arXiv:2603.08822v1 [math.CO] 9 Mar 2026

# 小图的循环色指数

Ján Mazák，Filip Zrubák

jan.mazak@fmph.uniba.sk

夸美纽斯大学，Mlynská dolina，842 48 布拉迪斯拉发

**摘要**

我们系统地确定了最大度为 4、5、6 的小图和多重图的循环色指数（以及给定较小阶数时这类图的数量）。我们构造了若干循环色指数属于集合 $\{\Delta+1/2, \Delta+2/3, \Delta+3/4, \Delta+1\}$ 的此类图的无限族。我们的结果反驳了“上间隙猜想”的边连通度变体（该猜想讨论是否存在循环色指数略低于 $\Delta+1$ 的图）。

## 1 引言

循环色指数 $\chi'_c$ 已被研究二十多年 [10]，，但仍有许多问题悬而未决。对于最大度为 $\Delta \leq 2$的图，情况已完全明了；而对于 $\Delta = 3$，容易解决的问题也都已解决。本文考察满足 $\Delta \in \{4,5,6\}$的有限图和多重图。

图 $G$ 的循环 $r$-着色 $c$，是指给 $G$ 的每个顶点分配一个来自 $[0,r)$的实数（即一种颜色），使得任意两个相邻顶点 $u, v$ 均满足 $1 \leq |c(u)-c(v)| \leq r-1$。另一种等价的理解是：将区间 $[0,r)$绕在周长为 $r$ 的颜色圆上，并要求相邻顶点的颜色沿圆周两个方向的距离都至少为一。使图 $G$ 可循环 $r$-着色的所有数值 $r$ 的下确界，称为其圆色数 $\chi_c(G)$；对于有限图，$\chi_c$ 是有理数且可以取到 [25]。

图的循环 $r$-边染色是其线图的循环 $r$-rolouring；图 $G$ 的循环色指数 $\chi'_c(G)$ 是使得 $G$可以进行循环 $r$-边着色的最小 $r$。由于循环着色是正常整数着色的直接推广，在后续讨论中我们通常省略“循环”一词。循环边着色的概念自然可以推广到多重图。

主要的未解问题是 $\chi'_c$ 的可能取值集合的结构。已知，对于任意图 $G$，[26]$\chi'(G) = \lfloor \chi'_c(G) \rfloor$。若 $G$ 是简单图，则 $\chi'_c(G) \in [\Delta, \Delta+1]$。该区间的下端已完全覆盖：

- 对任意有理数 $r \in [3, 3+1/3]$ [16]，都存在一个满足 $\chi'_c = r$ 的 3-正则图。
- 对于任意奇数 $\Delta \geq 5$，都存在一个 $\Delta$-正则图 $G$，满足 $\chi'_c = r$，其中 $r \in [\Delta, \Delta+1/4]$为任意有理数。如果允许 $G$ 包含平行边，则该区间可扩展至 $[\Delta, \Delta+1/3]$。[14]
- 对于任意偶数 $\Delta \geq 4$，都存在一个 $\Delta$-正则图 $G$，其满足 $\chi'_c = r$，且适用于任意有理数 $r \in [\Delta, \Delta+1/6]$。如果 $G$ 允许包含平行边，则该区间可扩展至 $[\Delta, \Delta+1/3]$。[15]

除了这些一般性的构造外，还有一些更具体的构造 [5, 16]，涵盖略低于或高于 $\Delta+1/3$ 的值。对于 $\Delta=3$ 而言，区间 $[\Delta+1/3,\Delta+1/2]$ 似乎尤其棘手：区间内有无限多个 $\chi'_c$ 的值，但很可能“多数”值都无法取到。

在区间靠近 $\Delta+1$ 的上端（这是本文的研究重点），似乎不存在任何图。

- 不存在满足 $\chi'_c(G)\in(3-1/2,3)$ [26] 的图 $G$。
- 不存在满足 $\chi'_c(G)\in(4-1/3,4)$ [1] 的图 $G$。
- “上间隙猜想”（例如，[12], 中的问题1以及 [26]中的猜想4.3）：给定一个整数 $k\geq 4$，不存在满足 $\chi'_c(G)\in[k+1-1/k,k+1]$ 的图。

虽然我们主要关注上间隙猜想，但我们的讨论大多也涉及区间 $[\Delta,\Delta+1]$ 的中间部分，尤其是那些揭示问题为何困难的部分。

与次三次图相比，对于任何 $\Delta>3$，人们都预期情况会更加复杂，因为循环边着色在顶点邻域中的表现如下。设想一个图 $G$，它具有 $\Delta=3$，并且存在一个针对 $r$ 的循环 $r$-边着色，其参数略小于 4。任取 $G$ 的一个顶点 $v$，并假设它的两条关联边已经着色。这两种颜色将长度为 $r$ 的颜色圆分成两段圆弧。较长的圆弧很可能至少有 2 的长度，因为 $r$ 接近 4，这足以为 $v$ 处的第三条边安排一种颜色。只有当给定的两种颜色几乎恰好相对时，才会无法为第三条边着色（仅有一个简单图和另一个多重图会迫使这种情况出现 [1]）。然而，对于更大的 $\Delta$，即使在度数远小于 $\Delta$ 的顶点处，如果已有 $d-1$ 条边着色且它们的颜色彼此分散（圆周距离略小于 2），要为剩下的边着色也会很困难。因此，人们不会预期次三次图中会有多个度为 2 的顶点且 $\chi'_c$ 取值有意义；然而，对于$\Delta>3$，小度数顶点并不少见（例如，度为 3 的顶点会出现在具有 $\Delta=5$ 和 $\chi'_c=5+3/4$ 的图中）。这是我们将搜索范围扩展到正则图以外的原因之一。

有一大类图的 $\chi'_c$ 由一个小子图所决定，因此并没有太大的研究价值。研究应着重于那些-临界图：这类图的任意真子图 $G'$ 都满足 $\chi'_c(G')<\chi'_c(G)$。例如，我们已经完全刻画了满足 $\Delta(G)\leq 3$ 且 $\chi'_c(G)=4$ 的 $\chi'_c$- 临界多重图 $G$：这样的图有两个，它们分别由在 $K_4$ 中某条边上进行细分，或由一个有 2 个顶点和 3 条平行边的多重图 [1]经细分得到。

任何试图证明上间隙猜想的变体（即关于图在某个 $r<\Delta+1$ 下可循环地 $r$可边着色的命题）的工作，都必须考虑满足 $\chi'_c=\Delta+1$的例外图。这些例外图对于 $\Delta>3$ 而言似乎相当多，而且规模可能相当大。我们在第 4 节展示了其中一些无限族，但这些族中的图并非 $\chi'_c$-临界，因此仍需继续寻找。

本文中使用的与循环色指数相关的方法和概念都是标准的；感兴趣的读者可参见例如 [25, 26]。循环$r$-边染色中两个颜色 $x, y$ 的圆周距离 定义为 $d_r(x,y)=\min\{|x-y|,r-|x-y|\}$。

