arXiv:2603.08807v1 [cs.IR] 9 Mar 2026

具有海灵格弹性的时间扭曲

YULY BILLIG

Abstract. 我们研究一个时间序列匹配问题，其中序列的取值属于任意度量空间，拉伸惩罚由海灵格核给出。为优化这一匹配问题，我们提出了弹性时间扭曲算法，其计算复杂度为立方级。

1. Introduction

函数型数据分析有诸多应用，例如语音识别 [10], 生物医学 [7], 运动分析 [14], 经济学 [9],DNA匹配 [5], 等。

本文讨论一种新的时间规整算法，用于匹配时间序列，并对时间拉伸施加海灵惩罚。Fr´echet 度量提供了一种计算两条曲线之间距离的方法 f， g 这些曲线的取值属于度量空间（X， ρ），且该方法与参数化方式无关：

$$\inf_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}} \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha(\tau)), g(\beta(\tau))).$$

这里， $\mathcal{D}$ 是 $[0,1]$的微分同胚群。然而，在许多情况下，我们关心特定的时间参数化，并希望对曲线参数化的改变施加惩罚。

这可以通过斯科罗霍德度量 [12, 1]来实现：

$$\inf_{\alpha\in\mathcal{D}} \max\left(\sup_{\tau\in[0,1]} |\alpha(\tau),\tau|, \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha(\tau)), g(\tau)) \right).$$

函数型数据分析中的一种重要方法基于平方根速度框架 [12, 2, 13], ，其中分析的主要对象是平方根速度函数 $f'(t)/\sqrt{|f'(t)|}$。在这个框架中，匹配通过以下方式进行

$$\sup_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}} \int_0^1 \frac{f'(\alpha(\tau))}{\sqrt{|f'(\alpha(\tau))|}} \frac{g'(\beta(\tau))}{\sqrt{|g'(\beta(\tau))|}} \sqrt{\alpha'(\tau)}\sqrt{\beta'(\tau)}\, d\tau.$$

文献 [13] 指出了这一框架与海灵格距离之间的联系。注意，对于重参数化 $\alpha\in\mathcal{D}$，导数α' 具备概率分布密度函数的所有性质：它为正，且其积分等于 1。这使我们能够

借用概率论中的工具，并将其应用于线段 $[0,1]$ 的微分同胚群$\mathcal{D}$ 。对于两个微分同胚α， $\beta \in \mathcal{D}$，我们定义海灵格相似系数

$$C(\alpha,\beta)=\int_0^1 \sqrt{\alpha'(t)}\sqrt{\beta'(t)}\,dt,$$

由此得到海灵格距离

$$\theta(\alpha,\beta)=arccos\, C(\alpha,\beta).$$

这给出了函数空间上的如下度量（命题 6）：

$$d(f,g)=\inf_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}}\left(\theta(\alpha,\beta)+\sup_{\tau\in[0,1]}\rho(f(\alpha(\tau)),g(\beta(\tau)))\right).$$

在此度量中，拉伸的惩罚由海灵格项给出。

文献 [6]回顾了动态时间规整中常用的目标函数。

对于 DNA 匹配等许多应用，我们关心的是匹配片段之间有多接近，而不是不匹配片段之间有多大差异。因此，我们可能更关注相似系数 $K(f,g)$，其取值介于 0 和 1 之间，且当 $f=g$ 时等于 1。对于聚类算法，了解给定点的最近邻非常重要，而相似系数可以提供这一信息，从而有效地取代度量。

受平方根速度框架和海灵格度量公式的启发，我们引入以下相似系数:

$$K(f,g)=\sup_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}}\int_0^1 \exp\big(-\rho(f(\alpha(\tau)),g(\beta(\tau))\big)\sqrt{\alpha'(\tau)}\sqrt{\beta'(\tau)}\,d\tau.$$

