arXiv:2603.08757v1 [math.MG] 8 Mar 2026

论多面体的内蕴几何：凸多边形坐标

A.B. ROMANOWSKA、J.D.H. Smith 和 A. Zamojska-Dzienio

Abstract. 关于从组合学和数值分析角度研究凸多胞体，已有极为丰富的文献。相比之下，本文采取了另一种观点，将多胞体视为一个独立的空间，具有自身的内蕴几何。我们关注的是所有用于确定多胞体中一个点的位置的坐标系的完整集合；例如，不考虑数值分析应用所关心的光滑性问题。我们采用高效且恰当的代数语言——重心代数，以揭示多胞体坐标系集合的凸结构。

针对凸多边形，我们考察由该多边形的三角剖分所确定的弦坐标系。文中给出了计算此类坐标系内一点坐标的算法。该算法依赖于一种余代数结构：它将三角形一侧的概率分布传输到其余两侧中的每一侧。随后，从该算法的余代数结构的解析树出发，以一种自然的几何方式得到了多边形三角剖分的卡特兰数计数结果（这一结果在组合学中广为人知）。

Contents

1. 引言 2 1.1. 论文结构 3 1.2. 符号约定 4 2. 重心代数 5 2.1. 基本定义 5 2.2. 子代数、同态与积 6 2.3. 自由代数与单形 7

2020年 数学学科分类号。 52A99, 51M20, 52A10。关键词与短语。凸几何；凸多胞体；凸多边形；重心坐标；不相交弦；卡特兰数。第三位作者的部分工作是在爱荷华州立大学担任访问学者期间完成的。该工作得到了波兰-美国富布赖特委员会授予的富布赖特高级学者奖的资助，此外还获得了科希丘什科基金会——美国波兰文化中心的资助。

3. 多胞体的坐标系 9 3.1. 函数空间 9 3.2. 函数空间中的重心坐标 10 3.3. 多胞体坐标系 11 4. 弦分解与坐标 12 4.1. 多边形的无交弦分解 12 4.2. 区域识别与定向 17 4.3. 多边形的弦坐标 24 5. 多边形的制图坐标 27 5.1. CDS 的制图坐标 27 5.2. 六边形上的制图坐标 28 参考文献 29

1. Introduction

凸多面体是数学及其应用众多领域中的重要对象，人们运用从组合学到数值分析的各种方法对其进行了研究。本文采用的方法是将凸多胞体 Π 视为一个独立存在、不依赖于任何环境空间几何的几何对象。借助重心代数，我们得以采用这种内在方法。重心代数由二元运算构成，每个运算都针对闭实单位区间 I中的一个元素定义。

作为一个几何空间，顶点集为 V 的凸多胞体 Π 拥有自己的坐标系，用于将其点表示为其顶点的凸组合。本文的首个主要结果——定理 3.5——表明，所有这类坐标系构成超立方体 $I^{\Pi\times V}$的一个凸子集 K_Π 。定理 3.5 的证明依赖于一种处理任意坐标系的微积分，其基础是狄拉克的左矢右矢记号的一种变体。

本文后续部分将讨论 Π 为凸多边形的情形。利用定理 3.5 以及我们针对坐标系的 bra-ket 演算，本文的第二个主要结果——定理 4.15——为每个由互不相交的弦构成的构型所对应的 Π 的三角剖分δ ，关联一个 $\in V$对应的系统 $|\mathbf{v}\rangle_\delta$ （对每个$\mathbf{v}\in V$）的弦坐标$chordal\ coordinates$ 。这些构型在组合学背景下自然出现；已知它们的数量由卡特兰数给出。我们给出一种算法，用于计算点$\mathbf{a}\quad\Pi$的弦坐标 $\langle\mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\delta$ 。该算法基于一种余代数运算：它将定向三角形一侧的概率分布变换为一对概率分布，分别位于另外两侧。在我们的几何方法中，通过将三角剖分 δ 赋给

算法针对 $|\mathbf{v}\rangle_\delta$生成的连续余代数运算序列的解析树。

如果凸多边形 Π 的顶点集 V 的大小为 n，那么次数为 n （阶为 $2n$）的二面体群 D_n 作用于 V，从而在三角剖分 δ 及其弦坐标系 $|\mathbf{v}\rangle_\delta$ 上诱导出一个作用。本文的最终主要结果——定理 5.2——展示了如何对 D_n-轨道上的弦坐标系进行平均，从而得到更加对称的坐标系；我们将其描述为制图式。

1.1. 本文结构。第 2 节将重心代数定义为带有一组基本二元运算的集合，这些运算由开实单位区间 I° 作为索引，并满足称为幂等性（2.2）、斜交换性（2.3）和斜结合性（2.4）的公理。在代数上，被称为半格的序结构满足幂等性、交换性和结合性的公理。因此，从非常强的意义上说，应当将重心代数视为半格的几何扩张。与此同时，重心代数的行为与线性代数中向量空间的行为有许多共同之处。

第3节介绍了在给定凸多胞体 Π上研究重心坐标系的一般框架，其建立在重心代数理论以及受狄拉克在量子力学中用于函数应用的记号所启发的bra-ket记号（3.2）之上。定义 3.3给出了坐标系的形式规定。Π 的子集 X 的指示函数或特征函数记作 $\mathbb{1}_X$，而 Π 上的恒等函数记作 1_Π。bra-ket记号有助于阐明作为 $\mathbb{1}_\Pi$ 的分拆的“单位分解”性质（3.3）与作为 1_Π的分拆的“线性精度”性质（3.4）之间的区别。运用重心代数表明，在我们的语境中，单位分解性质实际上是线性精确性的推论，无需单独规定（注记3.4）。定理 3.5表明，凸多胞体 Π 上坐标系的集合 K_Π 本身具有凸集结构。在组合设定中，该凸集原来就是次多胞形 （注记3.6），参见例如 [5, 第7页，§5.1]或 [6, 第 7]章。

第 3 节建立的概念框架在第 4–5 节中发挥着基础作用；这两节介绍了我们为凸多边形构造的两种基本坐标系：弦坐标 和制图坐标。弦坐标旨在保持稀疏，使取值为零的权重数量尽可能多。另一方面，制图坐标旨在保持对称，使凸多边形的各个部分一视同仁。

给定一个顶点集为 V 的凸 n 边形 Π 的弦坐标系，它基于将 Π 分解为三角形的一种分解；该分解由一组互不相交的弦构成，这些弦连接 Π 边界上不相邻的顶点。图 1 展示了六边形的弦分解。每种弦分解都对应一个弦度数序列 （CDS）：这是 n 的一种分拆，用来描述由这些弦构成的图中 n 边形各顶点的度数（或称度数）。次数为 n 、阶为 $2n$ 的二面体群 D_n 自然作用于顶点集，从而在所有具有给定 CDS 的弦分解集合上诱导出置换。

给定弦分解中出现的三角形称为其区域，点$\mathbf{x}$ Π 对应的弦坐标，是它相对于其所在区域（或多个区域）定义唯一的重心坐标。对于弦分解，§4.2 给出了一种算法，用于识别各区域并确定给定点$\mathbf{x}$实际所在的区域。该算法的核心是由每个给定的弦分解和初始边（§4.2.1）确定的非余结合余积的有根解析树（参见 [16, 定义 2.3(d)]）。§4.2.4 展示了一个来自六边形的例子。定理 4.15 验证了弦坐标构成了定义 3.3 意义下的坐标系。

制图坐标见第 5 节的描述。简言之，对于给定的 CDS，考虑具有该 CDS 的弦分解 δ。根据定理 3.5，CDS 的制图坐标系定义为：在二面体群 D_n 中群元素 g的作用下，轨道 δ 内所有弦分解 δg 所对应的弦坐标系集合的重心（定义 5.1）。

1.2. **记号约定**。 代数的本质在于连续函数的反复连接：一个函数的输出作为下一个函数的输入。在此语境中，欧拉的分析记号（如表达式 $\sin x$）将参数置于函数之后，与从左向右阅读的自然方向相冲突。[1] 因此，我们默认采用代数式或图示式的函数记号，让函数跟在参数之后（例如， $n!$ 表示阶乘函数），或将函数置于后缀位置（例如， x^2 表示平方函数）。

对于其他未明确说明的记号约定和定义（例如群作用），请读者参阅[17]。

[1]即使是在用闪米特语写成的文本中，数学也沿着这一方向阅读。

2. Barycentric algebras

2.1. 基本定义。 从 M¨obius [9], 在几何中使用重心坐标这一做法出发，重心代数于 20 世纪 40 年代被引入 [7, 18] ，用于公理化实凸集；实凸集以代数方式呈现，其二元运算由加权平均给出，权重取自实数中的（开）单位区间。

用 I 表示闭实单位区间 $[0,1]$, ，用 I° 表示开实单位区间 $I \smallsetminus \{0,1\} =]0,1[$。对于 $p,\ q \in I^\circ$，定义：

（a）补运算： $p' = 1 - p$; （b）对偶乘积：

$p \circ q = p + q - p \cdot q = \ (p'q')\ '$。

注意，数值 p' 和 $p \circ q$ 仍然属于 I°。

定义 2.1。 [11, 12, 13] 重心代数 A ，或（$A,\ I^\circ$），定义为一个集合 A，该集合配备了二元运算

$$\underline{p}\colon A \times A \to A; (x,y) \mapsto xy\,\underline{p} \tag{2.1}$$

对每个元素（或运算符） $p \in I^\circ$。运算（2.1）必须满足幂等性的性质

$$xx\,\underline{p} = x \tag{2.2}$$

对于 x 属于 A，斜交换性

$$xy\,\underline{p} = yx\,\underline{p'} \tag{2.3}$$

对于 $x,\ y$ 属于 A，以及斜结合性

$$xy\,\underline{p}\,z\,\underline{q} = x\,yz\,\big(\,\underline{q/p \circ q}\,\big)\,\underline{p \circ q} \tag{2.4}$$

对于 x、 y、 z 属于 A。

例 2.2。 半格是一个具有交换性和幂等性的半群（$S,\ \cdot$）。当把每个重心运算解释为半格 S 上的 $xy\,p = x \cdot y$ 时，该半格就成为一个重心代数。在这种情况下，斜交换性和斜结合性分别化为通常的交换性和结合性。

