = \frac{7}{2}.$$

因此，极限$_{n\in\mathbb{N}}\, a_n = \frac{7}{2}$。□

练习 6.9（微积分中的极限的和法则）设 f 和 g 是定义在 $\mathbb{R} \setminus \{a\}$上的函数，且当 $x \to a$时，它们的极限分别为 L 和 M。证明微积分中的极限的和法则成立，即:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

提示：命题 6.13和定理 6.15。

解答。设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是复数域 $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ 中一个收敛到 a 的数列。根据命题 6.13，只需证明 $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to L + M$。现在，再根据命题 6.13，$f(x_n) \to L$ 且 $g(x_n) \to M$。由定理 6.15，$f(x_n) + g(x_n) \to L + M$，证毕。□

练习 6.10（微积分中的极限乘积法则）设 f 和 g 是定义在 $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ 上的函数，且当 $x\to a$ 时，它们的极限分别为 L 和 M。证明微积分中的极限乘积法则成立，即

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

提示：命题6.13和定理6.17。

解答。设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ 中收敛到 a 的数列。根据命题 6.13，只需证明 $(f\cdot g)(x_n)=f(x_n)\cdot g(x_n)\to L\cdot M$。现在，再次根据命题 6.13，$f(x_n)\to L$ 且 $g(x_n)\to M$。根据定理 6.17，$f(x_n)\cdot g(x_n)\to L\cdot M$，证毕。□

练习 6.11（微积分中的夹逼定理）设 f、g、h 是定义在 $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ 上的函数，使得对每一个 $x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$，都有 $f(x)\le g(x)\le h(x)$，并假设 $L=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)$。证明 $\lim_{x\to a}g(x)=L$。提示：命题 6.13 和定理 6.25。

解答。设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ 中的一个数列，且收敛于 a。根据命题 6.13，只需证明 $b_n:=g(x_n)\to L$。现在，根据假设，$a_n:=f(x_n)\le b_n=g(x_n)\le c_n:=h(x_n)$，并且再次根据命题 6.13，$a_n\to L$ 和 $c_n\to L$。由定理 6.25，$b_n\to L$，如所要求。□

习题 6.12 为数列 (a_n) 和 (b_n) 各举出满足下列每一项中 $a_n\to+\infty$ 和 $b_n\to 0$ 的例子。

(i) (a_nb_n) 发散到 $+\infty$。(ii) (a_nb_n) 发散到 $-\infty$。(iii) (a_nb_n) 无界，但既不发散到 $+\infty$，也不发散到 $-\infty$。(iv) (a_nb_n) 收敛于某个实数 γ，该实数可以预先任意选定。(v) (a_nb_n) 有界但不收敛。

这说明了为什么很难定义乘积 $0\cdot\infty$。

解答。可能有许多例子。下面给出一组能够满足要求的例子。

(i) $a_n=n^2$ 且 $b_n=\frac{1}{n}$ 对于 $n\ge1$。那么 $a_nb_n=n\to+\infty$。(ii) $a_n=n^2$ 且 $b_n=-\frac{1}{n}$ 对于 $n\ge1$。那么 $a_nb_n=-n\to-\infty$。(iii) $a_n=n^2$ 且 $b_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ 对于 $n\ge1$。那么 $a_nb_n=(-1)^n n$。(iv) $a_n=n$ 且 $b_n=\gamma\frac{1}{n}$ 对于 $n\ge1$。那么 $a_nb_n=\gamma$。(v) $a_n=n$ 且 $b_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ 对于 $n\ge1$。那么 $a_nb_n=(-1)^n$。

□

习题6.13 证明定理 6.29。

解答。设 $a_n\to+\infty$。（当 $a_n\to-\infty$ 时，证明类似。）对于 $\gamma=0$，存在$n_0\in\mathbb{N}$，使得只要 $n\ge n_0$，就有 $a_n>0$。由此可知，数列 $(1/a_n)_{n\ge n_0}$ 是一个定义良好的正实数数列。现在令 $\varepsilon>0$。由于 $a_n\to+\infty$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $a_n>\frac{1}{\varepsilon}$，对每一个 $n\ge N$均成立。因此，对于每一个 $n\ge N$，都有

$$\left|\frac{1}{a_n}-0\right|=\frac{|1|}{|a_n|}=\frac{1}{a_n}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

□

习题6.14 证明定理 6.30 当数列仅含正项时 .

解答。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个正数数列。另假设 $a_n\to0$。我们必须证明 $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散至 $+\infty$。为此，令 $\gamma>0$。那么 $\varepsilon:=1/\gamma>0$。由于 $a_n\to0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得若 $n\ge N$，则 $a_n=|a_n|=|a_n-0|<\varepsilon$；因此 $1/a_n>1/\varepsilon=\gamma$，证毕。

□

习题 6.15 用数学归纳法证明（6.60）。

解答。待证命题为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1},\quad \text{for every integer } n\geq 1.$$

将相应的命题记作 $S(n)$。

基础情形：当 $n=1$, $S(n)$ 表示 $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$.✓

归纳步骤：假设 $S(n)$ 对某个整数 $n\geq 1$成立。那么，利用 (6.71b) 中的归纳假设，我们得到

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{6.71a}$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{6.71b}$$

$$=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{6.71c}$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \tag{6.71d}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \tag{6.71e}$$

$$=\frac{n+1}{n+2}, \tag{6.71f}$$

这验证了命题 $S(n+1)$。因此，根据数学归纳法原理，证明完毕。□

习题6.16 求下列各无穷级数的极限。

(i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$。

(ii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\mp\cdots$。

解答。这两个级数都是几何级数$\sum_{k=0}^{\infty}x^k$，其中 $x=\pm\frac{1}{2}$。由定理6.33可知，它们的极限为 $1/(1\mp\frac{1}{2})$。因此，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$ 且 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\pm\cdots=\frac{2}{3}$。□

习题6.17 将 $1.23455555\ldots=1.2345$ 化为分数。

解答。令 $x:=1.2345$。然后，利用几何级数，

$$\begin{aligned}x&=1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{5}{10000}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\right)\\&=1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{5}{10000}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{5}{1000}\frac{1}{10-1}\\&=1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{5}{1000}\frac{1}{9}=\frac{9000}{9000}+\frac{2\cdot 900}{9000}+\frac{3\cdot 90}{9000}+\frac{4\cdot 9}{9000}+\frac{5}{9000}\\&=\frac{9000+1800+270+36+5}{9000}=\frac{11111}{9000}.\end{aligned}$$

□

习题 6.18 设 α 和 β 为实数。定义数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如下:

$$a_0 := \alpha, \quad a_1 := \beta, \quad a_n := \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}, \text{ for every } n \geq 2.$$

证明 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，并求其极限。
提示: 对每一个整数 $k \geq 0$，我们有 $a_{k+1} - a_k = (-1/2)^k(\beta - \alpha)$。
解答。提示中的恒等式很容易用关于 $k \geq 0$ 的归纳法证明。事实上，当 $k = 0$ 时，该恒等式显然成立。

现在假设该恒等式对某个整数 $k \geq 0$ 成立。那么

$$\begin{aligned} a_{(k+1)+1} - a_{k+1} = a_{k+2} - a_{k+1} &= \frac{a_k + a_{k+1}}{2} - a_{k+1} = \frac{a_k - a_{k+1}}{2} \\ &= (-1/2)(a_{k+1} - a_k) = (-1/2)(-1/2)^k(\beta - \alpha) = (-1/2)^{k+1}(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

因此，根据数学归纳法原理，该恒等式对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。
因此，对每一个 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = \alpha + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \alpha + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-1}{2}\right)^k(\beta - \alpha) \\ &\to \alpha + \frac{2}{3}(\beta - \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-(-1/2)}(\beta - \alpha) = \alpha + \frac{2}{3}(\beta - \alpha) = \frac{\alpha + 2\beta}{3}. \end{aligned}$$

□

习题 6.19 令 $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 对每一个 $n \geq 1$，由此得到调和数数列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$。证明

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} h_k = 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{h_{n+1}}{n}, \quad \text{for every } n \geq 1.$$

解答。要证明的命题是

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} h_k = 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{h_{n+1}}{n}, \quad \text{for every } n \geq 1.$$

将此命题记为 $S(n)$。
基础情形: 当 $n = 1$ 时， $S(n)$ 化为 $0 = 2 - \frac{1}{1+1} - \frac{3}{2}$.✓ **归纳步骤**: 假设
对于某个整数 $n \geq 1$， $S(n)$ 正确 。然后

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k} h_k &= \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} h_k\right) + \frac{1}{(n+1)n} h_{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{h_{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1)n} h_{n+1} \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)n}\right) h_{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} h_{n+1} \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(h_{n+2} - \frac{1}{n+2}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{n+1} h_{n+2} \\ &= 2 - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} h_{n+2} = 2 - \frac{1}{(n+1)+1} - \frac{h_{(n+1)+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

因此，根据数学归纳法原理，该恒等式对所有 $n \geq 1$ 均成立。 □

习题 6.20 用强归纳法证明，例f_n中的斐波那契数列（$_{n\in\mathbb{N}}$ 所讨论的6.2(vii)满足

$$\sqrt{5} f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$。

解答。**基础情形：**当 $n = 0$ 时，该恒等式变为 $0 = 0$，这显然成立。当 $n = 1$ 时，该恒等式变为 $\sqrt{5} \cdot 1 = \sqrt{5} = (1+\sqrt{5})/2 - (1-\sqrt{5})/2$，这也成立。

归纳步骤：假设对于某些 $n-1$ 和 n，且 $n \geq 1$，该恒等式成立。于是，利用

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

以及

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} f_{n+1} &= \sqrt{5}(f_{n-1} + f_n) = \sqrt{5} f_{n-1} + \sqrt{5} f_n \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},
\end{aligned}$$

如所需。这就完成了归纳步骤的证明。

因此，根据强数学归纳原理，该公式得证 . □

习题 6.21 解释为什么对所有 n 足够大的情况，我们可以通过以下方法计算斐波那契数 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$(见例 6.2(vii))：

$$f_n = \text{round}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

其中 round(x) 返回距离 x 最近的整数。 提示： 习题 6.20

解答。根据习题 6.20，对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

现在注意到 $(1-\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5} < 4$，因为 $\sqrt{5} > 1$。由此可得

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1.$$

因此，由例题 6.12 （几何序列）和推论 6.18 （常数倍法则）可得

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0.$$

因此，

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (\text{a sequence converging to } 0).$$

最终，趋于 0 的数列的绝对值会小于 < 0.5；从那时起，由于显然所有斐波那契数都是整数，结论便成立。

注意：这个近似实际上对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有效——用 Maple 或你的计算器试试看！□

习题 6.22 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $]0,1[$ 中的一个数列，并定义数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $b_0 = a_0$ 且

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}b_n}{a_{n+1} + b_n - a_{n+1}b_n}, \quad \text{for every } n \geq 1. \tag{6.72}$$

证明

$$b_n = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{n} 1/a_i\right) - n}, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{6.73}$$

解答。我们用归纳法证明这一点。

基础情形：当 $n = 0$ 时，(6.73) 表示 $b_0 = 1/(1/a_0 - 0) = a_0$. ✓**归纳步骤**：假设对于某个整数 $n \in \mathbb{N}$，(6.73) 正确。那么

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i} = n + \frac{1}{b_n}.$$

因此

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{a_i} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}\right) + \frac{1}{a_{n+1}} \tag{6.74a}$$

$$= n + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{a_{n+1}}. \tag{6.74b}$$

另一方面，由 (6.72)，

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + b_n - a_{n+1}b_n}{a_{n+1}b_n} = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{a_{n+1}} - 1. \tag{6.75}$$

结合 (6.74) 和 (6.75)，得到

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{a_i} = n + 1 + \frac{1}{b_{n+1}}.$$

解出 b_{n+1}，恰好得到将 n 替换为 $n+1$ 的 (6.73)。

Th因此，根据数学归纳法原理，该恒等式对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立 . □

习题 6.23 参见习题 6.22 并假设 $a_n = (1/2)^n$。求 (i) b_n的一个简单公式，以及 (ii) 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, b_n$。

解答。令 $\alpha \in]0,\ 1[$ 并假设 $a_n = \alpha^n$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$。于是

$$\sum_{i=0}^{n} 1/a_i = \sum_{i=0}^{n} (1/\alpha)^i = \frac{1-(1/\alpha)^{n+1}}{1-(1/\alpha)}$$

根据定理 2.6。因此

$$b_n = \frac{1}{\frac{1-(1/\alpha)^{n+1}}{1-(1/\alpha)} - n}$$

在我们当前的问题中， $\alpha = 1/2$ 因此 $1/\alpha = 2$。于是得到

$$b_n = \frac{1}{\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - n} = \frac{1}{2^{n+1} - (n+1)},$$

由此得到 (i)。接下来，二项式定理给出

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = n + n(n-1)/2.$$

将此用于 $n+1$ 而非 n，我们得到 $2^{n+1} - (n+1) \geq n(n+1)/2$ 从而 th at

$$0 \leq b_n = \frac{1}{2^{n+1} - (n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)/2} = \frac{2}{n(n+1)} \to 0,$$

由此得到 (ii)。 □

习题 6.24 证明命题 6.26。

解答。设 $\varepsilon > 0$。由于 $a_n \to \alpha$，由定义，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得（$\forall n \geq N$） $|a_n - \alpha| < \varepsilon$。另一方面，（$\forall n \geq N$） $||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha|$ 由推论 5.10。综合起来，（$\forall n \geq N$） $||a_n| - |\alpha|| < \varepsilon$ 这表明 $|a_n| \to |\alpha|$。 □

习题 6.25 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的数列，且 $a_n \to \alpha$。证明 $\max\{a_n, 0\} \to \max\{\alpha, 0\}$。提示：引理 5.12 与命题 6.26。

解答。引理 5.12 表明

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \max\{x, 0\} = \frac{x + |x|}{2}.$$

利用极限运算法则（定理 6.15 与推论 6.18）以及命题 6.26，可知

$$\max\{a_n, 0\} = \frac{a_n + |a_n|}{2} \to \frac{\alpha + |\alpha|}{2} = \max\{\alpha, 0\},$$

如所断言。 □

习题 6.26 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的数列，且 $a_n \to \alpha$ 以及 $b_n \to \beta$。证明 $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{\alpha, \beta\}$。提示：引理 5.12 与命题 6.26。

解答。引理 5.12 表明

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad \max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

利用极限运算法则（定理 6.15 和推论 6.18）以及命题 6.26，我们可得

$$\max\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2} \to \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \max\{\alpha, \beta\},$$

正如所要证明的。 □

习题 6.27（关于逻辑斯蒂序列的补充） 设 $r \in [0, 1]$，设 $x_0 \in [0, 1]$，并通过下式定义逻辑斯蒂序列：

$$x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$。证明 $x_n \to 0$。提示：分类讨论。若使用数学归纳法和习题 5.24，这个棘手的情形其实很容易。

解答。通过简单的数学归纳法可得 $x_n \in [0,1]$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$。

如果 $r = 0$，那么显然 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, 0, 0, 0, \ldots\ldots)$ 收敛于 0。

因此，假设 $0 < r \leq 1$。如果 $x_0 = 0$，那么 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \ldots\ldots)$ 显然收敛于 0。因此我们还假设 $x_0 > 0$。我们用数学归纳法证明

$$x_n \leq \frac{x_0}{nx_0 + r^{-n}} \tag{6.76}$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$。基础情形显然成立，因为

$$x_0 = \frac{x_0}{0+1} = \frac{x_0}{0 \cdot x_0 + r^{-0}}.$$

现在假设对于某个整数 $n \geq 0$，我们有

$$x_n \leq \frac{x_0}{nx_0 + r^{-n}}.$$

根据习题 5.24,

$$x_{n+1} \leq \frac{x_0}{(n+1)x_0 + r^{-(n+1)}}.$$

Th完成了归纳步骤，因此（6.76）得证。注意，（6.76）意味着

$$0 \leq x_n \leq \frac{x_0}{nx_0 + r^{-n}} \leq \frac{x_0}{nx_0} = \frac{1}{n} \to 0.$$

因此 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 根据夹逼定理（定理 6.25）收敛到 0。 □

习题 6.28（关于逻辑斯蒂序列的更多内容）设 $x_0 \in \mathbb{R}$，满足 $|x_0| \geq 4$，并通过下式定义逻辑斯蒂序列（其中 $r = 1$）：

$$x_{n+1} = (1 - x_n)x_n.$$

证明 $x_n \to -\infty$。 提示：习题 5.25。

解答。首先，我们用归纳法证明

$$x_n \leq -4 \cdot 3^n \tag{6.77}$$

对每一个整数 $n \geq 1$。

由习题 5.25，我们得到

$$x_1 = (1 - x_0)x_0 = -x_0^2 + x_0 \leq -3|x_0| \leq -3 \cdot 4 = -4 \cdot 3^1$$

因此基础情形成立。

现在假设 $n \geq 1$ 是一个满足 $x_n \leq -4 \cdot 3^n$的整数。那么 $x_n < 0$ 因此 $|x_n| = -x_n \geq 4 \cdot 3^n \geq 4$ 而习题 5.25 现在给出

$$\begin{aligned} x_{n+1} = (1 - x_n)x_n = -x_n^2 + x_n \leq -3|x_n| = -3(-x_n) \\ = 3x_n \leq 3\big(-4 \cdot 3^n\big) = -4 \cdot 3^{n+1} \end{aligned}$$

这就完成了归纳步骤的证明。

我们已验证（6.77），结论随即成立。 □

习题6.29（由你来批改！）考虑以下命题

"If $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence and $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $|a_n| \to |\alpha|$, then $a_n \to \alpha$."

以及以下"证明":

设 $\varepsilon > 0$。因为 $|a_n| \to |\alpha|$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $n \geq N \Rightarrow \big||a_n| - |\alpha|\big| < \varepsilon$。
由此可得 $|a_n - \alpha| \leq \big||a_n| - |\alpha|\big| < \varepsilon$，从而 $a_n \to \alpha$。

为什么这个证明是错的?

解答。最后一行是错的：我们通常并没有 $|a_n - \alpha| \leq \big||a_n| - |\alpha|\big|$，不等式的方向反了!

该命题的一个反例是数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\alpha = 1$。 □

练习 6.30（真或假?）判断下列每个命题是真还是假。简要说明你的理由。

(i) “如果 $a_n \to \alpha$、$b_n \to \beta$ 和 $a_n < b_n$，那么 $\alpha < \beta$。” (ii) “如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛数列，那么 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 是一个收敛级数。” (iii) “如果 $p(x)$ 是一个多项式且 $a_n \to \alpha$，那么 $p(a_n) \to p(\alpha)$.” (iv) “如果 $a_n \to \alpha \neq 0$，那么 $(a_n/|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。”

解答。(i)：假：考虑 $a_n = 0 \to 0 = \alpha$ 和 $b_n = 1/2^n \to \beta = 0$。(ii)：假：$a_n \equiv 1 \to 1$，但 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 发散到 $+\infty$。(iii)：正确：这可由极限运算法则推出。(iv)：正确：首先假设 $\alpha > 0$。那么最终 a_n 是正的，因此 $a_n/|a_n| = 1$。因此，在这种情况下，$a_n/|a_n| \to 1$。而如果 $\alpha < 0$，那么 $a_n/|a_n| \to -1$。□

第7章
完备性公理

7.1 关于 $\sqrt{2}$的问题

古希腊人早已知道 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ——这个证明是运用反证法的绝妙例子。

定理 7.1（$\sqrt{2}$ 是无理数）不存在有理数 x 使得 $x^2 = 2$.

证明。反设存在 $x \in \mathbb{Q}$ 使得 $x^2 = 2$，记作

$$x = \frac{m}{n}, \quad \text{where } m \in \mathbb{Z} \text{ and } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{and} \quad x^2 = 2, \tag{7.1}$$

并且我们假设该分数为最简形式（除 ± 1 之外的所有公因子都已约去）。于是 $2 = x^2 = m^2/n^2$，因此

$$2n^2 = m^2. \tag{7.2}$$

这意味着 m^2 是偶数。因此， m 是偶数（见习题7.3），设

$$m = 2k, \quad \text{for some integer } k. \tag{7.3}$$

但这样一来，等式 $2n^2 = m^2$ 就变成了 $2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$。因此， $n^2 = 2k^2$，所以 n^2 是偶数。再次推得 n 是偶数，设

$$n = 2l, \quad \text{for some integer } l. \tag{7.4}$$

但现在 m 和 n确实有一个公因子，即 2——矛盾! □

因此， $\sqrt{2}$ 的存在性并不能从此前任何域公理中推出。还需要最后一条公理，即所谓的完备性公理。要精确表述它，需要引入关于数列的新概念。

7.2 柯西序列与完备性公理

定义 7.2（柯西序列）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列。那么 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个**柯西序列**，如果

对每一个 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 m， n 属于 $\mathbb{N}$ $[m \geq N$ 且 $n \geq N] \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$。

定理 7.3 每个收敛数列也是柯西序列。

证明。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛数列，其极限为 ℓ。设 $\varepsilon > 0$。由于 $\varepsilon/2 > 0$，存在$N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{for all } n \geq N. \tag{7.5}$$

由此可得，对所有 $n \geq N$ 和 $m \geq N$，我们有

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - \ell) + (\ell - a_m)| \\ &\leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| \\ &= |a_n - \ell| + |a_m - \ell| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

如所要求。 □

定义7.4（完备性公理） 实数是**完备**的，即 $\mathbb{R}$中的每一个柯西序列实际上都是收敛的。

这是一个极其重要的性质。它在不提及极限的情况下刻画了收敛，这在应用中至关重要，因为人们通常事先并不知道问题的解答是什么。我们顺便指出，可以证明，每一个具有阿基米德性质的完备有序域本质上与实数无法区分。此外，可以将实数构造为有理数的柯西序列的等价类，但这是一个相当冗长的过程。

7.3 实数的级数展开

作为第一个应用完备性公理，我们看到十进制展开给出实数。事实上，这对任意底都成立，而不仅仅是通常的底10。

定理7.5 设 b 是满足 $b \geq 2$的整数，并设 $k \in \mathbb{N}$。假设对所有 $n \geq -k$，我们有 $a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$，即 a_n 是相对于底 b的数字。则

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n} \tag{7.6}$$

是一个柯西序列，因而收敛于一个实数。

证明。定义部分和

$$s_n := \sum_{l=-k}^{n} a_l b^{-l}, \quad \text{for every integer } n \geq -k. \tag{7.7}$$

我们将证明 $(s_n)_{n\geq -k}$ 是柯西序列。令 $\varepsilon > 0$。由于 $0 < 1/b < 1$，所以 $1/b^n \to 0$根据例 6.12(i)，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\text{for all } n \geq N, \text{ we have } b^{-n} < \varepsilon. \tag{7.8}$$

现在令 $n \geq m \geq N \geq -k$。然后，利用定理 2.6 和（7.8），

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{l=m+1}^{n} a_l b^{-l} \right| = \sum_{l=m+1}^{n} a_l b^{-l} \leq \sum_{l=m+1}^{n} (b-1) b^{-l} = \sum_{l=0}^{n-m-1} (b-1) b^{-(l+m+1)} \tag{7.9a}$$

$$= (b-1) b^{-m-1} \sum_{l=0}^{n-m-1} (1/b)^l = (b-1) b^{-m-1} \frac{1 - (1/b)^{n-m}}{1 - (1/b)} \tag{7.9b}$$

$$< (b-1)b^{-m-1}\frac{1}{1-(1/b)} = (b-1)b^{-m}\frac{1}{b\big(1-(1/b)\big)} = b^{-m} \tag{7.9c}$$

$$< \varepsilon, \tag{7.9d}$$

这正是所需的。 □

注 7.6 如果 $b = 10$，我们就得到熟悉的十进制展开。计算机科学中常用的是二进制展开，即 $b = 2$。巴比伦人喜欢使用 $b = 60$，因为 60 可以被 2、3、4、5、6、10、12、15、20和 30 整除。

前一个结果的逆命题也正确。

定理 7.7 设 b 是一个整数，且 $b \geq 2$。那么，每个实数都可以有一个以 b 为底的级数展开。

证明。证明是算法式的，我们将展示如何进行。设 $x \geq 0$ （否则，对 $-x$ 应用接下来的方法，然后取其负数）。设 $k \geq 0$ 是满足以下条件的最小整数

$$0 \leq x < b^{k+1}; \tag{7.10}$$

注意，根据定理 5.17， k 确实存在。现在我们构造一个数字序列（a_l）$_{l\geq -k}$ 属于 $\{0, 1, \ldots, b–1\}$，使得对每一个 $n \geq -k$ 以及

$$x_n := \sum_{l=-k}^{n} a_l b^{-l}, \tag{7.11}$$

我们有

$$x_n \leq x < x_n + b^{-n}. \tag{7.12}$$

基础情形：考虑不等式

$$0 = 0 \cdot b^k < 1 \cdot b^k < \cdots < (b-1) \cdot b^k < b \cdot b^k = b^{k+1}, \tag{7.13}$$