与适用于取值于向量空间的函数的平方根速度框架不同，上述相似系数可用于取值于任意度量空间的函数。

时间序列可视为分段常值函数。于是，上述表达式给出时间序列的相似系数。对于给定的时间序列 f、 g，我们确定使上述积分最大化的最优参数化。由此得到用于计算该相似系数的算法。我们所描述的弹性时间扭曲算法给出两条时间序列之间的最佳匹配，并考虑拉伸惩罚。若时间序列f、 g 的长度分别为 n 和 m ，则计算复杂度

弹性时间扭曲算法的为$(n+m)nm$，内存需求为 nm。

本文结构如下。第 2 节讨论微分同胚群上海灵格度量的性质。第 3 节利用微分同胚上的度量，定义函数空间上的度量，并对拉伸施加海灵惩罚。最后，第 4 节介绍弹性时间扭曲算法。该算法基于海灵格核的相似系数，对两个时间序列进行最优匹配。

致谢。作者衷心感谢加拿大自然科学与工程研究理事会提供的 Discovery 资助。

2. Hellinger metric on Diff$([0,1])$。

考虑线段 $[0,1]$ 上的保向微分同胚群：

$$\mathrm{Diff}([0,1]) = \left\{\alpha \in C^1([0,1]) \,|\, \alpha(0)=0, \alpha(1)=1, \alpha'(t)>0 \ \forall t \in [0,1]\right\}.$$

请注意，微分同胚 $\alpha \in \mathrm{Diff}([0,1])$ 具有累积分布函数的性质，其导数 α' 可视为概率密度函数。因此，在研究这个群时，我们可以借鉴概率论中的一些概念。

对于 $\alpha,\ \beta \in \mathrm{Diff}([0,1])$，海灵格相似系数定义为

$$C(\alpha,\beta) = \int_0^1 \sqrt{\alpha'(t)}\sqrt{\beta'(t)}\,dt.$$

由于 $\int_0^1 \alpha'(t)dt = 1$，函数 $\sqrt{\alpha'(t)}$ 是希尔伯特空间$L^2([0,1])$中的单位向量。

海灵格距离有三种常见变体。首先，定义

$$\theta(\alpha,\beta) = arccos\, C(\alpha,\beta).$$

这是希尔伯特空间单位球面上$\sqrt{\alpha'}$ 与 $\sqrt{\beta'}$ 之间的夹角，它是一个距离函数，即球面上的测地距离。由柯西-施瓦茨不等式可知，$0 < C(\alpha,\ \beta) \leq 1$，且 $C(\alpha,\ \beta) = 1$ 当且仅当 $\alpha = \beta$。因此，$0 \leq \theta(\alpha,\ \beta) \leq \frac{\pi}{2}$。

关于距离函数性质的以下结论是显然的 [3]：

引理 1。设 X 为一个度量空间，其距离函数为 ρ：$X \times X \to S \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$。假设函数 F：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足 $F(a+b) \leq F(a) + F(b)$ 对所有 a、$b \in S$均成立。那么，$F \circ \rho$ 也是 X上的一个度量。

注意到正弦函数对所有 $a,\ b \in [0,\pi/2]$都满足 $\sin(a+b) \le \sin(a) + \sin(b)$。这由关于 $\sin(a+b)$ 的三角恒等式立即可得。根据上述引理,

$$S(\alpha,\beta) = \sin\theta(\alpha,\beta) = \sqrt{1-C(\alpha,\beta)^2}$$

也是距离函数，即满足三角不等式。

基于与上文相同的理由，$\frac{1}{2}\theta(\alpha,\ \beta)$ 和 $\sin^{\theta}{}_{(\alpha,\ \beta)\,2}$ 也都是距离函数。应用三角恒等式 $(1-\cos\theta)/2 = \sin^2\frac{\theta}{2}$，我们得出