例 2.3。 当 x 和 y 是实向量空间 V 中的元素，且 p 是 I° 的元素时，可以定义

$$xy\,\underline{p} = x(1-p) + yp = xp' + yp\,, \tag{2.5}$$

因此， $\underline{p}$ 被解释为一种加权平均运算，用于组合输入x 和 y。由此可得到重心代数 $(V,\ I^\circ)$。同样，空间 V 中的每个凸集都构成一个重心代数。

2.2. **子代数、同态与积**。

定义 2.4。 假设 $(A,\ I^\circ)$ 是一个重心代数，且 B 是 A 的子集。如果

$$\forall\ p \in I^\circ\ ,\ x \in B \text{ and } y \in B\ \Rightarrow\ xy\underline{p} \in B\,,$$

那么，集合 B 是 (A, I°) 的一个子代数 。

注 2.5. 在定义 2.4 中，子代数 B 本身就是一个重心代数 (B, I°)。还要注意，重心代数 (A, I°) 的任意子代数族的交集仍是 (A, I°) 的一个子代数。

定义 2.6. 设 (A, I°) 是一个重心代数，且有一个子集 S。由 S 生成的子代数 $\langle S\rangle$ 是 (A, I°) 中所有包含 S 的子代数的交集。

例 2.7. 设 S 是实仿射空间 A中的一个点集。根据例 2.3，将 A视为重心代数 (A, I°)。那么， S 的凸包 就是由 S生成的 (A, I°) 的子代数 $\langle S\rangle$ 。

定义 2.8. 设 (A, I°) 和 (A', I°) 是重心代数。

(a) 若函数 $f\colon\ A \to A'; x \mapsto x^f$ 满足

$$xy\,\underline{p}^f = x^f y^f\,\underline{p} \tag{2.6}$$

对所有 $x, y \in A$ 和 $p \in I^\circ$均成立，则称其为重心（代数）同态。

(b) 若同态是双射，则称其为同构。(c) 用 $\mathbf{B}(A, A')$ 表示从 (A, I°) 到 (A', I°) 的所有重心同态所构成的集合。

简单来说，重心同态会保留重心代数的运算。它不仅保留基本的二元运算p，还保留由基本运算复合而成的所有导出运算。对于例 2.3 中定义的重心代数，这些导出运算就是凸组合。

注 2.9。 两个可复合的重心同态复合后仍是重心同态。这意味着，重心代数构成的范畴$\mathbf{B}_0$ 的对象类是重心代数，而其态射集合是$\mathbf{B}$ ，从 A 到 A' 的态射集合为集合 $\mathbf{B}(A, A')$。

现在，我们为后续研究给出两个关键构造。首先，设 X 是一个集合，且 (A', I°) 是一个重心代数。考虑从 X 到 A'的所有函数构成的集合 $\mathbf{Set}(X, A')$。对于 $p \in I^\circ$，定义逐点 或逐分量 运算

$$fg\,\underline{p}\colon X \to A'; x \mapsto x^f x^g\,\underline{p} \tag{2.7}$$

作用于 $\mathbf{Set}(X, A')$ 中的元素 f, g。由此，我们在集合 $\mathbf{Set}(X, A')$ 上引入重心代数结构。

此外，取重心代数 (A, I°) 与 (A', I°)。同样，$\mathbf{B}(A, A')$ 在逐点运算 (2.7) 下成为重心代数。它是重心代数 **集合**(A, A') 的子代数 [14, §2.4.2] —— 比较[13,命题 5.1]。

定义 2.10. 设 (A, I°) 与 (A', I°) 为重心代数。则它们的（直）积 是定义在集合 $\{\,(x, x') \mid x \in A\,,\ x' \in A'\,\}$ 上、具有分量结构 $(x, x')(y, y')p = \big(xy\,p,\ x'y'\,p\big)$ 的（重心）代数，对所有 $p \in I^\circ$。

迭代积和幂以显然的方式定义，因为$(A, I^\circ) \times (A', I^\circ)$的构造可自然推广到任意多个因子的直积。

重心代数类$\mathbf{B}$ 由恒等式定义，即由(2.2)–(2.4)定义，因此构成一个代数的簇 ——该类对取同态像、子代数和直积封闭 [17, Th.IV.2.3.3]。这个簇由其中的可消去 成员生成，这些重心代数满足可消去性的附加性质可消去性：

$$\forall\, p \in I^\circ\,,\ \forall\, x, y, z \in A\,,\ xy\underline{p} = xz\underline{p} \ \Rightarrow\ y = z.$$

可消去的重心代数是凸集 ([10], [11, Th. 269], [13,Th. 5.8.6])。

2.3. **自由代数与单形**。 设 X 为一个集合。由于重心代数类$\mathbf{B}$ 是一个簇，在$\mathbf{B}$中存在集合 X [17, p.308]上的自由代数 XB 。这意味着，任意从集合 X 到任意重心代数(A, I°)的底集的映射 $f\colon X \to A$ 都可唯一延拓为重心同态$f\colon (XB, I^\circ) \to (A, I^\circ)$。因此，每个重心代数都是某个自由代数的同态像。空集上的自由重心代数是空集。

2.3.1. 自由重心代数的构造。给定一个集合 X，并将实数线 $(\mathbb{R},\ I^\circ)$ 按照例 2.3 视为重心代数，取重心代数 **集合**$(X,\ \mathbb{R})$。考虑函数

$$X \to \mathbf{Set}(X, \mathbb{R}); x \mapsto \left[\,\delta_x\colon y \mapsto\ \textbf{if } y = x \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0\,\right]. \tag{2.8}$$

将 XB 定义为由狄拉克函数集合生成的 **集合**$(X,\ \mathbb{R})$ 的子代数 $\langle\{\,\delta_x \mid x \in X\,\}\rangle$ 。

根据良序定理，可以为集合 X 赋予一个全序 $(X,\ \leq)$ 。反复应用重心

代数的公理 (2.2)–(2.4) 可得， XB 中的每个元素都有唯一的如下形式的表示

$$\delta_{x_0}\delta_{x_1}\dots\delta_{x_r}\,\underline{q}_1\cdots\underline{q}_r \tag{2.9}$$

对于某个 $r\in\mathbb{N}$、 X 的有序子集 $\{x_0<x_1\cdots<x_r\}$，以及算子q_1、...、$q_r\in\underline{I^\circ}$（比较 [13, 引理 5.8.1]）。因此，将 (2.9) 经延拓 f 映射所得的像，取作 (A、I°) 中的重心组合 $x_0^f x_1^f\dots x_r^f\,q_1\dots q_r$。 – –

2.3.2. 概率分布与加权平均。 该元素可写成如下凸组合 (2.9)

$$\sum_{k=0}^{r}\delta_{x_k}p_k \tag{2.10}$$

其系数为 $p_k=q_kq'_{k+1}\dots q'_r\in I^\circ$，对应于 $0\le k\le r$ 和 $q_0=1$。因此，重心组合可视为有限支撑的概率分布或加权平均。在 (2.10) 中，权重 p_k 附加于 x_k 的表示 δ_{x_k}。这些权重是 §31] [9, 意义下的重心坐标。

2.3.3. 核函数。 设 A 是由有限集 $V\subseteq A$ 生成的重心代数。这意味着，每个元素 a of A 都可以写成一个重心组合

$$a=\sum_{v\in V}p(a,v)v \tag{2.11}$$

其中权重 $p(a,v)\in I$ 的具体取值方式如 §2.3.2.[2] 中所述。假设这种取值方式已经确定。于是可以关注函数

$$p\colon A\times V\to I;(a,v)\mapsto p(a,v) \tag{2.12}$$

在分析学的语言中，鉴于它在 (2.11) 中所起的作用，或在 (2.11) 的连续版本（例如 [8,§3.1]）中的作用，它可以称为一个核 (函数)。

2.3.4. 单位分解与线性精度。 参数化的单变量（或柯里化 [17, §O.3.4]）版本

$$A\to I;a\mapsto p(a,v)\quad\text{for each}\quad v\in V \tag{2.13}$$

（2.12）中的函数称为坐标函数（或“重心坐标”[19,§1.1]）。该方程

$$\sum_{v\in V}p(a,v)=1 \tag{2.14}$$

[2]此处需要完整的实单位区间 I，因为有些权重可能为零，而且其中一个权重实际上可能为 1。

因此可表述为：坐标函数构成单位分解；而（2.11）则被称为表达重心性质 [8, （3）] 或线性精度 [19, §1.1]。我们记录以下内容，以供后续参考。

引理 2.11. 若重心性质 (2.11) 成立，则分拆单位性质 (2.14)随之成立。

证明。假设 (2.11) 对 A 的一个元素 a 成立。那么，我们可以考虑常值重心同态 $k\colon A \to \{1\}$。因此，(2.14) 是 (2.11) 在 k 下的像。□

2.3.5. 插值。函数 $f\colon V \to C$ 从 V 到某个陪域重心代数 C，可以（按代数学家的术语）延拓 $\widehat{\ }$，或（按分析学家的术语）插值 为函数 $f\colon A \to C$，满足

$$\widehat{f}(a) = \sum_{v \in V} p(a,v) f(v)$$

$\widehat{\ }$利用 (2.11) [19, (2)]。当 A 由 V 自由生成时，延拓 f 将由重心同态 f 唯一确定。

3. Coordinate systems for polytopes

本章将介绍我们用于处理多胞形坐标系的形式体系。除了其本身具有广泛的意义之外，这套形式体系还将用于高效处理第 4 章介绍的弦坐标。

3.1. 函数空间。 设 B 是一个重心代数，例如多胞形。令 $\mathbb{R}^B$ 表示 B 上所有实值函数构成的空间 **集合(**B, $\mathbb{R}$**)**。该空间继承了 $\mathbb{R}$ 所具有的任意代数结构的逐点代数结构，包括交换环、实向量空间和重心代数（在后一种情况下，回顾第 2.2 小节中重心代数 **集合(**B, $\mathbb{R}$**)** 的构造）。我们还可以考虑重心子代数 I^B = **集合(**B, I**)**，它由 B 上取值于闭单位区间 $I = [0,1]$ 的函数构成。I^B 的典型元素包括指示函数

$$\mathbb{1}_X\colon B \to I; a \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } a \in X\,; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.1}$$