编码图和多重图的一种常见高效方法是使用 graph6 和 sparse6 格式；详情见 [19]。本文使用这些格式来描述特定的图，因为如果读者想借助计算机工具分析这些图，这些格式会非常有用。

## 2 计算方法

我们首先讨论确定循环色指数的理论复杂度。设 $r\geq 3$ 为一个有理数。令 CCHI$_r^{\leq}$表示如下问题：对于给定的图 $G$，判断 $\chi'_c(G)\leq r$ 是否成立；令 CCHI$_r^{=}$表示如下问题：对于给定的图 $G$，判断 $\chi'_c(G)=r$ 是否成立。

由于判定整数 $k\geq 3$ 是否满足 $\chi'\leq k$，等价于判定 $\chi'_c\leq k$ 是否成立，因此这两个问题即使对于正则图 [13] 也都是 NP 困难的（而多重图并不会让问题变得更容易）。

已知输入图的 $\chi'$ 并不会降低其复杂度 [22]: 对于给定的 2类图，确定 $\chi'_c$ 是 NP 困难的；对于给定的图，判定 $\chi'_c = \chi'$ 是否成立也是 NP 困难的。

描述图 $G$ 的 $p/q$-边染色的证书，其规模关于 $|E(G)|$ 是多项式级的，因此 CCHI$_r^{\leqq}$ 属于 NP，因而是 NP完全问题。然而，要知道 $\chi'_c(G) = r$，我们还需要证明：对于 $p/q < r$， $G$ 不存在 $p/q$-边染色。候选分数 $p/q$ 的集合是有限的 [10], ，所以本质上我们只需证明某一个分数 $p/q$不存在。这是一个 coNP完全问题。这似乎表明如下结论。

**猜想1**。问题 CCHI$_r^{=}$ 是 DP完全问题。

请注意，这种情况与 SAT-UNSAT 不同，后者的 DP 完全性很容易看出。在我们的情形中，NP 和 coNP 两个部分本质上相互关联，因为我们针对的是特定图的一对特定分数，而不是任意一对 CCHI$_r^{\leqq}$ 实例。还有其他已知的判定方法$\chi'_c$ （其中一些在 [9] 中有所探讨）；例如，可以检查所有 $r$-边染色是否含有紧圈。这种方法有时在实践中可能更快（用于 $41/6$-边染色的 SAT 实例远大于用于 7-边染色的实例），但它似乎无法消除 coNP 困难性：我们要证明存在一种 7-边染色，但不存在不含紧圈的 7-边染色。

在实际操作中，确定 $\chi'_c$ 与 $\chi'$的难度有着巨大差异。显而易见，罪魁祸首是颜色数：对于整数边染色，即使是多重图，颜色数也至多为 $2\Delta$ ；而对于圆边着色，颜色数最多可达 $|E(G)|$ [10]。我们发现，最快的通用方法是将是否存在$p/q$-边染色的问题表述为一个 SAT 实例，然后使用 Kissat 等先进的 SAT 求解器 [3, 4]来求解，并对所有可能的分数 $p/q$ 重复这一过程（分数集合取决于输入图的大小；先选择合适的分数可以加快这一过程，更多详情见 [2]）。布尔变量对应于（边，颜色）对；由于颜色数最多可能达到边数，变量数会随着边数呈二次增长。我们在各种组合问题上的经验表明，这种二次增长会使当前 SAT 求解器很快在实际应用中难以处理这些问题； $\chi'_c$也不例外。分子较大的分数 $p$ 无法避免，因为即使一个图存在分子较小的 $\chi'_c$ ，仍需证明其下界，也就是说，排除所有更小的分数，其中也包括分子较大的分数。

使用 nauty 和 genreg[19, 21]生成了特定阶数下的完整图集和多重图集。在某些情况下，像在线整数数列百科全书这样的来源中并未现成提供这类（多重）图的数量，因此可将其视为“新”的。

为了筛选不可着色的（Vizing 2 类）图和多重图，我们使用了 CVD 启发式 [7],直接回溯法以及 SAT 求解器（与后两种方法不同，该启发式无法证明图不可着色，但通常能很快为 1 类图找到 $\Delta$-边染色）。我们根据特定工具在特定图族上的表现，针对不同情况设计了相应的方法。在某些情况下，例如具有 $\Delta = 4$ 个顶点的多重图，最高效的方法是先筛除包含能强制 $\chi'_c = \Delta + 1$ 的较小子图的不可着色图（使用 VF2 算法 [6]查找子图同构／单态似乎比确定 $\chi'_c$快得多）。

借助现有的计算机和上述计算方法，我们可以确定 $\chi'_c$ 具有 $\Delta = 3$ 、约含 50 条边的图 $\Delta = 6$（在接近这一界限时，单个 CPU 核心处理每个图开始需要几分钟，而当边数达到 60 条时，可能需要数天）。然而，对于 $\Delta = 7$ ，约含 30 条边的图通常就已经需要数小时，而对于，有些仅含 27 条边的图甚至需要数周。

另一个困难源于对于 $\Delta \geq 5$而言，给定阶的图数量呈爆炸式增长。3-正则图的数量每增加 2 个顶点大约增长 10 倍，而对于 $\Delta = 7$ [20]，每增加 1 个顶点则更接近增长 100 倍，因此很快就会遇到困难。

实际上，目前还无法通过实验结果验证关于 $\Delta \geq 7$ 的上间隙猜想。对于 $\Delta = 7$，猜想间隙的下界分母为 7，而一个具有 $\chi'_c(G) = p/q$ 的图

| 阶 | 多重图 | 具有 $\chi' > \Delta$ | $\chi'$ 的值 $_c$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 3 | **5/1, 6/1** |
| 4 | 25 | 4 | 5/1 |
| 5 | 124 | 37 | **9/2,** 5/1 |
| 6 | 704 | 104 | 9/2, 5/1 |
| 7 | 4283 | 784 | **13/3,** 9/2, **14/3,** 5/1 |
| 8 | 29773 | 3351 | 13/3, 9/2, 5/1 |
| 9 | 227016 | 27957 | **17/4,** 13/3, 9/2, 14/3, 5/1 |
| 10 | 1916000 | 156189 | 17/4, 13/3, 9/2, 14/3, 5/1 |
| 11 | 17633748 | 1512908 | **21/5,** 17/4, 13/3, **22/5,** 9/2, 14/3, **19/4,** 5/1 |
| 12 | 176094228 | 10354895 | 21/5, 17/4, 13/3, 22/5, 9/2, 14/3, 19/4, 5/1 |
| 13 | 1893482910 | 116572317 | 21/5, 17/4, 13/3, 22/5, 9/2, **23/5,** 14/3, 19/4, 5/1 |

表1：具有 $\Delta = 4$ 的多重图。

必须有一个大小为 $q$ 的匹配，即对于 $q = 7$，至少有 14 个顶点。然而，对于这样“大的”图，我们几乎无法确定是否存在具有 $q = 2$ 的 $p/q$-边染色。