$$H(\alpha,\beta) = \sqrt{1-C(\alpha,\beta)}$$

也是 $\mathrm{Diff}([0,1])$ 上的距离函数。

海灵格相似系数的一个重要性质是其在重新参数化下保持不变。

命题 2。对于 $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Diff([0,1])$

$$C(\alpha\circ\gamma,\beta\circ\gamma) = C(\alpha,\beta).$$

证明。

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \sqrt{\frac{d}{dt}\alpha(\gamma(t))}\sqrt{\frac{d}{dt}\beta(\gamma(t))}\,dt\\ =&\int_0^1 \sqrt{\alpha'(\gamma(t))}\sqrt{\beta'(\gamma(t))}\gamma'(t)\,dt\\ =&\int_0^1 \sqrt{\alpha'(s)}\sqrt{\beta'(s)}\,ds.\end{aligned}$$

□

推论 3。 $Diff([0,1])$ 上的度量 $\theta(\alpha,\beta)$ $S(\alpha,\beta)$ 和 $H(\alpha,\beta)$ 均为右不变的。

推论 4。 设 $\alpha,\beta \in Diff([0,1])$. 则

(a) $C(\alpha,\beta) = C(\alpha\circ\beta^{-1}, id)$，

(b) $C(\alpha,id) = C(\alpha^{-1}, id)$。

3. Distance on the space of functions with a Hellinger penalty for stretching

本节中，我们考虑带有拉伸海灵惩罚的函数空间上的距离。

考虑定义在区间 $[0,1]$ 上、取值于度量空间 (X,ρ) 的有界函数空间 $B([0,1],X)$。令 $\mathcal{D} = \mathrm{Diff}([0,1])$。

对于 $f, g \in B([0,1], X)$，Fr´echet 距离定义为

$$\inf_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}} \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha(\tau)), g(\beta(\tau))).$$

在 Fr´echet 距离中，时间可以自由拉伸。我们在 $B([0,1], X)$ 上定义一个新的距离函数，将拉伸的惩罚纳入海灵格距离项中。用 $D(\alpha, \beta)$ 表示上一节讨论的距离 θ，S 或 H。令

$$d(f,g) = \inf_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}} \left(D(\alpha,\beta) + \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha(\tau)), g(\beta(\tau))) \right). \tag{1}$$

命题 2 推出 d 在重新参数化下的不变性：

引理 5. 对于 $\gamma \in \mathcal{D}$，有 $d(f \circ \gamma, g \circ \gamma) = d(f, g)$。

应用推论 4(a)，我们看到，可以用一种稍微简单但对称性较弱的方式定义 $d(f, g)$：

$$d(f,g) = \inf_{\alpha\in\mathcal{D}} \left(D(\alpha, \mathrm{id}) + \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha(\tau)), g(\tau)) \right).$$

将此与斯科罗霍德度量的定义进行比较 [1]：

$$\inf_{\alpha\in\mathcal{D}} \max \left(\sup_{\tau\in[0,1]} |\alpha(\tau), \tau|, \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha(\tau)), g(\tau)) \right),$$

或其变体

$$\inf_{\alpha\in\mathcal{D}} \left(\sup_{\tau\in[0,1]} |\alpha(\tau), \tau| + \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha(\tau)), g(\tau)) \right).$$

命题 6. 公式 *(1)* 在 $B([0,1], X)$ 上定义了一个度量。

证明。显然，$d(f, g)$ 是对称的：$d(f, g) = d(g, f)$。此外，$d(f, g) = 0$ 当且仅当 $f = g$。下面证明三角不等式：

$$d(f,h) \le d(f,g) + d(g,h).$$

根据下确界的定义，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在 $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{D}$，使得

$$\begin{aligned} d(f,g) + d(g,h) &> D(\alpha_0, \mathrm{id}) + D(\mathrm{id}, \beta_0) \\ &\quad + \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha_0(\tau)), g(\tau)) + \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(g(\tau), h(\beta_0(\tau))) - \epsilon \\ &\ge D(\alpha_0, \beta_0) + \sup_{\tau\in[0,1]} \rho(f(\alpha_0(\tau)), h(\beta_0(\tau))) - \epsilon \\ &\ge d(f,h) - \epsilon. \end{aligned}$$