子集 X 属于 B 的

引理 3.1。 (a) 交换环 $\mathbb{R}^B$ 中的元素 e 是幂等元 (即 $e^2 = e$) 当且仅当它是集合 B 的子集 X 的指示函数 $\mathbb{1}_X$。
(b) 对于 B 的子集 X、Y，我们有 $\mathbb{1}_X \cdot \mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_{X \cap Y}$ 和 $\mathbb{1}_X \circ \mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_{X \cup Y}$，这里采用从 $(I, ;, \circ)$ 继承的 I^B 上的逐点运算。

	$\mathbb{1}_X$	$\mathbb{1}_Y$	$\mathbb{1}_{X\cap Y}$	$\mathbb{1}_X \circ \mathbb{1}_Y$
$a \notin X \cup Y$	0	0	0	0
$a \in X \smallsetminus Y$	1	0	0	1
$a \in Y \smallsetminus X$	0	1	0	1
$a \in X \cap Y$	1	1	1	1

TABLE 1. 用于验证引理 3.1(b)第二个陈述的指示函数值。

证明。(a) 注意，指示函数 (3.1) 在逐点乘法下是一个幂等元。反过来，设 e 是 $\mathbb{R}^B$ 的一个幂等元，其支撑为 $X = e^{-1}(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\})$。由于 e 在 B 的任意点 a 处的取值都是域 $\mathbb{R}$ 上多项式 $x^2 - x = x(x-1)$ 的一个根，因此可得 $e = \mathbb{1}_X$。

(b) 首先，注意

$$a \in X \cap Y \;\Leftrightarrow\; \left[a\mathbb{1}_X = 1 \text{ and } a\mathbb{1}_Y = 1\right] \;\Leftrightarrow\; a(\mathbb{1}_X \cdot \mathbb{1}_Y) = 1$$

对于 $a \in B$。回顾 $\mathbb{1}_X \circ \mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_X + \mathbb{1}_Y - \mathbb{1}_X \cdot \mathbb{1}_Y$，随后可利用表 1 验证第二个等式。□

3.2. 函数空间中的重心坐标。设 Π 是由有限集 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 生成的重心代数。那么，第 2.3 节介绍的基本重心坐标概念，可以在函数空间 $\mathbb{R}^\Pi$ 中自然地表述。这里，记号

$$\Pi \times \mathbb{R}^\Pi \to \mathbb{R} \colon (a, f) \mapsto \langle a|f\rangle \tag{3.2}$$

将用于表示函数 $f \in \mathbb{R}^\Pi$ 在元素$a \in \Pi$处的取值。受 P.A.M. Dirac 的“bra-ket”形式主义启发，常常可以方便地写作 $|f\rangle \in \mathbb{R}^\Pi$，有时也写作 $\langle a| \in \Pi$。

假设如 §2.3 中所述，正在给出或确定一个重心坐标系 p。因此，a 的每个元素 Π都可以（或应当）写成重心组合 $a = \sum_{v\in V} p(a, v)v$，其中 $p(a, v) \in I$ 的选取是特定的（2.11）。按照当前的记号约定，核函数可写为 $\langle\ |\ \rangle_p$；如果上下文已明确所指的重心坐标系 p，也可简写为 $\langle\ |\ \rangle$。

按照这些约定，对于每个生成元 $v \in V$，式（2.13）的坐标函数 $\Pi \to I$ 表示为 $|v\rangle_p$，或简写为 $|v\rangle$。于是

$$\sum_{v\in V} |v\rangle = \mathbb{1}_\Pi \tag{3.3}$$

表示单位分解（2.14），而

$$\langle a| = \sum_{v \in V} \langle a|v\rangle \langle v| \tag{3.4}$$

表达了线性精度或重心性质 (2.11)。与单位分解表达式 (3.3) 相对照，表达式

$$\sum_{v \in V} |v\rangle \langle v| = 1_\Pi \tag{3.5}$$

可用于将重心性质改写为恒等函数 1_Π 在重心代数 Π 上的一个分拆。

注 3.2. 作为 (3.5) 左端和式的一个分量出现的单独符号 $|v\rangle \langle v|$，在当前重心代数的语境中没有任何独立含义。然而，如果该重心代数是一个多胞形 Π，位于已选定原点的向量空间 W 中，那么我们可以考虑

$$|v\rangle \langle v| : \Pi \to W; a \mapsto p(a, v)v$$

或将 $\langle a| \mapsto \langle a|v\rangle \langle v|$ 作为函数，它把点 a 或 $\langle a|$ （Π 的点）映到标量倍 $p(a,\ v)v$ 或 $\langle a|v\rangle \langle v|$，即 W 中向量 v 或 $\langle v|$ 的标量倍。

总之，bra-ket记号清楚地区分了顶点$\mathbf{v}$可能扮演的两种角色：它既可以是多胞形 Π中的一个特定元素 $\langle \mathbf{v}|$，也可以作为重心坐标系 p 中坐标函数 $|\mathbf{v}\rangle$（或 $|\mathbf{v}\rangle_p$）的支撑。此外，该记号清楚地区分了（3.3）中的 $\mathbb{1}_\Pi$ 的分拆与（3.5）中的 1_Π的分拆。

3.3. **多胞体坐标系**。

定义 3.3. 设 Π 是一个多胞形，其顶点集为 $V = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$。$\Pi$ 的一个坐标系是一个映射

$$\lambda \colon V \to I^\Pi; \mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}\rangle_\lambda \tag{3.6}$$

使得（3.5）成立。

注 3.4. （a）根据引理 2.11，按照定义 3.3 指定的坐标系满足单位分解性质。 (3.3)

(b) 映射 $\lambda \colon V \to I^\Pi; \mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}\rangle_\lambda$（3.6）可视为 $(I^\Pi)^V$ 的一个元素。接着，可通过柯里化将其转化为参数化族或映射 $\Pi \times V \to I; (\mathbf{a}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\lambda$，它是 $I^{\Pi \times V}$ 的一个元素。在下面定理 3.5 的语境中，使用柯里化将空间 $(I^\Pi)^V$ 和 $I^{\Pi \times V}$ 视为相同的空间会很方便。

定理 3.5. 多胞形 Π 上以顶点集 V 为基础的坐标系 K_Π 的集合，在逐点重心运算下构成超立方体 $I^{\Pi\times V}$ 的一个凸子集。

证明。 采用 (3.6) 的记号，坐标系 λ由逐点重心代数 $(I^\Pi)^V$ 的元素 $(|\mathbf{v}_1\rangle_\lambda$，... ...，$|\mathbf{v}_n\rangle_\lambda)$ 所确定。现在考虑坐标系 λ，λ' 与 $p \in I^\circ$。由 (3.5)，我们有

$$\sum_{\mathbf{v}\in V} |\mathbf{v}\rangle_\lambda \langle\mathbf{v}| = 1_\Pi \quad \text{and} \quad \sum_{\mathbf{v}\in V} |\mathbf{v}\rangle_{\lambda'} \langle\mathbf{v}| = 1_\Pi \,. \tag{3.7}$$

潜在坐标系 $\lambda\lambda' p$ 由下式给出

$$|\mathbf{v}\rangle_{\lambda\lambda'\underline{p}} = |\mathbf{v}\rangle_\lambda |\mathbf{v}\rangle_{\lambda'} \underline{p}$$

对于 $\mathbf{v} \in V$。于是

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{v}\in V} |\mathbf{v}\rangle_{\lambda\lambda'\underline{p}} \langle\mathbf{v}| &= \sum_{\mathbf{v}\in V} \left(|\mathbf{v}\rangle_\lambda |\mathbf{v}\rangle_{\lambda'} \underline{p}\right) \langle\mathbf{v}| = \sum_{\mathbf{v}\in V} \left(|\mathbf{v}\rangle_\lambda \langle\mathbf{v}|\right) \left(|\mathbf{v}\rangle_{\lambda'} \langle\mathbf{v}|\right) \underline{p} \\ &= \left(\sum_{\mathbf{v}\in V} |\mathbf{v}\rangle_\lambda \langle\mathbf{v}|\right) \left(\sum_{\mathbf{v}\in V} |\mathbf{v}\rangle_{\lambda'} \langle\mathbf{v}|\right) \underline{p} = 1_\Pi 1_\Pi \underline{p} = 1_\Pi\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式使用了 (3.7)。由定义3.5可知，$\lambda\lambda' p$ 确实是一个坐标系。 □

注记3.6. 从组合角度看，坐标系的凸集 K_Π 或许可以视为 Π [5, p.7, §5. 1] 或 [6, Ch. 7]的次多胞形。因此，定理 3.5赋予次多胞形丰富的几何结构 [15]。

4. Chordal decompositions and coordinates

本章介绍一种关于多胞形坐标的替代方法，这种方法更加局部，即弦坐标。其核心思想是将多胞形分解为称为区域的单形，考察由此得到的多胞形图册，并直接取包含给定多胞形点的区域的体积坐标。

为使讨论相对简洁易懂，同时利用平面中可用的特殊性质，我们将讨论范围限定在多边形的情形。从几何角度看，弦坐标直观明了，但要有效处理它们，则需要一定程度的代数、拓扑和组合方面的成熟理论。特别是，我们将借助前一章建立的形式体系。

4.1. 多边形的无交弦分解。

4.1.1. 组合与几何顶点记号。 在本节中，我们将考虑一个凸多边形 Π，它是由沿边界逆时针排列的极值点（顶点）序列 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的凸包表示的。通常将顶点集简写为有序集合 $V = \{1 < 2 < \ldots < n\}$ 会很方便。简写记号指的是组合顶点，而完整记号中的顶点则以几何方式描述。

定义 4.1（标准序）。考虑 V 的一个子集 S。

(a) 若 $|S| > 2$，则 S 上的**标准顺序**为其诱导序。(b) $S = \{1, n\}$ 上的标准顺序为 $\{n < 1\}$。(c) 若 $S \neq \{1, n\}$ 和 $|S| = 2$，则 S 上的标准顺序为其诱导序。