## 3 $\chi'_c$ 的取值概览

如果 $G$ 有一个环，它就不具有任何循环边着色。对于多重图，维津定理只能保证 $\chi' \leq \Delta + \mu$，其中 $\mu$ 是边 [24], 的最大重数，而香农界 [23] 给出 $\chi' \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$（某些图的取值恰好达到该界）。我们尚未发现任何具有 $\chi'_c > \Delta + 1$ 的多重图，能够为 $\chi'_c$ 提供一些有趣的取值。

在表1、表2、表3、表4、表5、表6、表7、表8、表9中，我们只列出了至少存在一个感兴趣的2类图的行（这对应于第三列中的非零项）。在图的数量较多或计算 $\chi'_c$ 耗时较长的情况下，我们没有完整确定感兴趣区间下半部分中图的 $\chi'_c$（例如，表2中阶为15时的“$\leq 9/2$”）。某个值在表中首次出现时以粗体标出。

$|V(G)|/2$ 的上界确保分母较大的分数不会出现在表格的前几行中。数据表明还存在若干经验规律：

- 某个特定的分母值不会在平凡上界允许它出现时立即出现，而是要再增加几个顶点后才会出现。
- 对于固定的分母，分子较大的分数往往比那些分子较小的分数在更大的阶数下出现。
- 某个特定分数首先出现在多重图中，之后才出现在简单图中。

对于 $\Delta = 4$，分母为 3、4、5 时最能体现这些规律。

## 4 χ′c 值较大的图

定理2、定理3、定理6的证明中构造的图具有 $\chi'_c = \Delta + 1$，因此在证明上间隙猜想的任何变体时，都是至关重要的障碍。还有许多其他这样的图，对于任意 $\Delta > 3$，都看不出明显的规律或刻画。由于它们是例外图，要么必须从证明中得出它们的刻画，要么所证明的具体命题必须预先将它们排除在外，这或许可以通过某种更强但简单的假设来实现，而该假设并不旨在刻画所有例外图。排除这类图的一种建议是假设具有 2-边连通性（见 [12] 中问题1之后的讨论）；我们的发现

| 阶 | 图 | 含有 $\chi' > \Delta$ | $\chi'$ 的值 $_c$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 11 | 2 | **9/2, 5/1** |
| 6 | 49 | 2 | 5/1 |
| 7 | 289 | 15 | 9/2, 5/1 |
| 8 | 1735 | 27 | 9/2, 5/1 |
| 9 | 11676 | 242 | **13/3**, 9/2, **14/3**, 5/1 |
| 10 | 87669 | 609 | 9/2, 5/1 |
| 11 | 733811 | 7556 | 13/3, 9/2, 14/3, 5/1 |
| 12 | 6781207 | 22745 | 13/3, 9/2, 5/1 |
| 13 | 68462296 | 421416 | **17/4**, 13/3, **22/5**, 9/2, 14/3, 5/1 |
| 14 | 748330892 | 1344629 | 17/4, 13/3, 22/5, 9/2, 14/3, 5/1 |
| 15 | 8787966433 | 35790315 | $\leq$ 9/2; 14/3, 5/1 |

表2：具有 $\Delta = 4$ 的简单图。

| 阶 | 图 | 具有 $\chi' > \Delta$ | $\chi'$的取值 $_c$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 1 | **5/1** |
| 7 | 2 | 2 | 5/1 |
| 9 | 16 | 16 | **9/2, 14/3,** 5/1 |
| 10 | 59 | 1 | 5/1 |
| 11 | 265 | 265 | 9/2, 14/3, 5/1 |
| 12 | 1544 | 9 | 5/1 |
| 13 | 10778 | 10778 | **13/3**, 9/2, 14/3, 5/1 |
| 14 | 88168 | 197 | 9/2, 14/3, 5/1 |
| 15 | 805491 | 805491 | 13/3, **22/5,** 9/2, 14/3, 5/1 |
| 16 | 8037418 | 6826 | 9/2, 14/3, 5/1 |
| 17 | 86221634 | 86221634 | $\leq$ 9/2; 14/3, 5/1 |
| 18 | 985870522 | 401169 | 9/2, 14/3, 5/1 |

表3：简单4正则图。

| 阶 | 多重图 | 当 $\chi' > \Delta$ | $\chi'$ 的值 $_c$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 3 | **6/1, 7/1** |
| 4 | 56 | 12 | 6/1, 7/1 |
| 5 | 456 | 137 | **11/2**, 6/1, 7/1 |
| 6 | 5075 | 789 | 11/2, 6/1, 7/1 |
| 7 | 61840 | 10278 | **16/3,** 11/2, **17/3,** 6/1, 7/1 |
| 8 | 907389 | 84323 | 16/3, 11/2, 17/3, 6/1, 7/1 |
| 9 | 15346680 | 1507430 | **21/4,** 16/3, 11/2, 17/3, 6/1, 7/1 |
| 10 | 299439341 | 16082522 | $\leq$ 11/2; 17/3, **23/4,** 6/1, 7/1 |
| 11 | 6646221977 | 397945318 | $\leq$ 11/2; 17/3, 23/4, 6/1, 7/1 |

表 4：具有 $\Delta = 5$ 的多重图。

| **阶** | **图** | **含有 $\chi' > \Delta$** | **$\chi'$ 的取值 $_c$** |
|---|---|---|---|
| 7 | 344 | 7 | **16/3, 11/2, 6/1** |
| 8 | 4457 | 21 | 11/2, 6/1 |
| 9 | 63493 | 372 | 16/3, 11/2, 6/1 |
| 10 | 1067440 | 1586 | 11/2, 6/1 |
| 11 | 20764005 | 65458 | 16/3, 11/2, **17/3**, 6/1 |
| 12 | 464341835 | 337393 | $\leq$ 11/2; 17/3, 6/1 |
| 13 | 11783221545 | 54152854 | $\leq$ 11/2; 17/3, 6/1 |

表5：具有 $\Delta = 5$ 的简单图。

| **阶** | **图** | **具有 $\chi' > \Delta$ 的** | **$\chi'$ 的取值 $_c$** |
|---|---|---|---|
| 14 | 3459383 | 26 | **11/2, 6/1** |
| 16 | 2585136675 | 2885 | 11/2, **17/3, 23/4**, 6/1 |

表 6：简单五正则图。

| **阶** | **多重图** | **具有 $\chi' > \Delta$** | **$\chi'$ 的值 $_c$** |
|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 6 | **7/1, 8/1, 9/1** |
| 4 | 110 | 27 | 7/1, 8/1 |
| 5 | 1524 | 492 | **13/2**, 7/1, **15/2**, 8/1 |
| 6 | 28279 | 4392 | 13/2, 7/1, 8/1 |
| 7 | 649852 | 103436 | **19/3**, 13/2, **20/3**, 7/1, 8/1 |
| 8 | 18596557 | 1419968 | 19/3, 13/2, 20/3, 7/1, 8/1 |