由此产生区间 $\big[0, b^{k+1}\big[$ 的一个划分，分成 b 个子区间 $\big[0, b^k\big[$，$\big[b^k, 2b^k\big[$，.....，$\big[$（$b-1$）b^k，$b^{k+1}\big[$。鉴于（7.10），存在唯一的整数 $a_{-k} \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ 使得

$$x_{-k} = a_{-k}b^k \leq x < (a_{-k}+1)b^k = x_{-k} + b^k. \tag{7.14}$$

归纳步骤：假设对某个 $n \geq -k$，数 a_{-k}，.....，a_n 已经构造出来，使得（7.11）成立，并且

$$x_n \leq x < x_n + b^{-n}. \tag{7.15}$$

我们考虑不等式

$$x_n < x_n + b^{-n-1} < x_n + 2b^{-n-1} < \cdots < x_n + bb^{-n-1} = x_n + b^{-n}, \tag{7.16}$$

由此产生区间 $[x_n, x_n + b^{-n}[$ 的一个划分，分成 b 个子区间

$$\big[x_n, x_n + b^{-n-1}\big[, \tag{7.17a}$$

$$\big[x_n + b^{-n-1}, x_n + 2b^{-n-1}\big[, \tag{7.17b}$$

$$\vdots \tag{7.17c}$$

$$\big[x_n + (b-1)b^{-n-1}, x_n + b^{-n}\big[. \tag{7.17d}$$

As 由（7.15），存在唯一的整数 $a_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ 使得 at

$$x_n + a_{n+1}b^{-n-1} \leq x < x_n + a_{n+1}b^{-n-1} + b^{-n-1}. \tag{7.18}$$

现在令 $x_{n+1} = x_n + a_{n+1}b^{-n-1}$，即可得到所需结果。

因此，根据数学归纳法原理，（7.12）对所有 $n \geq -k$均成立，并且显然有

$$|x_n - x| = |x - x_n| = x - x_n < b^{-n}. \tag{7.19}$$

因此，$\lim_n x_n = x$，从而

$$x = \sum_{l=-k}^{\infty} a_l b^{-l}, \tag{7.20}$$

这就是关于 b 的所述级数展开。 □

注 7.8 最后两个结果使我们能够将实数与通常的（无穷）级数展开对应起来。注意，定理 7.7 的一个推论是，每个实数都可以用有理数任意精确地逼近（因为展开式的部分和都是有理数）。

7.4 子序列与博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理

定义 7.9（子序列） 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数数列，并设

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \tag{7.21}$$

是一个严格递增的非负整数序列。那么数列

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = \big(a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots\big) \tag{7.22}$$

是数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个 **子序列**。

命题 7.10 设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是复数域 $\mathbb{R}$ 中的一个数列，满足 $a_n \to \ell$，并设$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$的一个子序列。那么$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 也收敛于 ℓ。

证明。设 $\varepsilon > 0$。由于 $a_n \to \ell$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$k \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_k - \ell| < \varepsilon. \tag{7.23}$$

显然，对每一个 $k \in \mathbb{N}$，$k \leq n_k$。因此，若 $k \geq N$，则有 $n_k \geq k \geq N$，从而$|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$。□

定理 7.11（博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理） 设$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界实数序列。那么$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个收敛子序列。

证明。由于 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，存在 α 和 β 属于 $\mathbb{R}$，使得

$$\alpha \leq x_n \leq \beta, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{7.24}$$

现在考虑区间

$$[\alpha_0, \beta_0] := [\alpha, \beta] := \big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; \alpha \leq x \leq \beta\big\}. \tag{7.25}$$

我们对 k使用归纳法，构造一个（嵌套的）区间数列 $\big([\alpha_k, \beta_k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对每一个 $k \in \mathbb{N}$，以下条件都成立：

(i) $[\alpha_k, \beta_k]$ 包含数列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的无穷多项。(ii) $[\alpha_k, \beta_k] \subseteq [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ 对 $k \geq 1$成立。(iii) $\beta_k - \alpha_k = 2^{-k}(\beta - \alpha)$。

基础情形： 当 $k = 0$时，我们令 $\alpha_0 = \alpha$ 和 $\beta_0 = \beta$。显然，(i) 和 (iii) 成立（而且我们不必担心 (ii)，因为只有在 $k \geq 1$ 时才会提出这一项）。

归纳步骤： 假设已构造出 $[\alpha_k, \beta_k]$，且具有性质 (i)–(iii)，其中 $k \in \mathbb{N}$。令$\mu := (\alpha_k + \beta_k)/2$, 它是区间 $[\alpha_k, \beta_k]$的中点。由于 $[\alpha_k, \beta_k]$ 包含了 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的无限多项，因此区间 $[\alpha_k, \mu]$ 和 $[\mu, \beta_k]$ 中至少有一个也包含该数列的无限多项。现在令

$$[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] := \begin{cases} [\alpha_k, \mu], & \text{if } [\alpha_k, \mu] \text{ contains infinitely many terms of } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}; \\ [\mu, \beta_k], & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7.26}$$

显然， $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ 满足(i)–(iii) 其中 k 替换为 $k+1$。

构造出这些区间后，我们现在再通过归纳法构造 $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$（$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列，使得对每一个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $x_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k]$。

基础情形： 令 $x_{n_0} = x_0$。由于 $\alpha \le x_0 \le \beta$，我们有 $x_{n_0} \in [\alpha_0, \beta_0]$。

归纳步骤： 假设对于某个$k \in \mathbb{N}$， $x_{n_0}, \ldots, x_{n_k}$ 已按所需性质构造完成。由于 $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ 包含数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的无限多项，存在 $n > n_k$使得 $x_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$。令 $n_{k+1} := n$。于是 $x_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$，正如所需。

现在我们将 证明 $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛。只需证明 $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是柯西数列。令 $\varepsilon > 0$。由于 $1/2^n \to 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\beta - \alpha}{2^N} < \varepsilon. \tag{7.27}$$

现在令 k 和 l 为整数 $\ge N$。那么

$$x_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k] \subseteq [\alpha_N, \beta_N] \quad \text{and} \quad x_{n_l} \in [\alpha_l, \beta_l] \subseteq [\alpha_N, \beta_N]. \tag{7.28}$$

因此，$|x_{n_k} - x_{n_l}| \le$区间 $[\alpha_N, \beta_N] = 2^{-N}(\beta - \alpha)$ 的长度 $< \varepsilon$。 □

定义 7.12（聚点）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列，且 $c \in \mathbb{R}$。那么， c 是 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的**聚点**[1]，当且仅当 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的某个子序列收敛到 c。

因此，博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理指出，每个有界数列都有一个聚点。

例7.13 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有两个聚点： -1 和 $+1$，因为显然 $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \to 1$ 且 $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \to -1$。这个数列没有其他聚点。

例7.14 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ 没有聚点。事实上， $n \to +\infty$，$(n)_{n\in\mathbb{N}}$的每个子序列也都如此。

例7.15 由下式定义的数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{if } n \text{ is odd;} \\ n, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \tag{7.29}$$

是无界的（因为 $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (2k)_{k\in\mathbb{N}}$ 发散至 $+\infty$）；然而 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 恰好有一个聚点，即 0（因为 $a_{2k+1} = 1/(2k+1) \to 0$）。

7.5 单调数列

定义7.16 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列。我们称：

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是递增的，如果对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $a_n \le a_{n+1}$；(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是严格递增的，如果对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $a_n < a_{n+1}$；(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是递减的，如果对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $a_n \ge a_{n+1}$；

[1] 也称为**聚点**或**极限点**（a_n）$_{n\in\mathbb{N}}$。

(iv) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是严格递减的，如果对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $a_n > a_{n+1}$。

如果数列满足上述性质之一，则称其为**单调**数列。

下一个结果至关重要，因为它提供了一种构造收敛数列的有效方法。

定理 7.17（有界单调收敛定理）每个有界的实数单调数列都收敛。

证明。设$a_{nn\in\mathbb{N}}$ 是一个有界单调数列，不妨设它递增。根据博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理（定理 7.11），$a_{nn\in\mathbb{N}}$ 存在一个收敛子序列，记作$a_{n_k} \to \ell$。现在证明整个数列收敛于 ℓ。

为此，设 $\varepsilon > 0$。那么存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得

$$k \geq K \quad \Rightarrow \quad |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon. \tag{7.30}$$

令集合 $N := n_K$。对每一个整数 $n \geq N$，存在一个整数 $k \geq K$ 使得 $n_k \leq n < n_{k+1}$。由于 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 递增，我们有

$$\ell - \varepsilon < a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_{k+1}} < \ell + \varepsilon; \tag{7.31}$$

因此，$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$。 □

习题

回顾一下　整数 a 是偶数，当且仅当 $a = 2b$，其中 $b \in \mathbb{Z}$；而 a 是奇数，当且仅当 $a = 2b + 1$，其中 $b \in$　$\mathbb{Z}$.

练习 7.1 证明：如果 m是偶数，那么 m^2 也是偶数。

解答。假设 m 是偶数，设 $m = 2k$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。那么 $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$。由于 $2k^2 \in \mathbb{Z}$，可知 m^2 是偶数。□

练习 7.2 证明：如果 m 是奇整数，那么 m^2 也是奇数。

解答。假设 m 是奇整数，设 $m = 2k + 1$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。那么 $m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$。由于 $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$，可知 m^2 是奇数。□

习题7.3 证明：如果 m 是一个满足 m^2 为偶数的整数，那么 m 也是偶数。提示：证明其逆否命题。

解答。假设 m 不是偶数。那么 m 是奇数，设为 $m = 2k + 1$，其中 $k \in \mathbb{Z}$是某个整数。因此，$m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ 是奇数，因为 $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$，所以 m^2 不是偶数。□

练习 7.4 证明：如果 m 是一个整数，且 m^2 是奇数，那么 m 也是奇数。提示：证明逆否命题。

解答。假设 m 不是奇数。那么 m是偶数，设为 $m = 2k$，其中 $k \in \mathbb{Z}$是某个整数。因此，$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$是偶数，因为 $2k^2 \in \mathbb{Z}$，这说明 m^2 不是奇数。□

习题 7.5 证明：如果 m 是一个整数，且 m^2 能被 3 整除，那么 m 必须能被 3 整除。提示：证明逆否命题。

解答。假设 m 不能被 3 整除。那么我们将 m 写成 $m=3k\pm1$，其中 $k\in\mathbb{Z}$。由此可得

$$m^2=(3k\pm1)^2=(3k)^2\pm2\cdot3k+1=3\big(3k^2\pm2k\big)+1$$

不能被 3 整除（余数为 1）。 □

习题 7.6 证明不存在有理数 x 使得 $x^2=3$。 提示： 可以使用习题 7.5。

解答。反设存在 $x\in\mathbb{Q}$ 使得 $x^2=3$，设

$$x=\frac{m}{n},\quad \text{where } m\in\mathbb{Z} \text{ and } n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\quad \text{and}\quad x^2=3,$$

并假设该分数已化为最简形式（除 ±1 外，所有公因子都已约去）。那么 $3=x^2=m^2/n^2$，因此

$$3n^2=m^2.$$

由习题 7.5可知 m 能被 3 整除，设

$$m=3k,\quad \text{for some integer } k.$$

但此时等式 $3n^2=m^2$ 变为 $3n^2=(3k)^2=9k^2$。因此， $n^2=3k^2$。再次根据习题7.5，可得

$$n=3l,\quad \text{for some integer } l.$$

但现在 m 与 n确实有一个非平凡的公因子，即 3——矛盾！ □

习题 7.7 证明：若 m 是一个整数，且 m^2 能被 5 整除，则 m 必定能被 5 整除。提示：证明其逆否命题。

解答。假设 m 不能被 5 整除。

情形 *1*： $m=5k\pm1$，其中 $k\in\mathbb{Z}$。

由此可得

$$m^2=(5k\pm1)^2=(5k)^2\pm2\cdot5k+1=5\big(5k^2\pm2k\big)+1$$

不能被 5 整除（其余数为 1）。

情形 *2*： $m=5k\pm2$，其中 $k\in\mathbb{Z}$。

由此可得

$$m^2=(5k\pm2)^2=(5k)^2\pm4\cdot5k+4=5\big(5k^2\pm4k\big)+4$$

不能被 5 整除（其余数为 4）。 □

练习 7.8 证明不存在有理数 x 使得 $x^2=5$。 提示：你可以使用习题 7.7。

解答。反设存在 $x\in\mathbb{Q}$ 使得 $x^2=5$，即

$$x=\frac{m}{n},\quad \text{where } m\in\mathbb{Z} \text{ and } n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\quad \text{and}\quad x^2=5,$$

并且我们假设该分数已化为最简形式（除 ±1 外，所有公因子都已约去）。于是 $5=x^2=m^2/n^2$，因此

$$5n^2=m^2.$$

由习题 7.7可知， m 能被 5 整除，设

$$m=5k,\quad \text{for some integer } k.$$

但这样一来，等式 $5n^2 = m^2$ 就变成了 $5n^2 = (5k)^2 = 25k^2$。因此， $n^2 = 5k^2$。再次由习题7.7可知，

$$n = 5l, \quad \text{for some integer } l.$$

但是现在 m 和 n 确实有一个非平凡公因子，即 5——矛盾！ □

练习 7.9 证明 $0.49999\ldots = 0.49$ 等于 0。$5\overline{0}$。

解答。利用几何级数，我们计算得

$$\begin{aligned} 0.4\overline{9} &= \frac{4}{10} + \frac{9}{100}\Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\Big) = \frac{4}{10} + \frac{9}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{9}{100-10} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{9}{90} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = 0.5, \end{aligned}$$

如所述。 □

习题7.10 证明 $0.9999\ldots = 0.9$ 等于 1。$\overline{\ }$

解答。利用几何级数，我们计算得

$$0.\overline{9} = \frac{9}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\Big) = \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10}\frac{1}{\frac{9}{10}} = 1,$$

正如所要证明的。 □

习题7.11 证明 $0.3333\ldots = 0.3$ 等于 $1/3$。$\overline{\ }$

解答。利用几何级数，我们计算得

$$0.\overline{3} = \frac{3}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\Big) = \frac{3}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10}\frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3},$$

正如所要证明的。 □

习题7.12 证明 $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots$，即 $1/3$ 的二进制展开为 0.01。$\overline{\ }$

解答。确实，利用几何级数，我们得到

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} + \cdots = \tfrac{1}{4}\big(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} + \cdots\big) = \tfrac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3},$$

如所述。 □

练习 7.13 证明 $\frac{1}{3} = \frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \frac{2}{343} + \cdots$，即 $1/3$ 的七进制展开为 0.2。$\overline{\ }$

解答。确实，利用几何级数，我们得到

$$\tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{49} + \tfrac{2}{343} + \cdots = \tfrac{2}{7}\big(1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7^2} + \cdots\big) = \tfrac{2}{7}\frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \tfrac{2}{7}\frac{1}{\frac{6}{7}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

如所述。 □

练习 7.14 证明 $\frac{1}{3} = \frac{2}{8} + \frac{5}{64} + \frac{2}{512} + \frac{5}{4096} + \cdots$，即 $1/3$ 的八进制（八进制）展开为 0.25。

解答。事实上，利用几何级数，我们得到

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{8}+\tfrac{5}{64}+\tfrac{2}{512}+\tfrac{5}{4096}+\cdots &= \tfrac{2}{8}+\tfrac{5}{8^2}+\tfrac{2}{8^3}+\tfrac{5}{8^4}+\cdots\\ &= \left(\tfrac{2}{8}+\tfrac{5}{8^2}\right)\left(1+\tfrac{1}{8^2}+\tfrac{1}{8^4}+\tfrac{1}{8^6}+\cdots\right)\\ &= \left(\tfrac{2\cdot 8}{8^2}+\tfrac{5}{8^2}\right)\left(1+\tfrac{1}{8^2}+\left(\tfrac{1}{8^2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{8^2}\right)^3+\cdots\right)\\ &= \tfrac{21}{64}\frac{1}{1-\frac{1}{64}} = \tfrac{21}{64}\frac{1}{\frac{63}{64}} = \frac{21}{63} = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

如所述。 □

习题 7.15 证明 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\cdots$，也就是说，$2/3$ 的二进制展开为 $0.\overline{10}$.

解答。事实上，利用几何级数可得

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{128}+\cdots = \tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{256}+\cdots\right) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\frac{4}{4-1} = \frac{2}{3},$$

如所述。 □

练习 7.16 证明 $\frac{2}{3}=\frac{2}{4}+\frac{2}{16}+\frac{2}{64}+\cdots$，即 $2/3$ 关于四进制的展开式为 $0.\overline{2}$。

解答。事实上，利用几何级数，我们得到

$$\tfrac{2}{4}+\tfrac{2}{16}+\tfrac{2}{64}+\tfrac{2}{4^4}+\cdots = \tfrac{2}{4}\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{4^3}+\cdots\right) = \tfrac{2}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{2}{4}\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3},$$

如所断言。 □

练习 7.17 在使用十六进制时，需要 15 个数字，通常写作 $0,1,2,\ldots,9,A,B,C,D,E,F$，其中 A,B,C,D,E,F 分别表示 $10,11,12,13,14,15$。证明 $\frac{2}{3}=\frac{10}{16}+\frac{10}{16^2}+\frac{10}{16^3}+\cdots$，即 $2/3$ 关于十六进制的展开式为 $0.\overline{A}$。

解答。事实上，利用几何级数可得

$$\begin{aligned}\tfrac{10}{16}+\tfrac{10}{16^2}+\tfrac{10}{16^3}+\tfrac{10}{16^4}+\cdots &= \tfrac{10}{16}\left(1+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16^2}+\tfrac{1}{16^3}+\cdots\right)\\ &= \tfrac{10}{16}\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \tfrac{10}{16}\frac{1}{\frac{15}{16}} = \frac{2}{3},\end{aligned}$$

如所述。 □

练习 7.18 有理数 x 的八进制（底为 8）表示为 $111.111111\cdots = 111.\overline{1}$。求出 x，即将 x 写成整数之商（最简形式）。

解答。一方面，由于我们使用的是八进制，故有

$$0.\overline{1} = \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{64}+\cdots = \tfrac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{8}\right)^k = \tfrac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \tfrac{1}{7}.$$

另一方面，八进制中的数字 111 表示 $1\cdot 8^2+1\cdot 8+1 = 64+8+1 = 73$。综上可得 $x = 73\frac{1}{7} = \frac{512}{7}$。 □

练习 7.19 有理数 x 的十六进制(底为 16，另见习题 7.17) 表示为 $0.\overline{ABBAABBA}\cdots = 0.\overline{ABBA}$。求出 x，即将 x 写成整数之商（最简形式）。提示：让Maple或WolframAlpha 帮你。

解答。因为我们使用的是底为 16 的进制，所以有

$$x = 0.\overline{ABBA} = \tfrac{10}{16} + \tfrac{11}{16^2} + \tfrac{11}{16^3} + \tfrac{10}{16^4} + \cdots = \left(\tfrac{10}{16} + \tfrac{11}{16^2} + \tfrac{11}{16^3} + \tfrac{10}{16^4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{16^4}\right)^k$$
$$= \tfrac{21981}{32768} \frac{1}{1 - \frac{1}{16^4}} = \frac{862}{1285}.$$

□

习题 7.20 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 ℓ。证明 ℓ 是 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个聚点，且 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$没有其他聚点。

解答。显然 ℓ 是一个聚点。

设 ℓ' 为一个可能不同的聚点。则存在一个子序列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 使得$a_{n_k} \to \ell'$。由命题 7.10，我们有 $\ell' = \ell$。

□

Exercise 7.21 证明数列 $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 没有不同于 ± 1的聚点。

解答。记 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$，并反设 c 是 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$的一个不同于 ± 1的聚点。则存在一个子序列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 c。现在该子序列的任一项要么是 1，要么是 -1，因此 $|a_{n_k} - c| \in \{|1-c|, |-1-c|\}$。但由于 $\min\{|1-c|, |-1-c|\} > 0$，显然 $|a_{n_k} - c|$ 不可能小于任意的 ε（例如，它不可能小于 $(1/2)\min\{|1-c|, |-1-c|\} > 0$）——荒谬！□

练习7.22 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数数列。证明：$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，当且仅当$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界且$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 恰有一个聚点。

解答。“⇒”：假设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，且极限为 ℓ。根据定理 6.10，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。显然，ℓ 是$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$的一个聚点。因此，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 至少有一个聚点。另一方面，若 ℓ' 是另一个聚点，则存在一个子序列$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到ℓ'。根据命题 7.10，$\ell = \ell'$。总之，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 恰有一个聚点。

“⇐”：设 ℓ 是$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$唯一的聚点。我们用反证法，假设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛到 ℓ。那么存在 $\varepsilon > 0$，使得对每一个 $k \in \mathbb{N}$，都存在$n = n_k \geq k$，使得$|a_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon$。据此，我们归纳地构造出$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$的一个子序列$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足$|a_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon$。根据博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理，该子序列有一个收敛子序列，其极限与 ℓ相距 ε，因此至少有两个聚点，这就产生了矛盾。□

习题 7.23 定理 7.17 的逆命题正确吗？也就是说，每个收敛数列都有界且单调，这是真的吗？

解答。不正确。根据定理 6.10，每个收敛数列都有界。然而，并非每个收敛数列都是单调的。例如，考虑 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n+1}(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$。于是，根据夹逼定理，$a_n \to 0$。然而，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 既不是递增的，也不是递减的；因此，它不是单调的。□

习题 7.24 证明：若 m 是一个整数，且 m^3 是偶数，那么 m也是偶数。提示：证明其逆否命题。注：这个结果有助于证明 $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$，见习题 7.25。

解答。其逆否命题为

$$\text{If } m \text{ is an odd integer, then } m^3 \text{ is odd.} \tag{C}$$

证明（复数域），设 m 是一个奇整数，记作 $m = 2n+1$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。则 $m^3 = (2n+1)^3 = (2n)^3 + 3(2n)^2 + 3(2n) + 1 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1$ 是奇数，因为 $4n^3 + 6n^2 + 3n \in \mathbb{Z}$。

□

习题 7.25 证明不存在有理数 x 使得 $x^3 = 2$。 提示： 仿照定理 7.1 的证明，利用习题 7.24。

解答。反设存在 $x \in \mathbb{Q}$ 使得 $x^3 = 2$，设

$$x = \frac{m}{n}, \quad \text{where } m \in \mathbb{Z} \text{ and } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{and} \quad x^3 = 2,$$

并且假设该分数已是最简形式（除 ± 1 外的所有公因子都已约去）。那么 $2 = x^3 = m^3/n^3$，因此

$$2n^3 = m^3.$$

这意味着 m^3 是偶数。因此， m 是偶数（见习题 7.24），设

$$m = 2k, \quad \text{for some integer } k.$$

但这时等式 $2n^3 = m^3$ 变为 $2n^3 = (2k)^3 = 8k^3$。因此， $n^3 = 4k^3 = 2(2k^3)$，所以n^3 是偶数。再次推得 n 是偶数，设

$$n = 2l, \quad \text{for some integer } l.$$

但现在 m和 n 确实有一个非平凡公因子，即 2——矛盾！ □

习题 7.26 证明：如果 m 是一个整数，且 m^3 能被 3 整除，那么 m 也能被 3 整除。 提示： 证明其逆否命题。 注： 这个结论有助于证明 $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$，见习题 7.27。

解答。逆否命题是

$$\text{If } m \text{ is an integer not divisible by 3, then } m^3 \text{ is not divisible by 3.} \tag{C}$$

为证明（复数域），设 $m = 3k \pm 1$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。那么 $m^3 = (3k \pm 1)^3 = (3k)^3 + 3(3k)^2(\pm 1) + 3(3k)(\pm 1)^2 + (\pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 3(9k^3 \pm 9n^2 + 3k) \pm 1$ 不能被 3 整除，因为除以 3 后的余数只能是 1 或 2。 □

习题 7.27 证明不存在有理数 x 使得 $x^3 = 3$。 提示： 仿照定理 7.1 的证明，使用习题 7.26。

解答。反设存在 $x \in \mathbb{Q}$ 使得 $x^3 = 3$，不妨设

$$x = \frac{m}{n}, \quad \text{where } m \in \mathbb{Z} \text{ and } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{and} \quad x^3 = 3,$$

并且我们假设该分数为最简形式（除 ± 1 以外的所有公因子均已约去）。于是 $3 = x^3 = m^3/n^3$，从而

$$3n^3 = m^3.$$

这意味着 m^3 能被 3 整除。因此， m 也能被 3 整除（见习题7.26），不妨设

$$m = 3k, \quad \text{for some integer } k.$$

但这样一来，等式 $3n^3 = m^3$ 就变为 $3n^3 = (3k)^3 = 27k^3$。因此， $n^3 = 9k^3 = 3(3k^3)$，从而n^3 能被 3 整除。我们再次推出 n 能被 3 整除，不妨设

$$n = 3l, \quad \text{for some integer } l.$$

但现在 m 与 n 确实有一个非平凡公因子，即 3——矛盾！ □

习题 7.28（由你来批改！） 考虑下列命题

$$\text{“The binary (i.e., base 2) representation of } -1 \text{ is } 1.\overline{1}\text{.”}$$

以及以下“证明”：

首先，由于我们使用以2为底，因此有 $1.1 = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$。另一方面，这是几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1/(1-2) = -1$。综上，结论得证。

这个证明错在哪里?