引理 4.2。将顶点指标 i 按模 n 读取时，数对 $i < i + 1$ 总是按标准顺序排列。

对于按标准顺序排列的 $j < k$（根据定义 4.1，包含 $n < 1$ 而不包含 $1 < n$），组合记号 jk 表示向量 $\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j$，或从 $\mathbf{v}_j$ 到 $\mathbf{v}_k$ 的（有向）线段 $\mathbf{v}_{jk}$，并将用于标记由该有向线段确定的函数或其他构造（例如完整的有向仿射直线 $\mathcal{L}_{jk}$）。定义 4.6 中的面积函数是一个重要示例。

4.1.2. 骨架图与弦。 多边形 Π 的**骨架**是循环图 C_n，由多边形的顶点和无向边构成。在循环图 C_n 中，**弦**是连接 C_n 中不相邻顶点的一条边。

定义 4.3。对于有序顶点集为 $V = \{\mathbf{v}_1 < \mathbf{v}_2 < \cdots < \mathbf{v}_n\}$ 的多边形 Π，其**弦分解**是由 C_n 中的 $n - 3$ 条互不相交的弦构成的系统，这些弦将 Π 分解为 $n - 2$ 个单形（三角形）的并；这些单形的顶点是 Π 的顶点。$n - 2$ 三角形构成该分解的区域。每个区域（例如 $n > 3$）由构成其内部边界的弦围成，并且可能还由多边形的边围成（对于 $n < 6$，确实如此），这些边构成其外部边界。

给定任意一种弦分解，我们可以通过二面体群 D_n（次数为 n、阶为 $2n$）的作用得到其他分解，该群是图 C_n 的自同构群（参见 [1]）。保持多边形 Π 的顶点集 V 不变时，D_n 的元素作用于该分解的 $n - 3$ 条弦。注释 4.10(c) 中给出的具体示例，展示了这种作用的典型情形。

4.1.3. 面积坐标函数。考虑欧几里得平面上的一个三角形，其顶点按逆时针顺序为 $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} \end{bmatrix}$、$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{10} & v_{11} \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{20} & v_{21} \end{bmatrix}$。该三角形有向面积的公式为

$$A(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \tfrac{1}{2} \det[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & v_{00} & v_{01} \\ 1 & v_{10} & v_{11} \\ 1 & v_{20} & v_{21} \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

下列命题回顾了面积 $A(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 关于顶点 $\mathbf{v}_0$ 变化的凸性。

命题 4.4. 考虑向量 $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} \end{bmatrix}$、$\mathbf{v}_0' = \begin{bmatrix} v_{00}' & v_{01}' \end{bmatrix}$、$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{10} & v_{11} \end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{20} & v_{21} \end{bmatrix}$ 位于平面内。则

$$A\big((1-p)\mathbf{v}_0 + p\mathbf{v}_0', \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\big) = (1-p)A(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + pA(\mathbf{v}_0', \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

对每个实数 p。

证明。该结果可通过考虑拉普拉斯展开得到。

$$A(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} v_{10} & v_{11} \\ v_{20} & v_{21} \end{vmatrix} - v_{00} \begin{vmatrix} 1 & v_{11} \\ 1 & v_{21} \end{vmatrix} + v_{01} \begin{vmatrix} 1 & v_{10} \\ 1 & v_{20} \end{vmatrix} \right)$$

（4.1）的行列式沿其第一行展开。 □

命题 4.5. 设 τ 为一个三角形，其顶点$\mathbf{v}_0 <\mathbf{v}_1 <\mathbf{v}_2 <\mathbf{v}_0$按循环逆时针顺序定向。对于$\mathbf{v}_i \in \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$，公式

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{v}_i \rangle_\tau = \frac{A(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{i+1})}{A(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)} \tag{4.2}$$

给出该三角形中点$\mathbf{x}$ 相对于顶点$\mathbf{v}_i$的面积坐标。下标按模 *3* 取值。

4.1.4. 面积函数。

定义 4.6. 考虑按标准顺序排列的组合顶点 $j < k$。

(a) 该元素

$$|j \wedge k\rangle : \Pi \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) \tag{4.3}$$

$\mathbb{R}^\Pi$ 的面积函数由数对 $j < k$定义。

(b) 该元素

$$|k \wedge j\rangle : \Pi \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) = -A(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)$$

$\mathbb{R}^\Pi$ 的反向面积函数由数对 $j < k$定义。

(c) 如果 $\mathbf{v}^{jk}$ 是多边形的一条边，则面积函数 $|j \wedge k\rangle$ 被称为 外部边界函数。

(d) 如果 $\mathbf{v}^{jk}$ 是给定多边形的某个弦分解中的一条弦，则面积函数 $|j \wedge k\rangle$ 被称为 内部边界函数。

引理 4.7. 由命题 *4.4*，面积函数(4.3) 是从凸集 Π 到凸集 $\mathbb{R}$的重心代数同态。

引理 4.8. 固定标准顺序下的一对组合顶点 $j < k$ ，以及 Π的一个元素$\mathbf{a}$。考虑连接向量$\mathbf{v}^j$ 与$\mathbf{v}_k$的直线 $\mathcal{L}_{jk}$ ，其遍历方向为从$\mathbf{v}^j$ 到$\mathbf{v}_k$。

(a) 若$\mathbf{a}$ 位于 $\mathcal{L}_{jk}$上，则 $\langle \mathbf{a}|j \wedge k\rangle = 0$。(b) 若$\mathbf{a}$ 位于 $\mathcal{L}_{jk}$ 的左侧，则 $\langle \mathbf{a}|j \wedge k\rangle > 0$。(c) 若$\mathbf{a}$ 位于 $\mathcal{L}_{jk}$的右侧，则 $\langle \mathbf{a}|j \wedge k\rangle < 0$。

引理 4.9. 考虑 Π的一个元素$\mathbf{a}$ 。

(a) 对于 $1 \leq i \leq n$，根据引理 *4.2* 中规定的约定，我们有 $\langle \mathbf{a}|i \wedge (i+1)\rangle \geq 0$ ，其中涉及外部边界函数。(b) </style}对于所有 ，当且仅当$\mathbf{a}$ 位于 Π 的内部时，我们有 $\langle \mathbf{a}|i \wedge (i+1)\rangle > 0$ 。(c) 假设$\mathbf{a}$ 是一个组合顶点 j，且满足 $j \notin \{i,(i+1)\}$。那么 $\langle j|i \wedge (i+1)\rangle > 0$。

4.1.5. 六边形作为一个典型示例。 图 1 展示了将一个六边形分解为 4 个三角形的三种不同方式，每种方式都借助三条互不相交的弦。三种在拓扑上彼此不同的类型，为二面体群 D_6 在由弦细分的图 C_6 上的轨道提供了完整的代表元集合。弦以细线表示，六边形的边以粗线表示。带框标签用于区分这三种拓扑类型，并标明由弦构成的图的（弦）度序列 （CDS）。例如，中间情形中的弦图有$\mathbf{v}_1$ 和$\mathbf{v}_4$ 两个度为一的顶点，以及$\mathbf{v}_3$ 和$\mathbf{v}_6$ 两个度为二的顶点。

图 1 所示的例子代表了一般情形。事实上，6 是能够展现全部潜在可能性的多边形顶点的最小数目：对于 $2 < n < 6$，唯一可能的弦度数序列是$1^{(n-3)}(n-3)$。注意，第三个六边形（2^3）的区域 $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_5$ 没有外部边界。鉴于图 1 中例子的一般性，随后的讨论足以说明一般多边形的分析。

4.1.6. 顶点/弦表。

注释 4.10. 考虑表 2。

(a) 表格中，较完整的列标签 $|j \wedge k\rangle$ 比 $|jk\rangle$ 更合适。出于排版原因，省略了额外的 $\wedge$ 符号。

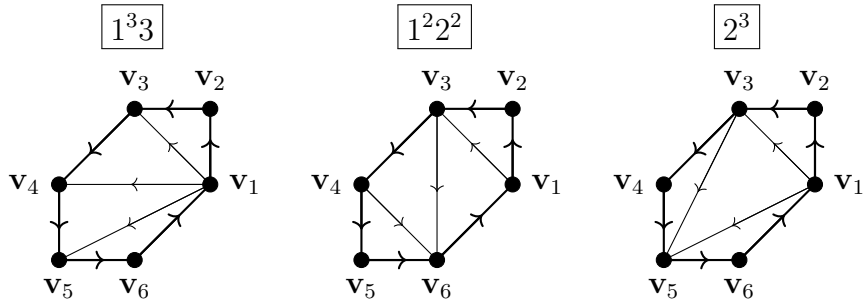


FIGURE 1. 六边形的定向无交弦分解 .