由于 ϵ 是任意的，我们得到所需的不等式。 □

在某些应用中，例如 DNA匹配，我们关心的是记录匹配片段彼此有多接近，而不是不匹配片段相距多远。因此，我们可能更关注计算相似系数，而非距离。

相似系数是一个函数 $C(f,g)$，其取值为 $0 \le C(f,g) \le 1$，并且当 $f = g$ 时，$C(f,g) = 1$。直观地说，相似系数是距离的递减函数。在数据聚类中，我们通常关心给定点的最近邻，而不是距离的实际值。为此可以使用相似系数。

设 $C([0,1], X)$ 是定义在 $[0,1]$ 上、取值于度量空间 X 的有界函数类，使得 $\rho(f(\tau), g(\tau))$ 只有有限个间断点。对于 $f, g \in C([0,1], X)$，我们定义相似系数

$$K(f,g) = \sup_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}} \int_0^1 \exp\big(-\rho(f(\alpha(\tau)), g(\beta(\tau))\big)\sqrt{\alpha'(\tau)}\sqrt{\beta'(\tau)}\, d\tau.$$

注意，函数 $F(x) = 1 - e^{-x}$ 满足引理 3 的条件，因此 $1 - \exp(-|x-y|)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的度量，对于相距较远的点，其值接近 1。

另一个取值介于 0 与 1 之间的度量例子是有限集之间的杰卡德距离。对于这类度量，三角不等式的价值有限。假设文本 B 与文本 A 以及文本 C有 40% 的共同句子。这表明这些文本对之间存在密切联系。然而，这并不意味着文本 A 与 C之间存在任何联系。

引理 7. *(a)* $K(f,g) = K(g,f)$，*(b)* $0 < K(f,g) \le 1$，
(c) $K(f,g) = 1$ 当且仅当 $f = g$ 几乎处处成立。

证明。 第 (a) 部分是显然的。由于 $\rho(f(\tau), g(\tau))$ 有界，例如被常数 $L > 0$ 界定，则取 $\alpha = \beta = \mathrm{id}$，可见 $K(f,g) \ge e^{-L} > 0$。另一方面，$\exp\big(-\rho(f(\alpha(\tau)), g(\beta(\tau))\big) \le 1$，因此

$$K(f,g) \le \sup_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}} \int_0^1 \sqrt{\alpha'(\tau)}\sqrt{\beta'(\tau)}\, d\tau \le 1.$$

这就证明了 (b) 部分。要使等式 $K(f,g) = 1$ 成立，我们必须有 $\alpha = \beta$且 $\rho(f(\tau), g(\tau)) = 0$，除有限个点外均如此。□

由于 $K(f,g)$ 公式中的积分在重新参数化 $(\alpha,\beta) \mapsto (\alpha\circ\gamma, \beta\circ\gamma)$ 下保持不变，因此我们可以将公式写成

$K(f,g)$ 的形式更简单，但对称性较差：

$$K(f,g) = \sup_{\alpha\in\mathcal{D}} \int_0^1 \exp\big(-\rho(f(\alpha(\tau)), g(\tau)\big)\sqrt{\alpha'(\tau)}\, d\tau.$$

更一般地，给定集合 X上的相似系数 C ，我们可以在取值于 X 的$[0,1]$ 上函数空间定义如下相似系数：

$$K(f,g) = \sup_{\alpha,\beta\in\mathcal{D}} \int_0^1 C\big(f(\alpha(\tau)), g(\beta(\tau))\big)\sqrt{\alpha'(\tau)}\sqrt{\beta'(\tau)}\, d\tau.$$