解答。第一行错了，因为 $1.1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$。

第二行也错了，因为几何级数公式 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ 要求满足 $|\alpha| < 1$。但这里 $|2| = 2 > 1$。□

练习7.29（真或假?）判断下列命题的真假，并简要说明理由。

(i) “如果 a 是整数且 $a \geq 2$，那么 $\sqrt{a}$ 是无理数。” (ii) “如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个有界子列，那么 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。” (iii) “如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，那么 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是单调的。” (iv) “如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不是实数柯西序列，那么 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不可能有聚点。”

解答。(i)：假：考虑 $a = 4 = 2^2$。(ii)：假：$a_n \equiv (-1)^n$。(iii)：假：$((-1)^n/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$。
(iv)：假：$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$。

□

第8章 平方根

现在我们证明平方根确实存在。这是完备性公理的一个应用。事实上，我们给出了一种计算平方根的算法，这种算法不仅可以追溯到巴比伦人，而且如今仍用于数值计算。

8.1 平方根的存在性

设 $a \in \mathbb{R}$ 满足 $a > 0$，其中的一个数是我们想要求其平方根的数。现在，如果 $x \in \mathbb{R}$是 a的平方根，即 $x^2 = a$，那么 $x \neq 0$ 且 $x = a/x$；否则 $x \neq a/x$。后一种情况下，这启发我们用以下数替代 x：

$$\frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big), \tag{8.1}$$

也就是 x 和 a/x的算术平均数。值得注意的是，这个想法总是有效的，也就是说，它会生成一个收敛到 a 的平方根的实数序列。

定理 8.1 设 $a > 0$，并令 $x_0 > 0$ 为实数。定义数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如下：

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \quad \textit{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

那么，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到方程 $x^2 = a$的唯一正解。

证明。证明分为几个步骤进行。

Step 1: $x_n > 0$，对每一个 $n \in \mathbb{N}$。

事实上，我们通过对 n 使用归纳法来证明这一点。根据假设， $x_0 > 0$。现在假设对于某个$n \in \mathbb{N}$， $x_n > 0$ 。那么 $1/x_n > 0$，因此 $a/x_n > 0$，因为 $a > 0$。由此可得 $x_n + a/x_n > 0$，进而得到$x_{n+1} = \left(x_n + a/x_n\right)/2 > 0$，因为 $2 = 1 + 1 > 0$。

Step 2: $x_n^2 \geq a$，对每一个整数 $n \geq 1$。事实上，如果 $n \geq 1$，那么

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\Big)^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\Big) - a \tag{8.3a}$$

$$= \frac{1}{4}\Big(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\Big) = \frac{1}{4}\Big(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\Big)^2 \geq 0. \tag{8.3b}$$

Step 3: $x_{n+1} \leq x_n$，对每一个整数 $n \geq 1$。

事实上，如果 $n \geq 1$，那么利用步骤 1 和步骤 2，

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - a\right) \geq 0. \tag{8.4}$$

现在定义

$$y_n := \frac{a}{x_n}, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{8.5}$$

Step 4: $y_n^2 \le a$，对每一个整数 $n \ge 1$。
事实上，令 $n \ge 1$。那么根据步骤2，$1/x_n^2 \le 1/a$。乘以 $a^2 > 0$，得到 $y_n^2 = (a/x_n)^2 = a^2/x_n^2 \le a^2/a = a$。

Step 5: $y_n \le y_{n+1}$，对每一个整数 $n \ge 1$。
这可由步骤3立即得出。

Step 6: $y_n \le x_n$，对每一个整数 $n \ge 1$。
否则，就存在 $n \ge 1$，使得 $y_n > x_n > 0$，于是 $y_n^2 > x_n^2$，这与 $y_n^2 \le a \le x_n^2$ 矛盾（见步骤2和步骤4）。

Step 7: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到某个实数 $x > 0$。
结合步骤3和步骤6，我们可以看出 $x_1 \ge x_n \ge x_{n+1} \ge y_{n+1} \ge y_1 > 0$，对每一个 $n \ge 1$。因此 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界且单调（递减）。根据定理7.17，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。由于$x_n \ge y_1 > 0$ 对每一个 $n \ge 1$，由推论 6.24 可得 $x \ge y_1 > 0$。

Step 8: $x^2 = a$。
事实上，利用极限运算法则，我们得到

$$x = \lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\lim x_n + \frac{a}{\lim x_n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big). \tag{8.6}$$

因此 $2x = x + a/x \Leftrightarrow x = a/x \Leftrightarrow x^2 = a$。

Step 9: $x^2 =$只有一个正解 a.
假设 $z > 0$ 满足 $z^2 = a$。那么 $0 = a - a = x^2 - z^2 = (x+z)(x-z)$。现在 $x + z > 0$，所以两边除以 $x + z$，得到 $0 = x - z$。□

定理 8.1 由此使下述概念定义明确。

定义 8.2（平方根）设 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $a \ge 0$。那么满足 $x^2 = a$ 的唯一非负实数x 称为 a的**平方根**，记作 $x = \sqrt{a}$。

注记8.3 设 $a \in \mathbb{R}$ 并考虑方程

$$x^2 = a. \tag{8.7}$$

(i) 当 $a = 0$时，方程变为 $x^2 = 0$。根据命题 3.7(iii)，该方程只有一个解，即 $x = 0$。因此 $\sqrt{0} = 0$。

(ii) 现在假设 $a > 0$。则 $\sqrt{a}$ 是方程 $x^2 = a$ 的唯一正解，由定理 8.1。将 $x^2 = a$ 写成 $x^2 = \sqrt{a}^2$，我们看到

$$x^2 = a \;\Leftrightarrow\; x^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \big(x + \sqrt{a}\big)\big(x - \sqrt{a}\big) = 0. \tag{8.8}$$

进而，命题 3.7(iii) 给出 $x + \sqrt{a} = 0$ 或 $x - \sqrt{a} = 0$，从而得到两个不同的解 $\sqrt{a}$ 与 $-\sqrt{a} < 0$。

(iii) 当 $a < 0$时，方程 $x^2 = a$ 在 $\mathbb{R}$ 中无解，由命题 5.2(xi)。

设 α 与 β 为两个非负实数。于是，平方根的唯一性很快便推出

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}. \tag{8.9}$$

引理 8.4（算术—几何平均值不等式）设 $\alpha \ge 0$，并设 $\beta \ge 0$。则

$$\sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha + \beta}{2}, \tag{8.10}$$

当且仅当 $\alpha = \beta$ 时，等号成立。

8.2 收敛速度

定理8.5 设 $a>0$，设 $x_0>0$，并设数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如定理 *8.1* 中所定义，即

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \quad \textit{for every } n\in\mathbb{N}. \tag{8.11}$$

定义相应的相对误差数列 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其定义为 $\varepsilon_n = x_n/\sqrt{a}-1$，即

$$x_n = \sqrt{a}\big(1+\varepsilon_n\big), \quad \textit{for every } n\in\mathbb{N}. \tag{8.12}$$

那么，对每一个 $n\geq 1$，我们有 $\varepsilon_n \geq 0$，并且

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n} \leq \frac{1}{2}\min\big\{\varepsilon_n, \varepsilon_n^2\big\}. \tag{8.13}$$

证明。结合定理 8.1 的证明中的步骤1和2，可知 $x_n\geq\sqrt{a}$，因此 $\varepsilon_n\geq 0$，对于 $n\geq 1$。接下来，将 (8.12) 代入 (8.11)，得到

$$\sqrt{a}\big(1+\varepsilon_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}\big(1+\varepsilon_n\big) + \frac{a}{\sqrt{a}\big(1+\varepsilon_n\big)}\right), \quad \text{for every } n\in\mathbb{N}. \tag{8.14}$$

两边除以 $\sqrt{a}$ 后，得到

$$1+\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\varepsilon_n + \frac{1}{1+\varepsilon_n}\right), \quad \text{for every } n\in\mathbb{N}. \tag{8.15}$$

因此，

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\left(-1+\varepsilon_n + \frac{1}{1+\varepsilon_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}, \quad \text{for every } n\in\mathbb{N}. \tag{8.16}$$

现在假设 $n\geq 1$。那么 $\varepsilon_n\geq 0$。一方面，由于 $1+\varepsilon_n\geq 1$，我们得到 $\varepsilon_n^2/(1+\varepsilon_n)\leq\varepsilon_n^2$。另一方面，我们还有 $\varepsilon_n^2\leq\varepsilon_n^2+\varepsilon_n=\varepsilon_n(\varepsilon_n+1)$；因此，$\varepsilon_n^2/(1+\varepsilon_n)\leq\varepsilon_n$。综上，我们得到（8.13）。□

注记8.6 上一个结果中讨论的相对误差会迅速变小。假设在第 n 次迭代时，误差小于或等于 10^{-3}。那么在第 $n+1$ 次迭代时，误差至多为 $\frac{1}{2}10^{-6}$。粗略地说，正确位数预计每次迭代都会加倍，这也称为**二次收敛**。

此外，在微积分 I 中，我们通过迭代**牛顿法** 来求解方程 $f(x)=0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{8.17}$$

现在，如果 $f(x)=x^2-a$，也就是说，我们要寻找一个平方根，那么 $f'(x)=2x$，牛顿法的形式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-a}{2x_n} = \frac{x_n}{2}+\frac{a}{2x_n}, \tag{8.18}$$

也就是（8.11）！

最后给出两个数值例子。注意，根据定理 $a/x_n\leq\sqrt{a}\leq x_n$ 8.1 证明中的步骤 2 和 4。我们用数值方法计算 4 和 2 的平方根。请注意其快速收敛以及精度的倍增。下一页的代码使用 `Julia`:

Julia 1.11 | Trusted | Kernel is idle (halt...) | Code | CPU | RAM

Run | Assistant | Edit | 1

Illustrating the iteration for finding square roots.
This is an ipython notebook running **Julia 1.11**
We start finding the square root of 4, with starting point 1:

1.45s | Run | Assistant | Format | 2

In [1]:
```
setprecision(150); a=BigFloat(4.0); x=BigFloat(1000000.0);
```

0.4s | Run | Assistant | Format | 3

In [2]:
```
println("k: 0", " a: ",a," a/x: ",a/x," x: ",x)
for k=1:30
    x = (x+a/x)/2
    println("k: ", k," a/x: ",a/x," x: ",x)
end
```

Out[2]:
```
k: 0 a: 4.0 a/x: 4.0e-06 x: 1.0e+06
k: 1 a/x: 7.999999999968000000000127999999999488000000001e-06 x: 500000.0000019999999999999999999999999999999986
k: 2 a/x: 1.599999999968000000000742399999982694400000404 3e-05 x: 250000.0000049999999999840000000000639999999962
k: 3 a/x: 3.199999999731200000026879999997284966400274460 4e-05 x: 125000.0000104999999998320000000037439999999 1331
k: 4 a/x: 6.399999997824000000886067199635065651350461525 2e-05 x: 62500.0000212499999985720000001362719999863815 06
k: 5 a/x: 0.000127999999825408000285632511527196484367510399 41 x: 31250.0000426249999884060000004498471998168519 02
k: 6 a/x: 0.000255999998602240009157005251298211390886044837 07 x: 15625.0000853124999069070001450654917626825016 99
k: 7 a/x: 0.000511999988815872293158355360309656034860386819 12 x: 7812.5001706562492545735046510353715304469462895
k: 8 a/x: 0.001023999910522889382140317548085346335825884822 9 x: 3906.2503413281190352228989046953659200514905751
k: 9 a/x: 0.002047999284175148236984426174894823735460382688 8 x: 1953.1256826640147790561405225064570026989132001
k: 10 a/x: 0.004095994273392007639987765778344619987141282171 2 x: 976.56386533164947710218875346631594876132433041
k: 11 a/x: 0.008191954187333875463530456567386389219608919001 8 x: 488.28398066296143455491437061604714669065573589
k: 12 a/x: 0.016383633505983914809445998137535429083734540544 x: 244.14608630857438421518895053630726653993767242
k: 13 a/x: 0.032765068283826505741012107328068354014106820013 x: 122.08123497104018406499919826722240098451070347
k: 14 a/x: 0.065512553822033375706193987281020041297896000676 x: 61.057000019662005285370105187275234669262405159
k: 15 a/x: 0.130884671836454133239822564745329239186131286 29 x: 30.561256286742019330538149587278127355280150569
k: 17 a/x: 0.512599584885514521479642134016981444778918093 26 x: 7.8033617621703139018529080130256191550084160245
k: 18 a/x: 0.962005433422596300749096051278589369732834593 98 x: 4.1579806735279142116662750735213002998936670582
k: 19 a/x: 1.562504239833736629742417714597220891906387163 2 x: 2.5599930534752552562076855623999448348132508 25
k: 20 a/x: 1.940571316562021380828794185703089858655785551 5 x: 2.0612486466544959429750516384985828633598189934
k: 21 a/x: 1.999090432236709367819762232815781203349976846 3 x: 2.0009099816082586619019229121008363610078022731
k: 22 a/x: 1.999999793077537393594137922370408599673401127 8 x: 2.0000002069224840148608425724583087821788895604
k: 23 a/x: 1.999999999999989295772509752642931552155338579 4 x: 2.0000000000000107042274902474143586909261453434
k: 24 a/x: 1.999999999999999999999999999713548784592580379 x: 2.0000000000000000000000000000286451215407419621
k: 25 a/x: 2.0 x: 2.0
k: 26 a/x: 2.0 x: 2.0
k: 27 a/x: 2.0 x: 2.0
k: 28 a/x: 2.0 x: 2.0
k: 29 a/x: 2.0 x: 2.0
k: 30 a/x: 2.0 x: 2.0
```

Run | Assistant | Edit | 4

Next, the square root of 2, again with staring point 1:

0s | Run | Assistant | Format | 5

In [3]:
```
a=BigFloat(2.0); x=BigFloat(1.0);
```

0.03s | Run | Assistant | Format | 6

In [4]:
```
println("k: 0", " a: ",a," a/x: ",a/x," x: ",x)
for k=1:6
    x = (x+a/x)/2
    println("k: ",k, " a/x: ",a/x," x: ",x)
end
```

```
k: 1 a/x: 1.333333333333333333333333333333333333333333338 x: 1.5
k: 2 a/x: 1.411764705882352941176470588235294117647058823 3 x: 1.4166666666666666666666666666666666666666666676
k: 3 a/x: 1.414211438474870017331022530329289428076256498 8 x: 1.4142156862745098039215686274509803921568627461
k: 4 a/x: 1.414213562371500186977083668114925577113404228 4 x: 1.4142135623746899106262955788901349101165596232
k: 5 a/x: 1.414213562373095048801687824916865913524361825 2 x: 1.4142135623730950488016896235025302436149819251
k: 6 a/x: 1.414213562373095048801688724209698078569671875 1 x: 1.4142135623730950488016887242096980785696718751
```

0.68s | Run | Assistant | Format | 7

In [5]:
```
sqrt(a)
```

Out[5]:
```
1.4142135623730950488016887242096980785696718751
```

习题

习题 8.1 设 k 是一个整数，使得 $k \geq 2$，令 $a > 0$，并令 $x_0 > 0$。定义数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如下：

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\Big((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\Big), \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{8.19}$$

证明 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $x^k = a$ 的唯一正解。

解答。首先，利用简单的归纳法可得，对每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $x_n > 0$。接下来，

$$\begin{aligned} x_n > 0 &\Rightarrow \frac{a}{x_n^k} + k - 1 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{a}{x_n^k} - 1 > -k \\ &\Rightarrow \frac{1}{k}\Big(\frac{a}{x_n^k} - 1\Big) > -1. \end{aligned}$$

注意到

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}x_n\Big((k-1) + \frac{a}{x_n^k}\Big) = x_n\Big(1 + \frac{1}{k}\Big(\frac{a}{x_n^k} - 1\Big)\Big). \tag{8.20}$$

回忆一下，伯努利给出 $y \geq -1 \Rightarrow (1+y)^k \geq 1 + ky$。应用这一结论，令

$$y = \frac{1}{k}\Big(\frac{a}{x_n^k} - 1\Big) > -1$$

可得

$$\Big(1 + \frac{1}{k}\Big(\frac{a}{x_n^k} - 1\Big)\Big)^k \geq 1 + k\frac{1}{k}\Big(\frac{a}{x_n^k} - 1\Big) = \frac{a}{x_n^k}.$$

因此

$$x_{n+1}^k = x_n^k\Big(1 + \frac{1}{k}\Big(\frac{a}{x_n^k} - 1\Big)\Big)^k \geq x_n^k\frac{a}{x_n^k} = a.$$

Thus

$$(\forall n \geq 1) \quad \frac{a}{x_n^k} \leq 1; \ \text{ hence } \ \frac{1}{k}\Big(\frac{a}{x_n^k} - 1\Big) \leq 0.$$

根据（8.20）， $x_{n+1} \leq x_n$ 对所有 $n \geq 1$。由于数列（x_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 由正项组成，因此存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得

$$x_n \to x \geq 0.$$

现在注意到， x_{n+1} 的定义给出

$$kx_{n+1}x_n^{k-1} = (k-1)x_n^k + a.$$

令 $n \to \infty$ 趋于极限，得到

$$kxx^{k-1} = (k-1)x^k + a,$$

因此 $x^k = a$。最后， $0 \leq z_1 < z_2 \Rightarrow z_1^k < z_2^k$ 这表明非负的 k 次方根只有一个！ □

练习 8.2 考虑函数 $f(x) = x^k - a$。推导牛顿法生成的数列的迭代公式，并与（8.19）进行比较。

解答。回忆一下，牛顿法的迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

现在 $f'(x) = kx^{k-1}$，因而

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = x_n\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{a}{kx_n^{k-1}}$$

由此得到公式（8.19）。 □

练习8.3 设 α 与 β 为满足 $0 \le \alpha < \beta$的实数。证明 $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$。

解答。我们用反证法论证。若该结论为假，则有$\sqrt{\alpha} \ge \sqrt{\beta} > 0$ 从而$\alpha = \sqrt{\alpha}^2 \ge \sqrt{\beta}^2 = \beta$ 由命题 5.2(x)，这是荒谬的。□

习题8.4 考虑

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}, \tag{8.21}$$

即，由 a_0 定义的数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为：$= 1$，且 $= \sqrt{1+a_n}$：$\sqrt{a_{n+1}}$，其中 $n \ge 0$。证明该数列收敛，并确定其极限。提示：使用两次归纳法证明 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增，并证明对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \le 2$。

解答。

Step 0: 令 $0 \le \alpha < \beta$。则 $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$（另见习题 8.3。）否则，我们将有$\sqrt{\alpha} \ge \sqrt{\beta} > 0$ 从而 $\alpha = \sqrt{\alpha}^2 \ge \sqrt{\beta}^2 = \beta$ 根据命题 5.2(x)，这显然是荒谬的。

Step 1:$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增。

我们通过归纳法证明

$$a_n < a_{n+1}, \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

基础情形：当 $n = 0$ 时，确实有 $a_0 = 1 < \sqrt{2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{1+a_0} = a_1$。

归纳步骤：假设对于某个整数 $n \ge 0$，我们有 $a_n < a_{n+1}$。那么 $1 + a_n < 1 + a_{n+1}$，因此 $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+a_{n+1}} = a_{n+2}$，这就完成了证明。

Step 2: $a_n \le 2$，对每一个 $n \in \mathbb{N}$。

我们也用归纳法证明这一点。事实上，**基础情形** $a_0 = 1 < 2$ 显然成立。现在假设对于某个整数 $n \ge 0$，我们有 $a_n \le 2$（这就是**归纳假设**）。那么 $1 + a_n \le 1 + 2 = 3 < 4$，因此 $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \le \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$，这就完成了**归纳步骤**的证明。

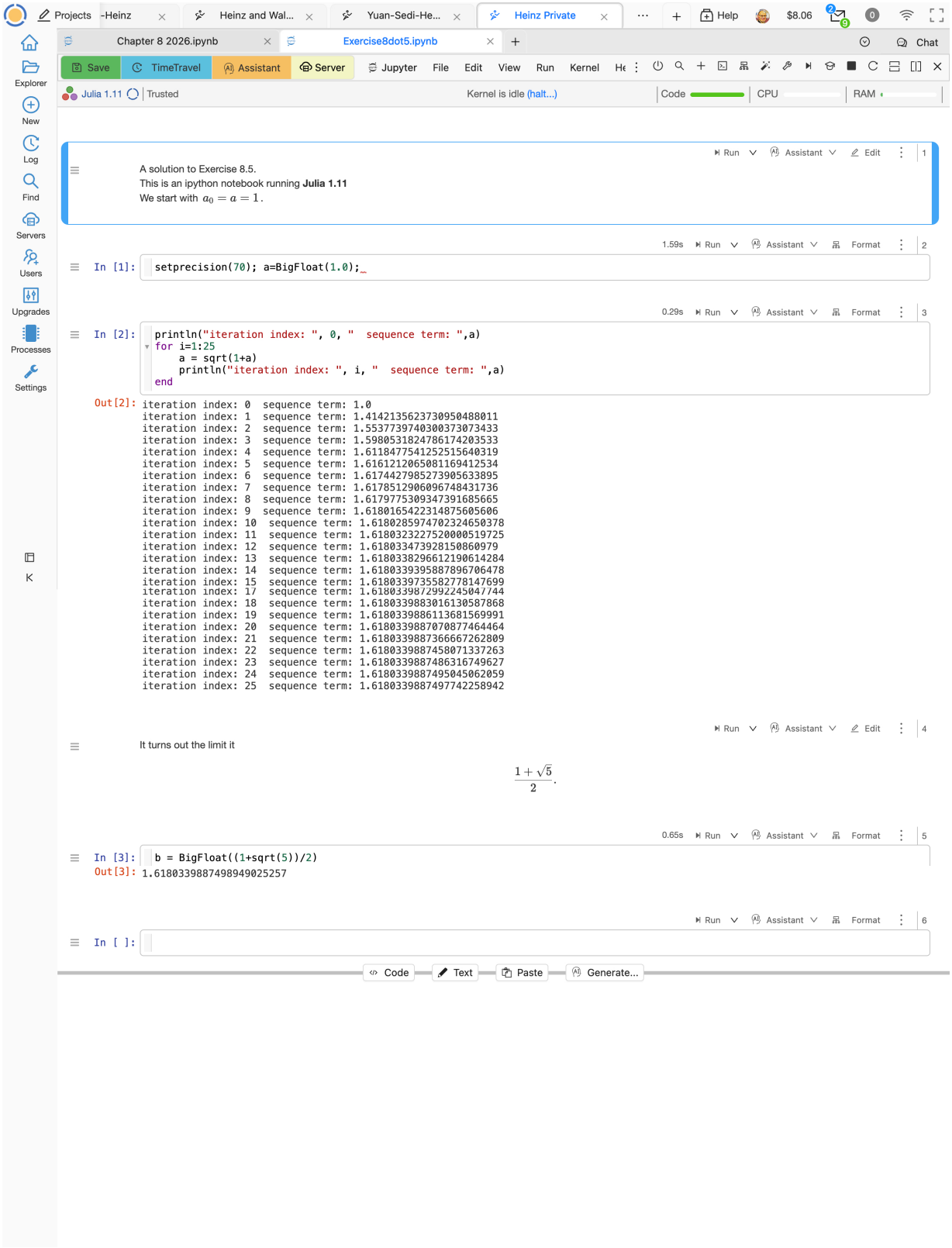
Step 3: $a_n \to \alpha \in [1, 2]$。

注意 $a_n \ge 1$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 根据步骤1。现在将定理 7.17 与步骤1和步骤2结合起来。

还需要确定极限 α。现在 $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$，对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立；因此，取极限得到 $\alpha^2 = 1 + \alpha$。于是 $(\alpha - 1/2)^2 = 5/4$。由于 $\alpha \ge 1$，可得 $\alpha - 1/2 = \sqrt{5}/2$，因此$a_n \to (1+\sqrt{5})/2$。□

习题8.5 考虑在习题 $a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中定义的数列 8.4。使用你选择的编程语言，数值计算该数列的前 40 项。请提交：(i) 计算机代码的打印件，以及 (ii) 计算机代码输出的打印件。

解答。见下一页！ □


Projects -Heinz
Heinz and Wal...
Yuan-Sedi-He...
Heinz Private
Help
$8.06
Chapter 8 2026.ipynb
Exercise8dot5.ipynb
Chat
Save
TimeTravel
Assistant
Server
Jupyter File Edit View Run Kernel
Julia 1.11
Trusted
Kernel is idle (halt...)
Code
CPU
RAM
Explorer
New
Log
Find
Servers
Users
Upgrades
Processes
Settings
Run
Assistant
Edit
A solution to Exercise 8.5.
This is an ipython notebook running Julia 1.11
We start with $a_0 = a = 1$.
1.59s
Format
In [1]:
setprecision(70); a=BigFloat(1.0);
0.29s
In [2]:
println("iteration index: ", 0, " sequence term: ",a)
for i=1:25
a = sqrt(1+a)
println("iteration index: ", i, " sequence term: ",a)
end
Out[2]:
iteration index: 0 sequence term: 1.0
iteration index: 1 sequence term: 1.4142135623730950488011
iteration index: 2 sequence term: 1.5537739740300373073433
iteration index: 3 sequence term: 1.5980531824786174203533
iteration index: 4 sequence term: 1.6118477541252515640319
iteration index: 5 sequence term: 1.6161212065081169412534
iteration index: 6 sequence term: 1.6174427985273905633895
iteration index: 7 sequence term: 1.6178512906096748431736
iteration index: 8 sequence term: 1.6179775309347391685665
iteration index: 9 sequence term: 1.6180165422314875605606
iteration index: 10 sequence term: 1.6180285974702324650378
iteration index: 11 sequence term: 1.6180323227520000519725
iteration index: 12 sequence term: 1.618033473928150860979
iteration index: 13 sequence term: 1.6180338296612190614284
iteration index: 14 sequence term: 1.6180339395887896706478
iteration index: 15 sequence term: 1.6180339735582778147699
iteration index: 17 sequence term: 1.6180339872992245047744
iteration index: 18 sequence term: 1.6180339883016130587868
iteration index: 19 sequence term: 1.6180339886113681569991
iteration index: 20 sequence term: 1.6180339887070877464464
iteration index: 21 sequence term: 1.6180339887366667262809
iteration index: 22 sequence term: 1.6180339887458071337263
iteration index: 23 sequence term: 1.6180339887486316749627
iteration index: 24 sequence term: 1.6180339887495045062059
iteration index: 25 sequence term: 1.6180339887497742258942
It turns out the limit it
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
0.65s
In [3]:
b = BigFloat((1+sqrt(5))/2)
Out[3]:
1.61803398874989490257
In [ ]:
Code
Text
Paste
Generate...