表7：具有 $\Delta = 6$的多重图。

| **阶** | **图** | **具有 $\chi' > \Delta$** | **$\chi'$ 的值 $_c$** |
|---|---|---|---|
| 7 | 853 | 4 | **13/2, 7/1** |
| 8 | 10073 | 12 | 13/2, 7/1 |
| 9 | 185323 | 235 | $\leq$ 13/2; **20/3**, 7/1 |
| 10 | 4992383 | 1380 | $\leq$ 13/2; 20/3, 7/1 |
| 11 | 160175079 | 137444 | $\leq$ 13/2; 20/3, **27/4**, 7/1 |

表8：具有 $\Delta = 6$的简单图。

| **阶** | **图** | **取 $\chi' > \Delta$** | **$\chi'$ 的值 $_c$** |
|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 1 | **7/1** |
| 9 | 4 | 4 | 7/1 |
| 11 | 266 | 266 | 计算耗时过长 |
| 13 | 367860 | 367860 | 计算耗时过长 |
| 14 | 21609300 | 7 | 7/1 |

表 9：简单6正则图。

证明它并不足够。同一篇论文中的另一项建议是边连通度至少为Δ。这也不够，至少对 $\Delta = 4$ 而言如此：对于 $n = 2$ （这仅仅是 $K_5$）的循环图 $C_{2n+1}$(1，2) 和 $n = 3$，它们具有 $\chi'_c = 5$ [27]，但它们是 4-连通的。

看来，具有 $\chi'_c = 5$ 的 4-正则图似乎无穷无尽：即使在 17 个和 18 个顶点的情况下，我们也遇到了这样的图，而且它们是 $\chi'_c$-临界的，也就是说，它们的 $\chi'_c$ 并非由某个更小的子图所强制决定。较大的图有一个割点，不过也有一个有 9 个顶点的 4-连通图（graph6编码 HEhbtjK）。对于 $\Delta \in \{5, 6\}$，情况似乎也类似，但我们只成功分析了非常小的图。

据我们所知，具有 $\chi'_c = \Delta + 1$ 的简单非正则图，只在最大度 $\Delta$ 的某些较小取值下才有已知例子（我们希望它们是非正则的，这样才能在构造更大的图族时使用这些图，这些图族的连通度可能很大）。我们大胆提出一个相关猜想（见 [27, 猜想 2]）。

**猜想 2.** 对于每个偶整数 $d > 4$，从 $K_{d+1}$ 中删去一条边后得到的图 $G$ 满足 $\chi'_c(G) = d + 1$。

我们已通过计算验证了此猜想对 $d \in \{6, 8, 10, 12\}$ 成立。对于 $d = 4$，稍作修改后猜想即可成立：从 $K_5$ 中删去一条边后，$\chi'_c$ 降至 $9/2$，此时需要在一个度为 3 的顶点上附加一个悬挂顶点，以保持 $\chi'_c = 5$。注意，对于偶数 $d$，已知 $\chi'_c(K_{d+1}) = d + 1$，因为 $\chi'_c(G) \geq |E(G)|/\alpha'(G)$ [11]。目前确定 $\chi'_c$ 的方法不太适用于任意顶点度，因为下界很难建立，因此这类猜想可能比乍看之下更难处理。例如，下界$\chi'_c(K_{d+1}) \geq d + 1$ 只是基于边计数的一般界的直接推论，完全没有考虑特定图的结构。试图将下界提高到简单计数所能给出的范围之上，往往会受到 $\chi'_c$ 值较小的图的阻碍，因为这些图限制了一般下界所能达到的程度 [17]。

由于带有 $\chi'_c > \Delta + 1/2$ 的图似乎很少见，因此它们的无限类颇值得关注，尤其是在连通度较高的情况下。对于带有 $\Delta = 3$ 的图，目前已知的这类图只有一个。在后续各节中，我们将基于上述穷举计算机搜索发现的特定小例子的推广，给出一些这类图的构造。不幸的是，这些构造方法非常简单，只能生成非 $\chi'_c$-临界图。我们先介绍最大度较高的情形，因为不知为何，$\Delta = 4$ 的情况更为复杂（这可能只是因为当时能够分析更多这类图）。下面的引理有助于简化后文中的若干证明。

**引理 1.** 假设存在一个最大度为 $\Delta$、$\chi'_c(H) = \Delta + 1$ 的连通图 $H$，该图恰有两个度为 1 的顶点，且除了与度为 1 的顶点关联的桥外，不含其他桥。那么存在无穷多个 $\Delta$-正则 2-边连通图 $G$，满足 $\chi'_c(G) = \Delta + 1$。此外，若 $H$ 没有与度为 1 的顶点不相邻的割点，则 $G$ 是 2-连通的。

证明。取 $k \geq 3$ 个 $H$ 的副本，将第 $i$ 个副本的悬挂顶点标记为 $u_i$ 和 $v_i$，然后将 $v_i$ 与 $u_{i+1}$ 识别，并对每个 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$（指标模 $k$）消去由此产生的度为 2 的顶点，从而得到一个 2-边连通图 $G'$。如果 $G'$ 是正则的，则取 $G = G'$。否则，取 $G_1$、$G_2$ 两个 $G'$ 的副本，并对 $G_1$ 中每个度为 $d < \Delta$ 的顶点 $u$ 重复以下步骤：在 $G_2$ 中存在一个与 $u$ 对应且度相同的顶点，因此用 $\Delta - d$ 条平行边将它们连接起来。新增的平行边均不是桥，因为 $u$ 必定位于 $H$ 的某个副本中，而 $H$ 的其他副本中存在与 $u$ 对应的顶点，所以在所构造的图中，将 $G_1$ 与 $G_2$ 分隔开的任意边割至少含有 $k \geq 3$ 条边。最后，将每条与 $K_{\Delta+1}$ 相关的平行边替换为一条被切开成一对悬挂边的边。所得图 $G$ 是简单的、$\Delta$-正则的 2-边连通图，并且包含 $H$ 作为子图，因此 $\chi'_c(G) \geq \Delta + 1$。维津定理保证 $\chi'_c(G) \leq \Delta + 1$。我们的构造不会产生任何新的割点，而 $H$ 中与度为 1 的顶点相邻的割点会在 $G$ 中成为圈的一部分，因此 $G$ 中不存在割点。

□

显然，如果我们关心的是尽量减少新增顶点或边的数量，那么本证明中使用的“度正则化”技术很少是高效的。类似的“正则化”方法对于具有 $\chi'_c(H) < \Delta + 1$ 的小型 $H$ 也很少奏效，因为添加到 $H$ 顶点上的边往往会增大 $\chi'_c$。换言之，即使我们找到一个图 $H$，它具有某个有趣的 $\chi'_c$ 值，并且含有大量度低于 $\Delta$ 的顶点，我们也未必能将其推广为一个无限的正则图类：我们不能切断 $H$ 的边，因为这会降低 $\chi'_c$；也不能向 $H$ 连接新边，因为这会增加 $\chi'_c$。对于只在有限个图的族中取得、但究竟取哪些值的 $\chi'_c$ 这一问题，本身就很令人感兴趣；对于 $\chi'_c > 3$ 而言，这仍是一个悬而未决的问题（一个很可能的候选值是 $11/3$，它是彼得森图的 $\chi'_c$）。