CDS:	1^33			1^22^2			2^3		
弦:	$\|13\rangle$	$\|14\rangle$	$\|15\rangle$	$\|13\rangle$	$\|36\rangle$	$\|46\rangle$	$\|13\rangle$	$\|15\rangle$	$\|35\rangle$
$\langle 1\|$	0	0	0	0	+	+	0	0	+
$\langle 2\|$	−	−	−	−	+	+	−	−	+
$\langle 3\|$	0	−	−	0	0	+	0	−	0
$\langle 4\|$	+	0	−	+	−	0	+	−	−
$\langle 5\|$	+	+	0	+	−	−	+	0	0
$\langle 6\|$	+	+	+	+	0	0	+	+	+

TABLE 2. 图 1 所示六边形分解各自对应的顶点/弦表 。顶点/弦表的第二行标出了表格列，这些列分别对应于第一行以弦度数序列标记的三种弦分解中每条弦的三个内部边界函数。随后，对于每个组合顶点 $i$of A（在表中以刁标记行标签 $\langle i|$表示），列 $|jk\rangle$ 中的表项是由 (4.3) 确定的面积函数值 $\langle i|j \wedge k\rangle$ 的符号。

(b) 表格第一行中的 CDS 标签是通用的。实际使用的弦分解可以用更明确的说明表示为

$$\mathbb{1}_{13} \circ \mathbb{1}_{14} \circ \mathbb{1}_{15}\,,\ \mathbb{1}_{13} \circ \mathbb{1}_{36} \circ \mathbb{1}_{46}\,,\ \mathbb{1}_{13} \circ \mathbb{1}_{15} \circ \mathbb{1}_{35} \tag{4.4}$$

使用组合记号 jk 表示各条弦，并在代数 $\mathbb{R}^{\Pi}$ 中使用引理 3.1(b) 的布尔记号，以表示构成该分解的特定弦。特别是，可以从 (4.4) 中恢复 CDS 标签。

(c) 图 1 中间的弦分解以及 (4.4) 可用于说明 §4.1.2 中讨论的二面体群作用于弦分解的情形。二面体群 D_6 由旋转 $\rho =$ (1 2 3 4 5 6)（模 6 加 1）和反射 （德语：Spiegelung（反射）） σ =(1 5)(2 4)（模 6 取负）生成。使用 (b) 中的记号，相应的旋转和反射作用，例如

$$\mathbb{1}_{13} \circ \mathbb{1}_{36} \circ \mathbb{1}_{46} \overset{\rho}{\mapsto} \mathbb{1}_{24} \circ \mathbb{1}_{41} \circ \mathbb{1}_{51} = \mathbb{1}_{14} \circ \mathbb{1}_{15} \circ \mathbb{1}_{24} \quad \text{and}$$
$$\mathbb{1}_{13} \circ \mathbb{1}_{36} \circ \mathbb{1}_{46} \overset{\sigma}{\mapsto} \mathbb{1}_{53} \circ \mathbb{1}_{36} \circ \mathbb{1}_{26} = \mathbb{1}_{26} \circ \mathbb{1}_{35} \circ \mathbb{1}_{36}$$

便足以指定全部 D_6 6 个带有 CDS $1^2 2^2$ 的弦分解集合上的右作用。

注意，表格条目 $\langle j|jk\rangle$ 和 $\langle k|jk\rangle$ 为零。对于不在从$\mathbf{v}j$ 到$\mathbf{v}_k$的直线 $\mathcal{L}_{jk}$ 上的几何顶点$\mathbf{v}_i$ ，按照引理 4.8 中的描述，设想沿着箭头方向沿该直线前进。那么，如果顶点$\mathbf{v}_i$ 位于左侧， $\langle i|jk\rangle$ 的表格条目为 $+$。如果顶点位于右侧，则表格条目为 $-$。例如，考虑图 1 中间的六边形里的顶点$\mathbf{v}_4$ 。从$\mathbf{v}_1$ 到$\mathbf{v}_3$, 时，它位于左侧；而从$\mathbf{v}_3$ 到$\mathbf{v}_6$, 时，它位于右侧。最后，它位于从$\mathbf{v}_4$到$\mathbf{v}_6$的直线上。这就解释了表格中标记为 $\langle 4|$的行中间部分的连续条目 $+, -$,0。

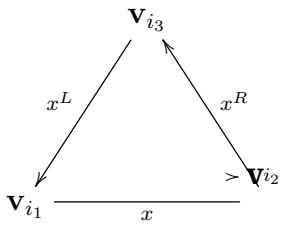
4.2. 区域识别与定向。 多边形 Π 的弦分解δ （对于 $n > 3$为非平凡分解，以 $n = 3$ 为基）将其分解为一组 $n-2$ 三角形区域 τ的并。这些三角形区域沿内部边界弦与其邻区域相交。令T_δ 表示 δ中出现的 $n-2$ 三角形 τ 的集合。首先，必须识别出这些三角形区域 τ 。然后，对于 T_δ中的每个三角形 τ ，其顶点集{$\mathbf{v}^{i_1}$,$\mathbf{v}^{i_2}$,$\mathbf{v}_{i_3}$ } 必须按循环逆时针顺序排列为$\mathbf{v}_{i_1} \wedge \mathbf{v}_{i_2} \wedge \mathbf{v}^{i_3}$ ，以便应用命题 4.5。

注 4.11。 我们在此使用外代数记号$\mathbf{v}_{i_1} \wedge \mathbf{v}_{i_2} \wedge \mathbf{v}^{i_3}$表示定向单形 τ；事实上，在定义 4.6 中也用它表示定向线段 $j \wedge k$ ，这沿用了 [2, §IV.4], ，该内容重印于 [3, p.62]。

我们概述一种用于区域识别与定向的递归过程，其中包括确定给定点在某一区域内的位置。该过程最终建立在多边形的弦分解与有根二叉树之间的对应关系之上。

4.2.1. 弦分解与非余结合余乘解析树。虽然与弦分解相对应的有根二叉树通常被视为重复非结合乘积的解析树，但实际上将它们解释为重复非余结合余乘的解析树更为恰当 $\Delta\colon\ x \mapsto x^L \otimes x^R$:

(4.5)



这里，我们使用 [16, 备注 2.2(b)] 中的非余结合 Sweedler记号。为作具体解释，将余积视为作用于概率分布 x ，该概率分布位于式 (4.5) 中从$\mathbf{v}_{i_1}$ 到 $\mathbf{v}_{i_2}$ 的内部线段上。随后，通过某种指定的传输机制，它产生一个概率分布 x^L ，位于从 $\mathbf{v}_{i_3}$ 到 $\mathbf{v}_{i_1}$的内部线段上；同时产生另一个概率分布 x^R ，位于从 $\mathbf{v}_{i_2}$ 到 $\mathbf{v}_{i_3}$的内部线段上。我们将有向线段 $\mathbf{v}_{i_1} \wedge \mathbf{v}_{i_2}$ 称为基 或输入，将有向线段 $\mathbf{v}_{i_2} \wedge \mathbf{v}_{i_3}$称为右输出，并将有向线段 $\mathbf{v}_{i_3} \wedge \mathbf{v}_{i_1}$ 称为左输出。

4.2.2. 递归步骤。 递归步骤的输入是一个三元组 (P, W, χ)，由一个多边形 P 和一个顶点集 $W = \{\, \mathbf{w}_1 < \cdots < \mathbf{w}_r \,\}$组成；该顶点集支持一个标准序，并由一组 χ 按标准序排列的弦将 P分解。当 $r < 4$时，集合 χ 将为空。

递归步骤会输出一对这样的三元组（P^L， W^L， χ^L）、（P^R， W^R， χ^R）。其中任一输出三元组都可能是终止的，也就是说，其顶点集只包含两个元素。输入三元组不能是终止的。

给定输入三元组（P， W， χ），基 是有向边界边$\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$,，在组合记号中也可简写为 $1 \wedge 2$。若 $r = 3$，则 $1 \wedge 2 \wedge 3$是唯一的有向区域 τ，此时过程停止，因为它的两个输出三元组都是终止的：左侧的 $W^L = \{\, 3 < 1 \,\}$和右侧的 $W^R = \{\, 2 < 3 \,\}$。我们也会将其认作

$$\tau(P, W, \chi) = \tau_{1\wedge 2} = 1 \wedge 2 \wedge 3$$

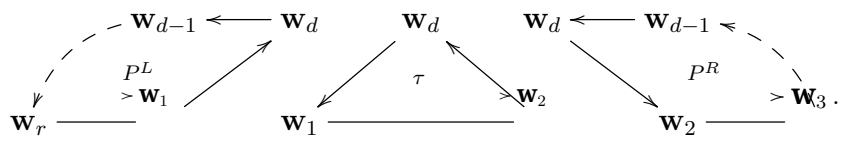
由（P， W， χ）选定 的三角区域。

否则，若 $r > 3$，包含边 $1 \wedge 2$ 的三角区域 τ 具有如下定向形式： $1 \wedge 2 \wedge d$，其中某个顶点为 d。同样，我们将

(4.6) $$\tau(P, W, \chi) = \tau_{1\wedge 2} = 1 \wedge 2 \wedge d$$

视为由 $(P,\ W,\ \chi)$选定 的三角区域。带有几何顶点标记时，这些定向如图所示：

(4.7)



顶点 d 由弦分解 χ 确定如下：

(a) 在第一种情形中，$1\wedge d$ 和 $2\wedge d$ 都是弦，因此 $3<d<r$。

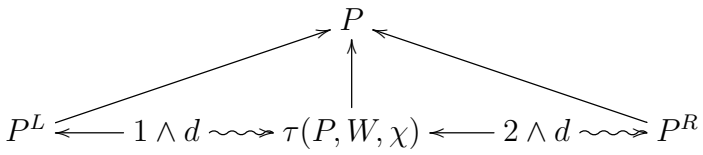
($\mathbf{b}^L$) 如果 $2\wedge d$ 是弦，但 $1\wedge d$ 不是，那么 $d=r$。$1\wedge r$ 的顶点集 $\{1,r\}$ 表现为有向边界边 $r\wedge 1$；($\mathbf{b}^R$) 如果 $1\wedge d$ 是弦，但 $2\wedge d$ 不是，那么 $2\wedge d$ 是边界边$2\wedge 3$。特别地，$d=3$。

情形标记 $\mathbf{b}^L$ 或 $\mathbf{b}^R$ 分别表示，在余积中，x^L 或 x^R 的承载者是一条边界边。递归步骤在以下三种情形中的表现各不相同：

(a) 在第一种情形中，$d\wedge 2$ 充当子多边形 P^R 的基边界边，其顶点集为 $W^R=\{d<2<3<\cdots<d-1\}$。此处 $\chi^R=\chi\cap\mathsf{int}\ \big(P^R\big)$。类似地，有向边 $1\wedge d$ 充当子多边形 P^L 的基边界边，其顶点集为 $W^L=\{1<d<d+1<\cdots<r\}$，且 $\chi^L=\chi\cap\mathsf{int}\ \big(P^L\big)$。($\mathbf{b}^L$) 此处，$r\wedge 1$ 不再发挥作用，对应于解析树中的一个叶节点。形式上，$W^L=\{r<1\}$ 是终止的。另一方面，$r\wedge 2$ 现在充当子多边形 P^R 的基边界边，其顶点集为 $W^R=\{r<2<\cdots<r-1\}$，且$\chi^R=\chi\cap\mathsf{int}\ \big(P^R\big)$。($\mathbf{b}^R$) 此处，$W^R=\{2<3\}$ 是终止的。现在，$1\wedge 3$ 充当子多边形 P^L 的基边界边，其顶点集为$W^L=\{1<3<\cdots<r\}$，且 $\chi^L=\chi\cap\mathsf{int}\ \big(P^L\big)$。