习题 8.6 设 $\alpha \geq 0$ 且设 $\beta \geq 0$。证明 $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$。

解答。根据定理 8.1 和注 8.3，我们注意到，给定 $\gamma \geq 0$，$\sqrt{\gamma}$ 是满足 $\sqrt{\gamma}^2 = \gamma$的唯一非负数。

因此，要验证 $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$，只需证明 $\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha\beta$，因为$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ 显然是非负的。事实上，$\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\right)^2 = \sqrt{\alpha}^2\sqrt{\beta}^2 = \alpha\beta$。□

习题 8.7 证明引理 8.4。

解答。由（8.9），

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}.$$

因此，

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \leq \alpha+\beta \tag{8.22a}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2 \tag{8.22b}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)^2, \tag{8.22c}$$

这由命题5.2(xi)成立。此外，（8.22c）中等号成立当且仅当 $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}$，这等价于 $\alpha = \beta$。□

习题 8.8 用你选择的编程语言（例如 Maple、Python、Octave、Java 等），以类似于本节所给示例的方式，数值计算 9 和 3 的平方根。提交（i）你的计算机代码的打印件，以及（ii）你的计算机代码输出的打印件。

解答。修改第112 页所给的代码，以计算$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{9}$。 □

习题 8.9 考虑数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的斐波那契数，其定义于例6.2(vii)。利用习题6.20 和极限运算法则，证明

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

解答。令 $\alpha := (1+\sqrt{5})/2$，并注意到 $\alpha > 1$。由此可得 $1/\alpha^n \to 0$，这由例6.12得出。由习题6.20，我们有

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n + \varepsilon_n,$$

其中 $\varepsilon_n \to 0$（因为 $|1-\sqrt{5}| < 2$）。利用极限运算法则，我们推出

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+1} + \varepsilon_{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n + \varepsilon_n} = \frac{\alpha + \sqrt{5}\varepsilon_{n+1}/\alpha^n}{1 + \sqrt{5}\varepsilon_n/\alpha^n}$$

$$\to \frac{\alpha + \sqrt{5}\cdot 0\cdot 0}{1+\sqrt{5}\cdot 0\cdot 0} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

如前所述。 □

练习 8.10 求方程 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 2$ 的所有解，其中 $x \in \mathbb{R}$。

解答。我们断言不存在解，并通过矛盾进行论证。反设 x 是该方程的一个解。那么 $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1} + 2$。两边平方得到 $x+1 = x-1+4\sqrt{x-1}+4$。因此 $4\sqrt{x-1} = -2$ 或 $\sqrt{x-1} = -1/2$，这显然是矛盾的。□

习题 8.11（调和平均数）设 $x>0$ 和 $y>0$。x 和 y 的调和平均数定义为 $h(x,\ y):=2xy/(x+y)$。证明 $h(x,\ y)\ \le\sqrt{xy}$。

解答。我们有 $0\le(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，因此 $2xy\le x^2+y^2$。于是 $4xy\le x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$。由此可得 $4(xy)^2\le(xy)(x+y)^2$，进而（开平方）$2xy\le\sqrt{xy}(x+y)$。重新整理得 $h(x,\ y)\ =2\overline{xy}/(x+y)\ \le\sqrt{xy}$。□

习题 8.12（温哥华之旅）假设你正开车前往温哥华。

（i）假设你开车的第一小时以每小时 50 公里的速度行驶，第二小时以每小时 100 公里的速度行驶。求前两个小时的平均速度。（ii）假设你开车前往温哥华时的平均速度是每小时 50 公里（暴风雪！），而从温哥华返回基洛纳时的平均速度是每小时 100 公里。整个往返行程的平均速度是多少?

解答。(i)：设第一小时的平均速度为 x，第二小时的平均速度为 y。第一小时你行驶了 x km，第二小时行驶了 y km。前两个小时总共行驶了 $x+y$ km。因此，这段时间的平均速度为

$$\frac{x+y}{2},$$

也就是 x 和 y 的算术平均数。对于这个具体问题，我们得到的平均速度是 75 km/h。

(ii)：现在设你从基洛纳到温哥华这段行程的平均速度为 x，从温哥华返回基洛纳这段行程的平均速度为 y。设从基洛纳到温哥华的距离为 d。从基洛纳到温哥华用了 d/x 小时，从温哥华返回基洛纳用了 d/y 小时。整个行程总共用了 $(d/x)\ +(d/y)$ 小时。因此，这趟行程的平均速度为

$$\frac{2d}{\frac{d}{x}+\frac{d}{y}}=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{2xy}{x+y},$$

也就是 x 和 y 的调和平均数。对于这个具体问题，我们计算得 $(2\cdot50\cdot100)/(50+100)\ =200/3=66\frac{2}{3}\approx66.67$ km/h。挺令人惊讶的，不是吗? □

练习 8.13 设 $n\ge1$ 为一个整数。证明

$$\sqrt{n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\le2\sqrt{n}-1. \tag{8.23}$$

提示：先证明对于 $k\ge1$，有

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}}<\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}. \tag{8.24}$$

解答。注意到 $(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\ =\sqrt{k+1}^2-\sqrt{k}^2=k+1-k=1$，因此

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}. \tag{8.25}$$

此外，由于 $\sqrt{k}<\sqrt{k}+1$，我们估计

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}=\frac{1}{2\sqrt{k}}. \tag{8.26}$$

将 (8.25) 和 (8.26) 合并可得 (8.24)。将 (8.24) 乘以 2 后，再对 $k\in\{1,\dots,n-1\}$ 求和可得

$$\sum_{l=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{l}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\le 2\sqrt{n}-2\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{8.27}$$

这意味着

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=1+\sum_{l=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{l}}\le 1+2\sqrt{n}-2=2\sqrt{n}-1,$$

这就证明了不等式（8.23）右侧的不等式。我们还可以从（8.27）得知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}+2\sqrt{n}-2.$$

要完成证明，只需证明

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+2\sqrt{n}-2\ge\sqrt{n}.$$

但这个不等式等价于 $0\le\sqrt{n}-2+1/\sqrt{n}=(\sqrt{\sqrt{n}-1}/\sqrt{\sqrt{n}})^2$，而这显然成立。 □

习题 8.14（重温绝对值）设 $x\in\mathbb{R}$。证明

$$|x|=\sqrt{x^2}.$$

解答。如果 $x\neq 0$，那么 $x^2>0$；否则 $x=0$ 且 $x^2\ge 0$。无论哪种情况， $x^2\ge 0$ ，因此 $\sqrt{x^2}$ 定义良好。回想一下， $\sqrt{a}$ 是方程 $r^2=a$的唯一非负解 r 。

情形 *1*： $x\ge 0$。一方面， $|x|=x\ge 0$。另一方面， $x^2=x^2$，因此 $x=\sqrt{x^2}$。综上，$|x|=\sqrt{x^2}$。

情形 *2*： $x<0$。一方面， $|x|=-x\ge 0$。另一方面，$(-x)^2=x^2$，因此 $-x=\sqrt{x^2}$。综上，$|x|=\sqrt{x^2}$。□

练习 8.15 令 $a_0=1$ ，并递归地定义[1]

$$a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{1+4a_n^2}}{2}.$$

证明对每一个 $n\in\mathbb{N}$，以下结论成立：

(i) $a_n\ge(n+2)/2$

(ii) $a_n\le n+1$。

提示： 使用归纳法。

解答。(i)：如果 $n=0$，那么 $a_0=1=(0+2)/2$ ，基础情形成立。

现在假设对于某个 $n\in\mathbb{N}$，不等式成立。那么

$$a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{1+4a_n^2}}{2}\ge\frac{1+\sqrt{4a_n^2}}{2}=\frac{1+2a_n}{2}$$
$$\ge\frac{1+2\frac{n+2}{2}}{2}=\frac{n+3}{2}=\frac{(n+1)+2}{2},$$

由此完成归纳步骤的证明。

(ii)：当 $n=0$ 时， $a_0=1=0+1$，因此基础情形显然成立。现在假设该不等式对某个 $n\in\mathbb{N}$ 成立。我们首先观察到

[1] 这个数列在所谓的 FISTA算法中发挥着作用。FISTA算法是新千年最成功的优化方法之一。参见 Amir Beck 和 Marc Teboulle，《用于线性逆问题的快速迭代收缩阈值算法》， *SIAM Journal on Imaging Sciences* 2，第 183–202 页（2009 年）。

$$2n+4 \geq 1+\sqrt{1+4(n+1)^2}. \tag{8.28}$$

确实，

$$\begin{aligned} 2n+4 \geq 1+\sqrt{1+4(n+1)^2} &\Leftrightarrow 2n+3 \geq \sqrt{1+4(n+1)^2} \\ &\Leftrightarrow (2n+3)^2 \geq 1+4(n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4n^2+12n+9 \geq 1+4n^2+8n+4 \\ &\Leftrightarrow 4n+4 \geq 0, \end{aligned}$$

这显然是正确的！因此我们得到

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1+\sqrt{1+4a_n^2}}{2} && \text{[definition]} \\ &\leq \frac{1+\sqrt{1+4(n+1)^2}}{2} && \text{[inductive hypothesis]} \\ &\leq \frac{2n+4}{2} && \text{[use (8.28)]} \\ &= n+2 \\ &= (n+1)+1, \end{aligned}$$

as 这是所需的。至此，归纳步骤的证明完成，依据归纳法，结论得证 . □

习题 8.16（开平方的连续性）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛于 ℓ 的非负实数数列。证明 $\sqrt{a_n} \to \sqrt{\ell}$。注：这表明开平方是连续函数。

解答。由于 $a_n \to \ell$ 且 $a_n \geq 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$，因此 $\ell \geq 0$ 由推论 6.24。令 $\varepsilon > 0$。情形 ***1***： $\ell = 0$。

由于 $\varepsilon^2 > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对每一个 $n \geq N$，都有 $a_n = |a_n - 0| < \varepsilon^2$；因此，$|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$，得证。

情形 ***2***： $\ell > 0$。

由于 $\sqrt{\ell}\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对每一个 $n \geq N$，都有 $|a_n - \ell| < \sqrt{\ell}\varepsilon$。由此可得

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{\ell}\right| = \frac{\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{\ell}\right| \left|\sqrt{a_n} + \sqrt{\ell}\right|}{\left|\sqrt{a_n} + \sqrt{\ell}\right|} &= \frac{\left|\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{\ell}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{\ell}\right)\right|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\ell}} \\ = \frac{|a_n - \ell|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{|a_n - \ell|}{\sqrt{\ell}} &< \frac{\sqrt{\ell}\varepsilon}{\sqrt{\ell}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

得证。 □

习题 8.17 证明

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

解答。设 $n \geq 1$。那么 $0 < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$，因此

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

由此可知，$(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ 递减且有下界（下界为 0），因此存在 $\ell \in \mathbb{R}$，使得

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to \ell.$$

根据极限运算法则，

$$0 \leftarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \to \ell \cdot \ell.$$

因此， $\ell^2 = 0$ 从而 $\ell = 0$。 □

练习8.18 数列 $(\sqrt{n+9} - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛吗？如果收敛，请求出极限；如果不收敛，请说明原因。

解答。令 $n \geq 1$。那么

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{n+9} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+9} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+9} - \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+9}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n}} \\ &< \frac{9}{\sqrt{n}} \to 0 \end{aligned}$$

根据习题 8.17。由夹逼定理可得 $\sqrt{n+9} - \sqrt{n} \to 0$。 □

练习8.19（由你来批改！）考虑下面的命题

$$\text{“}\sqrt{n+9} - \sqrt{n} \to 3\text{”}$$

以及下面的“证明”：

> 我们有 $\sqrt{n+9} - \sqrt{n} = \sqrt{n} + \sqrt{9} - \sqrt{n} = \sqrt{9}$。现在，由于平方根是非负的且 $3^2 = 9$， $\sqrt{9} = 3$。总之，结论得证。

这个证明为什么是错误的？

解答。错误一开始就出现了： $\sqrt{n+9} = \sqrt{n} + \sqrt{9}$ 是不正确的。例如，当 $n = 16$ 时，我们有 $\sqrt{n+9} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$，而 $\sqrt{n} + \sqrt{9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$。 □

习题 8.20（由你来批改！）考虑以下命题

$$\text{“}2 = 1\text{”}$$

以及以下“证明”：

> First, $4 - 6 = 1 - 3 \Rightarrow 4 - 6 + \frac{9}{4} = 1 - 3 + \frac{9}{4} \Rightarrow 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$.
> Hence $\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2$.
> Taking square roots, we get $2 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2}$.
> Therefore, $2 = 1$.

这个证明为什么是错误的？

解答。错误出在求平方根时。事实上，平方根总是非负的，因此 $\sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = |1 - \frac{3}{2}| = \frac{3}{2} - 1$，这与 $1 - \frac{3}{2}$ 不同。 □

习题 8.21（正确或错误）以下每个命题非真即假。请简要说明理由。

(i) “如果 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$ 是实数，那么 $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$。” (ii) “如果 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$ 是实数，那么 $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$。” (iii) “任意非负实数的平方根都存在，且仍是非负实数。” (iv) “任意非负有理数的平方根都存在，且仍是非负有理数。”

解答。（i）：正确：参见习题8.6。
(ii)：假：考虑 $\alpha = 9$ 和 $\beta = 16$。(iii)：正确：我们甚至有一种能快速求出平方根的算法！(iv)：假： $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。 □

第 9 章 级
数

9.1 基本收敛判别法

命题 9.1（柯西判别法）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列。那么，级数$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 收敛，当且仅当

$$\textit{for every } \varepsilon>0, \textit{ there exists } N\in\mathbb{N} \textit{ such that } \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|<\varepsilon \textit{ for all } n\geq m\geq N.$$

证明。回忆一下，$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 收敛，当且仅当部分和数列（s_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，其中 $s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$。反过来，（s_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，当且仅当它是柯西序列（定理 7.3和定义7.4），由此可得结论。□

引理 9.2 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数数列，且 $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 收敛。那么 $a_n\to 0$。

证明。事实上，设 $\varepsilon>0$。根据命题 9.1，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对每一个 $n=m\geq N$，都有 $|\sum_{k=n}^{n} a_k|=|a_n|<\varepsilon$。因此， $a_n\to 0$。□

上一个结果的逆否命题立即给出了一个发散判别法。

推论9.3（发散判别法）设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数数列，满足 $a_n\not\to 0$。那么$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 发散。

例 9.4 $\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k$ 发散，因为$(-1)^n\not\to 0$。

定理 9.5（部分和有界判别法）设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个非负实数数列。那么 $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 收敛，当且仅当部分和数列$(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。

证明。将 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的部分和数列记作 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$。那么，由于每个 $a_n\geq 0$，显然 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是递增的。如果 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，根据定理 7.17，它收敛。反过来，如果 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，根据定理 6.10，它有界。□

例 9.6（调和级数）调和级数 $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ 发散至 $+\infty$，因为其递增的部分和数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是无界的：事实上，

$$s_1=1, \tag{9.1a}$$
$$s_2=1+\tfrac{1}{2}, \tag{9.1b}$$
$$s_4=1+\tfrac{1}{2}+\underbrace{\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}>1+2\cdot\tfrac{1}{2}, \tag{9.1c}$$

$$s_8 = s_4 + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} > 1 + 3\cdot\tfrac{1}{2}, \tag{9.1d}$$

$$\vdots \tag{9.1e}$$

$$s_{2^n} \geq 1 + n\cdot\frac{1}{2}, \tag{9.1f}$$

由此即可得到结论9.5定理。请注意，调和级数也说明引理9.2 的逆命题不成立：事实上，$\frac{1}{n} \to 0$ 然而调和级数并不收敛。

例 9.7（p 级数）设 p 是一个整数，使得 $p \geq 2$。那么$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^p}$ 收敛[1]。由于此级数的每一项都是正的，且根据定理9.5，只需证明部分和的（递增）序列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。事实上，设 $n \geq 1$。那么存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得$n+1 \leq 2^{m+1}$（见定理5.17）。因此，利用定理6.33，

$$s_n \leq s_{2^{m+1}-1} = \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^p} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \cdots + \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^p}\right) \tag{9.2a}$$

$$\leq \sum_{l=0}^{m} 2^l \frac{1}{(2^l)^p} = \sum_{l=0}^{m} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^l \leq \sum_{l=0}^{+\infty} \left(2^{-p+1}\right)^l = \frac{1}{1-2^{-p+1}} < +\infty. \tag{9.2b}$$

9.2 交错级数

定理 9.8（莱布尼茨交错级数判别法）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由非负实数组成的递减序列，且满足 $a_n \to 0$。那么 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k a_k$ 收敛。

证明。将部分和序列记为 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$。于是 $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$，因此 $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 递减。同理，$(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 递增。此外，$s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0$，因此对于每一个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $s_{2n+1} \leq s_{2n}$。综上，

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq \cdots \geq s_3 \geq s_1. \tag{9.3}$$

因此，$(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ 递减且有界，故收敛，设其极限为 α，根据定理7.17。同理，$(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 递增且有界，故收敛，设其极限为 β。由于 $s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \to 0$，可得 $\alpha = \beta$。现在我们证明整个数列$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 实际上收敛于 α。为此，令 $\varepsilon > 0$。那么存在 N_1 和 N_2，属于 $\mathbb{N}$，使得

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |s_{2n} - \alpha| < \varepsilon \tag{9.4}$$

and

$$n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |s_{2n+1} - \alpha| < \varepsilon. \tag{9.5}$$

现在令 $N := \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$。那么，如果 $n \geq N$，我们有 $|s_n - \alpha| < \varepsilon$。 □

例 9.9（交错调和级数）该交错调和级数 *es*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots \tag{9.6}$$

收敛[2] 根据定理 9.8。

[1] 事实上，已知当 p 为偶数时的公式，例如 $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$。而当 p 为奇数时，我们对其了解就少得多。[2] 事实上，借助分析学中的工具可以证明，这个级数的极限为 ln(2)。

例 9.10 这个交错奇次调和级数

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots \tag{9.7}$$

收敛[3]，根据定理 9.8。

9.3 绝对收敛级数

定义 9.11（绝对收敛）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列。那么$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ **绝对收敛**当且仅当 $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ 收敛。

定理 9.12 每个绝对收敛级数都收敛。
证明。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个满足 $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 绝对收敛的数列，也就是说，$\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ 收敛。由柯西判别法（命题 9.1），这意味着对每一个 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq m \geq N$，都有 $\left|\sum_{k=m}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$；因此，$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| = \left|\sum_{k=m}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$。再次由命题 9.1可知，$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 收敛。□

注 9.13 定理 9.12 的逆命题通常不成立。事实上，交错调和级数（例9.9）收敛，但调和级数发散（例 9.6 ）；因此，交错调和级数收敛，但不绝对收敛 [4]。

定理 9.14（比较判别法）设$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个非负数序列，且$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k$ 收敛；再设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列，使得对每一个 $n \in \mathbb{N}$，$|a_n| \leq b_n$。那么级数 $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 绝对收敛。

证明。设 $\varepsilon > 0$。由于 $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k$ 收敛，且该级数的所有项均为非负数，根据命题 9.1 存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq m \geq N$，我们有

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k = \left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| < \varepsilon. \tag{9.8}$$

再次由命题 9.1 可知，级数 $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 绝对收敛。

□

上一个定理的逆否命题给出了一个有用的发散判别法。
推论 9.15 设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个非负数序列，且 $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 发散；设$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列，使得对每一个 $n \in \mathbb{N}$，$a_n \leq b_n$。那么级数 $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k$发散。

证明。事实上，如果 $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k$ 不发散，那么根据定理 9.14 可知 $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 收敛。□

让我们用一个简单得多的证明重新考察 p-级数（例 9.7）。
例 9.16 如果 p 是一个整数，且 $p \geq 2$，那么（习题 9.1）

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}, \quad \text{for every } n \geq 1. \tag{9.9}$$

鉴于例 6.32 和定理 6.34，由比较判别法可知 $\sum_{k\in\mathbb{N}} 1/k^p$ 绝对收敛。

[3] 事实上，这个级数的值为 $\frac{\pi}{4}$。[4] 收敛但不绝对收敛的级数也称为**条件收敛**。

定理9.17（比值判别法）设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个非零实数数列，且 $\beta\in\,]0,1[$。假设对于某个 $n_0\in\mathbb{N}$，有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le\beta,\quad \textit{for every } n\ge n_0. \tag{9.10}$$

那么级数 $\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k$ 绝对收敛。

证明。由于改变级数的有限多个项不会影响（绝对）收敛性，为方便起见，我们假设 $n_0=0$，即 $|a_{n+1}/a_n|\le\beta$，对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。由简单的数学归纳法可得

$$|a_n|\le|a_0|\beta^n,\quad \text{for every } n\in\mathbb{N}. \tag{9.11}$$

现在 $\sum_{k\in\mathbb{N}}|a_0|\beta^k$ 根据定理 6.33 和定理 6.34绝对收敛9.14），比较判别法（定理 $\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k$ 的绝对收敛性。因此，□

习题 9.2 说明，如果 $|a_{n+1}/a_n|\le 1$，则无法得出任何结论。比值判别法常以如下形式使用。

推论 9.18（比值判别法——实用版本）设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由非零实数组成的数列，并假设

$$q:=\lim_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{9.12}$$

存在。则以下结论成立：

(i) 若 $q<1$，则级数 $\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k$ 绝对收敛。(ii) 若 $q>1$，则级数 $\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k$ 发散。

证明。(i)：对每一个 $n\in\mathbb{N}$，定义 $q_n:=|a_{n+1}/a_n|$。令 $\beta:=(q+1)/2\in\,]0,1[$，并令 $\varepsilon:=(1-q)/2$。则$q+\varepsilon=\beta$。由于 $q_n\to q$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对每一个 $n\ge n_0$，都有 $\varepsilon>|q_n-q|\ge q_n-q$。特别地，对每一个 $n\ge n_0$，都有 $q_n<q+\varepsilon=\beta<1$。结论现由定理9.17得出。

(ii)：习题9.7。 □

例9.19 考虑级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}}n^2 3^{-n}$。对所有 $n\in\mathbb{N}$，令 $a_n=n^2 3^{-n}$。利用极限运算法则，我们得到

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{(n+1)^2 3^n}{n^2 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\to\frac{1}{3}=:q<1. \tag{9.13}$$

因此，级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}}n^2 3^{-n}$ 根据推论 9.18(i) 绝对收敛。顺便指出，`Maple` 或 `WolframAlpha`甚至会给出部分和的公式（你可以用归纳法验证）；利用这一点，可以看出这个级数的极限是 $3/2$。

习题

习题 9.1 证明（9.9）。

解答。设 n 和 p 为整数，使得 $n\ge 1$ 且 $p\ge 2$。那么 $0<1\le n\le n^2\le\cdots\le n^p$，因此 $1/n^p\le 1/n^2$。另外，$n\,(n+1)=n^2+n\le n^2+n\cdot n=2n^2$。因此，$1/n^2\le 2/\big(n\,(n+1)\big)$。□

习题9.2 考虑级数 $\sum_{k\ge1}a_k$ 的两种情形，分别为 (i) $(\forall n\in\mathbb{N})$ $a_n=1/n$，以及 (ii) $(\forall n\in\mathbb{N})$ $a_n=1/n^2$。证明在这两种情况下，$a_n\to 0$、$|a_{n+1}/a_n|<1$ 和 $|a_{n+1}/a_n|\to 1$。解释为什么无法据此判断该级数是收敛还是发散。

解答。我们知道 $1/n \to 0$，因此由极限的乘积法则，$1/n^2 = (1/n)(1/n) \to 0 \cdot 0 = 0$。令 $n \geq 1$。那么 $n < n+1$，从而 $n/(n+1) < 1$；因此，

$$1 = \frac{1}{1+0} \leftarrow \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} < 1.$$

我们还有 $n^2 < (n+1)^2$；因此，

$$1 = \left(\frac{1}{1+0}\right)^2 \leftarrow \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} < 1.$$

这些例子彻底打消了人们对存在一种将 $q < 1$ 替换为 **1** 的比值判别法的任何希望：事实上，在情形 **(i)** 中，我们得到发散的调和级数（例 9.6）；而在情形 **(ii)** 中，我们得到收敛的p级数（例 9.7）。□

习题 9.3 判断级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} n!/n^n$ 是否绝对收敛。

解答。令 $a_n := n!/n^n$，其中 $n \geq 1$。那么

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= (n+1)\frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.\end{aligned}$$

现在，利用伯努利不等式，我们有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} = 2$；等价地，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \leq 2^{-1}$。综上，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2}.$$

因此，根据比值判别法（定理9.17），该级数绝对收敛。 □

习题 9.4 判断级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^5/4^n$ 是否绝对收敛。

解答。令 $a_n := n^5 4^{-n}$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。利用极限运算法则，我们推得

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^5 4^n}{n^5 4^{n+1}} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \to \frac{1}{4} =: q < 1.$$

因此，级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^5 4^{-n}$ 根据推论 9.18(i)绝对收敛。 □

习题 9.5 判断级数 $\sum_{n\geq 1}(n+10)/(n^2-3n+1)$ 是否绝对收敛 .