## 5 个具有较大 $\chi'_c$ 值的族（$\Delta = 6$）

**定理 1.** 存在无穷多个图 $G$，满足 $\Delta(G) = 6$，且 $\chi'_c(G) = 6 + 2/3$。

证明。 在 10 个顶点的图中，我们通过搜索发现了一个图 $H$，它有 $\chi'_c = 20/3$、一个度为 1 的顶点、一个度为 5 的顶点，其余顶点的度均为 6。它的 graph6 编码是 ICrUux}vO。对于任意 $k \geq 3$，可以取一个长度为 $k$ 的圈，添加 $k$ 个 $H$ 的副本，并将每个副本中度为 1 的顶点与圈上的一个顶点识别为同一顶点（不同副本对应不同的圈上顶点）。所得图 $G_k$ 满足 $\chi'_c = 20/3$。

□

若能找到连通度更高的例子就好了，但目前我们还没有可用作构造起点的基图：尽管在发现的满足 $\chi'_c = 20/3$ 的图中有度为 5 的顶点，我们却无法给它们添加边，因为这样一来它们就不再是 $20/3$-可边着色的。然而，前一个证明中的图$H$ 可用于构造满足 $\chi'_c = 7$ 的图。若在 $H$ 中唯一一个度为 5 的顶点上接一个悬挂顶点，就得到一个图 $H'$，它满足 $\chi'_c(H') = 7$（经计算机验证）。对 $H'$ 应用引理 1，可得以下定理。

**定理 2.** 存在无穷多个 2-连通 6-正则图 $G$，其 $\chi'_c(G) = 7$ .

## Δ = 5 时 χ′c 取较大值的 6 个族

**定理3.** 存在无穷多个 2-连通 5-正则图 $G$，其 $\chi'_c(G) = 6$。

证明。 取图 $H$，其 graph6 编码为 HCRUnbU，具有 $\chi'_c(H) = 6$（经计算机验证）、一个度为 4 的顶点、两个度为 1 的顶点，并且是 2-边连通的，除度为 1 的顶点的邻点外没有任何割点。应用引理 1。

□

我们找到了 382 个具有 $\chi'_c = 23/4$ 的多重图（有 10 或 11 个顶点）。其中一些图的顶点连通度为 3。对于 10 个顶点的 68 个图，我们只成功将其中一个推广为无限类。

**定理4.** 存在无穷多个多重图 $G$，其 $\chi'_c(G) = 5 + 3/4$、$\Delta(G) = 5$，且边连通度为 1。

证明。 存在一个 $\chi'_c$-临界多重图 $H$，其有 $\chi'_c(H) = 23/4$，这是我们在上述穷举搜索中得到的。它的 sparse6 编码为 :Ig?COaaGS?aEQ?QDL?PAe，并且有一个度为 1 的顶点。若取一个长度为 $2k$、$k \geq 2$ 的一些 $C$ 圈，我们可以取 $2k$ 个 $H$ 的副本，并将 $C$ 的每个顶点分别与恰好一个 $H$副本中度为 1 的顶点识别。由于这些 $H$副本的着色可以相同，并且可以适当平移，使与 $C$ 的一个顶点关联的边为 0，因此我们只需要用颜色 1 和 2 给 $C$ 中的边着色（因为它是偶数）。因此，所得图具有 $\chi'_c = 23/4$。

□

**定理5.** 存在无穷多个二连通图 $G$，满足 $\Delta(G) = 5$ 且 $\chi'_c(G) = 5 + 2/3$。

证明。 取图 $H$，其 graph6编码为 K?BcqyYfStG?，且有 $\chi'_c(H) = 17/3$ （经计算机验证）。它有两个度为 1 的顶点 $u$ 和 $v$，并且除 $u$和 $v$的邻点外，没有割点。对于某个偶数 $k \geq 2$，我们应用一种类似于引理 1 证明中所用方法的循环构造，得到图 $G$。显然， $G$ 是 2-连通的，且 $\chi'_c(G) \geq 17/3$。由于 $H$ 的副本数量为偶数，我们可以将相邻的副本两两配对。对于每一对这样的副本 $H_1$、 $H_2$，我们可以对 $H_1$使用任意17/3-边染色，并将其“镜像”应用于 $H_2$，从而得到一种着色，使得分隔 $H_1 \cup H_2$ 与 $G$ 其余部分的两条边颜色相同。因此，可以将各个副本对的着色拼接起来，并且 $G$ 是 17/3-可边着色的。

□

我们不清楚如何构造具有 $\chi'_c = 17/3$ 的 5-正则（多重）图。所有具有 $\chi'_c = 17/3$ 的小图和多重图中，都存在度小于 5 的顶点，但通常即使只给它们添加一条边，也会使 $\chi'_c$ 增至 6。

## 7 当 $\Delta = 4$ 时， $\chi'_c$ 的较大值对应的图族

**定理6.** 存在无穷多个 2-连通 4-正则图 $G$，满足 $\chi'_c（G）= 5$。

证明。 设 $H$ 是从 $K_5$ 中删除一条边后得到的图。 [27, 中的定理 3] 已证明，由 $H$ 添加一个悬挂顶点（该顶点连接到一个度为 3 的顶点）得到的 $H'$ 满足 $\chi'_c = 5$。将引理 1 应用于 $H'$。

□

**定理7.** 存在无穷多个多重图 $G$，满足 $\chi'_c（G） = 4 + 3/4$、 $\Delta（G） = 4$，其点连通度为 1，边连通度为 2。

证明。 有一个多重图 $H$，其具有 $\chi'_c（H） = 19/4$ （sparse6 编码 :LiAGWAJ?XApEOsPcL?XAv）；我们通过给穷举搜索找到的一个图添加两个悬挂顶点得到它，并用计算机验证了 $\chi'_c$。

我们可以取任意数量 $k \geq 2$ 个 $H$ 的副本，对每个 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$，将第 $i$ 个副本中度为 1 的两个顶点分别记为 $u_i$ 和 $v_i$，将这些副本按圆形排列，并添加一条边$e_i = v_i u_{i+1}$ （指标模 $k$）。所得图 $G_k$ 有 $\chi'_c \geq 19/4$ （这可由任意一个 $H$ 的副本得到），显然是 2-边连通的。它还有一个 $19/4$-边染色。事实上，$H$ 的所有副本都可进行 $19/4$-边着色，将它们的着色组合起来便得到一个部分着色 $\varphi$。对每个 $i$，着色 $\varphi$ 可以扩展到 $e_i$：在长度为 $19/4$ 的颜色圆上，与 $e_i$ 相 incident 的两条边所用颜色之间较长弧的长度至少为 $19/8 > 2$，因此存在一个足够长的区间，我们可以从中为 $e_i$ 选取一种颜色。

