arXiv:2603.08864v1 [math.CA] 9 Mar 2026

# 半直线上的 $p$-HARDY–RELLICH–BIRMAN不等式

FRANTIŠEK ŠTAMPACH与JAKUB WACLAWEK

摘要。经典的离散 $p$-Hardy不等式建立了数列与其离散导数的 $\ell^p$-范数之间的一个精确关系。本文将该不等式推广到任意整数阶 $\ell \geq 1$的离散导数，从而得到离散$p$-Rellich（$\ell = 2$）不等式以及一般的 $p$-比尔曼不等式（$\ell \geq 3$）。作为证明中的关键一步，我们推导出带负指数的Copson不等式的一个变体，它本身可能具有独立意义。此外，我们说明如何从我们的离散版本恢复连续的 $p$-Birman不等式，从而为这一经典结果提供另一种证明。所得不等式中的所有常数均被证明是最优的。

## 1. 引言与主要结果

**1.1. 引言。** 一百多年前，Hardy发现了他著名的i n-等式在差分形式下写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}|^p \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|^p}{n^p} \tag{1.1}$$

且对所有满足 $u \in C_0(\mathbb{N}_0)$ 以及 $u_0 = 0$ 和 $p > 1$的紧支撑数列均成立。事实上，早在1915年，Hardy 就已得到 (1.1) 的一个类似结果，但其常数更小。在此后的几年里，其他几位杰出的数学家也为这一课题作出了重要贡献。特别是，Landau 证明了 (1.1) 具有最佳常数。关于历史概述和证明，请参见 [23, 24] 。不久之后发现的 (1.1) 的连续类比写作

$$\int_0^{\infty} |\varphi'(x)|^p \, \mathrm{d}x \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(x)|^p}{x^p} \, \mathrm{d}x \tag{1.2}$$

对于在 $\mathbb{R}_+ \equiv (0,\infty)$ 中紧支撑的光滑函数 $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$。

鉴于 Hardy不等式在概率论、偏微分方程理论以及众多其他领域中的广泛应用，其各种推广形式一直受到深入研究。大多数研究聚焦于特定情形 $p = 2$ ，即不等式 (1.1) 和 (1.2) 在二次型意义下分别给出半直线上离散和连续狄利克雷拉普拉斯算子的下界。在本文中，我们关注不等式 (1.1) 和 (1.2) 的高阶变体，并将其称为 比尔曼不等式。1961年，Birman [2] 将不等式 (1.2) 推广到高阶导数，条件为 $p = 2$:

$$\int_0^{\infty} \left|\varphi^{(\ell)}(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x \geq \left(\frac{1}{2}\right)_{\ell}^2 \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(x)|^2}{x^{2\ell}} \, \mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

其中 $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$， $\ell \in \mathbb{N}$和$(a)_\ell :\, = a(a+1).....(a+\ell-1)$ 是上升阶乘符号。关于（1.3）的证明可见 [15, 第83–84]页；其他证明和推广亦可参见近期论文 [14] 。（$\ell = 2$ （1.3）的特例早先由 Rellich 发现 [26]，且甚至适用于高维情形，通常称为*Rellich*不等式。

令人惊讶的是，1.3的离散版本直到最近才在 [17]中得到证明；离散 Rellich 不等式也见于 [13]。在离散情形下，1.3左侧的高阶导数应替换为离散梯度的整数次幂；

日期：2026年3月11日。2020年数学主题分类。26D15、39A12、47J05。关键词和短语。Hardy不等式、Rellich不等式、Birman不等式、Copson不等式。

记号见第1.3 节。于是，对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$，离散 Birman不等式可表示为

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} \left|\nabla^{\ell} u_n\right|^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)_{\ell}^2 \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{|u_n|^2}{n^{2\ell}}, \tag{1.4}$$

其中 $u \in C_0(\mathbb{N}_0)$ 对所有 $n < \ell$ 都有 $u_n = 0$ 。

对于 $p \neq 2$，相关文献还不够完整。连续的 $p$-Birman不等式

$$\int_0^{\infty} \left|\varphi^{(\ell)}(x)\right|^p \, \mathrm{d}x \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)_{\ell}^p \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(x)|^p}{x^{\ell p}} \, \mathrm{d}x \tag{1.5}$$