解答。设 n 是一个满足 $n \geq 1$的整数。那么 $n+10 > n$。此外，$3n > 1 \Leftrightarrow n^2 > n^2 - 3n + 1 \Leftrightarrow 1/(n^2-3n+1) > 1/n^2$。因此，

$$\frac{n+10}{n^2-3n+1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

由于调和级数发散（例 9.6），根据推论 9.15 可知，所考察的级数也发散。□

习题 9.6 回想一下，调和数 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 恰好是调和级数的部分和序列。根据例题 9.6，数列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散到 $+\infty$。证明$\sum_{k\geq 2} h_k/(k(k-1))$ 收敛，并由此推出 $h_n/(n(n-1)) \to 0$。 提示： 习题 6.19。

解答。显然，该级数的各项均为非负数。根据习题 6.19，部分和序列有上界 2。因此，根据定理 9.5，该级数收敛。最后，根据引理 9.2，各项收敛于 0。 □

习题9.7 证明推论 9.18(ii)。

解答。设 $b_n := |a_{n+1}/a_n|$ for $n \in \mathbb{N}$。于是 $b_n \to q > 1$。令 $\varepsilon := (q-1)/2 > 0$。那么存在$N \in \mathbb{N}$使得 $(\forall n \geq N)\ |b_n - q| < \varepsilon$。因此对于 $n \geq N$，我们有 $\varepsilon > |b_n - q| \geq q - b_n$，从而$b_n > q - \varepsilon = (1+q)/2 > 1$。特别地，$(\forall n \geq N)\ |a_{n+1}/a_n| = b_n \geq 1$。简单归纳可得

$$(\forall n \geq N) \quad |a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \cdots \geq |a_N| > 0.$$

由此可得 $|a_n| \not\to 0$。根据命题 6.26，$a_n \not\to 0$。最后，根据推论 9.3，$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ 发散。 □

习题9.8 判断下列各级数是收敛还是发散，并简要说明理由。若级数收敛，无需求出其极限。

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \cdot n!$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

解答。（i）：我们使用**比值判别法**（推论9.18）来证明**收敛**。令 $a_n := (-3)^n/n!$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$。于是

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left|(-3)^{n+1}/(n+1)!\right|}{|(-3)^n/n!|} = \frac{3^{n+1}\cdot n!}{3^n\cdot(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1,$$

按需！

（ii）：我们使用**发散判别法**（推论9.3）。令 $a_n := (-3)^n \cdot n!$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$。于是$|a_n| \geq 1$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$，因此 $a_n \not\to 0$，如所需。

（iii）：我们使用**莱布尼茨（交错级数）判别法**（定理9.8）来证明**收敛**。令 $a_n := 1/(3n+2)$ 对每一个 $n \in \mathbb{N}$。于是 $a_n > a_{n+1} > 0$ 且 $a_n \to 0$，如所需。

（iv）：我们使用比较判别法证明**发散**（推论9.15）。令 $b_n := 1/\sqrt{3n+1}$ 且 $a_n := 1/(\sqrt{3(n+1)})$，对每一个 $n \in \mathbb{N}$。于是

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \geq \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{3n+3} = a_n,$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$。由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散（调和级数，见例 9.6），因此 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 也发散，证明完毕。

(v)：这是一个 p 级数，其中 $p = 3 \geq 2$，因此其为**收敛**，依据例 9.7。 □

习题9.9 设$(a_n)_{n\geq 1}$ 是一个实数序列，使得 $a_n \to 0$。证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \to 0.$$

提示： 你可以按以下步骤进行：

1. 求出 $N_1 \geq 1$，使得$|a_{N_1} + \cdots + a_n|/n < \frac{1}{2}\varepsilon$对于 $n \geq N_1$成立。
2. 然后求出 $N_2 \geq 1$，使得 $|a_1 + \cdots + a_{N_1-1}|/n < \frac{1}{2}\varepsilon$对于 $n \geq N_2$成立。3. 现在将步骤 1 和步骤 2 结合起来。

解答。令 $\varepsilon > 0$。

因为 $a_n \to 0$ 和 $\varepsilon/2 > 0$，存在 $N_1 \geq 1$ 使得

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| = |a_n - 0| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

由此可得，对所有 $n \geq N_1$,

$$\frac{|a_{N_1} + a_{N_1+1} + \cdots + a_n|}{n} \leq \frac{|a_{N_1}| + |a_{N_1+1}| + \cdots + |a_n|}{n} < \frac{(n - N_1 + 1)\frac{1}{2}\varepsilon}{n} \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{9.14}$$

接下来，因为 $1/n \to 0$ 和 N_1 是固定的，由此可得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1-1}}{n} \to 0.$$

因此，存在 $N_2 \geq 1$，使得对所有 $n \geq N_2$，都有

$$\frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1-1}|}{n} < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{9.15}$$

现在取任意的 $n \geq N :=\max\{N_1, N_2\}$。结合（9.14）和（9.15），我们估计

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_1-1}|}{n} + \frac{|a_{N_1} + \cdots + a_n|}{n} < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

至此即告完成！ □

习题 9.10 设 $(b_n)_{n\geq 1}$ 是一个实数序列，且满足 $b_n \to \beta$。证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \to \beta.$$

提示：你可以使用习题9.9。

解答。令 $a_n \equiv b_n - \beta$。则 $a_n \to 0$。利用习题 9.9，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i + \beta) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \beta \\ &\to 0 + \beta = \beta\end{aligned}$$

即为所求。 □

习题 9.11 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列，使得

$$a_{n+1} - a_n \to \ell \in \mathbb{R}.$$

证明

$$\frac{a_n}{n} \to \ell.$$

提示： 你可以使用习题9.10。

解答。 令 $b_n :=a_n - a_{n-1}$ 对于 $n \geq 1$。那么 $b_n \to \ell$ 由假设可知。现在，习题 9.10 给出

$$\ell \leftarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = \frac{1}{n}(a_n - a_0),$$

这意味着

$$\frac{a_n}{n} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + \frac{a_0}{n} \to \ell + 0 = \ell$$

正如之前所述。 □

练习 **题 9.12** 证明或反驳：设 $(b_n)_{n\geq 1}$ 是一个实数序列，使得 t

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \to \beta \in \mathbb{R}.$$

那么 $b_n \to \beta$。

解答。该命题为假！下面给出一个反例。令 $b_n = (-1)^n$。那么

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 0, & \text{if } n \text{ is even;} \\ -1, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

由此可得

$$0 \leftarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_n \leq 0,$$

由此，夹逼定理给出

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_n \to 0.$$

另一方面， $b_n = (-1)^n \not\to 0$。 □

习题 9.13 证明或反驳：假设 $(b_n)_{n\geq 1}$ 是一个正实数数列，且满足 $b_n \to +\infty$。那么

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \to +\infty.$$

解答。 这个命题正确！令 $C > 0$。因为 $b_n \to +\infty$，存在 $N \geq 1$ 使得

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad b_n > C.$$

令 $S := \sum_{i=1}^{N-1} b_i$，这只是一个正实常数。由此可得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N-1} b_i\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n} b_i\right) \geq \frac{S}{n} + \frac{n-N+1}{n}C \to 0 + C,$$

由此得到 结论，因为 C 是任意一个正的常数，所以定理 9.5适用。 □

习题 9.14（由你来批改！） 考虑以下命题

$$\text{“}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ diverges”}$$

以及以下“证明”：

我们知道 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ 发散（调和级数）！接下来，
$n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq n \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$。因此，根据比较判别法，
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ 发散。

这个证明为什么是错的?

解答。最后一行得出了错误的结论。如果要通过与 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 比较来证明级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ 发散，那么你必须证明 $a_n \geq \frac{1}{n}$，而不是 $a_n \leq \frac{1}{n}$。（事实上，级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的，我们从例题 9.7 中已经知道这一点。）□

习题 9.15（由你来批改！）考虑下面的命题

$$\text{“}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ converges”}$$

以及下面的“证明”：

> 令 $a_n := \frac{1}{n}$ 对所有 $n \geq 1$ 成立。于是 $|a_{n+1}/a_n| = n/(n+1) < 1$。因此，由比值判别法可知该级数收敛。

这个证明错在哪里？

解答。最后一行得出了错误的结论。若要应用比值判别法，就需要对某个 $q < 1$ 有 $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$。这里并非如此，因为 $|a_{n+1}/a_n| \to 1$。因此，我们不能应用比值判别法。（事实上，这个级数就是调和级数，它并不收敛。）□

习题 9.16（真或假？）判断以下每个命题是真还是假，并简要说明理由。

(i)“交错偶调和级数 $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \pm \cdots$ 收敛。”(ii)“如果 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛，那么 $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ 收敛。”(iii)“$\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ 都收敛。”(iv)“如果 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \bar{\alpha}$，那么 $a_n \to \alpha$。”

解答。(i)：正确：这可由莱布尼茨交错级数判别法得出。
(ii)：假：考虑 $a_n \equiv (-1)^n \frac{1}{n}$。(iii)：假：虽然 $1/n \to 0$，但调和级数确实发散。
(iv)：假：$a_n \equiv (1/2)^n$ 的级数等于 $\alpha = 2$，但 $a_n \to 0 \neq 2 = \alpha$。

□

第10章
函数与基数

10.1 基本定义

定义 10.1 设 X 和 Y 为非空集合。我们记作

$$f\colon X \to Y \tag{10.1}$$

并称 f 为一个**函数**，其**定义域** 为 X，如果对每一个 $x \in X$，$f(x)$都是 Y中的一个元素。集合 Y是 f的**陪域** 。函数 f 的**图像** 为

$$\operatorname{gra} f := \big\{(x,y) \in X \times Y \;\big|\; y = f(x)\big\}. \tag{10.2}$$

f 的**值域** 是集合

$$\operatorname{ran} f := f(X) := \bigcup_{x\in X} \{f(x)\} = \big\{y \in Y \;\big|\; \text{there exists } x \in X \text{ such that } f(x) = y\big\}. \tag{10.3}$$

f 的值域可能等于 f的陪域，也可能是真子集。更一般地，如果 S 是 X的子集，我们记作

$$f(S) := \bigcup_{x\in S} \{f(x)\} = \big\{y \in Y \;\big|\; \text{there exists } x \in S \text{ such that } f(x) = y\big\} \tag{10.4}$$

并称 $f(S)$是 Y中 f作用于 S所得的**像** 。此外，如果 T是 Y的子集，我们记作

$$f^{-1}(T) := \big\{x \in X \;\big|\; f(x) \in T\big\} \tag{10.5}$$

并称 $f^{-1}(T)$是 X中 f作用于 T所得的**原像** 。定义 X 上的**恒等映射** 如下，这将很方便:

$$\mathrm{Id}_X\colon X \to X\colon x \mapsto x, \tag{10.6}$$

Id_Y也类似。

因此，函数的图像 $f\colon X \to Y$是一个从 X 到 Y 的二元关系（按定义4.8的含义），并具有以下两个性质:

(i) 对每一个 $x \in X$，都存在 $y \in Y$使得$(x,y) \in \operatorname{gra} f$；(ii) 如果$(x,y_1)$和$(x,y_2)$属于$\operatorname{gra} f$，那么 $y_1 = y_2$。

性质 (ii) 在《微积分 I》中也称为垂线检验。

命题 10.2 设 $f\colon X \to Y$，设 A、A_1、A_2 是 X 的子集，且 B、B_1、B_2 是 Y 的子集。则以下结论成立。

(i) $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$。

(ii) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$。

(iii) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$。(iv) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$。(v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$。(vi) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$。(vii) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$。

证明。(i)：令 $a \in A$。那么 $f(a) \in f(A)$，因此 $a \in f^{-1}\big(f(A)\big)$。于是，$A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$。

(iii)：令 $y \in f(A_1 \cap A_2)$。那么存在 $x \in A_1 \cap A_2$，使得 $y = f(x)$。由于 x 同时属于A_1和 A_2，我们推知 $y = f(x) \in f(A_1)$，并且 $y = f(x) \in f(A_2)$。因此，$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$，从而 $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$。

(v)：令 $x \in X$。所述等式成立，这是因为以下等价关系 $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow [f(x) \in B_1$以及 $f(x) \in B_2] \Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1)$和 $x \in f^{-1}(B_2)] \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$。

(vii)：令 $x \in X$。所宣布的等式由以下等价关系得出：$x \in f^{-1}(Y \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus B \Leftrightarrow [f(x) \in Y$以及 $f(x) \notin B] \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(B)$。□

定义10.3 设 $f\colon X \to Y$是一个函数。则 f 是：

(i) **单射**（或 **单射**），如果 $f(x_1) = f(x_2)$ 总是蕴含 $x_1 = x_2$；(ii) **满射**（或 **满射**），如果 $\operatorname{ran} f = Y$；(iii) **双射**，如果 f 既是单射又是满射。

如果 f 是单射（满射、双射，分别地），则将 f 称为**单射**（**满射**、**双射**，分别地）。

如果 $X \to Y$是单射，且 x_1和 x_2是 X中两个不同的元素，那么 $f(x_1) \neq f(x_2)$，这也解释了这个名称的由来。

例 10。4 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$ 既不是单射，也不是满射。

例 10。5 $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$ 是单射，但不是满射。

例 10。6 $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty[\colon x \mapsto x^2$ 是满射，但不是单射。

例 10。7 $f\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[\colon x \mapsto x^2$ 既是单射也是满射，即为双射。

对 f 的附加假设给出了命题 10.2的如下加强形式。

命题 10.8 设 $f\colon X \to Y$，设 A、A_1、A_2 是 X 的子集，且 B 是 Y 的子集。那么以下结论成立。

(i)如果 f 是单射，那么 $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$。(ii)如果 f 是满射，那么 $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$。(iii)如果 f 是单射，那么 $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$。

证明。（i）：根据命题 10.2(i)，$A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$。现在取 $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$。那么 $f(x) \in f(A)$。因此，存在 $a \in A$ 使得 $f(x) = f(a)$。由于 f 是单射，可得 $x = a \in A$。因此，$f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$。□

10.2 复合与逆元

定义 10.9 设 X, Y, Z为非空集合，设 $f\colon X \to Y$，并设 $g\colon Y \to Z$。**复合**$g \circ f$是函数

$$g \circ f\colon X \to Z\colon x \mapsto g\big(f(x)\big). \tag{10.7}$$

复合中的顺序至关重要。

例 10.10 设 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x+1$，设 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 2x$，并设 $x\in\mathbb{R}$。那么 $(g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+1) = 2(x+1) = 2x+2$，而 $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x) = 2x+1$。

命题 10.11 设 X、Y、Z 是非空集合，设 $f\colon X\to Y$，并设 $g\colon Y\to Z$。那么以下结论成立。

（i）若 f 和 g 是单射，则 $g\circ f$ 也是单射。
（ii）若 f 和 g 是满射，则 $g\circ f$ 也是满射。（iii）
若 f 和 g 是双射，则 $g\circ f$ 也是双射。

证明。(i)：假设 f和 g是单射，且 $g\big(f(x_1)\big) = (g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) = g\big(f(x_2)\big)$。由于 g是单射，因此可得 $f(x_1) = f(x_2)$。现在，由于 f也是单射，我们得到 $x_1 = x_2$。因此，$g\circ f$是单射。□

定义 10.12 设 $f\colon X\to Y$是双射。那么**反函数**是一个从 Y到X 的函数，其图像为

$$\operatorname{gra} f^{-1} = \big\{(y,x)\in Y\times X \;\big|\; (x,y)\in\operatorname{gra} f\big\}, \tag{10.8}$$

也就是说，对所有 $x\in X$和 $y\in Y$，

$$y = f(x) \quad\Leftrightarrow\quad x = f^{-1}(y). \tag{10.9}$$

定理10.13 设 $f\colon X\to Y$是双射。那么 $f^{-1}\colon Y\to X$也是双射，$\big(f^{-1}\big)^{-1} = f$，$f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_X$，$f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$，且 Id。

证明。显然，f^{-1}是满射。为证明 f^{-1}是单射，假设 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$。应用 f得到 $y_1 = y_2$，因此 f^{-1}是单射。现在令 $x\in X$。则 $f(x)\in Y$，且 $f^{-1}(f(x)) = x$，从而 $f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_X$。类似地可得 $f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$。最后，

$$\operatorname{gra}\big(f^{-1}\big)^{-1} = \big\{(x,y)\in X\times Y \;\big|\; (y,x)\in\operatorname{gra} f^{-1}\big\} = \operatorname{gra} f, \tag{10.10}$$

正如所述。□

例 10.14 函数 $f\colon [0,+\infty[\to[\underline{0},+\infty[\colon x\mapsto x^2$是双射，其反函数为$f^{-1}\colon [0,+\infty[\to[0,+\infty[\colon y\mapsto\sqrt{y}$。

定理 10.15 设 X、Y、Z为非空集合，设 $f\colon X\to Y$和 $g\colon Y\to Z$均为双射。则$g\circ f\colon X\to Z$ 是双射，其逆元为

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}. \tag{10.11}$$

证明。根据命题10.11(iii)，$g\circ f$是双射。设 $h := (g\circ f)^{-1}$，令 $z\in Z$，并令 $x\in X$。则$x = h(z) \Leftrightarrow z = (g\circ f)(x) \Leftrightarrow z = g\big(f(x)\big) \Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(z) \Leftrightarrow x = f^{-1}\big(g^{-1}(z)\big) \Leftrightarrow x = (f^{-1}\circ g^{-1})(z)$。因此，$(g\circ f)^{-1} = h = f^{-1}\circ g^{-1}$。□

10.3 基数

定义 10.16 设 X 与 Y 为集合。我们称 X 与 Y 具有**相同基数**（亦称等势），并记作 $X\approx Y$，如果存在 $f\colon X\to Y$，使得 f 是双射。按照约定，有 $\varnothing\approx\varnothing$。

例 10.17

(i) {红色，绿色，蓝色} $\approx \{1,2,3\}$。**(ii)** 用 $2\mathbb{Z}$ 表示偶整数的集合。则经由 $m \mapsto 2m$ 有 $\mathbb{Z} \approx 2\mathbb{Z}$。**(iii)** 用 $2\mathbb{N}$ 表示非负偶整数的集合。则经由 $m \mapsto 2m$ 有 $\mathbb{N} \approx 2\mathbb{N}$。

我们首先注意到，具有相同基数的关系就像等价关系一样。

定理10.18 设 X、Y 和 Z 是集合。则以下结论成立。

(i) $X \approx X$。(ii) 若 $X \approx Y$，则 $Y \approx X$。(iii) 若 $X \approx Y$ 且 $Y \approx Z$，则 $X \approx Z$。

证明。(i)：$\mathrm{Id}_X\colon\ X \to X\colon\ x \mapsto x$ 是从 X 到 X的双射，因此 $X \approx X$。
(ii)：假设 $X \approx Y$，即存在一个双射 $f\colon\ X \to Y$。根据定理 10.13，f^{-1} 是从 Y 到 X 的双射，因此 $Y \approx X$。

(iii)：假设 $X \approx Y$通过 $f\colon\ X \to Y$，并且 $Y \approx Z$通过 $g\colon\ Y \to Z$。根据定理 10.15 或命题 10.11(iii)，$g \circ f\colon\ X \to Z$ 是一个双射；因此，$X \approx Z$。□

定义10.19（基数）设 X 是一个集合。我们称 X的**基数**是**有限**的，且等于 n，记作 $\#X = n$，如果 $\{1,2,\ldots,n\} \approx X$；否则，该基数是**超限**的。$\mathbb{N}$ 的基数记作

$$\aleph_0 \tag{10.12}$$

并读作“阿列夫[1] 零”；因此，$\#\mathbb{N} = \aleph_0$。如果 Y是另一个集合且 $X \approx Y$，我们记作 $\#X = \#Y$。

注意，$\#\varnothing = 0$，{红色、绿色、蓝色} 的基数是 3，而 $2\mathbb{N}$ 的基数是 $\aleph_0$。根据定理 10.18，我们可以将基数看作等价类。

10.4 可数性

定义10.20 设 X 是一个集合。那么，若$\mathbb{N} \approx X$，X 是**可数无限**的（也称为可列）。若 X 为空集、有限或可数无限，则称 X 为**可数**的。若 X 不可数，则称其为**不可数**。

例 10.21 $\mathbb{Z}$ 是可数无限的。事实上，我们列出一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Z}$的双射，即：$0 \mapsto 0$,$1 \mapsto -1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto -2$, $4 \mapsto 2$, . . ., 也就是说，

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}\colon n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{if } n \text{ is even;} \\ \dfrac{-(n+1)}{2}, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \tag{10.13}$$

下一个结果说明，$\aleph_0$ 是最小的超限基数。

命题10.22 设 Y 是可数无限的，且 X 是 Y的一个无限子集。那么 X 是可数无限的。

证明。设 $f\colon\ \mathbb{N} \to Y$是双射。考虑数列 $f(n)_{n\in\mathbb{N}}$，它属于 Y。由于 f是满射，且因为 $X \subseteq Y$，我们有 $X \subseteq f(\mathbb{N})$。因此 $X = \{f(n_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$是 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$的子序列。因此，映射 $\mathbb{N} \to X\colon\ k \mapsto f(n_k)$是满射，也是单射（因为 f是单射）。所以，$\mathbb{N} \approx X$，即 X 是可列的。□

[1] ℵ是希伯来字母表的第一个字母！

验证一个集合是否可数无限时，构造双射有时会很繁琐。以下结论给出了一个更易使用的判别准则。

命题 10.23 设 X 是一个非空集合。则以下条件等价。

(i) X 是可数的。(ii) 存在一个单射 $f\colon X \to \mathbb{N}$。(iii) 存在一个满射 $g\colon \mathbb{N} \to X$。

证明. “(i)⇒(ii)”：存在一个双射 $h\colon I \to X$，其中 $I \subseteq \mathbb{N}$。于是 $f := h^{-1}$ 是从X 到 I 的双射，因此是从 X 到 $\mathbb{N}$的单射。

“(ii)⇒(iii)”：由于 f是从 X到 $\mathbb{N}$的单射，因此它是从 X到 $f(X)$ 的双射；因此， f^{-1}是从 $f(X)$ 到 X 的双射。现在设 $x \in X$ 并定义

$$g\colon \mathbb{N} \to X\colon n \mapsto \begin{cases} f^{-1}(n), & \text{if } n \in f(X); \\ x, & \text{if } n \notin f(X). \end{cases} \tag{10.14}$$

于是 $g\big(f(X)\big) = f^{-1}\big(f(X)\big) = X$且 $g\big(\mathbb{N} \setminus f(X)\big) = \{x\}$。因此， g是从 $\mathbb{N}$到 X的满射。“(iii)⇒(i)”：给定 g，定义

$$h\colon X \to \mathbb{N}\colon x \mapsto \min\big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; g(n) = x\big\}. \tag{10.15}$$

那么 h 是从 X 到 $\mathbb{N}$ 的单射，因此它是从 X 到 $h(X)$的双射。如果 X 是有限的，那么显然是可数的。如果 X 是无限的，那么 $h(X)$是 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集，因此根据命题10.22，它是可数无限的。□

推论 10.24 设 X 是一个非空集合。那么， X 是可数的，当且仅当存在一个数列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = X$。

定理10.25 对每个 $n \in \mathbb{N}$，假设 S_n 是一个可数集合。那么

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \tag{10.16}$$

也是可数的；换句话说，可数个可数集合的并集是可数的。

证明。对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个数列$(x_{n,\ k})_{k\in\mathbb{N}}$ 使得 $S_n = \{x_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$。现在写下 te

$$\begin{array}{lllll}
S_0 : x_{0,0} \to x_{0,1} & & x_{0,2} \to x_{0,3} & & \cdots \\
\qquad\quad \swarrow \quad \nearrow & & \qquad\quad \swarrow \quad \nearrow & & \\
S_1 : x_{1,0} \quad x_{1,1} & & x_{1,2} \quad x_{1,3} & & \cdots \\
\quad \downarrow \quad \nearrow & & \qquad \swarrow \quad \nearrow & & \\
S_2 : x_{2,0} \quad x_{2,1} & & x_{2,2} \quad x_{2,3} & & \\
\qquad\quad \swarrow \quad \nearrow & & & & \\
S_3 : x_{3,0} \quad x_{3,1} & & x_{3,2} \quad x_{3,3} & & \\
\quad \downarrow \quad \nearrow & & & & \\
S_4 : x_{4,0} \quad x_{4,1} & & x_{4,2} \quad x_{4,3} & & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