□

我们尚未发现任何具有 $\chi'_c = 4 + 3/4$ 的简单图。

我们找到了 40 个具有 $G$ $\chi'_c(G) = 14/3 = 4 + 2/3$ 的简单图，但它们全都是 4-正则图，因此难以运用本文其他部分采用的技术将其推广为无限类。其中大多数（但并非全部）都有一个割点。如果我们在割点处分割这些图（在每个部分中都保留一个割点副本），那么 $\chi'_c$ 的部分至多为 $9/2$。更多详情见 [27], ；但总而言之，我们并不充分理解这些图为何具有 $\chi'_c = 14/3$ （以及为何在所搜索的图中只有这些图具有此性质）。

**定理 8.** 存在无穷多个具有 $G$ $\chi'_c(G) = 4 + 2/3$ 的 2-连通 4-正则多重图。

证明。 我们的搜索发现了一个多重图 $H$，其 sparse6 编码为 :Hg?COoAI?QDeOhn，满足 $\chi'_c(G) = 14/3$，且 $G$ 有两个度为 1 的顶点和 7 个度为 4 的顶点。我们采用与偶数 $k$的定理5证明中所用方法类似的循环构造，得到一个图 $G$。通过非常相似的论证可知， $G$ 是 2-连通的、4-正则的，并且满足 $\chi'_c(G) = 14/3$。 □

我们发现了两个 4-正则多重图，其 $\chi'_c = 23/5$（阶分别为 13 和 14；sparse6 编码分别为 : Lk??G‘CIGPb_O‘IDIUOqqEX^ 和 :Mk??G‘CIGPb_Q‘QdgOiXBLGYU^）。这是已知的首个大于 $\Delta + 1/2$ 且不具有 $\Delta + 1 - 1/t$形式的 $\chi'_c$值。

**定理 9.** 存在无穷多个4-连通4-正则图 $G$，使得 $\chi'_c(G) = 9/2$。

用以证实定理 9 的无穷图族由满足 $n \geq 6$的循环图 $C_{2n+1}(1,2)$构成。在定义若干有用术语之后，我们通过一系列引理分别证明这些循环图的 $\chi'_c$ 的上界与下界。

为简便起见，令 $G_{2n+1} = C_{2n+1}(1, 2)$； $G_{2n+1}$ 的顶点集为 $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2n}\}$，边集为

$$E = \{\, v_i v_{i+1},\ v_i v_{i+2} \mid i \in \{0, 1, \ldots, 2n\}\,\}$$

（此处及本节其余部分，所有下标均取模 $2n + 1$）。

对于 $i \in \{0, 2, 4, \ldots, 2n\}$，我们记 $e_i = v_i v_{i+2}$、 $f_i = v_{i+1} v_{i+3}$。由于循环图的对称性，$f_{2n+t} = v_{2n+1+t} v_{2n+3+t} \equiv v_t v_{2+t} = e_t$ 对任意整数 $t$成立。

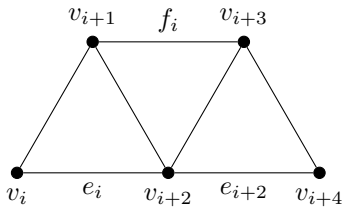


图1：用等边三角形绘制的 $C_{2n+1}(1,2)$的子图 $H$。

**引理 2.** 设 $\varepsilon < 1/2$。对于 $G_{2n+1}$ 的任意有效$(4 + \varepsilon)$-边染色以及任意 $i \in \{0, 2, 4, \ldots, 2n\}$，边对 $f_i$、 $e_i$ 与 $f_i, e_{i+2}$ 中，一对颜色的圆周距离至多为 $\varepsilon$，另一对至少为$1/2$。

证明. 考虑由顶点 $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}$ 诱导的子图 $H$（图1）。在 $H$的任意$(4+\varepsilon)$-边染色中，我们可以平移颜色，使得 $f_i$ 的颜色为0。对于 $H$，顶点周围各边的颜色一共有24种可能的圆周序。次序至关重要：例如，若已知 $v_{i+1}v_{i+2}$ 的颜色 $c'$ 大于 $v_i v_{i+2}$ 的 $c$的颜色，且二者之间没有与 $v_{i+2}$ 关联的边的颜色（即在 $v_{i+2}$周围的序中， $c'$ 紧随 $c$），则可知 $c' \in [c + 1, c + 1 + \varepsilon]$（该区间表示颜色圆上长度为 $4+\varepsilon$的一段弧，因此其边界按模 $4+\varepsilon$取值；该区间由关联边颜色之间圆周距离的要求导出）。对于每一种可能的序，每条边都被赋予一个描述其可能颜色界限的区间。这一技术是分析小子图可能的圆边着色的常用方法；更多细节可见于 [8, 16, 18, 27]。这些着色中有一半将包含颜色0的区间赋给边 $e_i$，另一半则将其赋给边 $e_{i+2}$。由于 $H$的对称性，只需分析前一半即可。

这些区间是系统地构造出来的：我们先为边 $v_{i+1}v_i$、$v_{i+1}v_{i+2}$、 $v_{i+3}v_{i+2}$和 $v_{i+3}v_{i+4}$分别指定一个区间，然后确定 $v_i v_{i+2}$ 和 $v_{i+2}v_{i+4}$的区间。图 2 中的各列按照为边 $v_i v_{i+1}$指定的区间排列。

在所有展示的构形中， $f_i$ 和 $e_i$ 的颜色之间的圆周距离至多为 $\varepsilon$，而 $f_i$ 和 $e_{i+2}$ 的颜色之间的圆周距离大于 $1/2$（例如，在左上角的情形中，颜色圆上的 0 等于 $4 + \varepsilon$，因此它与 $e_{i+2}$ 的颜色之间的圆周距离至少为 $(4 + \varepsilon) - (3 + 2\varepsilon) = 1 - \varepsilon > 1/2$）。

□

由于 $e_t \equiv f_{2n+t}$，引理 2 中证明的边 $f_i$ 的性质对边 $e_i$ 也成立。给定 $G_{2n+1}$ 的一个固定的 $(4 + \varepsilon)$-边染色，若一对边 $e_i, f_i$ 的颜色之差小于 $\varepsilon$，则称它们对齐。