对 $p > 1$、 $\ell \in \mathbb{N}$以及$\varphi \in C_0^{\infty}$（$\mathbb{R}_+$）成立。尽管我们未能找到明确的参考文献，但除 $p$-Rellich不等式（$\ell = 2$）见于 [25, 公式（1.2）],不等式（1.5）已为专家所熟知，其根源可追溯至 Hardy 的早期工作；参见注 10。相比之下，对于一般的 $p > 1$，其离散对应形式似乎仍然未知。本文的主要目标是建立具有最优常数的离散$p$-Birman不等式，从而完善一般 $p$-Birman不等式在半直线上的整体图景，其中 $p$>1。

1.2. **论文结构**。 本文其余部分安排如下。介绍必要的记号后，我们给出主要结果：离散 $p$-Birman 不等式和加权 $p$-Hardy 不等式。这些不等式将在第 2 节证明。在第 3 节，我们利用离散结果得到其连续对应形式，并在第 4节证明所有常数的尖锐性。最后，我们简要讨论当前关于进一步提高所考察不等式最优性的研究。

1.3. **离散导数的记号**。 我们将离散梯度 和 散度 定义为作用于由 $\mathbb{N}_0$ 索引的序列 $C(\mathbb{N}_0)$ 上的差分算子，如下:

$$\nabla u_n := u_n - u_{n-1} \quad \text{and} \quad \mathrm{div} u_n := u_{n+1} - u_n, \tag{1.6}$$

约定 $u_{-1} := 0$，即 $\nabla u_0 = u_0$。类似地，在复合差分算子时，我们假设指标为负数时序列的值为零；也就是说，先对所有指标 $n \in \mathbb{N}_0$ 形式上应用该复合算子，然后在 $n < 0$ 时令 $u_n := 0$ 。在此约定下，离散梯度与散度可交换，且它们的复合定义了作用于 $C(\mathbb{N}_0)$ 上的离散拉普拉斯算子 $\Delta := \mathrm{div} \circ \nabla$ ，其公式为

$$\Delta u_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1},$$

对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均成立。按照约定， $\Delta u_0 = u_1 - 2u_0$。

注。先前的研究 [17, 29] 将离散 Birman 不等式 (1.4) 中的梯度项 $\nabla^{\ell} u_n$ 替换为分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\ell/2} u_n$，并对 $n \geq \lceil \ell/2 \rceil$ 求和，其中 $(-\Delta)^{\ell/2}$ 在 $\ell$ 为偶数时，是 $\ell/2$ 个离散拉普拉斯算子 $-\Delta$的复合；而在 $\ell$ 为奇数时，$(-\Delta)^{\ell/2} := \nabla \circ (-\Delta)^{(\ell-1)/2}$ 。按照我们的约定，$(-\Delta)^{\ell/2} u_n = (-1)^{\lfloor \ell/2 \rfloor} \nabla^{\ell} u_{n+\lfloor \ell/2 \rfloor}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均成立，因此两种表述是等价的。为避免在本文中不必要地使用分数次幂以及向下取整/向上取整符号，我们采用 (1.4) 中较简单的表示方式。

1.4. **主要结果**。 我们的主要结果是整数半轴上的离散 $p$-Birman不等式。

**定理 1** （离散 $p$-Birman不等式）。 设 $\ell \in \mathbb{N}$ 且 $p > 1$。则对于所有满足 $u_n = 0$ （当 $n < \ell$ 时）的 $u \in C_0$（$\mathbb{N}_0$），有不等式

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} \left|\nabla^{\ell} u_n\right|^p \geq B_p^{(\ell)} \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{|u_n|^p}{n^{\ell p}} \tag{1.7}$$

以最优常数成立

$$B_p^{(\ell)} := \left(\frac{p-1}{p}\right)_{\ell}^p. \tag{1.8}$$

注 2. 不等式 (1.7) 可等价地写成离散积分形式。通过求解差分方程 $\nabla^\ell u_n = v_n$ 对于 $n \geq \ell$, 并采用初始条件 $u_n = 0$ 对于 $n < \ell$，可得

$$u_n = \sum_{\ell \leq k_1 \leq \cdots \leq k_\ell \leq n} v_{k_1} = \sum_{j=\ell}^{n} \binom{n+\ell-1-j}{\ell-1} v_j$$