这些箭头生成一个新的数列

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{0,0}, x_{0,1}, x_{1,0}, x_{2,0}, x_{1,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, \ldots)$$

使得 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$。现在应用推论10.24。

□

10.5 实数子集的基数

例 10。26 $\mathbb{Q}$ 是可数的。
证明。事实上，对于每一个整数 $n \geq 1$、$A_n := \left\{k/n \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$ 和 $B_n := \left\{-k/n \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$ 都是可数的，因此 $A_n \cup B_n = \left\{k/n \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{1}{n}\mathbb{Z}$也是可数的。由此可得

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \{1,2,3,\ldots\}} \frac{1}{n}\mathbb{Z} \tag{10.17}$$

根据定理 10.25，它是可数的。 □

例 10.27 开区间 $]0,1[$ 是不可数的。

证明。反设 $]0,1[$ 是可数的，即存在一个实数序列（x_n）$_{n\geq 1}$ 满足 $\{x_n\}_{n\geq 1} =]0,\ 1[$。我们利用十进制展开写成

$$x_1 = 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\cdots \tag{10.18a}$$
$$x_2 = 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\cdots \tag{10.18b}$$
$$x_3 = 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\cdots \tag{10.18c}$$
$$\vdots \tag{10.18d}$$

现在定义一个数字序列:

$$b_k := \begin{cases} 4, & \text{if } a_{k,k} \neq 4; \\ 6, & \text{if } a_{k,k} = 4, \end{cases} \tag{10.19}$$

然后令

$$y := 0.b_1b_2b_3\cdots. \tag{10.20}$$

注意，对每一个 $k \geq 1$，都有 $b_k \neq a_{k,\,k}$；因此，y 不属于集合 $\{x_n\}_{n\geq 1}$，尽管显然$y \in]0,\ 1[$——矛盾！□

推论10.28 任何非空开区间 $]\alpha,\beta[$ 都是不可数的，$\mathbb{R}$也是如此。

证明。事实上，$]\alpha,\ \beta[\approx]0,\ 1[$通过 $x \mapsto (x-\alpha)\,/\,(\beta-\alpha)$。如果 $\mathbb{R}$ 是可数的，那么任何无限子集也都是可数的（见命题10.22），尤其是非空开区间，这显然荒谬。 □

推论10.29 无理数集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 是不可数的。

证明。回想一下，$\mathbb{Q}$ 是可数的。现在，如果 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 是可数的，那么 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$也将是可数的，这是荒谬的。
□

10.6 康托尔定理

定理10.30（康托尔） 设 X 为一个非空集，并将其幂集记为 $\mathcal{P}(X)$。则$|X| < |\mathcal{P}(X)|$，其含义是：存在从 X 到 $\mathcal{P}(X)$ 的单射，但不存在从X 到 $\mathcal{P}(X)$的双射。

证明。显然，存在从 X 到 $\mathcal{P}(X)$的单射，即

$$X \to \mathcal{P}(X)\colon x \mapsto \{x\}. \tag{10.21}$$

为了证明不存在从 X 到 $\mathcal{P}(X)$ 的双射，我们反设

$$f\colon X \to \mathcal{P}(X) \text{ is bijective.} \tag{10.22}$$

因为 $f(x) \subseteq X$，所以对于 $x \in X$，$x \in f(x)$不一定成立。现在令

$$Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}. \tag{10.23}$$

由于 f 是满射，存在 $y \in X$ 使得

$$f(y) = Y. \tag{10.24}$$

现在，如果 $y \in Y$，根据 Y的定义，我们有 $y \notin f(y) = Y$，这是荒谬的。但是，如果 $y \notin Y$，那么 $y \notin f(y)$，因此 y 应当属于 Y，这同样是荒谬的。□

10.7 佐恩引理

定义10.31（偏序集与全序集）设 A为一个非空集，并设 $\preccurlyeq$是 A 上的一个关系（如有需要，请回顾第4.3节）。考虑以下条件:

① $(\forall a \in A)\ a \preccurlyeq a$。② $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)\,[a \preccurlyeq b$且 $b \preccurlyeq c] \Rightarrow a \preccurlyeq c$。③ $(\forall a \in A)(\forall b \in A)\,[a \preccurlyeq b$且 $b \preccurlyeq a] \Rightarrow a = b$。④ $(\forall a \in A)(\forall b \in A)\ a \preccurlyeq b$ 或 $b \preccurlyeq a$。

我们称$(A, \preccurlyeq)$为:

（i）一个**偏序集**，如果①、②和③ 成立；（ii）一个**全序集**，如果它是偏序集且④ 成立，即①–④ 均成立。

$\mathbb{R}$ 的非空子集例如可通过 $\leq$构成全序。此外，对于任意集合 X，幂集$\mathcal{P}(X)$可通过 $\subseteq$构成偏序。

定义10.32 设$(A, \preccurlyeq)$是一个偏序集，设 $B \subseteq A$，且设 $a \in A$。那么，若$(B, \preccurlyeq)$是全序，则 B 是一个**链**。如果 $(\forall b \in B)\ b \preccurlyeq a$，则元素 $a \in A$ 是 B 的**上界**。最后，如果$(\forall c \in A)\ a \preccurlyeq c \Rightarrow c = a$，则 a是 A 的**极大元**。

下面的事实可视为集合论中的一条基本公理。

事实10.33（佐恩引理）设 A 是一个偏序集，且其中的每条链都有上界。那么 A 包含一个极大元。

定理10.34（选择公理）设 I 是一个非空集合，并且对于每一个 $i \in I$，X_i 都是一个非空集合。那么，笛卡尔积 $\prod_{i\in I} X_i$ 非空。

证明。令 $X := \bigcup_{i\in I} X_i$，通过要求：若 $f \in A$ 和$\{(i, x)、(i, y)\} \subseteq f$，则 $x = y \in X_i$，来定义 A 为 $I \times X$ 的幂集的一个子集。我们将这样的 $f \in A$ 视为函数的图像；该函数也称为 f，满足：对 f的定义域中的每一个 i，$f(i) \in X_i$。现在用“$\subseteq$”对 A作偏序。由于 $\varnothing \in A$，我们有 $A \neq \varnothing$。令 B 为 A中的一条链。那么 $\bigcup_{f\in B} f$ 是 A中的 B 的一个上界。由佐恩引理（事实 10.33），A 包含一个极大元，记为 g。我们断言，g的定义域（记作 J）就是 I。反设不然。那么存在 $i \in I \setminus J$。考虑 $h := g \cup \{(i, x_i)\}$，其中 $x_i \in X_i$（回想一下，X_i 非空）。那么 $h \in A$ 且 $g \subsetneq h$。这与 g的极大性矛盾。因此，g 的定义域就是 I，即 g 可视为一个函数，满足 $(g(i))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$。□

下一个结果需要具备一些线性代数基础知识。

定理10.35（基的存在性）设 V 是一个向量空间。那么 V 有基。

证明。若 $V=\{0\}$，则 $\varnothing$ 是一个基。因此假设 $V\neq\{0\}$。现在，通过要求在 S 是 V的线性无关子集时满足 $S\in A$，构造 V的幂集的一个子集 A。取 $v\in V\setminus\{0\}$，可知 $\{v\}\in A$，因此 $A\neq\varnothing$。按包含关系对 A 进行偏序。设 $B=(S_i)_{i\in I}$ 是 A中的一条链。令 $S:=\bigcup_{i\in I}S_i$。我们断言 S 线性无关，即 $S\in A$。反之，假设结论不成立。那么存在向量 v_1，……，v_n 属于 S，以及不全为零的标量 α_1，……，α_n，使得

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n=0. \tag{10.25}$$

取 $i(1)\ldots,i(n)$，使得每个 $v_j\in S_{i(j)}$。由于 B是一个链，存在 $m\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\bigcup_{1\leq j\leq n}S_{i(j)}=S_{i(m)}\in A$。但这样一来，(10.25) 就荒谬了，因为 $S_{i(m)}$ 线性无关。

由此我们证明了 S 确实线性无关。因此，$S\in A$ 和 S 是 B的一个上界。根据佐恩引理，存在一个极大元 $M\in A$。因此，M 线性无关。

我们断言 M 是一个生成集。反设不然。那么存在 $v\in V$，使得 v 不在 M的张成空间中。但这样一来，$M\cup\{v\}$ 不仅属于 A，而且还是 M的真超集。这与 M的极大性矛盾。因此，M 确实是一个生成集。

总之，M 既是线性无关的，又是生成集，也就是说，M 是 V的一个基 . □

注10.36 一些评论是有序的 er.

(i) 令 V 表示由 $\mathbb{R}$中的所有数列构成的向量空间，其加法和数乘采用通常的定义。那么，V 根据定理10.35存在一个基。然而，没有人知道 V的一个具体基。在使用佐恩引理时，这类存在性结果很常见。(ii) 佐恩引理还可用于证明数学中各种有趣对象的存在性，包括泛函分析中的非零线性泛函、代数中的极大理想，以及测度论中的不可测集。(iii) 事实上，佐恩引理与选择公理等价。

习题

练习 10.1 证明命题(ii)、(iv)和(vi) 的各项。10.2。

解答。(ii)：取 $y\in f\big(f^{-1}(B)\big)$。那么 $y=f(x)$，其中 $x\in f^{-1}(B)$。因此，$f(x)\in B$，所以$y=f(x)\in B$。由此可得 $f\big(f^{-1}(B)\big)\subseteq B$。

（iv）：设 $y\in f(A_1\cup A_2)$。则 $y=f(x)$，其中 $x\in A_1\cup A_2$。若 $x\in A_1$，则 $y=f(x)\in f(A_1)$。又若 $x\in A_2$，则 $y=f(x)\in f(A_2)$。因此，$y=f(x)\in f(A_1)\cup f(A_2)$，从而 $f(A_1\cup A_2)\subseteq f(A_1)\cup f(A_2)$。

反之，由于 A_1与 A_2都是 $A_1\cup A_2$的子集，显然 $f(A_1)\subseteq f(A_1\cup A_2)$，并且 $f(A_2)\subseteq f(A_1\cup A_2)$，即 $f(A_1)\cup f(A_2)\subseteq f(A_1\cup A_2)$。因此，$f(A_1)\cup f(A_2)\subseteq f(A_1\cup A_2)$。

(vi)：设 $x\in X$。则 $x\in f^{-1}(B_1\cup B_2)\Leftrightarrow f(x)\in B_1\cup B_2\Leftrightarrow[f(x)\in B_1$或 $f(x)\in B_2]\Leftrightarrow[x\in f^{-1}(B_1)$或 $x\in f^{-1}(B_2)]\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$。□

练习 10.2 验证例 10.4。

解答。不是单射：$f(-1)=(-1)^2=1=1^2=f(1)$，但 $-1\neq1$。不是满射：不存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=x^2=-1$。 □

练习 10.3 验证例 10.5。

解答。不是满射：不存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=x^2=-1$。

单射：不失一般性地假设 $0\leq x<y$。于是 $0\leq x^2<y^2$，因此 $f(x)<f(y)$。所以 f 严格递增，故为单射。

□

练习 10.4 验证例 10.6。

解答。非单射： $f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1)$，但 $-1 \neq 1$。

满射：设 $y \geq 0$。我们已经证明，存在唯一的平方根 $\sqrt{y} \geq 0$ 使得$y = \sqrt{y}^2 = f(\sqrt{y})$。因此， f 是满射。□

练习 10.5 验证例 10.7。

解答。单射：不失一般性，假设 $0 \leq x < y$。那么 $0 \leq x^2 < y^2$ ，因此$f(x) < f(y)$。所以 f是严格递增的，从而是单射。

满射：设 $y \geq 0$。我们已经证明，存在唯一的平方根 $\sqrt{y} \geq 0$ 使得$y = \sqrt{y}^2 = f(\sqrt{y})$。因此， f 是满射。□

练习 10.6 证明命题 10.8(ii)。

解答。由命题 10.2(ii)可知 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$。

反之，假设 f 是满射，并设 $y \in B$。则存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。因此 $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(B)$，从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$。这表明 $B \subseteq f(f^{-1}(B))$。□

练习 10.7 证明命题 10.8(iii)。

解答。由命题 10.2(iii)， $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$。现取 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$。则存在 $a_1 \in A_1$ 和 $a_2 \in A_2$ 使得 $f(a_1) = y = f(a_2)$。由于 f 是单射，可得$a_1 = a_2$。因此 $y \in f(A_1 \cap A_2)$。□

练习 10.8 证明命题10.8中每一项的结论在省略 f上的假设时都不成立。

解答。 (i)： $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty[\colon x \mapsto x^2$和 $A = \{2\}$。于是 $f(A) = \{4\}$且 $f^{-1}(f(A)) = \{\pm 2\} \neq \{2\}$。 (ii)： $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$和 $B = [-4, 4]$。于是 $f^{-1}(B) = [-2, 2]$且 $f([-2, 2]) = [0, 4]$。 (iii)： $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty[\colon x \mapsto x^2$、 $A_1 = \{-2\}$和 $A_2 = \{2\}$。于是 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$，因此 $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$，但 $f(A_1) \cap f(A_2) = \{4\}$。□

习题 10.9 证明命题 10.11(ii)和(iii)。

解答。回忆一下， $g \circ f\colon X \to Z\colon x \mapsto g\big(f(x)\big)$。

(ii)：设 f 和 g 都是满射，并设 $z \in Z$。一方面，由于 g 是满射，存在 $y \in Y$使得 $g(y) = z$。另一方面，由于 f是满射，存在 $x \in X$ 使得$f(x) = y$。综上，$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z$。因此， $g \circ f$是满射。

(iii)：一方面，根据 (i)， $g \circ f$ 是单射。另一方面，根据 (ii)， $g \circ f$ 是满射。综上， $g \circ f$ 既是单射又是满射，即为双射。□

Exer练习 10.10 证明：所有有理系数多项式组成的集合是可数的。

解答。记 P_n 为所有次数为 n 的有理系数多项式组成的集合。显然，$P_0 = \mathbb{Q}$ 并且 $P_n = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (qx^n + P_{n-1})$。根据 n进行归纳，对于每个 P_n，它都是可数的。根据定理 10.25，
$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ □ 也是可数的。

练习 10.11 证明：对于每一个非空子集 X，我们有

$$\#X < \#\mathcal{P}(X) < \#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) < \cdots .$$

证明。根据康托尔定理（10.30），这一点显然。注：如果 X 是无限的，那么康托尔向我们证明了存在无穷多个无穷基数！□

习题10.12 设 $f\colon [0,1]\to[0,1]$，使得 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=1-x$ 对每一个 $x\in[0,1]$都成立。证明 f 是双射的。

解答。假设 $f(x)=f(y)$。则 $1-x=f(f(x))=f(f(y))=1-y$。因此 $1-x=1-y$，从而 $x=y$。这表明 f 是单射。

为证明 f是满射，设 $y\in[0,1]$，并令 $x=f(f(f(y)))$。则 $f(x)=((f\circ f)\circ(f\circ f))(y)=(f\circ f)(1-y)=1-(1-y)=y$，符合要求。

综上所述，我们证明了 f 既是单射又是满射，即双射。 □

习题10.13 证明不存在函数 $f\colon [0,1]\to[0,1]$ 同时满足(i) [要么 f严格递增，要么严格递减]，以及(ii) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=1-x$ 对每一个 $x\in[0,1]$。

解答。我们用反证法。假设 f 同时满足 (i) 和 (ii)。根据 (ii) 和习题10.12，f是双射。由于 (i) 成立，我们必有 $f(0)=0$(如果 f严格递增) 或者 $f(0)=1$(如果f严格递减)。另一方面，根据 (ii) 和习题1.12，$f(0)\notin\{0,1\}$。综上，这显然荒谬。□

习题10.14 证明不存在连续函数 $f\colon [0,1]\to[0,1]$，使得对每一个 $x\in[0,1]$，$(f\circ f)(x)=f(f(x))=1-x$。

解答。根据习题10.12，f 是双射。微积分/数学分析中的介值定理以及反证法表明，f 要么严格递增，要么严格递减。现在应用习题10.13。□

习题10.15 与习题 10.14不同，确实存在一个分段连续函数$f\colon [0,1]\to[0,1]$使得 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=1-x$对每一个 $x\in[0,1]$都成立。事实上，验证

$$f(x):=\begin{cases}-x+\frac{3}{4}, & \text{if } 0\le x<\frac{1}{4};\\ x-\frac{1}{4}, & \text{if } \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2};\\ \frac{1}{2}, & \text{if } x=\frac{1}{2};\\ x+\frac{1}{4}, & \text{if } \frac{1}{2}<x\le\frac{3}{4};\\ -x+\frac{5}{4}, & \text{if } \frac{3}{4}<x\le 1\end{cases}$$

即可。

解答。设 $x\in[0,1]$。注意，$f(f(1/2))=f(1/2)=1/2=1-1/2$。我们考虑其余情形。

情形 *1*：$0\le x<1/4$。
于是 $f(x)=-x+3/4\in\,]-1/4,\ 0]+3/4=\,]1/2,\ 3/4]$因此 $f(f(x))=f(x)+1/4=(-x+3/4)+1/4=-x+1$。复数域
况：*2* $1/4\le x<1/2.$
于是 $f(x)=x-1/4\in[0,1/4[$，因此 $f(f(x))=-f(x)+3/4=-(x-1/4)+3/4=-x+1$。
情况 *3*：$1/2<x\le 3/4$。
于是 $f(x)=x+1/4\in\,]3/4,\ 1]$，因此 $f(f(x))=-f(x)+5/4=-(x+1/4)+5/4=-x+1$。
情况:*43* $/4<x\le 1$。
于是 $f(x)=-x+5/4\in[-1,-3/4[+5/4=[1/4,1/2[$从而 $f(f(x))=f(x)-1/4=(-x+5/4)-1/4=-x+1$。

注：这个函数出现在量子理论中。见 Maria Luisa Dalla Chiara、Roberto Giuntini 与 Richard Greechie：量子理论中的推理第17.1节，施普林格。□

练习 10.16 令 X 为所有实数序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 构成的集合。定义作用于 X 上的两个算子，即

$$R\colon X\to X\colon (x_0,x_1,x_2,\ldots)\mapsto(0,x_0,x_1,x_2,\ldots)$$

and

$$L\colon X \to X\colon (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

which 分别称为右移 和左移算子。证明或证伪:

(i) $L \circ R = \mathrm{I}$
d (ii) $R \circ L = \mathrm{Id}$

评注。这些算子甚至是"线性"的。它们所表现出的行为不可能发生在有限维向量空间中。

解答。记 $\mathbf{x} := (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in X$。

(i): 我们有

$$(L \circ R)(\mathbf{x}) = L(R(\mathbf{x})) = L\big((0, x_0, x_1, x_2, \ldots)\big) = (x_0, x_1, \ldots) = \mathrm{Id}(\mathbf{x})$$

因此 $L \circ R = \mathrm{Id}$。

(ii): 这次,

$$\begin{aligned}(R \circ L)(\mathbf{x}) = R(L(\mathbf{x})) &= R\big((x_1, x_2, x_3, \ldots)\big) = (0, x_1, x_2, \ldots)\\ &\neq (x_0, x_1, x_2, \ldots) \qquad [\text{unless } x_0 = 0!]\\ &= \mathrm{Id}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

所以 $R \circ L \neq \mathrm{Id}$。 □

练习 10.17 设 $f\colon X \to Y$ 是一个函数。证明以下命题:

(i) f 是单射 $\Leftrightarrow$ 存在一个函数 $g\colon \operatorname{ran} f \to X$ 使得 $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ (g 称为 f 的左逆)。(ii) f 是满射 $\Leftrightarrow$ 存在一个函数 $h\colon Y \to X$ 使得 $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$ (h 称为 f 的右逆)。

解答。(i): "⇒": 假设 f 是单射。设 $y \in \operatorname{ran} f$。那么存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。没有其他元素具有这一性质: 事实上, 若 $x' \in X$ 满足 $f(x') = y$, 则 $x = x'$ 由 f 的单射性可知。因此我们定义

$$g\colon \operatorname{ran} f \to X\colon y \mapsto \text{the unique } x \in X \text{ such that } f(x) = y.$$

现在设 $x \in X$。那么 $y := f(x) \in \operatorname{ran} f$。根据 g 的定义, 我们有 $g(y) = x$。综上, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = \mathrm{Id}_X(x)$。"⇐": 假设 g 如命题所述。再假设 $f(x_1) = f(x_2)$。那么 $x_1 = \mathrm{Id}_X(x_1) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = \mathrm{Id}_X(x_2) = x_2$, 因此 f 是单射。

(ii): "⇒": 假设 f 是满射。设 $y \in Y$。则存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$。定义

$$h\colon Y \to X\colon y \mapsto \text{some } x \in X \text{ such that } f(x) = y.$$

于是显然 $f(h(y)) = y$, 因此 $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$。"⇐": 假设 h 如命题所述。设 $y \in Y$。令 $x := h(y)$。则 $f(x) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = \mathrm{Id}_Y(y) = y$, 从而 f 是满射。□

练习 10.18 假设 $f\colon A \to B$ 与 $g\colon C \to D$ 是单射。证明或反驳

$$h\colon A \times C \to B \times D\colon (a, c) \mapsto \big(f(a), g(c)\big) \text{ is injective.}$$

解答。该命题正确! 设 (a_1, c_1) 和 (a_2, c_2) 属于 $A \times C$, 且 $h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2)$。那么 $(f(a_1)\ g(c_1)) = (f(a_2)\ g(c_2))$。比较第一和第二个分量, 分别得到 $f(a_1) = f(a_2)$ 和 $g(c_1) = g(c_2)$。由于 f 和 g 是单射, 因此可得 $a_1 = a_2$ 和 $c_1 = c_2$。因此 $(a_1, c_1) = (a_2, c_2)$, 证毕。□

练习 10.19（由你来批改！）考虑以下命题

"Every function $f\colon X \to Y$ is injective"

以及下面这个"证明"：

> 设 x_1 和 x_2 属于 X，且满足 $f(x_1) \neq f(x_2)$。我们断言 $x_1 \neq x_2$。事实上，若 $x_1 = x_2$，则 $f(x_1) = f(x_2)$，这显然荒谬。因此，我们的断言成立。所以，f 是单射。

这个证明错在哪里？

解答。除了最后一行，其他内容都没有问题。其他各行表明 $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$。但是，要验证单射性，我们需要检查 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$（或者检查若 $x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$）。□

练习 10.20（真或假？）判断以下各命题的真假，并简要说明理由。

(i) "如果 $f\colon A \to B$ 是单射，则 f 是满射。" (ii) "如果 $f\colon A \to B$ 是满射，则 f 是单射。" (iii) "所有正的有理数的集合是不可数的。" (iv) "如果 $f\colon A \to B$ 是满射且 $g\colon B \to C$ 是单射，则 $g \circ f$ 是双射。"

解答。（i）：假：$f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$。（ii）：假：$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+\colon x \mapsto x^2$。（iii）：假：$\mathbb{Q}$ 是可数的，其所有子集也都是可数的！（iv）：假：$A = \{1, -1\}$, $C = B = \{1\}$, $f(x) = x^2$ 和 $g(y) = y$。

□

第11章
指数函数与柯西乘积

11.1 定义与绝对收敛

定理 11.1（指数级数和函数） 设 $x \in \mathbb{R}$。那么指数级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \tag{11.1}$$

是绝对收敛的。相应的函数是指数函数，记作指数函数(x)。注意

$$\exp(0) = 1. \tag{11.2}$$

证明。显然，（11.2）由（11.1）当 $x = 0$时得出，并且相应的级数必定绝对收敛，因为除第一项外所有项均为零。因此我们假设 $x \neq 0$。于是对每一个整数 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0. \tag{11.3}$$

因此，该结果由比值判别法（推论9.18）得出。 □

欧拉数 e 定义为指数函数(1)，即，

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots . \tag{11.4}$$

下一个结果为我们提供了有用的信息，让我们知道需要求和多少项才能确保得到精确的答案。一如既往，几何级数发挥着关键作用。我们随后将用它来估算 e。

定理 11.2 设 $x \in \mathbb{R}$ 且令 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $N \geq 2|x| - 2$。那么

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{2|x|^{N+1}}{(N+1)!}. \tag{11.5}$$

证明。事实上 d，因为 $2|x| \leq N + 2 \Leftrightarrow |x|/(N + 2) \leq 1/2$ 并利用几何级数，我们估算 e