4. Elastic Time Warping Algorithm

文献 [8]介绍了一种基于编辑距离的时间规整算法。文献 [4]回顾了动态时间规整算法的各种版本。

本节介绍一种用于计算上一节所讨论的相似系数 $K(f,g)$ 的算法。假设给定两个时间序列， $\{(f_i, s_i) \mid 0 \le i < n\}$ 和$\{(g_j, t_j) \mid 0 \le j < m\}$，其中

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < 1, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < 1,$$

以及 f_i, g_j ，它们的取值属于集合 X ，并给定相似系数$C(x,y)$， $x, y \in X$。我们将这些时间序列解释为 $[0,1]$, 上的分段常值函数，其中 $g(t) = g_j$ 对于 $t_j \le t < t_{j+1}$，对于f也同样如此。

固定 α， $\beta \in \mathcal{D}$。设 τ_i， $\mu_j \in [0,1]$ 满足 $\alpha(\tau_i) = s_i$， $\beta(\mu_j) = t_j$。则点对 (α, β) 在时间序列$\{f_i\}$ 和 $\{g_j\}$上定义了一种交错模式。注意，这种交错模式在重新参数化 $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\circ\gamma, \beta\circ\gamma)$ 下保持不变。此外，具有相同交错模式的任意点位排列 $\{\tau_i\}$， $\{\mu_j\}$ ，都可以通过对 (α, β) 进行重新参数化得到。因此，我们将关注交错模式，然后选取具有特定交错模式的最优 (α, β)。

由于只需考虑 $\beta = \mathrm{id}$ 的情况，我们就这样做，因此点 $\{t_j\}$ 将固定不动，并在它们之间交错排列点$\{\tau_i\}$ 。

在动态时间规整算法中，我们通过归纳将 f_i 与 g_j 进行匹配，每一步将索引 i、索引 j 或两者同时推进 1。在我们的算法中，基本上也会执行相同的操作，但还会为这些值指定时间位置。

我们将对 $\{\tau_i\}$ 的放置施加以下自然限制。若对于某一对索引 i， j 我们有 $\tau_i = t_j$ ，那么要么

$\tau_{i+k} = t_{j+1}$ 对于某个 $k \geq 1$ 和 $t_j < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_{i+k-1} < t_{j+1}$ 成立，要么 $\tau_{i+1} = t_{j+k}$ 对于某个 $k \geq 1$ 成立。第一种情形对应于将 f_i、……、f_{i+k-1} 匹配到 g_j，第二种情形对应于将 g_j、……、g_{j+k-1} 匹配到 f_i，而 $\tau_{i+1} = t_{j+1}$ 的情形对应于在动态时间规整中同时推进两个索引。注意，$\tau_0 = t_0 = 0$，以开始归纳过程。

我们来证明关于函数 α 的最优曲线以及 $\{\tau_i\}$ 的最优位置的三个理论结果。

命题 8. 设 $[a, b] = [\tau_i, \tau_{i+1}] \cap [t_j, t_{j+1}]$。那么，最优参数化 α 在 (a, b) 上是一个线性函数。

证明。固定取值 $\alpha(a)$ $\alpha(b)$，并在满足这些边界约束且保持 $\alpha'(\tau) > 0$ 的条件下，自由改变 $\alpha(\tau)$，$\tau \in [a, b]$。注意，$C(f(\alpha(\tau)) g(\tau))$ 在 (a, b) 上取常值 $C(f_i, g_j)$，因此我们只需最大化

$$\int_a^b \sqrt{\alpha'(\tau)}\, d\tau.$$

应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\left(\int_a^b \sqrt{\alpha'(\tau)}\, d\tau\right)^2 \leq \int_a^b \alpha'(\tau)\, d\tau \int_a^b 1\, d\tau = (b-a)(\alpha(b) - \alpha(a)),$$