对于 $n \geq \ell$。代入（1.7）得到不等式

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} |v_n|^p \geq B_p^{(\ell)} \sum_{n=\ell}^{\infty} \left| \frac{1}{n^\ell} \sum_{k=\ell}^{n} \binom{n+\ell-1-k}{\ell-1} v_k \right|^p \tag{1.9}$$

对于任意 $v \in C_0$（$\mathbb{N}$）。事实上，利用Fatou引理，不等式（1.9）可推广到所有复数序列 $v$。在平移指标后，定理 1 表明广义离散Hardy算子

$$\mathrm{H}^{(\ell)} v_n := \frac{1}{(n+\ell-1)^\ell} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+\ell-1-k}{\ell-1} v_k$$

在 $\ell^p(\mathbb{N})$ 上有界，对所有 $1 < p < \infty$，其算子范数等于 $1/(1-1/p)_\ell$ .

不等式（1.7）通过对加权离散 $p$-Hardy不等式的迭代应用来证明，类似于经典的 *Copson*不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |\nabla u_n|^p \geq \left( \frac{p-\alpha-1}{p} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-p} |u_n|^p , \tag{1.10}$$

其中 $u \in C_0$（$\mathbb{N}_0$）且 $u_0 = 0$ 以及 $0 \leq \alpha < p-1$。$\alpha$ 在（1.10）中的非负性是必要的，因为该不等式对 $\alpha < 0$ 不成立，而这恰恰是我们证明（1.7）所需的情形。若 $\alpha < 0$，则右侧需要略小的权。我们在下一定理中给出这一版本的Copson不等式，因为它可能具有独立意义。Copson的原始著作 [3]包含（1.10）的证明，常数的最优性例如在 [1,推论 3]中得到确立。

**定理 3.** 对所有满足 $u_0 = 0$ 的 $p > 1$、$\alpha < 0$ 与 $u \in C_0(\mathbb{N}_0)$，该不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |\nabla u_n|^p \geq C_p(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\alpha-p} |u_n|^p , \tag{1.11}$$

以最优常数成立

$$C_p(\alpha) := \left( \frac{p-\alpha-1}{p} \right)^p . \tag{1.12}$$

不等式（1.7）与（1.11）的证明在第2 节中展开，常数（1.8）与（1.12）的最优性在第4节中确立。定理1 与3 将 [17,定理 1.1 与 1.2] 推广到一般的 $p > 1$情形。

## 2. 不等式的证明

**2.1. 一个抽象的 $p$-Hardy不等式。**我们的出发点是一个抽象的加权 $p$-Hardy不等式，其证明已在 [17, 第 7.1] 节中指出，并依赖于 [12, 引理 2.6]中的一个辅助不等式。为便于读者阅读并保证完整性，我们将这些不等式连同其简短证明一并重述。

**引理4。** 设 $p > 1$。对于任意 $t \in [0,1]$ 和 $z \in \mathbb{C}$，有

$$|z-t|^p \geq (1-t)^{p-1}(|z|^p - t). \tag{2.1}$$

证明。 该不等式对于 $t \in \{0,1\}$ 平凡成立。固定 $t \in (0,1)$。容易看出，对于固定的 $|z|$，（2.1）左侧的最小值在 $z > 0$ 处取得。由于右侧对于 $z \leq t^{1/p}$ 非正，因此只需对 $z > t^{1/p}$ 验证该不等式。将（ 2.1 ）除以 $z^p - t > 0$，我们得到

$$\frac{(z-t)^p}{z^p - t} \geq (1-t)^{p-1}.$$

计算左侧关于 $z$ 的导数可知，该函数在 $(t^{1/p},\infty)$ 内的全局最小值在 $z=1$ 处取得，取值为 $(1-t)^{p-1}$，从而完成该证明。□

**命题 5.** 令 $p>1$, $V_n\geq 0$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{n+1}\geq\mathfrak{g}_n>0$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$，且 $\mathfrak{g}_0=0$。那么，对于任意满足 $u_0=0$ 的 $u\in\mathbb{C}_0(\mathbb{N}_0)$，我们有不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}V_n\left|\nabla u_n\right|^p\geq-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{div}(V(\nabla\mathfrak{g})^{p-1})_n}{\mathfrak{g}_n^{p-1}}\left|u_n\right|^p. \tag{2.2}$$