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$

$$= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1+\frac{|x|}{N+2}+\frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)}+\cdots+\frac{|x|^k}{(N+2)\cdots(N+k+1)}+\cdots\right)$$
$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1+\frac{|x|}{N+2}+\left(\frac{|x|}{N+2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{|x|}{N+2}\right)^k+\cdots\right)$$
$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k+\cdots\right) = \frac{2|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad (11.6)$$

如所述。 □

注 11.3 由于 $2/(11+1)! < 10^{-8}$，我们可以使用 $x=1$ 和 $N=11$ 定理 11.2 将欧拉数 e近似到 7 位数字，得到 2.7182818。

现在我们证明欧拉数 e 是无理数。

定理 11.4（$e \notin \mathbb{Q}$） 欧拉数是无理数，即 $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。

证明。反设 e 是有理数，设为

$$e = \frac{m}{n} \quad (11.7)$$

其中 $m \in \{1,2,\ldots\}$ 且 $n \in \{1,2,\ldots\}$。现在定义

$$x := n!\left(e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} > 0. \quad (11.8)$$

注意，如果 $k \geq n+1$，那么 $k!/n! = (n+1)(n+2)\cdots k \geq (n+1)^{k-n}$ 因此

$$\frac{n!}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}} \quad (11.9)$$

并且只要 $k \geq n+2$，这个不等式就是严格的。利用几何级数的公式，可得

$$x = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^l} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} \leq 1. \quad (11.10)$$

总而言之，到目前为止我们已经证明

$$0 < x < 1. \quad (11.11)$$

另一方面，将(11.7) 代入(11.8)，可知

$$0 < x = n!\left(\frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} = m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdots(n-1)n \quad (11.12)$$

是一个正整数！因此 $x \geq 1$ 鉴于(11.11)，这是荒谬的。 □

11.2 两个级数的柯西乘积

恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \quad (11.13)$$

遗憾的是，对于两个绝对收敛的级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$，这一结论并不成立。本节将探讨如何计算（11.13）右侧的值。

定义11.5 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是两个实数数列。那么， $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 与 $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ 的**柯西乘积** 定义为 $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$，其中

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k, \qquad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{11.14}$$

定理 11.6 设 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ 是两个绝对收敛级数，其柯西乘积为$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$。那么 $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ 绝对收敛，并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big). \tag{11.15}$$

证明。令 $A := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$， $B := \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$，并且对每一个 $n \in \mathbb{N}$， $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$， $D_n := (\sum_{k=0}^{n} a_k)(\sum_{k=0}^{n} b_k)$，并令 $E_n := (\sum_{k=0}^{n} |a_k|)(\sum_{k=0}^{n} |b_k|)$。注意到 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 根据乘法法则（定理 6.17）是一个收敛数列。特别地，它是一个柯西序列。现在令 $\varepsilon > 0$。那么存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|E_n - E_N| < \varepsilon, \qquad \text{for every } n \geq N. \tag{11.16}$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义指标集

$$I_n := \big\{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\big|\; i \leq n \text{ and } j \leq n\big\} \tag{11.17}$$

于是（11.16）变为

$$\sum_{(i,j)\in I_n \setminus I_N} |a_i b_j| < \varepsilon, \qquad \text{for every } n \geq N. \tag{11.18}$$

另一方面，再次根据乘法法则，我们有 $D_n \to AB$。现在

$$D_n = \sum_{(i,j)\in I_n} a_i b_j \tag{11.19}$$

而

$$C_n = \sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_{m-k} b_k = \sum_{(i,j)\in I_n, i+j\leq n} a_i b_j. \tag{11.20}$$

因此，

$$D_n - C_n = \sum_{(i,j)\in I_n, i+j>n} a_i b_j. \tag{11.21}$$

设 $n \geq 2N$，并设 $(i,\ j) \in I_n$ 使得 $i + j > n$。如果 $(i,\ j) \in I_N$，我们就会有 $i \leq N$ 和 $j \leq N$，从而 $n < i + j \leq 2N \leq n$，这是荒谬的。因此 $(i,\ j) \in I_n \setminus I_N$。综合起来，我们推出对$n \geq 2N$，我们有

$$|D_n - C_n| = \left|\sum_{(i,j)\in I_n, i+j>n} a_i b_j\right| \leq \sum_{(i,j)\in I_n, i+j>n} |a_i b_j| \leq \sum_{(i,j)\in I_n\setminus I_N} |a_i b_j| < \varepsilon. \tag{11.22}$$

因此， $D_n - C_n \to 0$，且由于 $D_n \to AB$，我们得到 $C_n = (C_n - D_n) + D_n \to 0 + AB = AB$，即，柯西乘积是一个极限为 AB的收敛级数。

接下来还需证明柯西乘积的绝对收敛。为此，对每一个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\alpha_n = |a_n|$ 与$\beta_n = |b_n|$。则 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ 与 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ 是两个绝对收敛级数，并将其柯西乘积记为 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$。将证明的上述部分应用于这两个级数，我们推得 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$ 是一个收敛级数。由于对每一个 $n \in \mathbb{N}$，

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}b_k| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}\beta_k = \gamma_n, \tag{11.23}$$

由比较判别法（定理9.14）可知 $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ 是绝对收敛的

it f t. □

11.3 函数方程

定理 11.7（指数函数的函数方程）设 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$。则

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{11.24}$$

证明。我们有

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{and} \quad \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, \tag{11.25}$$

根据定理 11.1，两个级数都绝对收敛。将它们的柯西乘积记作$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$。然后，利用二项式定理（定理 2.12）和引理 2.10(ii)，我们计算得

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \frac{(x+y)^n}{n!}. \tag{11.26}$$

鉴于定理 11.6，因此得到

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y), \tag{11.27}$$

如所述。 □

推论 11.8 以下结论对每一个 $x \in \mathbb{R}$ 和每一个 $m \in \mathbb{Z}$都成立。

(i) 指数函数$(x) > 0$。(ii) 指数函数$(-x) = 1/$指数函数(x)。(iii) 指数函数$(m) = e^m$。

证明。由于指数函数$(0) = 1$（见（11.2））， 由定理 11.7 可得 $1 =$指数函数$(0) =$指数函数$\big(x + (-x)\big) =$指数函数(x) 指数函数$(-x)$。特别地，指数函数$(x) \neq 0$ 且 (ii) 因此成立。此外，指数函数(x)和指数函数$(-x)$要么都为正，要么都为负。现在若 $x \ge 0$，则

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \ge 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1; \tag{11.28}$$

因此，指数函数$(x) > 0$ 在这种情况下成立；由 (ii)，指数函数$(-x) > 0$ 也成立。这就证明了 (i)。关于 (iii) 的证明留作习题 11.4。 □

注 11.9（正弦与余弦加法定理）本章节中证明的结论，实际上对复指数函数也成立，只需将实绝对值替换为复绝对值 $|x + \mathrm{i}y| := \sqrt{x^2 + y^2}$ 这样便能定义指数级数绝对收敛的概念。函数方程结合极坐标，便可优雅地证明正弦与余弦的加法定理。具体来说，设 α 和 β 属于 $\mathbb{R}$。那么

$$\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) = \exp(\mathrm{i}(\alpha+\beta)) = \exp(\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}\beta) = \exp(\mathrm{i}\alpha)\exp(\mathrm{i}\beta) \tag{11.29a}$$

$$= (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \tag{11.29b}$$

$$= \big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\big) + \mathrm{i}\big(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\big). \tag{11.29c}$$

比较实部和虚部，我们得到

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{11.30}$$

and

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \tag{11.31}$$

习题

练习 11.1 通过使用注 11.3，使用你选择的编程语言（例如，`Maple`、`Python`、`Octave`、`Java`等）。请提交 (i) 计算机代码的打印件，以及 (ii) 计算机代码输出的打印件。

解答。

注 11.3 的示例。
这是一个运行 **Julia 1.11** 的 IPython笔记本
使用估算值求欧拉数。

In [1]:
```
setprecision(100); s=BigFloat(1.0);
```

In [2]:
```
for n in 1:11
    global s = s + 1/factorial(n);
    println(n,"th partial sum: \t",s)
end
```

```
1th partial sum:
2.0
2th partial sum:        2.5
3th partial sum:        2.66666666666666665741480812812 37
4th partial sum:        2.70833333333333332176851016015 46
5th partial sum:        2.71666666666666665498619526175 62
6th partial sum:        2.71805555555555554392808959018 88
7th partial sum:        2.71825396825396824234061590730 43
8th partial sum:        2.71827876984126982964218169694 37
9th partial sum:        2.71828152557319222823143279200 3
10th partial sum:       2.71828180114638446809031554986 16
11th partial sum:       2.71828182619849285353203577372 78
```

作为比较，直接给出欧拉数：

In [3]:
```
println("Euler's number: \t",exp(BigFloat(1.0)))
```

```
Euler's number:         2.71828182845904523536028747135 12
```

正如理论所预言的，我们得到了 7 位正确数字。e

□

练习 11.2 假设 $N \in \mathbb{N}$，且 $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_N z^N$和 $B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_N z^N$是次数为 N 的多项式。将乘积多项式 $A(z)B(z)$ 记为 $C(z)$，写作 $C(z) = \sum_{k=0}^{2N} c_k z^k$。如果 $0 \le n \le N$，那么 c_n 用原多项式 $A(z)$ 和 $B(z)$ 的系数表示是什么？与 (11.14) 比较。

解答。我们有

$$\begin{aligned}C(z) &= A(z)B(z)\\ &= \Big(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_N z^N\Big)\Big(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_N z^N\Big)\\ &= (a_0 b_0) + (a_1 z b_0 + a_0 b_1 z) + (a_2 z^2 b_0 + a_1 z b_1 z + a_0 b_2 z^2)\\ &\quad + \cdots + (a_n z^n b_0 + a_{n-1} z^{n-1} b_1 z + \cdots + a_0 b_n z^n) + \cdots + a_N z^N b_N z^N\\ &= (a_0 b_0) z^0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) z^2\\ &\quad + \cdots + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n + \cdots + (a_N b_N) z^{2N}.\end{aligned}$$

由此可得

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k,$$

这表明柯西乘积的定义源于多项式或形式幂级数的乘法。□

练习 11.3 证明级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n/\sqrt{n+1}$ 收敛，然后证明该级数与自身的柯西乘积发散。

解答. 由于 $0 < 1 < 2 < \cdots < n < n+1 < \cdots$，由此可得 $(\sqrt{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个严格递增数列。因此，$(1/\sqrt{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由正数组成的严格递减数列。因此该级数由莱布尼茨交错级数判别法收敛（定理 9.8）。

将该级数与自身的柯西乘积记为 $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$。则

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

现在若 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$，则 $(n-k+1)(k+1) \le (n+1)(n+1) = (n+1)^2$，从而 $\sqrt{(n-k+1)(k+1)} \le n+1$。由此可得

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = (n+1)\frac{1}{n+1} = 1.$$

鉴于引理9.2，级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ 不可能收敛。□

习题 11.4 证明推论 11.8(iii)。 提示：先对 $m \in \mathbb{N}$ 证明该结论，使用数学归纳法。然后利用推论 11.8(ii) 处理 $m < 0$。

解答。 当 $m = 0$时，我们有 $\exp(m) = \exp(0) = 1 = e^0 = e^m$ 由 (11.2) 得到。现在假设 $\exp(m) = e^m$ 对某个整数 $m \ge 0$ 成立。于是，根据定理 11.7，$\exp(m+1) = \exp(m)\exp(1) = e^m e^1 = e^{m+1}$，因此由数学归纳法原理，该结论对所有 $m \ge 0$ 都成立。

最后，假设 $m < 0$。那么，根据推论11.8(ii) 以及我们刚刚证明的关于非负整数的结论，有 $\exp(m) = \exp(-|m|) = 1/\exp(|m|) = 1/e^{|m|} = e^{-|m|} = e^m$。□

习题 11.5 给出两个绝对收敛级数，使得（11.13）不成立。

解答。 例如，令 $a_n := b_n := 1$，当 $n \in \{0, 1\}$ 时；令 $a_n := b_n := 0$，当 $n \ge 2$ 时。于是

$$\big(1 + 1 + 0 + 0 + \cdots\big)\big(1 + 1 + 0 + 0 + \cdots\big) = 4 \ne 2 = 1 + 1 = \big(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdots\big),$$

这表明（11.13）不成立。□

练习 11.6（对数） 证明指数函数严格递增，即 $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$，并由此推出指数函数是单射。现在将指数函数的值域记为 R，使得 $\exp : \mathbb{R} \to R$ 是双射。于是

相应的反函数就是**自然对数**ln。证明，若 u 和 v 属于 R，则[1]

$$\ln(u\cdot v)=\ln(u)+\ln(v).$$

解答。假设 $x<y$。那么 $d:=y-x>0$。根据 $\exp(d)$ 的定义，$\exp(d)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n}{n!}=1+d+\frac{d^2}{2}+\cdots>1$。接下来，根据推论 11.8(i)，$\exp(x)>0$，且 $\exp(y)>0$。综上，$\exp(y)=\exp(x+d)=\exp(x)\exp(d)>\exp(x)$，因此 exp 严格递增，故为单射。

利用分析学可以证明 $R=\mathbb{R}_{++}$。现在设 u 和 v 属于 R。那么存在 x 和 y 属于 $\mathbb{R}$，使得 $\exp(x)=u$ 且 $\exp(y)=v$。因此，$\ln(u)=x$ 且 $\ln(v)=y$。利用指数函数的函数方程，我们得到 $u\cdot v=\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$，这意味着

$$\ln(u\cdot v)=\ln(\exp(x+y))=x+y=\ln(u)+\ln(v),$$

正如所声称的。 □

练习 11.7（复数域中的绝对值 $\mathbb{C}$）给定 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$，其中 x，y 属于 $\mathbb{R}$，绝对值定义为

$$|z|:=\sqrt{x^2+y^2}.$$

证明以下各项：

(i) $|z|\geq 0$。 (ii) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$。 (iii) 若 $z\in\mathbb{R}$，即 $y=0$，则 $|z|$ 与第5章中定义的绝对值相同。

解答。 (i)：这显然成立，因为平方根是非负的。
(ii): Using Corollary 5.4, we have $|z|=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0\Leftrightarrow z=0$.
(iii): Suppose that $y=0$. Then $|z|=\sqrt{x^2+0^2}=\sqrt{|x|^2}=|x|$. □

习题　练习 11.8（$\mathbb{C}$中乘积的绝对值）证明，对于 z 和 w 属于 $\mathbb{C}$，有

$$|z\cdot w|=|z|\cdot|w|.$$

解答。设 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $w=u+\mathrm{i}v$，其中 x，y，u，v 属于 $\mathbb{R}$。利用习题3.19，可得

$$\begin{aligned}|z\cdot w|^2&=|(x+\mathrm{i}y)(u+\mathrm{i}v)|^2=|(xu-yv)+\mathrm{i}(xv+yu)|^2=(xu-yv)^2+(xv+yu)^2\\&=(x^2+y^2)(u^2+v^2)=|x+\mathrm{i}y|^2|u+\mathrm{i}v|^2=|z|^2|w|^2=\big(|z|\cdot|w|\big)^2.\end{aligned}$$

两边开平方即可得到结论。 □

练习 11.9（$\mathbb{C}$中的三角不等式）证明，对于 z 和 w 属于 $\mathbb{C}$，有

$$|z+w|\leq|z|+|w|.$$

提示：利用习题5.17证明该不等式的平方形式。

解答。设 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $w=u+\mathrm{i}v$，其中 x、y、u、v 属于 $\mathbb{R}$。

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=|(x+\mathrm{i}y)+(u+\mathrm{i}v)|^2=|(x+u)+\mathrm{i}(y+v)|^2=(x+u)^2+(y+v)^2\\&=x^2+u^2+y^2+v^2+2(xu+yv)\leq x^2+u^2+y^2+v^2+2|xu+yv|\\&=x^2+y^2+u^2+v^2+2\sqrt{(xu+yv)^2}\leq x^2+y^2+u^2+v^2+2\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}\\&=x^2+y^2+u^2+v^2+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}=|x+\mathrm{i}y|^2+|u+\mathrm{i}v|^2+2|x+\mathrm{i}y|\cdot|u+\mathrm{i}v|\end{aligned}$$

[1] 对数的函数方程具有重要的历史意义，因为它将乘法转化为简单得多的加法。

$$= \big(|x+\mathrm{i}y| + |u+\mathrm{i}v|\big)^2 = \big(|z|+|w|\big)^2,$$

其中第一处不等式用到了 $\alpha \le |\alpha|$，第二处不等式用到了习题 5.17。取平方根即可得到结论。□

习题 11.10（为微积分 I 中的一个极限提供论证）证明，对每一个 $x \in [-3/2, 3/2] \setminus \{0\}$，都有

$$\left|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right| \le |x|.$$

提示：定理 11.2！顺便指出，令 $x \to 0$，即可得到微积分 I 中给出的一个极限（通常未加论证）：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$$

解答。考虑 11.2 中的定理，令 $N = 1$。该定理假设中的不等式 $N \ge 2|x| - 2$，可转化为 $1 \ge 2|x| - 2 \Leftrightarrow 2+1 \ge 2|x| \Leftrightarrow 3 \ge 2|x| \Leftrightarrow |x| \le 3/2 \Leftrightarrow x \in [-3/2, 3/2]$，这恰好就是我们对 x 的假设。接下来，(11.5) 变为

$$\left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{1} \frac{x^n}{n!}\right| \le \frac{2|x|^{1+1}}{(1+1)!},$$

这等价于

$$|\exp(x) - (1+x)| \le |x|^2.$$

现在两边除以 $|x|$，得到

$$\left|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right| \le |x|.$$

由夹逼定理（函数版）可知，该极限命题显然成立。 □

习题 11.11（余弦级数）证明，对每一个 $x \in \mathbb{R}$，余弦函数的麦克劳林级数

$$\cos(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} \pm \cdots,$$

绝对收敛。

解答。当 $x = 0$ 时，该命题显然成立。因此，我们假设 $x \ne 0$，并设

$$a_n := \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

其中 $n \in \mathbb{N}$。于是

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \frac{\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} \to 0.$$

现在应用比值判别法（推论 9.18 其中 $q = 0$）。 □

练习 11。　12（正弦级数）证明对每一个 $x \in \mathbb{R}$，正弦函数的麦克劳林级数 ，

$$\sin(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} \pm \cdots,$$

是绝对收敛的。

解答。当 $x=0$ 时，命题显然成立。因此我们假设 $x\neq 0$，并令

$$a_n := \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Then

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \frac{\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} \to 0.$$

现在应用比值判别法（推论 9.18 其中 $q=0$）。 □

习题 11.13 设 $(c_n)_{n\geq 1}$ 是一个有界实数序列（不一定收敛）。证明或反驳：

$$\sum_{n\geq 1}\frac{c_n}{n^2}$$

是收敛的。

解答。我们证明该结果正确！

由于 $(c_n)_{n\geq 1}$ 是一个有界序列，存在 $\gamma\geq 0$ 使得

$$(\forall n\geq 1)\quad |c_n|\leq \gamma.$$

我们知道 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ 收敛（它是一个 p级数，且 $p=2$），因此它绝对收敛，因为其各项均为正的。令，对于 $n\in\{1,2,\overline{\ldots}\}$，$b_n := \gamma/n^2\geq 0$。由此可得

$$\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1}\frac{\gamma}{n^2}$$

绝对收敛。现在令 $a_n := c_n/n^2$，其中 $n\in\{1,2,\ldots\}$。那么

$$|a_n| = \frac{|c_n|}{n^2}\leq \frac{\gamma}{n^2} = b_n.$$

根据比较判别法（定理 9.14），$\sum_{n\geq 1} a_n$ 绝对收敛。 □

Exer习题 11.14（根值判别法） 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列，并假设

$$q := \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

存在且 $q<1$。（本习题中假设 n次根存在。）证明 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 绝对收敛。提示：与几何级数进行比较。

解答。令 $\beta := (1+q)/2 < 1$。与比值判别法的证明类似，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\geq N$，都有

$$\sqrt[n]{|a_n|}\leq \beta;\ \text{equivalently, } |a_n|\leq \beta^n.$$

与绝对收敛级数 $\sum_{n\geq N}\beta^n$ 比较可知，$\sum_{n\geq N}|a_n|$ 收敛，因此 $\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$ 也收敛。□

习题 11.15 定义数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & \text{if } n \text{ is even;} \\ \dfrac{3}{2^n}, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

证明或证伪：级数

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots$$

收敛。

解答。我们 说明结果是正确的！（这个例子一个有趣的特点是，比值判别法并不适用！）

集合 $b_n \equiv 3/2^n$。于是 $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ 绝对收敛（它是几何级数的倍数！）。此外，显然 $|a_n| = a_n \le b_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。根据比较判别法（定理 9.14）， $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 绝对收敛。 □

练习 11.16（贝塞尔函数） 贝塞尔函数 （0 阶）定义为

$$J_0(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

对每一个 $x \in \mathbb{R}$。证明该级数绝对收敛。

解答。当 $x = 0$ 时，命题显然成立。因此我们假设 $x \neq 0$ ，并令

$$a_n := \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Then

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}}\right| = \frac{\dfrac{|x|^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}}{\dfrac{|x|^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}} = \frac{|x|^2}{2^2(n+1)^2} \to 0.$$

现在应用比值判别法（推论 9.18 其中 $q = 0$）。 □

练习 11.17（二项式级数） 二项式级数 定义为

$$B(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n$$

对于 $x \in \mathbb{R}$ 和 $p \in \mathbb{R}$。

(i) 证明当 $|x| < 1$时，该级数绝对收敛。

(ii) 当 $p \in \mathbb{N}$时，化简 $B(x)$。

解答。当 $x = 0$时，该级数显然绝对收敛，并且 $B(0) = 1$。

因此我们假设 $x \neq 0$ ，并令

$$a_n := \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)x^n}{n!}$$

若 $p \in \mathbb{N}$，则对于 $n \ge p+1$， $a_n = 0$ ，因此该级数绝对收敛，并且根据二项式定理， $B(x) = (x+1)^p$ ！（当 $|x| < 1$时，任意 p 也成立。）

因此，假设 $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$。那么 $a_n \neq 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{p(p-1)\cdots(p-(n+1)+1)x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)x^n}{n!}}\right| = \frac{|x||p-n|}{(n+1)} = \frac{|x||p/n-1|}{(1+1/n)}$$
$$\to \frac{|x||0-1|}{1+0} = |x|.$$

现在应用比值判别法（推论 9.18 以及 $q = |x|$）。 □

习题 11.18（由你来批改！）考虑以下命题

$$\text{“}\exp(1) = 0\text{”}$$

以及以下“证明”：

> 我们已经看到 $1 = 1 \cdot 1$。因此 $\exp(1) = \exp(1 \cdot 1)$。函数方程现在表明 $\exp(1) = \exp(1) + \exp(1)$。所以，$0 = \exp(1)$。

这个证明为什么错了？

解答。函数方程适用于数值的和，而不是乘积。（这个证明可以改用于自然对数，从而证明 $\ln(1) = 0$。）
□

习题 11.19（真或假？）判断以下各命题为真还是假，并简要说明理由。

(i) “如果 $A := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 和 $B := \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ 绝对收敛，那么 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = A \cdot B$。” (ii) “如果 x，y 属于 $\mathbb{R}$，那么 $\exp(x \cdot y) = \exp(x) + \exp(y)$.” (iii) “如果 $x \in \mathbb{R}$，那么 $\sqrt{\exp(2x)} = \exp(x)$.” (iv) “$4 < \exp(2) < 9$。”

解答。(i)：假：$B := A := 2 = 1+1+0+0+\cdots$。那么 $1\cdot1+1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0+\cdots = 2 \neq 4 = A\cdot B$。(ii)：假：$x := y := 0$ 导致 $1 = 1 + 1$。(iii)：正确：$\exp(2x) = \exp(x + x) = \exp(x)\exp(x)$。现在开平方！(iv)：正确：我们知道 $2 < \exp(1) < 3$（见注 11.3）。现在 $2 = 1 + 1$，因此 $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1)\exp(1)$，由此得证。□

第12章 杂项

12.1 下确界与上确界

定义 12.1（有上界和有下界）令 S 为 $\mathbb{R}$的一个子集。若存在 $\beta \in \mathbb{R}$，使得对所有 $x \in S$，都有 $x \leq \beta$（相应地，$\beta \leq x$），则称 S **有上界**（相应地，**有下界**）。在这种情况下，数 β 称为 S的**上界**（相应地，**下界**）。如果集合 S 既有上界又有下界，则称其**有界**。

注意，若 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列，则集合 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，当且仅当该数列按照定义6.9的意义有界。

此外，与（6.13）类似，我们可以证明，集合 S 有界，当且仅当

$$\text{there exists } \gamma \geq 0 \text{ such that } |x| \leq \gamma, \text{ for every } x \in S. \tag{12.1}$$

定义 12.2（上确界）设 S 是 $\mathbb{R}$ 的一个有上界的非空子集，且$\beta \in \mathbb{R}$。那么，β 是 S的**最小上界**或**上确界**[1]，记作

$$\beta = \sup S, \tag{12.2}$$

如果满足以下条件。

(i) β 是 S的上界。(ii) 如果 $\alpha < \beta$，那么 α 不是 S的上界。

如果 $\sup\ S \in S$，那么 $\sup\ S$ 也称为 S的**最大值**，记作 $\max S$。

容易看出，只要上确界存在，它就是唯一的（习题12.1）。为方便起见，定义 $\sup \varnothing := -\infty$，以及 $\sup\ S := +\infty$，如果 S没有上界。

下确界[2] 的定义与此类似：

定义 12.3（下确界）设 S 是 $\mathbb{R}$ 的一个有下界的非空子集，且 $\beta \in \mathbb{R}$。那么 β 是 S的**最大下界**或**下确界**，记作

$$\beta = \inf S, \tag{12.3}$$

如果满足以下条件。

(i) β 是 S的下界。(ii) 如果 $\alpha > \beta$，那么 α 不是 S的下界。

如果 $\inf\ S \in S$，那么 $\inf\ S$ 也称为 S 的**最小值**，记作 $\min S$。

[1] 这个名称源自拉丁语“suppremum” =，意为“最高部分”。[2] 这个名称是对应于拉丁语“infimus” = （“最低”）的名词。

下确界若存在则唯一，并且当 S 有下界时，记作 $\inf \varnothing := +\infty$；当 S 无下界时，记作 $\inf S := -\infty$。采用这种记法

$$-S := \{-s \mid s \in S\}, \tag{12.4}$$

我们有（习题 12.3）

$$\inf S = -\sup(-S). \tag{12.5}$$

例 12.4（区间） 令 a 和 b 为满足 $a < b$ 的实数。那么以下 hol d.