并且，当 $\alpha'(\tau)$ 在 (a, b) 上为常函数时，等号成立。 □

命题 9. 假设 $\tau_i = t_j$ 和 $\tau_{i+1} = t_{j+k}$ 满足 $k \geq 1$。那么，对于满足这些约束的最优参数化 α，

$$\int_{t_j}^{t_{j+k}} C\big(f(\alpha(\tau)), g(\tau)\big) \sqrt{\alpha'(\tau)}\, d\tau$$
$$= \sqrt{(s_{i+1} - s_i) \sum_{\ell=0}^{k-1} (t_{j+\ell+1} - t_{j+\ell}) C(f_i, g_{j+\ell})^2}.$$

证明. 根据命题 8，最优参数化 α 是分段线性的。令 k_ℓ 表示区间（$t_{j+\ell}, t_{j+\ell+1}$）上 α（τ）的斜率。我们希望最大化

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} (t_{j+\ell+1} - t_{j+\ell}) C(f_i, g_{j+\ell}) \sqrt{k_\ell}$$

受该约束限制

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} (t_{j+\ell+1} - t_{j+\ell}) k_\ell = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \alpha'(\tau)\, d\tau = s_{i+1} - s_i.$$

为此，考虑 $\mathbb{R}^k$ 上的一个正定标量积：

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{\ell=0}^{k-1} (t_{j+\ell+1} - t_{j+\ell})\, x_\ell\, y_\ell,$$

并对该乘积应用柯西-施瓦茨不等式：

$$\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} (t_{j+\ell+1} - t_{j+\ell}) C(f_i, g_{j+\ell}) \sqrt{k_\ell}\right)^2 \leq \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} (t_{j+\ell+1} - t_{j+\ell}) k_\ell\right) \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} (t_{j+\ell+1} - t_{j+\ell}) C(f_i, g_{j+\ell})^2\right),$$

当斜率 k_ℓ 与 C 成比例时，等号成立（f_i，$g_{j+\ell}$）[2]。命题的结论由此得证。□

命题 10. 假设 $\tau_i = t_j$ 且 $\tau_{i+k} = t_{j+1}$ 对 $k \geq 1$成立，并且 $t_j < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_{i+k-1} < t_{j+1}$则对于满足这些约束的最优参数化$\alpha$，

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} C\big(f(\alpha(\tau)), g(\tau)\big) \sqrt{\alpha'(\tau)}\, d\tau = \sqrt{(t_{j+1} - t_j) \sum_{\ell=0}^{k-1} (s_{i+\ell+1} - s_{i+\ell}) C(f_{i+\ell}, g_j)^2}.$$

点 τ_{i+1}、……、 τ_{i+k-1} 的最优位置应使子区间 $\tau_{i+\ell+1} - \tau_{i+\ell}$ 的长度与 $C(f_{i+\ell}, g_j)^2$ 成比例。

该命题的证明与命题 9 的证明类似，此处从略。

现在来介绍弹性时间扭曲算法。给定两个时间序列 $\{(f_i,\ s_i) \mid 0 \leq i < n\}$和 $\{(g_j,\ t_j) \mid 0 \leq j < m\}$，其中 $f_i,\ g_j \in X$，且 $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < 1$，$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < 1$。另给定相似系数 $C(f_i,\ g_j)$。令$s_n = t_m = 1$。我们将时间序列转换为分段常值函数$f(s)$ $g(t)$，定义在 $[0,1]$上，并希望最大化

$$\int_0^1 C(f(\alpha(\tau)), g(\tau)) \sqrt{\alpha'(\tau)}\, d\tau. \tag{2}$$

我们对所考虑的参数化$\alpha \in \mathcal{D}$ 类别施加以下限制：如果 $\alpha(t_j) = s_i$，那么要么 $\alpha(t_{j+1}) = s_{i+k}$，要么$\alpha(t_{j+k}) = s_{i+1}$，其中 $k \geq 1$。注意，$\alpha(t_0) = s_0 = 0$。