$P$上式成立。 首先，我们证明在这些假设下，不等式

$$|u_n-u_{n-1}|^p\geq\left(\frac{|u_n|^p}{\mathfrak{g}_n^{p-1}}-\frac{|u_{n-1}|^p}{\mathfrak{g}_{n-1}^{p-1}}\right)(\mathfrak{g}_n-\mathfrak{g}_{n-1})^{p-1} \tag{2.3}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立，其中 $|u_0|^p/\mathfrak{g}_0^{p-1}$ 应解释为 0。若 $n=1$ 或 $u_{n-1}=0$，则不等式（2.3）可直接由 $\mathfrak{g}$的单调性推出。对于满足 $u_{n-1}\neq 0$的 $n\geq 2$，我们暂设 $\varphi_n:=u_n/\mathfrak{g}_n$ 并将 $z=\varphi_n/\varphi_{n-1}\in\mathbb{C}$ 和 $t=\mathfrak{g}_{n-1}/\mathfrak{g}_n\in(0,1]$代入（2.1）。由此得到不等式

$$\left|\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}-\frac{\mathfrak{g}_{n-1}}{\mathfrak{g}_n}\right|^p\geq\left(1-\frac{\mathfrak{g}_{n-1}}{\mathfrak{g}_n}\right)^{p-1}\left(\left|\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right|^p-\frac{\mathfrak{g}_{n-1}}{\mathfrak{g}_n}\right).$$

将此不等式乘以 $\mathfrak{g}_n^p\left|\varphi_{n-1}\right|^p\geq 0$ 即可得到（2.3）。

现在，将（2.3）两边乘以 $V_n\geq 0$ 并对 $n\in\mathbb{N}$求和，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}V_n\left|\nabla u_n\right|^p\geq\sum_{n=1}^{\infty}V_n(\nabla\mathfrak{g}_n)^{p-1}\frac{|u_n|^p}{\mathfrak{g}_n^{p-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}V_{n+1}(\nabla\mathfrak{g}_{n+1})^{p-1}\frac{|u_n|^p}{\mathfrak{g}_n^{p-1}},$$

这就是不等式（2.2）。证明完毕。 □

2.2. **加权 $p$-Hardy不等式（1.11）的证明。** 我们通过在命题 1.11）中选取 $V_n$作为幂序列，并选取 $\mathfrak{g}_n$ 作为合适的Gamma比，来证明（ $\mathfrak{g}$ 。参数序列的具体选取对于得到紧不等式至关重要。

不等式（1.11）的证明。 设 $p>1$ 且 $\alpha<0$。我们将对以下序列应用命题 5：

$$V_n:=\begin{cases}0 & \text{if } n=1,\\ (n-1)^{\alpha} & \text{if } n\geq 2,\end{cases}\qquad \mathfrak{g}_n:=\begin{cases}0 & \text{if } n=0,\\ \Gamma\big(n+1-\frac{\alpha+1}{p}\big)\big/\Gamma(n) & \text{if } n\geq 1,\end{cases} \tag{2.4}$$

其中， $\Gamma$ 是欧拉Gamma函数。由于对所有 $n\geq 2$，均有

$$\mathfrak{g}_n-\mathfrak{g}_{n-1}=\frac{p-\alpha-1}{p}\frac{\Gamma\big(n-\frac{\alpha+1}{p}\big)}{\Gamma(n)}>0,$$

数列 $\mathfrak{g}$递增。由于命题5的其他假设显然都满足，因此我们得到不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^{\alpha}\left|\nabla u_n\right|^p\geq\sum_{n=2}^{\infty}\rho_n\left|u_n\right|^p$$

对所有满足 $u_0=u_1=0$ 的 $u\in C_0(\mathbb{N}_0)$（这里我们还要求 $u_1=0$），其中

$$\rho_n\equiv-\frac{\operatorname{div}(V(\nabla\mathfrak{g})^{p-1})_n}{(\mathfrak{g}_n)^{p-1}}=\left(\frac{p-\alpha-1}{p}\right)^{p-1}n^{\alpha-p+1}H\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.5}$$