递归步骤确定了该图

(4.8)



$$\begin{array}{lllllll}\geq 0 & 0 & \leq 0 & \leq 0 & \leq 0 & |1\wedge d\rangle\\ \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & 0 & \leq 0 & |2\wedge d\rangle\end{array}$$

其上半部分展示了无向子集关系。此外，上半部分也可以解释为表示有向子集关系，其中约定波浪箭头会在包含过程中反转定向。这些定向与（4.7）中所示的定向相对应。在情形 (a) 中，所有图示的包含关系都是真包含。在情形 (b^L) 中，$1 \wedge d$ 属于 P^L 的包含关系不是真包含。在情形 (b^R) 中，$2 \wedge d$ 属于 P^R 的反转定向包含关系不是真包含。

(4.8) 的底部几行给出了一个扩展顶点/弦表片段。各列以图表第二行中的不同集合 S 为标签。对于 S 的一个元素$\mathbf{x}$，标记为$|i \wedge d\rangle$ 的行中的条目给出了 $\langle \mathbf{x}|i \wedge d\rangle$ 的符号信息。此外，所列出的$\mathbf{x} \in S = \tau(P, W, \chi) = \tau(\Pi^\Lambda, V^\Lambda, \delta^\Lambda)$ 的行为，同样适用于 $\tau(\Pi^{\Lambda_I}, V^{\Lambda_I}, \delta^{\Lambda_I})$ 的任意元素 $\mathbf{y}$ 的行为，其中 Λ_I 是 Λ 的任意初始段，因为 Π 中的这些元素出现在凸集 $\Pi \setminus (P^L \cup P^R)$ 中，该凸集包含$\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$，作为一条边或弦。

(4.8) 的底部几行在确定多边形元素$\mathbf{x}$的位置方面所起的作用，由 §4.2.4 的示例加以说明。

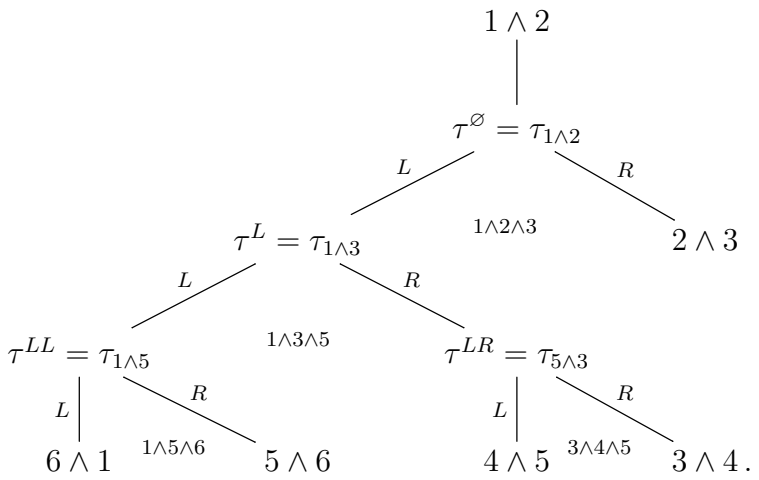
4.2.3. 递归过程。 在完整确定弦分解中的区域时，递归步骤应用 $n-2$ 次。在初始步骤中，我们取 $(P,\ W,\ \chi)$ 作为 $(\Pi,\ V,\ \delta)$，以 $1 \wedge 2$ 为基，选取三角区域 $\tau^\varnothing = \tau(\Pi,\ V,\ \delta)$。后续递归步骤处理

$$(P, W, \chi) = (\Pi^\Lambda, V^\Lambda, \delta^\Lambda)\,,$$

其中，Λ 是字母表 $\{L, R\}$中的一个词。事实上，我们也可以将初始三元组(Π, V, δ)写作$(\Pi^\varnothing, V^\varnothing, \delta^\varnothing)$，这里使用了字母表 $\{L, R\}$中的空词 $\varnothing$。从$(\Pi^\Lambda, V^\Lambda, \delta^\Lambda)$中选出的三角区域可记为 τ^Λ，此外还可使用(4.6)中的记法。这些约定以及递归过程中的其他细节，都可通过以下示例得到充分说明。

4.2.4. 来自六边形的一个示例。 在我们的六边形示例中，带有 CDS2^3, 的余积解析树可表示如下：

(4.9)



初始基 $1 \wedge 2$（一条边界边）表示为一个初始叶节点。其余 5 条边界边则表示为其余叶节点，标记递归过程各分支的相应终止位置。初始三角形以初始基标记，而其余内部节点则标记由（可能重新定向的）弦所标记的三角形。重新定向由图（4.8）第二行中的波浪箭头确定。三角形的标准次序也置于树的各分支中，显示它们如何由该分支的三条相邻边和弦构成。

在树的第一个内部节点 $\tau^{\varnothing}$ 处，对于 $(P,\ W,\ \chi) = (\Pi,\ V,\ \delta)$，（4.8）的中间几行呈现为

(4.10)
$$\Pi^{L} \longleftarrow 1 \wedge 3 \rightsquigarrow \tau(\Pi, V, \delta) \longleftarrow 2 \wedge 3 \rightsquigarrow \Pi^{R}$$

$$\geq 0 \qquad 0 \qquad \leq 0 \qquad \leq 0 \qquad \leq 0 \qquad |1 \wedge 3\rangle\,.$$

此处未记录最后一行，因为它显示了一个外部边界函数，该函数在 Π 的任意元素$\mathbf{x}$处总是返回非负值。在树的第二个内部节点 τ^{L} 处，其中 $W = \{\, 1 < 3 < 4 < 5 < 6 \,\}$

以及 $\chi = \{\, 1 \wedge 5, 3 \wedge 5 \,\}$，(4.8) 的下方各行形式如下

(4.11) $\Pi^{LL} \prec \underline{\quad} 1 \wedge 5 \quad \rightsquigarrow \mathcal{I}(\Pi^L, W, \chi) \prec \underline{\quad} 3 \wedge 5 \quad \rightsquigarrow \Pi^{LR}$

$$\geq 0 \qquad 0 \qquad \leq 0 \qquad \leq 0 \qquad \leq 0 \qquad |1 \wedge 5\rangle$$

$$\geq 0 \qquad \geq 0 \qquad \geq 0 \qquad 0 \qquad \leq 0 \qquad |3 \wedge 5\rangle\,.$$

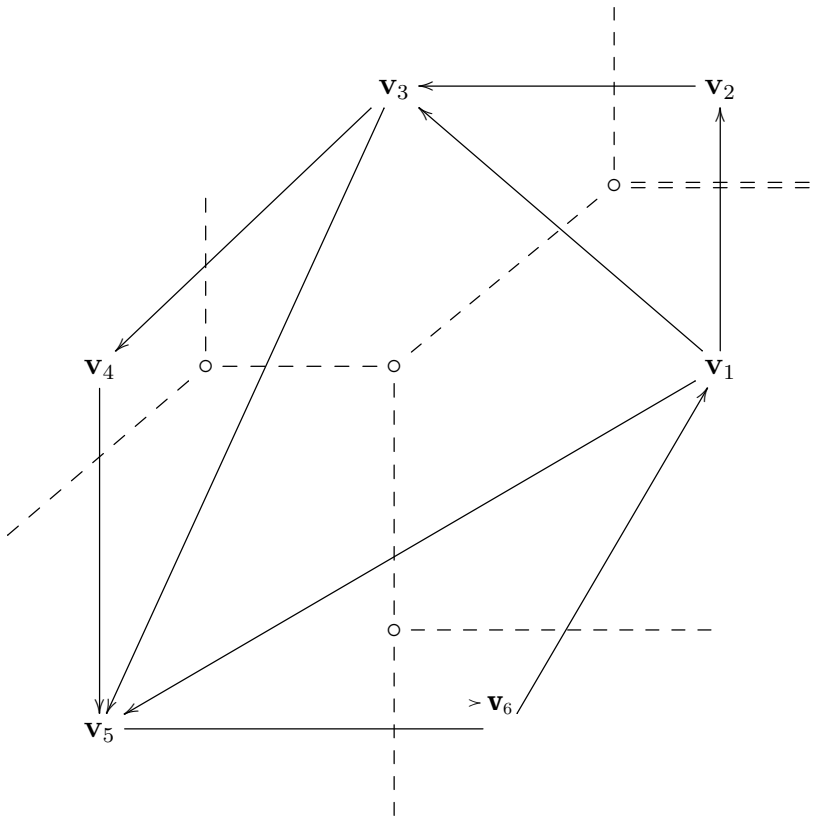
(4.10) 和 (4.11) 的下方各行所包含的信息汇总在三角形/弦表的各列中，如表3所示。

弦:	$\lvert 1 \wedge 3\rangle$	$\lvert 1 \wedge 5\rangle$	$\lvert 3 \wedge 5\rangle$	Code
$\tau^{\varnothing}$	≤ 0	≤ 0	≥ 0	001
$\Pi^L \supset \tau^L$	≥ 0	≤ 0	≥ 0	101
$\Pi^L \supset \Pi^{LL} = \tau^{LL}$	≥ 0	≥ 0	≥ 0	111
$\Pi^L \supset \Pi^{LR} = \tau^{LR}$	≥ 0	≤ 0	≤ 0	100

TABLE 3. 这个三角形/弦表的结构与顶点/弦表2相似。其前几列包含了 (4.10) 和 (4.11) 中下方各行的信息。最后一列的二进制编码中，0 表示弦状面积函数值为非正，1 表示弦状面积函数值为非负。每个三角形都有独特的编码，因此可以确定任意多边形点x位于哪些三角区域内。

注 4.12。 (4.9) 中展示的解析树与三角剖分六边形在拓扑上互为对偶，如下图所示。

(4.12)