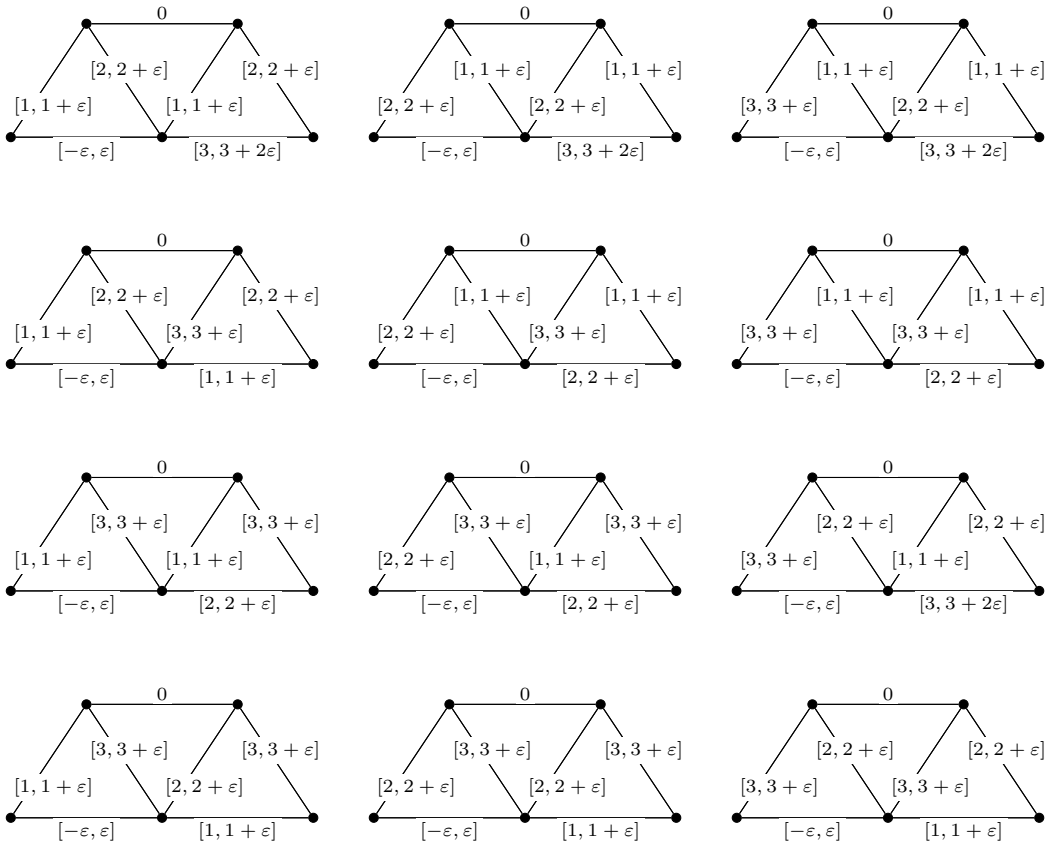


图 2： $H$的全部 12 种可能着色。

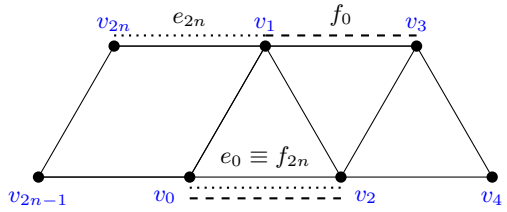


图3： $\varepsilon < 1/2$ 在 $C_{2n+1}$(1，2)中的矛盾。

**引理3**。 对于每个正整数 $n$， $\chi'_c(G_{2n+1}) \geq 4 + \frac{1}{2}$。 _

证明。 假设 $G_{2n+1}$ 存在某个 $\varepsilon < 1/2$对应的圆形（$4+\varepsilon$）边染色 $\varphi$。我们将推出矛盾。

根据引理 2， $f_0$ 要么与 $e_0$ 对齐，要么与 $e_2$对齐。利用 $G_{2n+1}$的对称性，我们只需分析 $f_0$ 与 $e_0$对齐的情形。此时它便不会与 $e_2$对齐。由于 $e_2$ 必须与 $f_0$、 $f_2$之一对齐，因此它必须与 $f_2$对齐。我们可以通过归纳法，将 $e_i$ 与 $f_i$ 的对齐关系扩展至所有 $i \in \{0, 2, \ldots, 2n\}$。因此， $e_{2n}$与 $f_{2n} \equiv e_0$对齐（见图3）。于是

$$|\varphi(e_{2n}) - \varphi(e_0)| \leq \varepsilon.$$

现在我们可以利用三角不等式推出一个收缩：边 $e_{2n}$ 和 $f_0$ 都与 $v_1$关联，因此

$$1 \leq |\varphi(e_{2n}) - \varphi(f_0)| \leq |\varphi(e_{2n}) - \varphi(e_0)| + |\varphi(e_0) - \varphi(f_0)| \leq 2\varepsilon < 1.$$

□

借助计算机，我们确定了 $\chi'_c(G_5) = \chi'_c(G_7) = 5$ 和 $\chi'_c(G_9) = \chi'_c(G_{11}) = 14/3$。所有更大的循环图都有一个 $9/2$-边染色。

**引理 4.** 对于 $n \geq 6$， $G_{2n+1}$ 是 (9,2)-可边着色的。

证明。 图 4 和图 5 分别展示了 $G_{13}$ 和 $G_{15}$的 (9,2)-边染色（悬挂边环绕）。图 6 展示了一个具有 4 个顶点的片段的着色，其悬挂边上的颜色与先前给出的着色相同。由于每个奇数整数 $m \geq 13$ 都可以写成 $13 + 4k$ 或 $15 + 4k$ （对某个合适的 $k$），所示着色可以组合成任意此类 $G_m$ 的有效 $(9, 2)$- 边染色。

□

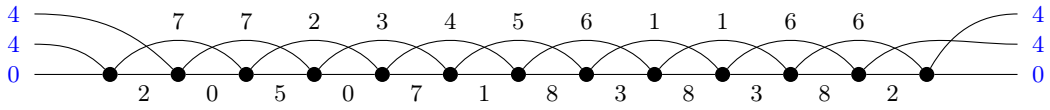


图 4： $G_{13}$的 (9,2)-边染色

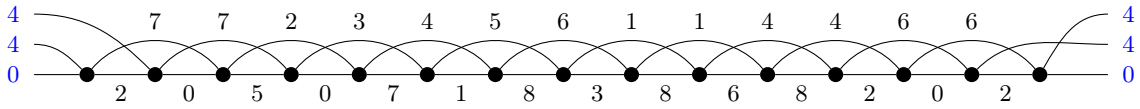


图 5： $G_{15}$的 (9,2)-边染色

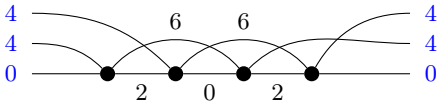


图 6：循环图的一个 4 顶点片段的 (9,2)-边染色

# 8 公开问题

本文此前曾讨论过其中一些问题，但我们在此将它们列出，以便日后查阅。

**问题1.** 是否有这样的结论：若 $\chi'_c(G) \in (9/2,\ 5]$ 对于一个简单图 $G$，其 $\Delta(G) = 4$，则 $\chi'_c(G) \in \{14/3, 5\}$? （并且若 $\chi'_c(G) = 14/3$，则 $G$ 是4-正则? ）