该算法将计算一些量

$$V(i,j)=\int_0^{t_j} C(f(\alpha(\tau)),g(\tau))\sqrt{\alpha'(\tau)}\,d\tau,$$

其中 α 是带有约束 $\alpha(t_j)=s_i$的最优参数化，它使该积分最大化。

对于 $k,p\geq 1$，定义如下

$$F_k(i,j)=\sqrt{(t_j-t_{j-1})\sum_{\ell=0}^{k-1}(s_{i-\ell}-s_{i-\ell-1})C(f_{i-\ell-1},g_{j-1})^2},$$

$$G_p(i,j)=\sqrt{(s_i-s_{i-1})\sum_{\ell=0}^{p-1}(t_{j-\ell}-t_{j-\ell-1})C(f_{i-1},g_{j-\ell-1})^2}.$$

注意 $F_1(i,j)=G_1(i,j)$。

根据命题 9、10，我们有如下递推关系：

$$V(i,j)=\max_{k,p}\left\{V(i-k,j-1)+F_k(i,j),\ V(i-1,j-p)+G_p(i,j)\right\},$$

其中，若 $j>1$ 则最大值在 $1\leq k<i$ 上取得，若 $j=1$则在 $k=i$ 上取得；若 $i>1$则为$2\leq p<j$，若 $i=1$则为 $p=j$。递推基例为 $V(0,0)=0$，积分(2)的最大值由 $V(n,m)$给出。

请注意，该算法也适用于平方根速度框架。

下面分析该算法的复杂度。对于固定的 $(i,\ j)$，利用 $F_{k+1}(i,\ j)$ 与 $F_k(i,\ j)$ 之间的简单关系，以及 G 的类似关系，计算所有 k 和 p 对应的 $F_k(i,\ j)$ 和 $G_p(i,\ j)$ 的复杂度为 $n+m$。

因此，弹性时间扭曲算法的复杂度为 $nm(n+m)$。该算法的内存需求为 nm。

References

[1] P. Billingsley，《概率测度的收敛》，Wiley，纽约，1968。[2] M. Bruveris，平方根速度框架中的最优重新参数化，SIAM 数学分析杂志，48.6，4335-4354，2016。[3] P. Corazza，《度量保持函数导论》，《美国数学月刊》106.4，309-323，1999。[4] D. Deriso，S. Boyd，动态时间规整的一般优化框架，《优化与工程》24.2，1411-1432，2023。[5] R. Han 等，《用于超长纳米孔测序端到端映射的精确快速连续小波动态时间规整算法》，《生物信息学》34.17，i722-i731，2018。

[6] C. Holder，M. Middlehurst，A. Bagnall，时间序列聚类弹性距离函数的综述与评估，《知识与信息系统》66.2，765-809，2024。[7] A. Krotov 等，生物信号的时间规整分析：方法与应用，《科学报告》15.1，11718，2025。[8] P.-F. Marteau，用于时间序列匹配并带有刚度调整的时间规整编辑距离，IEEE模式分析与机器智能汇刊，31.2，306-318，2008。[9] Loretta Mastroeni 等，原油价格基准的解耦与再耦合：相似性模式研究，《能源经济学》94，105036，2021。[10] H. Sakoe，S. Chiba，用于口语词识别的动态规划算法优化，IEEE声学、语音与信号处理汇刊26.1，43-49，1978。[11] A. V. Skorohod，随机过程的极限定理，概率论及其应用，1，261-290，1956。[12] A. Srivastava 等，欧几里得空间中弹性曲线的形状分析，IEEE模式分析与机器智能汇刊，33.7，1415-1428，2010。[13] A. Srivastava，E. P. Klassen，《函数与形状数据分析》，Springer统计学丛书，第1卷，Springer，纽约，2016。[14] A. Switonski，H. Josinski，K. Wojciechowski，动态时间规整在动作捕捉数据分类与选择中的应用，多维系统与信号处理，30.3，1437-1468，2019。

School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ot-tawa, Canada电子邮件地址：billig@math.carleton.ca