空心圆表示与二维三角形对偶的零维点，而虚线表示与一维弦和六边形边对偶的一维边。从解析树的根延伸出的双虚线边，与六边形的基边 $1 \wedge 2$ 对偶。

图 4.15] 中展示了一些与 (4.12) 类似的图示，它们处于抽象背景下。现在值得注意的是，这些图示的拓扑对偶性如何体现余代数与代数之间的对偶性。

4.2.5. 一些计算示例。 在欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中，考虑由顶点 Π 张成的六边形

$$\mathbf{v}_1 = (2,1),\ \mathbf{v}_2 = (2,2),\ \mathbf{v}_3 = (1,2),\ \mathbf{v}_4 = (0,1),\ \mathbf{v}_5 = (0,0),\ \mathbf{v}_6 = (1,0)$$

采用式（4.4）中的 CDS 2^3 类型弦分解 $\delta = \mathbb{1}_{13} \circ \mathbb{1}_{15} \circ \mathbb{1}_{35}$。我们利用解析树

$$\mathbf{a} = (7/4, 3/2),\ \mathbf{b} = (3/2, 3/2),\ \mathbf{c} = (1,1)$$

（4.9）和顶点/弦表 3，确定 Π 的三个点的弦坐标。

首要任务是确定分解 δ 所划分的三角形内的点。对于 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$，我们有

$$2\langle \mathbf{x}|1\wedge 3\rangle = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, 2\langle \mathbf{x}|1\wedge 5\rangle = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, 2\langle \mathbf{x}|3\wedge 5\rangle = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

由此得到顶点/弦表 3 中相应的编码，如表 4 所示。因此，我们有 $\mathbf{a} \in \tau^{\varnothing}$、$\mathbf{b} \in \tau^{\varnothing} \cap \tau^{L}$ 和 $\mathbf{c} \in \tau^{L}$。

弦:	$\lvert 1\wedge 3\rangle$	$\lvert 1\wedge 5\rangle$	$\lvert 3\wedge 5\rangle$	Code
$\mathbf{a}$	≤ 0	≤ 0	≥ 0	001
$\mathbf{b}$	0	≤ 0	≥ 0	001,101
$\mathbf{c}$	≥ 0	≤ 0	≥ 0	101

TABLE 4. 顶点/弦表 3 中顶点$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 和$\mathbf{c}$的编码。

现在，我们只需依照 (4.1) 和 (4.2)，即可求出$\mathbf{a}$在单纯形 $\tau^{\varnothing}$中的面积坐标、$\mathbf{b}$在单纯形 $\tau^{\varnothing}$中的面积坐标（例如），以及$\mathbf{c}$在单纯形 τ^{L}中的面积坐标。此过程给出的坐标表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 1/2\,\mathbf{v}_1 + 1/4\,\mathbf{v}_2 + 1/4\,\mathbf{v}_3\,, \\ \mathbf{b} &= 1/2\,\mathbf{v}_1 + 1/2\,\mathbf{v}_3\,, \quad \text{and} \\ \mathbf{c} &= 1/3\,\mathbf{v}_1 + 1/3\,\mathbf{v}_3 + 1/3\,\mathbf{v}_5\,, \end{aligned}$$

在每种情况下，所有缺失顶点的弦坐标均为零 .

4.3. 多边形的弦坐标。 考虑一个多边形 Π，其有序顶点集为 $V = \{\mathbf{v}_1 < \cdots < \mathbf{v}_n\}$。设 δ是 Π的一个弦分解。假设已执行 §4.2 中概述的过程，从而得到集合 T_δ，其中包含 Π中出现的 $n-2$ 个定向正确的三角形 τ。对于每个三角形 $\tau \in T_\delta$以及 τ的每个顶点$\mathbf{v}$，取由 (4.2) 给出的面积坐标函数。

定义4.13. (a) 对于 $S \subset T_\delta$ 和 $\tau \in T_\delta \smallsetminus S$，定义

$$\bigodot_{\sigma\in\varnothing} \mathbb{1}_\sigma \cdot |\mathbf{v}\rangle_\sigma = 0$$

and

$$\bigodot_{\sigma\in S\cup\{\,\tau\,\}} \mathbb{1}_\sigma\cdot|\mathbf{v}\rangle_\sigma = \bigodot_{\sigma\in S} \mathbb{1}_\sigma\cdot|\mathbf{v}\rangle_\sigma + \mathbb{1}_\tau\cdot|\mathbf{v}\rangle_\tau - \mathbb{1}_{\tau\cap\bigcup\{\,\sigma|\sigma\in S\,\}}\cdot|\mathbf{v}\rangle_\tau \tag{4.13}$$

递归地使用函数代数 I^{Π} 中的逐点乘积。

（b）采用（a）中的记号，该公式

$$|\mathbf{v}\rangle_\delta = \bigodot_{\sigma\in\{\,\tau\in T_\delta|\mathbf{v}\in\tau\,\}} \mathbb{1}_\sigma\cdot|\mathbf{v}\rangle_\sigma \tag{4.14}$$

给出了 δ 在 Π 的顶点 $\mathbf{v}$ 处的弦坐标函数 。

关于将递归步骤 (4.13) 应用于 Π 中的元素$\mathbf{a}$ ，我们有如下结论:

引理 4.14。 考虑等式

$$\langle\mathbf{a}|\bigodot_{\sigma\in S\cup\{\,\tau\,\}} \mathbb{1}_\sigma\cdot|\mathbf{v}\rangle_\sigma = \langle\mathbf{a}|\bigodot_{\sigma\in S} \mathbb{1}_\sigma\cdot|\mathbf{v}\rangle_\sigma \tag{4.15}$$

对于 $S\subset T_\delta$、 $\tau\in T_\delta$、$\mathbf{a}\in\Pi$ 和 $\mathbf{v}\in V$。

(a) 若$\mathbf{a}\notin\tau$，则(4.15) 成立。(b) 若 $\langle\mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\tau = 0$，则(4.15) 成立。$(c)$ 若$\mathbf{a}$ 属于所有 $\rho\in S\cup\{\,\tau\,\}$，则(4.15) 成立。

证明。 由 (4.13)，可得

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{a}|\bigodot_{\sigma\in S\cup\{\,\tau\,\}} \mathbb{1}_\sigma\cdot|\mathbf{v}\rangle_\sigma &= \langle\mathbf{a}|\bigodot_{\sigma\in S}\mathbb{1}_\sigma\cdot|\mathbf{v}\rangle_\sigma \\ &\quad + \langle\mathbf{a}|\,\mathbb{1}_\tau\cdot\langle\mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\tau - \langle\mathbf{a}|\,\mathbb{1}_{\tau\cap\bigcup\{\,\sigma|\sigma\in S\,\}}\cdot\langle\mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\tau\,.\end{aligned} \tag{4.16}$$

(a) 在此情形下，差值 (4.16) 为零，因为 $\langle\mathbf{a}|\,\mathbb{1}_\tau$和 $\langle\mathbf{a}|\,\mathbb{1}_{\tau\cap\bigcup\{\,\sigma|\sigma\in S\,\}}$均为零。

(b) 在此情形下，差值 (4.16) 为零，因为 $\langle\mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\tau = 0$。

(c) 在此情形下，差值 (4.16) 为零，因为 $\langle\mathbf{a}|\,\mathbb{1}_{\tau\cap\bigcup\{\,\sigma|\sigma\in S\,\}} = 1$和$\langle\mathbf{a}|\,\mathbb{1}_\tau = 1$。 □

定理 4.15。 令 δ 为 Π的弦分解。

(a) 单位分解性质

$$\sum_{\mathbf{v}\in V}|\mathbf{v}\rangle_\delta = \mathbb{1}_\Pi$$

成立。

(b) 对于$\mathbf{a} \in \Pi$，重心或线性精确性

$$\langle \mathbf{a}| = \sum_{\mathbf{v}\in V} \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\delta \langle \mathbf{v}| \tag{4.17}$$

成立。

证明。 由引理 2.11，只需证明 (b)，因为随后对 (b) 两边应用重心同态 $\mathbf{1}\colon \Pi \to I$ 即可推出 (a)。考虑 Π中的一个元素$\mathbf{a}$ 。根据$\mathbf{a}$ 在弦分解 δ中的位置，需要考虑几种情况。在本证明的其余部分中，“内部”指相对内部。

三角形的内部： 如果$\mathbf{a}$ 位于弦分解中定向三角形 $\tau = \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k$ 的相对内部，那么由 (4.14) 和引理 4.14(a)，

$$\langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\delta = \bigodot_{\sigma\in\{\,\rho\in T_\delta | \mathbf{v}\in\rho\,\}} \langle \mathbf{a}|\,\mathbb{1}_\sigma \cdot \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\sigma = \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\tau \ , \tag{4.18}$$

因此 $\langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\delta = 0$，如果$\mathbf{v} \notin \{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}j, \mathbf{v}_k\}$。在这种情况下，命题 4.5 得出 (4.17)，这是三角形中面积坐标通常表达式的一个实例。

边界边的内部： 设$\mathbf{a}$ 位于边界边$\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}i{+}1$的内部。该边界边构成弦分解中唯一一个三角形$\tau = \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_{i+1} \wedge \mathbf{v}j$ 的一部分。因此，与（4.18）一样，有 $\langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\delta = 0$，如果$\mathbf{v} \notin \{\mathbf{v}_i,\ \mathbf{v}i{+}1,\ \mathbf{v}_j\}$，而命题 4.5给出的（4.17）则是三角形中面积坐标通常表达式的一个实例。

弦的内部： 设$\mathbf{a}$位于分隔定向三角形 $\tau_1 = \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k$和 $\tau_2 = \mathbf{v}_l \wedge \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_i$的弦 $\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}j$的相对内部。由（4.14）和引理 4.14(a)，

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\delta &= \bigodot_{\sigma\in\{\,\rho\in T_\delta | \mathbf{v}\in\rho\,\}} \langle \mathbf{a}|\,\mathbb{1}_\sigma \cdot \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\sigma \\ &= \langle \mathbf{a}|\,\mathbb{1}_{\tau_1} \cdot \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_{\tau_1} + \langle \mathbf{a}|\,\mathbb{1}_{\tau_2} \cdot \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_{\tau_2} - \langle \mathbf{a}|\,\mathbb{1}_{\tau_1\cap\tau_2} \cdot \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_{\tau_2} \\ &= \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_{\tau_1} + \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_{\tau_2} - \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_{\tau_2} = \langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_{\tau_1} \ ,\end{aligned}$$