**问题2.** 对于哪些 $r$，存在一个具有 $\chi'_c = r$ 的（多重）图，但只有有限多个具有 $\chi'_c(G) = r$ 的（$\chi'_c$-临界? ） （多重）图 $G$?

**问题3.** 对于哪些 $r$，存在一个具有 $\chi'_c = r$ 的多重图，但不存在具有$\chi'_c = r$的简单图?

**问题4.** 对于哪些 $r$，存在一个具有 $\chi'_c = r$ 且最大度为 $\Delta$ 的（多重）图，但不存在具有 $\chi'_c = r$ 的 $\Delta$-正则（多重）图?

一些多重图的 $\chi'_c$ 大于 $\Delta + 1$。目前尚不清楚这类多重图是否会产生一些独特的 $\chi'_c$ 值，而这些值在最大度更高的多重图中无法达到。

**Pro题 5.** 是否存在 $r$，使得所有满足 $\chi'_c(G) = r$ 的多重图 $G$ 都有 $\Delta(G) + 1 < r$ ?

早已有人发现，可以通过将任意一个 3-正则图中的一个顶点替换为删去一个顶点后的彼得森图副本 [16]，构造出满足 $\chi'_c(G) = 3 + 1/2$ 的 3-连通 3-正则图 $G$。定理 9 证明了存在满足 $\chi'_c(G) = 4 + 1/2$ 的 4-连通 4-正则图 $G$（事实上，这样的图构成一个无穷族）。

**问题 6.** 对于哪些 $d$，存在一个 $d$-连通的 $d$-正则图，其循环色指数至少为 $d + 1/2$?

此外，了解区间$[\Delta, \Delta + 1]$上半部分中哪些分母是可能的，也会很有意思。

**问题 7.** 对于每个整数 $q > 2$，是否都存在一个整数 $p$ 和一个（多重）图 $G$，使得 $\chi'_c(G) = p/q \in (\Delta(G) + 1/2,\ \Delta(G) + 1)$?

目前，对于任意 $\Delta \geq 8$，我们甚至不知道是否存在一个最大度为 $\Delta$ 且$\chi'_c \in (\Delta(G) + 1/2,\ \Delta(G) + 1)$ 的图。

## 致谢

感谢 Xuding Zhu 与我们讨论了各种与圆着色相关的主题。

本工作部分得到研究资助项目 APVV-23-0076、VEGA 1/0173/25 和 VEGA 1/0613/26 的支持。

在本工作的准备过程中，作者使用了 Anthropic 的 Claude 和 Google 的 Gemini，以生成并检查部分计算机代码、绘制插图、检查文章文本中的错误，并获取提高文本清晰度的建议。在使用这些工具/服务之后，作者根据需要对内容进行了审阅和编辑，并对已发表文章的内容承担全部责任。

## 参考文献

[1] Peyman Afshani、Mahsa Ghandehari、Mahya Ghandehari、Hamed Hatami、Ruzbeh Tusserkani 和 Xuding Zhu。最大度为 3 的图的循环色指数。《图论杂志》，49(4):325–335，2005。

[2] Dušan Bernát 和 Ján Mazák。小型 snark图的循环色指数。见 Lucie Ciencialová、Martin Holečná、Róbert Jajcay、TatianaJajcayová、Martin Mačaj、František Mráz、Richard Ostertág、Dana Pardubská、Martin Plátek 和 Martin Stanek 编，《第*24*届信息技术——应用与理论会议论文集（*ITAT 2024*）》，第3792卷，第150–155页。CEUR-WS.org，2024。

[3] Armin Biere 等人，Kissat SAT 求解器。可访问 https://github.com/arminbiere/kissat，2025。

[4] Armin Biere、Tobias Faller、Katalin Fazekas、Mathias Fleury、Nils Froleyks 和 Florian Pollitt。CaDiCaL、Gimsatul、IsaSAT 和 Kissat 参加 SAT 竞赛 2024。载于 Marijn Heule、Markus Iser、Matti Järvisalo 和 Martin Suda（编），*SAT 竞赛 2024* 论文集——求解器、基准测试和证明检查器描述，计算机科学系报告系列 B 第 B-2024-1 卷，第 8–10 页。赫尔辛基大学，2024。

[5] Barbora Candráková 和 Edita Máčajová。循环色指数接近 k 的 k-正则图。离散数学，322:19–25，2014。

[6] Luigi P. Cordella、Pasquale Foggia、Carlo Sansone 和 Mario Vento。一种用于匹配大型图的（子）图同构算法。*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，26(10):1367–1372，2004。[7] M.A. Fiol 和 J. Vilaltella。一种简单快速的图边着色启发式算法。离散数学进展与应用，12(2):193–202，2013。[8] Mohammad Ghebleh。Goldberg snark图的循环色指数。离散数学，307(24):3220–3225，2007。[9] Mohammad Ghebleh。图的循环着色定理与计算。博士论文，西蒙弗雷泽大学，2007。[10] Andrea Hackmann 和 Arnfried Kemnitz。循环色指数。离散数学，286(1):89–93，2004。《圈与着色》。[11] Andrea Hackmann 和 Arnfried Kemnitz。循环色指数。离散数学，286(1–2):89–93，2004。[12] Tomáš Kaiser、Daniel Král' 和 Riste Škrekovski。围长猜想的复兴。组合理论杂志*B*辑，92(1):41–53，2004。[13] Daniel Leven 和 Zvi Galil。求正则图色指数的NP完全性。算法杂志，4(1):35–44，1983。[14] Cheyu Lin、Tsai-Lien Wong 和 Xuding Zhu。正则图的循环色指数。《图论杂志》，76(3):169–193，2014。[15] Cheyu Lin、Tsai-Lien Wong 和 Xuding Zhu。偶度正则图的循环色指数。离散数学，338(7):1154–1162，2015。[16] Robert Lukoťka 和 Ján Mazák。具有给定循环色指数的三次图。*SIAM*离散数学杂志，24(3):1091–1103，2010。[17] Martin Mačaj 和 Ján Mazák。snark图循环色指数的渐近下界。电子组合学杂志，20(2):P2，2013。[18]Ján Mazák。三次图的循环边着色。博士论文，布拉迪斯拉发夸美纽斯大学数学、物理与信息学学院，2011。[19] Brendan D. McKay 和 Adolfo Piperno。实用图同构，II。符号计算杂志，60:94–112，2014。[20] M. Meringer。正则图的快速生成与笼图构造。《图论杂志》，30(2):137–146，1999。[21] Marcus Meringer。正则图的快速生成与笼图构造。《图论杂志》，30:137–146，1999。[22]Adam Nadolski。某些2类图的循环色指数。离散数学，307(11):1447–1454，2007。第四届Caracow图论会议。[23] C. E. Shannon。关于网络边着色的一个定理。数学与物理学杂志，28(1-4):148–152，1949。[24] V. G. Vizing。多重图的色类。《控制论》（基辅），1(3):29–39，1965。[25] Xuding Zhu。圆色数：综述。离散数学，229(1-3):371–410，2001。

[26] Xuding Zhu。《离散数学专题》中〈算法与组合学〉第26卷，497–550页。施普林格，柏林、海德堡，2006。关于图的循环着色的最新进展。

[27] Filip Zrubák。4-正则图的循环色指数（学士论文），2025。指导教师：Ján Mazák。