（i）下确界 $[a,b] = \min[a,b] = a$，上确界 $[a,b] = \max[a,b] = b$。
（ii）下确界 $]a,\ b] = a \notin]a,\ b]$，上确界 $]a,\ b] = \max\ ]a,\ b] = b$。
（iii）下确界 $[a,b[= \min\ [a,b[= a$，上确界 $[a,b[= b \notin [a,b[$。（iv）下确界 $]a,\ b[= a \notin]a,\ b[$，上确界 $]a,\ b[= b \notin]a,\ b[$。

下确界和上确界的存在性是实数集合的一个微妙性质 s.

定理12.5 设 S 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，且 S 有上界。则 上确界 S 存在，并且存在一个数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 S，使得 $x_n \to$ 上确界 S。

证明。设 β_0 是 S 的一个上界，取 $x_0 \in S$，并令 $\delta := \beta_0 - x_0 \geq 0$。
我们将 c $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$，分别属于 S 和 $\mathbb{R}$，使得 hat

(i) $(\forall n \geq 1)$ $x_{n-1} \leq x_n \in S$（这意味着 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 S 中的递增点数列）；(ii) $(\forall n \geq 1)$ $\beta_{n-1} \geq \beta_n$，且 β_n 是 S 的一个上界（这意味着 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 S 的递减上界数列）；(iii) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\beta_n - x_n \leq \delta/2^n$。

基础情形很明显。

现在假设给定了具有所述性质的 $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ 和 $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 为某个整数。显然，$x_n \leq \beta_n$，因为 $x_n \in S$，且 β_n 是 S 的上界。令

$$\mu := \frac{x_n + \beta_n}{2}, \tag{12.6}$$

即，μ 是区间 $[x_n, \beta_n]$ 的中点。

情形 *1*：μ 是 S 的上界。
于是令 $x_{n+1} : = x_n$，以及 $\beta_{n+1} : = \mu$。

情形 *2*：μ 不是 S 的上界。
那么必定存在一个点 $x_{n+1} \in]\mu,\ \beta_n] \cap S$，我们令 $\beta_{n+1} := \beta_n$。

无论哪种情况，显然 $x_n \leq x_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n$，并且 $\beta_{n+1} - x_{n+1} \leq (\beta_n - x_n)/2 \leq (\delta/2^n)/2 = \delta/2^{n+1}$，正如所需。

构造出这些单调数列并利用定理 7.17后，我们看到它们必定都收敛到相同的极限 β。

剩下要证明的是 $\beta =$ 上确界 S。事实上，若 $s \in S$，那么 $s \leq \beta_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，因此根据定理 6.23，有 $s \leq \beta$。现在假设 $\alpha < \beta$。选取 $n \in \mathbb{N}$ 足够大，使得 $\delta/2^n < \beta - \alpha$。于是$x_n \geq \beta_n - \delta/2^n \geq \beta - \delta/2^n > \alpha$，所以 α 肯定不是 S 的上界。□

推论 12.6 设 S 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集，且 S 有下界。那么下确界 S 存在，并且存在一个数列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 S，使得 $x_n \to$ 下确界 S。

注 12.7 $\mathbb{Q}$的子集的下确界和上确界不一定属于 $\mathbb{Q}$：例如，集合

$$S := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \tag{12.7}$$

有上界，但上确界$S = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ 由定理7.1。

12.2 下极限和上极限

下极限和上极限的概念可以理解为数列极限思想的推广。这些广义极限总是存在，即使所讨论的数列没有极限。

定义 12.8 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个实数序列。对每一个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$S_n := \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}. \tag{12.8}$$

于是 $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq S_{n+1}$，这意味着

$$\sup S_n \geq \sup S_{n+1} \quad \text{and} \quad \inf S_n \leq \inf S_{n+1}, \qquad \text{for every } n\in\mathbb{N}. \tag{12.9}$$

因此，这两个数列都收敛（其极限可能属于 $\pm\infty$）。记作

$$\overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n := \lim_{n\in\mathbb{N}} \sup S_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup S_n \tag{12.10}$$

and

$$\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n := \lim_{n\in\mathbb{N}} \inf S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf S_n, \tag{12.11}$$

并称 $\lim_{n\in\mathbb{N}} \overline{x_n}$ 为 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的**上极限**（或**上限**），称 $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ 为 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的**下极限**（或**下限**）。

不足为奇，

$$\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n \leq \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n. \tag{12.12}$$

例 12.9 极限$_{n\in\mathbb{N}}\underline{(-1)}^n = -1 < +1 =$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\overline{(-1)}^n$。

设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界数列。可以证明，$\lim x_n$ 是数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的最大聚点，$\lim x_n$ 是数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的最小聚点，并且

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is convergent} \Leftrightarrow \underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n = \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n, \tag{12.13}$$

此时 $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} \underline{x_n} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \overline{x_n}$。

习题

练习 12.1 设 S 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集。证明：若上确界存在，则它是唯一的。

解答。假设 β' 和 β 都是上确界，但二者不同，设为 $\beta' < \beta$。一方面，由于 β 是 S 和 $\beta' < \beta$ 的上确界，因此 β' 不是 S 的上界。另一方面，我们假设 β' 是 S 的上确界；特别地，它是一个上界。综上，我们得出了矛盾。□

练习 12.2 设 A 和 B 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，它们都有上界，且满足 $A\subseteq B$。证明 $\sup A \leq \sup B$。

解答。令 $\alpha := \sup A$，且 $\beta := \sup B$。那么 β是 B的一个上界，因此 $(\forall b\in B)\ b\leq\beta$，从而 $(\forall a\in A)\ a\leq\beta$。由此可知，$\beta$ 是 A的一个上界。我们断言 $\beta\geq\alpha$。反设 $\beta<\alpha$。根据 α的定义，我们必有 β 不是 A 的上界，这显然矛盾。□

练习12.3 证明（12.5），其中我们（为简便起见）假设 S 是 $\mathbb{R}$的一个非空有界子集。

解答。我们必须证明

$$\inf S = -\sup(-S).$$

设 $\sigma := \sup(-S)$。我们必须证明 $-\sigma = \inf S$，即 (i) $-\sigma$ 是 S 的下界；以及 (ii) 若 $\alpha > -\sigma$，则 α 不是 S的下界。

(i)：由于 σ 是 $-S$的上界，因此有 $(\forall s \in S)\ -s \le \sigma$；等价地，$(\forall s \in S)\ s \ge -\sigma$，如所需。

(ii)：令 $\alpha > -\sigma$。则 $-\alpha < \sigma$。根据 σ 是 $-S$的上确界的定义，$-\alpha$ 不可能是 $-S$的上界。因此存在 $s \in S$ 使得 $-\alpha < -s$。由此可得 $\alpha > s$，且 α 不是 S 的下界，如所需。□

练习12.4 设 A 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集，且 A 有上界。令 $\sigma \in \mathbb{R}$。证明 $\sigma = \sup A \Leftrightarrow$ [存在一个数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 A，使得 $a_n \to \sigma$；并且对每一个数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 A，若 $b_n \to \beta$，则必有 $\beta \le \sigma$]。

解答。“⇒”：假设 $\sigma = \sup A$。那么 $\sigma - \frac{1}{2^n}$ 不是 A的上界，因此存在 $a_n \in A$，使得 $\sigma - \frac{1}{2^n} < a_n \le \sigma$。由夹逼定理可得 $a_n \to \sigma$。接下来，设 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 A 且$b_n \to \beta$。那么 $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \le \sigma$。取极限可得 $\beta \le \sigma$。

“⇐”：设 $a \in A$。令 $b_n \equiv a$，得到 $a \le \sigma$；因此，σ 是 A的上界。另一方面，设 $\lambda < \sigma$，并在 A 中取一个数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $a_n \to \sigma$。那么最终 $a_n > \lambda$，所以 λ 不是 A的上界。综上，$\sigma = \sup A$。□

练习12.5 设 A是 $\mathbb{R}$的一个有上界的非空子集。证明或证伪：

如果 $\sup A$ 不是最大值，那么 A 包含无限多个元素。

解答。我们证明该结论正确。

反设 A 只包含有限多个互异元素，设这些元素为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，其中某个 $n \ge 1$。那么 A 有唯一的最大元素 a_m，其中 $1 \le m \le n$。但这样一来，$a_m = \sup(A) \in A$，因此 a_m 是最大值，这与假设矛盾。□

习题 12.6 验证（12.12）。

解答。令 S_n 如定义 12.8 中所述。则

$$\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} \inf S_n \quad \text{and} \quad \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} \sup S_n.$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有

$$(\forall s_n \in S_n) \quad \inf S_n \le s_n \le \sup S_n.$$

现在对 $n \to \infty$ 取极限，得到极限$_{n\in\mathbb{N}}\, \underline{x_n} \le$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, \overline{x_n}$。 □

习题 12.7 如果可能，请给出数列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得下列条件成立：

(i) $-\infty \le$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, \underline{x_n} <$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n = +\infty$；(ii) $-\infty =$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n <$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n = +\infty$；(iii) $-\infty \le$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n <$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n < +\infty$ 且 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 恰有 3 个聚点。(iv) $-\infty <$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n <$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n < +\infty$ 且 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有无穷多个聚点。(v) $-\infty =$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n <$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n = +\infty$ 且每个实数都是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的聚点。

解答。(i)：$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有极限 $=-1$ 且极限 $=+1$。
(ii)：(0，1，0，2，0，3，0，4，0，5，0，6，.....)的极限为 $=0$，且极限为 $=+\infty$。
(iii)：$(-1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, \ldots\ldots)$。
(iv)：给自己选两个数，比如 -10 和 10。从 x_0开始，然后 $x_1 = x_0 + 1/1$, $x_2 = x_1 + 1/2$, $x_3 = x_2 + 1/3$, $x_k = x_{k-1} + 1/k$，直到越过上限 10： $x_n < 10$, $x_{n+1} \geq 10$。（这确实会发生，因为调和级数发散！）现在反向而行： $x_{n+2} = x_{n+1} - 1/(n+2)$，直到到达下限 -10。然后再反向而行。每个界限都会被无穷多次越过，而且步长会越来越小。你构造出的数列将以整个区间 $[-10, 10]$ 为聚点——这不是奇妙得令人难以置信吗?

(v)：论证方法与 (iv) 相同，但改变障碍的位置：10， -10：一旦你越过了 -10，就上到 20，再下到 -20，然后到 30 和 -30，依此类推。同样，调和级数的发散性使这成为可能。最终得到的数列以每个实数都是一个聚点！！（数学比许多小说更奇妙有趣！）□

习题 12.8 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界实数序列，且 $\sigma \in \mathbb{R}$。证明 $\sigma = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)$ $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > \sigma - \varepsilon\}$ 是无限集，且 $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \sigma + \varepsilon\}$ 是有限集。

解答。令 S_n 如定义 12.8 中所述，并令 $\sigma_n := $ 上确界 $S_n \to$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}$ x_n。
"⇒"：假设 $\sigma =$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}$ x_n。由假设我们知道 $\sigma_n \downarrow \sigma$。设 $\varepsilon > 0$。设想 $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > \sigma - \varepsilon\}$ 是有限的。则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $n \geq N \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid x_n > \sigma - \varepsilon\} = \varnothing$，即 $x_n \leq \sigma - \varepsilon$。但这样一来 $\sigma_n \leq \sigma - \varepsilon$ 对所有 $n \geq N$ 成立，因此（取极限）$\sigma \leq \sigma - \varepsilon$，这是荒谬的。故 $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > \sigma - \varepsilon\}$ 确实是无穷的。现在设想 $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \sigma + \varepsilon\}$ 是无穷的。则 $\sigma_n \geq \sigma + \varepsilon$，并且（取极限） $\sigma \geq \sigma + \varepsilon$，这是荒谬的。

"⇐"：由于 $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \sigma + \varepsilon\}$ 是有限的，存在一个指标 N，使得 $n \geq N \Rightarrow x_n < \sigma + \varepsilon$；因此，$\sup S_n \leq \sigma + \varepsilon$。取极限得 $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq \sigma + \varepsilon$。由于这对每一个 $\varepsilon > 0$都成立，因此 $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq \sigma$。另一方面， $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > \sigma - \varepsilon\}$ 是无限的。因此 $\sigma_n \geq \sigma - \varepsilon$，并且（令 $n \to \infty$趋于极限）$\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \geq \sigma - \varepsilon$。由于这对每一个 $\varepsilon > 0$都成立，因此 $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \geq \sigma$。综上，$\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sigma$。□

习题 12.9 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界实数序列，并令 $\sigma := \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$。证明：(i) σ 是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个聚点；(ii) 若 λ 是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的一个聚点，则 $\lambda \leq \sigma$。换言之，$\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ 是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的最大聚点。提示：练习 12.8。注：类似的证明可得，$\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ 是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的最小聚点。

解答。令 $\varepsilon > 0$ 根据练习 12.8， $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > \sigma - \varepsilon\}$ 是无限集，并且存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < \sigma + \varepsilon\} = \{N, N+1, N+2, \ldots\}$。因此，存在无穷多个指标 n使得 $\sigma - \varepsilon < x_n < \sigma + \varepsilon$，即 $|x_n - \sigma| < \varepsilon$。令 $\varepsilon = 1/2^0$，我们得到 $n_0 \in \mathbb{N}$使得 $|x_{n_0} - \sigma| < 1/2^0$。令 $\varepsilon = 1/2^1$，我们得到 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $n_1 > n_0$ 和 $|x_{n_1} - \sigma| < 1/2^1$。以此类推，我们得到一个子序列 $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $|x_{n_k} - \sigma| < 1/2^k$。由此可知 $\lim_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k} \to \sigma$，因此 σ 确实是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的聚点。

现在设 λ 是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的另一个（可能不同的）聚点。集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \sigma + \varepsilon\}$ 是有限的；因此， λ 不可能大于 σ，所以 $\lambda \leq \sigma$。□

练习 12.10 利用练习12.9 快速验证例 12.9。

解答。该数列恰有两个聚点， -1和 1。（如果还有其他不同于这两个点的聚点，那么必定有任意接近该点的项，但该数列的所有项都是 1 或 -1。）现在应用练习 12.9。□

练习 12.11 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界的实数序列。验证 (12.13)。

解答。“⇒”：设 $x_n \to \lambda$。则 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 只有一个聚点（并且它仍然是一个有界序列）。由习题 12.9 可知 $\lambda =$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\, x_n =$ 极限 x_n。

“⇐”：反设（x_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛。那么它至少有两个聚点 $\underline{\lambda_1} < \overline{\lambda_2}$。由习题 12.9，$\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \le \lambda_1 < \lambda_2 \le \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ 这与假设矛盾。

□

练习12.12 证明或反驳：存在一个实数数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} < \underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n < \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n < \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

解答。举例来说，我们证明该结论正确。令

$$a_n \equiv (-1)^n\big(1+\tfrac{1}{2^n}\big) = \big(2, -(1+\tfrac12), 1+\tfrac14, -(1+\tfrac18), \ldots\big).$$

那么 $\inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} = -(1+\frac12) = -1.5$，$\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = -1$，$\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$，且 $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} = 2$。□

练习12.13 证明或反驳：如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是实数序列，那么

$$\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}(a_n+b_n) = \underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n + \underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, b_n.$$

解答。该结论为假，我们给出一个反例。

令 $a_n \equiv (-1)^n = (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots\ldots)$ 和 $b_n \equiv (-1)^{n+1} = (-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots\ldots)$。于是 $a_n + b_n \equiv 0$，从而 $\underline{\lim}_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) = 0$。另一方面，$\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = \underline{\lim}_{n\in\mathbb{N}}\, b_n = -1$，从而 $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n + \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n = -1 + (-1) = -2 \neq 0$。□

练习 12.14（由你来批改！） 考虑以下命题

$$\text{“}\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\,|x_n\cdot y_n| = \Big(\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\,|x_n|\Big)\cdot\Big(\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\,|y_n|\Big)\text{”}$$

关于两个实数序列，以及以下“证明”：

> 绝对值的性质给出 $|x_n\cdot y_n| = |x_n|\cdot|y_n|$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$。现在取下极限，得到极限 $_{n\in\mathbb{N}}\,|x_n\cdot y_n| =$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\,(|x_n|\cdot|y_n|)$。因此，利用极限的乘积法则即得该结果。

为什么这个证明是错的?

解答。前两行是正确的。最后一行毫无意义，因为我们只有关于实际极限的乘法法则，而没有关于上极限或下极限的乘法法则。事实上，该结果为假，下面是一个反例：

$$(x_n) = \big(1, \tfrac11, 2, \tfrac12, 3, \tfrac13, \ldots\big),$$
$$(y_n) = \big(\tfrac11, 1, \tfrac12, 2, \tfrac13, 3, \ldots\big).$$

于是 $x_n\cdot y_n \equiv 1 > 0$，从而左边 $= 1$。另一方面，极限$_{n\in\mathbb{N}}\,|x_n| =$ 极限$_{n\in\mathbb{N}}\,|y_n| = 0$，从而右边 $= 0$。□

练习 12.15（真或假？） 将下列每个命题标为正确或假。简要说明你的理由。

(i)“若 $A = B$，则 $\inf A = \inf B$ 且 $\sup A = \sup B$。” (ii)“若 $\inf A = \inf B$ 且 $\sup A = \sup B$，则 $A = B$。” (iii)“$\sup(-A) = -\sup(A)$。” (iv)“若 $\gamma = \inf A = \sup A$，则 $A = \{\gamma\}$。”

解答。（i）：正确：若这些集合相同，则它们的上确界和下确界也相同。（ii）：假：考虑 $A = \{0, 1\}$ 和 $B = [0, 1]$。（iii）：假：对于 $A = [-1, 1] = -A$，我们有 $\sup(-A) = 1$ 且 $-\sup(A) = -1$。（iv）：正确：设 $a \in A$。则 $\gamma = \inf(A) \leq a \leq \sup(A) = \gamma$。因此 $a = \gamma$。

□

符号与记号

$\neg p, p \wedge q, p \vee q$ 第 1 页 非、与、或$p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow q$ 第 1 页 蕴含、当且仅当$\mathbb{C}$ 第 35 页 复数域$\mathbb{N}$ 第 11 页 非负整数集 整数 $\{0, 1, \dots\}\mathbb{Q}$ 第 35 页 有理数集$\mathbb{R}$ 第 31 页 实数集$\mathbb{Z}$ 第 11 页 整数集 整数 $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}n!$ 第 14 $1 \cdot 2 \cdots n\binom{n}{k}$ 第 15 页 二项式系数$\sum$ 第 12、84 页 和与级数的求和符号$\prod$ 第 14 页 乘积的连乘符号$\in$ 第 47 页 元素$\varnothing$ 第 47 页 空集$\subseteq$ 第 47 页 子集$\cup$ 第 48 页 并集$\cap$ 第 48 页 交集$\setminus$ 第 48 页 集合中的补集$\mathcal{P}（X）$第 49 页 X的幂集$A \times B$ 第 49 页 A 与 B的笛卡尔积 R, $\sim$ 第 50 页 等价关系$\equiv$ 第 50 页 等价关系或模同余$[a]$ 第 51 页 等价类 A/R 第 51 页 商集$|x|$ 第 63 页 x的绝对值 max、min 第 64 页 最大值与最小值$\lfloor x \rfloor$ 第 65 页 x的下取整$a_n（_{n \in \mathbb{N}}$ ）第 77 页 数列 exp 第 143 页 指数函数$e = \exp(1)$ 第 143 页 欧拉数 Id 第 131 页 恒等映射f^{-1} 第 133 页 f的反函数$A \approx B$ 第 133 A 与 B 具有相同的基数$\aleph_0$ 第 134 页 $\mathbb{N}$的基数（“阿列夫零”）

参考文献

1. A.F. Beardon, *Limits*，施普林格，1997。2. M. Beck 和 R. Geoghegan, *The Art of Proof*，施普林格，2010。3. E.D. Bloch, *Proofs and Fundamentals*，施普林格，2011。4. G. Chartrand、A.D. Polimeni 和 P. Zhang, *Mathematical Proofs*，Pearson，2008。5. D.W. Cunningham, *A Logical Introduction to Proof*，施普林格，2012。6. O. Forster, *Analysis 1*（德语），Vieweg, 1983。7. S. Galovich, *Doing Mathematics*，Thomson，2007。8. L.J. Gerstein, *Introduction to Mathematical Structures and Proofs*，第二版，施普林格，2012。9. J.M. Howie, *Real Analysis*，施普林格，2006。10. S.R. Lay, *Analysis*，Pearson，2005。11. S. Lipschutz, *Set Theory and Related Topics*，Schaum 纲要丛书，1998。12. D. Smith、M. Eggen 和 R. St. Andre, *A Transition to Advanced Mathematics*，Brooks/Cole，2011。13. D. Solow, *How to read and do proofs*, Wiley，2005。

索引

绝对收敛（级数），123绝对值，63，118绝对收敛级数，123聚点，101交错调和级数，122交错级数判别法，122算术平均数–几何平均数不等式，110阿基米德域，65阿基米德性质，65算术平均数，110分配律公理，32加法公理，31乘法公理，32序公理，61

伯努利不等式，65双射，132二进制展开，104，105二项式系数，15二项式定理，16博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理，100有上界（数列），79有上界（集合），155有下界（数列），79有下界（集合），155有界部分和判别法，121有界数列，79有界集，155

康托尔定理，136 基数，134 基数，133 笛卡尔积集合，49 柯西乘积，145 柯西序列，97 柯西判别法（用于级数），121 柯西-施瓦茨不等式，72 链，137 聚点，101 组合定理，16 比较判别法，123 补集，48 完备性公理，98 复合，132 模同余，50 常数倍法则（用于极限），81 矛盾，2 蕴含的逆否命题，2 收敛，77 收敛到 $\pm\infty$，84 收敛数列，77 蕴含的逆命题，2 可数，134 可数无限，134 十进制展开

, 86

实数的十进制展开，98递减序列，101德摩根定律，48可列，134差法则（用于极限），81发散，77发散判别法，121发散判别法（用于级数），121发散到 $\pm\infty$，84发散序列，77

元素，47空积约定，14空集，47空和约定，12等势，133等势，133等价类，51等价关系，50欧几里得平面，49指数函数，143指数级数，143

阶乘，14斐波那契数，77域，35下取整，65函数，131函数方程（关于指数函数），146

高斯，C.F.，12几何平均，110几何序列，79几何级数，85几何和，14哥德巴赫猜想，1图像，131

调和平均数，117调和数，121调和数，91，125调和级数，121

恒等映射，131像，131递增序列，101归纳法，11无穷级数，84单射，132交集，48逆元（蕴含的），2反函数，133逆符号计算器，114无理数，97

莱布尼茨交错级数判别法，122

莱布尼茨判别法，122极限，77下极限，157级数的极限法则，86上极限，157对数，149逻辑等价，2逻辑斯蒂序列，77，94，95Lotto 6/49，20下界，155

极大元，137最大值，64最大值，155最小值，64模，50单调序列，102

自然对数，149牛顿法，111

单射，132满射，132

p 级数，122p级数，123偏序集，137帕斯卡三角形，15排列定理，15鸽巢原理，58幂集，49原像，131素数，25数学归纳法原理，11极限乘法法则，81笛卡尔积，49分类证明，2反证法，2反证法（例），97逆否证明法，2

极限商法则，82商集，51

值域，131比值判别法，124实数，31极限倒数法则，82自反性（等价关系），50关系，50罗素悖论，48 B. 罗素，48

数列，77级数，84，121集合，47平方根，110夹逼定理，83命题，1严格递减数列，102严格递增数列，101强归纳法，25

子序列，100子集，47极限加法法则，80上确界，155满射，132对称差，53对称性（等价关系），50

重言式，2全序集，137超限，134传递性（等价关系），50三角不等式，64真值表，1圣诞节十二日，23

不可数，134并集，48全集，48上界，137，155

佐恩引理，137