因此 $\langle \mathbf{a}|\mathbf{v}\rangle_\delta = 0$，如果$\mathbf{v} \notin \{\mathbf{v}_i,\ \mathbf{v}_j\}$。在这种情况下，（4.17）简化为线段上面积坐标通常表达式的一个实例。

顶点： 设$\mathbf{a}$ 是$\mathbf{v}_i$ 的一个顶点。现在，对于弦分解 δ中的任意三角形 σ，我们有 $\langle \mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j\rangle_\sigma = \delta_{ij}$ 与克罗内克δ的关系。根据（4.14）和引理 4.14(b)，我们有 $\langle \mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j\rangle_\delta = 0$ 对于 $i \neq j$。

现在设 $\tau_1, \dots, \tau_r$ 是弦分解 δ 中包含$\mathbf{v}_i$的三角形列表。根据引理 4.14(a), 我们有

$$\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle_\delta = \langle \mathbf{v}_i | \bigodot_{\sigma \in \{\tau_1, \dots, \tau_r\}} \mathbb{1}_\sigma \cdot |\mathbf{v}_i\rangle_\sigma \ .$$

于是我们有

$$\langle \mathbf{v}_i | \bigodot_{\sigma \in \{\tau_1, \dots, \tau_k\}} \mathbb{1}_\sigma \cdot |\mathbf{v}_i\rangle_\sigma = 1$$

对 $1 \le k \le r$ 用归纳法，并利用引理 4.14(c)。因此 (4.17) 在这最后一种情形下也成立。 □

例 4.16. 设 Π 为有序序列的凸包（在 $\mathbb{R}^2$中） e

$$\mathbf{v}_1 = (0,0) = \tfrac{2}{3}\mathbf{v}_2 - \tfrac{1}{3}\mathbf{v}_3 + \tfrac{2}{3}\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2 = (1,0), \mathbf{v}_3 = (0,1), \mathbf{v}_4 = (-1, \tfrac{1}{2})$$

的极值点。设**a** 为点$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4}\mathbf{v}_i$ = **(0**, 3 8**)**。考虑Π的弦分解 $\delta = \{1 \wedge 3\}$ 与 $\delta' = \{2 \wedge 4\}$，其相应的区域集

$$T_\delta = \{\tau_1 = 1 \wedge 2 \wedge 3, \tau_2 = 1 \wedge 3 \wedge 4\}$$

and

$$T_{\delta'} = \{\tau'_1 = 1 \wedge 2 \wedge 4, \tau'_2 = 2 \wedge 3 \wedge 4\}$$

由于$\mathbf{a} \in \tau_1 \cap \tau_2$，它相对于 δ的弦坐标为 $\left(\frac{5}{8}, 0, \frac{3}{8}, 0\right)$。另一方面，由于$\mathbf{a} \in \tau'_2 \setminus \tau'_1$，它相对于 δ' 的弦坐标为 $\left(0, \frac{5}{12}, \frac{2}{12}, \frac{5}{12}\right)$。

— — —

5. Cartographic coordinates of a polygon

本节中，考虑一个多边形 Π，其顶点 n 的有序集合为 V，如 §4.1.1 所述。为消除选择任一单独弦坐标系可能造成的偏差，我们对二面体群的作用取平均，从而得到一个制图坐标系。

5.1. **CDS 的制图坐标**。

定义 5.1。设 δ 是 Π 的一个弦分解，且指定了一个 CDS。那么公式

$$|\mathbf{v}\rangle_\kappa = \frac{1}{2n} \sum_{g \in D_n} |\mathbf{v}\rangle_{\delta g} \tag{5.1}$$

给出了该 CDS 在 Π的顶点 **v** 处的制图坐标函数 .

在定义 5.1 中，式 (5.1) 中出现的二面体群元素 g 对弦分解 δ 的右作用 g: $\delta \mapsto \delta g$ 如 §4.1.2 和注释 4.10(c) 所述。

定理 5.2. 对于 Π 的每个弦分解 δ，定义 *5.1* 指定了一个 Π 的坐标系 κ。

证明。 按照 §3.3 的记号，我们有

$$\kappa = \frac{1}{2n} \sum_{g \in D_n} \delta g \,,$$

一个重心组合。根据定理 4.15，每个 δg 都构成一个坐标系。于是定理 3.5 表明，κ 是一个坐标系。□

例 5.3。 继续例 4.16，回想一下， 1^2 是四边形唯一可用的 CDS。我们得到

$\left(\frac{5}{16}, 0, \frac{3}{16}, 0\right) + \left(0, \frac{5}{24}, \frac{2}{24}, \frac{5}{24}\right) = \frac{1}{48}(15, 10, 13, 10) \simeq (0.312, 0.208, 0.271, 0.208)$
作为点 **a** 的制图坐标。

5.2. **六边形上的制图坐标**。 §4.2.5 中讨论的六边形 Π，比例 5.3 所提供的例子更能生动地说明制图坐标。我们考虑这些点**a**、**b**、**c**。

要计算点 **a**，**b** 和 **c**的制图坐标，首先注意，包含初始弦分解 δ 的 D_6-作用轨道仅由两个弦分解组成：原始分解 $\delta_1 = \delta$，以及它在 $\mathbb{1}_{24} \circ \mathbb{1}_{26} \circ \mathbb{1}_{46}$ 下的像 δ_2。将 (5.1) 应用于 §4.2.5 中的 δ，可得

$$|\mathbf{v}_i\rangle_\kappa = \frac{1}{12}(6 \cdot |\mathbf{v}_i\rangle_{\delta_1} + 6 \cdot |\mathbf{v}_i\rangle_{\delta_2}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}_i\rangle_{\delta_1} + |\mathbf{v}_i\rangle_{\delta_2}) \tag{5.2}$$

对于 $i = 1$，.....，6。相对于 δ_2，点 **a**，**b** 和 **c** 的弦坐标，按 §4.2.5 中 $\delta_1 = \delta$ 的前一个例子的方式计算。具体而言，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (0, 3/4, 0, 0, 0, 1/4), \\
\mathbf{b} &= (0, 2/3, 0, 1/6, 0, 1/6), \\
\mathbf{c} &= (0, 1/3, 0, 1/3, 0, 1/3)
\end{aligned}$$

对于 δ_2。因此，根据 (5.2)，点 **a**，**b** 和 **c** 可表示为

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (1/4, 1/2, 1/8, 0, 0, 1/8), \\
\mathbf{b} &= (1/4, 2/6, 1/4, 1/12, 0, 1/12), \\
\mathbf{c} &= (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)
\end{aligned}$$

作为制图坐标。特别要注意， Π 的重心**c** 的表达方式比原始弦坐标所提供的表达方式更加对称。

References

[1] D. Bowman、A. Regev，《凸正多边形剖分的对称类计数》，《应用数学进展》56 (2014), 35–55。https://doi.org/10.1016/j.aam.2014.01.004[2] C. Chevalley，《某些重要代数的构造与研究》，日本数学会，东京，1955。[3] C. Chevalley，《旋量与克利福德代数的代数理论：论文集第2卷》，施普林格，柏林，1997。[4] J.H. Conway、R.K. Guy，《数之书》，Copernicus，纽约，NY，1996。https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4072-3[5] J.A. De Loera、J. Rambau、F. Santos，《三角剖分：算法与应用的结构》，施普林格，柏林，2010。https://doi.org/10.1007/978-3-642-12971-1[6] I.M. Gel'fand、M.M. Kapranov、A.V. Zelevinsky，《判别式、结式与多维行列式》，Birkh¨auser，波士顿，1994。https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4771-1[7] H. Kneser，《凸空间》，《数学文献》3 (1952), 198–206。https://doi.org/10.1007/BF01899364[8] J. Kosinka、M. Barto˘n，《Wachspress坐标的收敛：从多边形到曲域》，《计算数学进展》41 (2015), 489–505。https://doi.org/10.1007/s10444-014-9370-3[9]A.F. M¨obius，《重心演算》，Barth，莱比锡，1827。https://doi.org/10.3931/e-rara-14538[10] W.D. Neumann，《仿射空间凸子集的拟簇》，《数学文献》（巴塞尔）21 (1970), 11–16。https://doi.org/10.1007/BF01220869[11] A.B. Romanowska、J.D.H. Smith，《模态理论》，Heldermann出版社，柏林，1985。[12] A.B. Romanowska、J.D.H. Smith，《重心代数的结构》，休斯敦数学杂志16 (1990), 431–448。[13] A.B. Romanowska、J.D.H. Smith，《模》，世界科学出版社，新加坡，2002。https://doi.org/10.1142/4953[14]A.B. Romanowska、J.D.H. Smith、A. Zamojska-Dzienio，《凸多边形坐标的逆问题》，已提交。参见 https://arxiv.org/abs/2308.11634v2[15] A.B. Romanowska、J.D.H. Smith、A. Zamojska-Dzienio，《多面体的内蕴几何 II：次级多胞体与凸多边形坐标》，准备中。[16] J.D.H. Smith，《量子拟群与环》，《代数杂志》456 (2016), 46–75。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.02.014[17] J.D.H. Smith、A.B. Romanowska，《后现代代数》，Wiley，纽约，NY，1999。https://doi.org/10.1002/9781118032589[18] M.H. Stone，《重心演算公理》，《纯粹与应用数学年刊》29 (1949), 25–30。https://doi.org/10.1007/bf02413910.[19] J. Warren、S. Schaefer、A.N. Hirani、M. Desbrun，《凸集的重心坐标》，《计算数学进展》27 (2007), 319–338。https://doi.org/10.1007/s10444-005-9008-6

(A.R., A.Z.) Faculty of Mathematics and Information Science, Warsaw University of Technology, 00-662 Warsaw, Poland

(A.R., J.S.) Department of Mathematics, Iowa State University, Ames,Iowa, 50011, USA电子邮件地址：(A.R.) anna.romanowska@pw.edu.pl电子邮件地址：(J.S.) jdhsmith@iastate.edu电子邮件地址：(A.Z.) anna.zamojska@pw.edu.pl网址：(J.S.) https://jdhsmith.math.iastate.edu/