并且 $H$ 是定义在区间 $[0,1)$ 上的辅助函数，其定义如下：

$$H(x):=\frac{(1-x)^{\alpha}}{\big(1-\frac{\alpha+1}{p}x\big)^{p-1}}-1.$$

为了证明不等式（1.11），只需证明 $H$ 满足

$$H(x)>\frac{p-\alpha-1}{p}x,\quad\forall x\in(0,1), \tag{2.6}$$

这一点将在证明的其余部分加以验证。由于 $H(0) = 0$ 且 $H'(0) = (p-\alpha-1)/p$，不等式（2.6）可写为 $H(x) > H(0) + H'(0)x$，因此（2.6）成立的条件是 $H$ 在 (0,1)上严格凸。经过常规计算可得

$$H''(x) = \frac{p-\alpha-1}{p^2} \frac{(1-x)^{\alpha-2}}{\left(1-\frac{\alpha+1}{p}x\right)^{p+1}} \left[(p-\alpha)(1+\alpha)^2x^2 - 2(1+\alpha)(p-\alpha)x + p(1-\alpha)\right].$$

由于二次项的判别式 $4\alpha(1+\alpha)^2(p-1)(p-\alpha)$ 为负，我们确实可以得出，对于所有 $x \in (0,\ 1)$，$H''(x) > 0$。□

注 6. Copson不等式（1.10）也可以用上述方法证明。假设 $0 \le \alpha < p-1$，我们将命题 5 与 $V_n := n^\alpha$ 以及 $\mathfrak{g}_n$ 代入（2.4）中的定义。由此得到不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |\nabla u_n|^p \ge \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |u_n|^p, \tag{2.7}$$

其中 $\rho_n$ 由（2.5）给出，但函数 $H$ 在 $[0,1]$ 上重新定义为

$$H(x) := \left(1 - \frac{\alpha+1}{p}x\right)^{1-p} - (1+x)^\alpha.$$

尽管这个版本的 $H$ 在 $(0,\ 1)$ 上不再是凸函数，但不等式（2.6）仍然成立，并且可以用初等方法验证。进而可得 Copson不等式（1.10）。此外，不等式（2.7）给出了 Copson不等式的一个改进版本，这一结果本身也值得关注，因为现有文献中关于此类改进的研究，例如 [4, 5, 6], 似乎仅考虑了特殊情形 $p = 2$。

2.3. **对 $p$-Birman 不等式的 (1.7) 的证明。** 在整个证明过程中，我们将使用作用于数列上的前移算子S，其定义为

$$\mathrm{S}u_n := u_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

不等式 (1.7) 的证明。 证明通过对 $\ell \in \mathbb{N}$ 进行归纳。对于 $\ell = 1$，不等式 (1.7) 就是经典的 $p$-Hardy 不等式 (1.1)。

假设 $\ell \ge 2$，并取 $u \in C_0(\mathbb{N}_0)$，使得 $u_n = 0$ 对所有 $n < \ell$均成立。回顾离散梯度、散度的定义以及我们的约定（见第 1.3 节），可得等式散度 $= \nabla \circ \mathrm{S} = \mathrm{S} \circ \nabla$ 以及 散度 $\circ \nabla = \nabla \circ$ 散度。由此可得

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} \left|\nabla^\ell u_n\right|^p = \sum_{n=\ell-1}^{\infty} \left|\nabla^{\ell-1} \mathrm{div} u_n\right|^p \ge B_p^{(\ell-1)} \sum_{n=\ell-1}^{\infty} \frac{|\mathrm{div} u_n|^p}{n^{(\ell-1)p}},$$

这里我们对数列 散度$u \in C_0(\mathbb{N}_0)$应用了归纳假设，该数列满足散度$u_n = 0$，若 $n < \ell - 1$。再次利用恒等式 散度 S，并将已证明的不等式 (1.11) 应用于 $\alpha = -(\ell-1)p < 0$ 以及数列 $\mathrm{S}u \in C_0(\mathbb{N}_0)$，它满足 $\mathrm{S}u_0 = u_1 = 0$，我们进一步估计

$$\sum_{n=\ell-1}^{\infty} \frac{|\mathrm{div} u_n|^p}{n^{(\ell-1)p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\nabla \mathrm{S} u_n|^p}{n^{(\ell-1)p}} \ge C_p(-(\ell-1)p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{S}u_n|^p}{(n+1)^{\ell p}}.$$

将最后一个求和中的指标平移，并注意到 $B_p^{(\ell-1)} C_p(-(\ell-1)p) = B_p^{(\ell)}$，参见公式（1.8）和（1.12），上述不等式可合并为

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} \left|\nabla^\ell u_n\right|^p \ge B_p^{(\ell)} \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{|u_n|^p}{n^{\ell p}}.$$

不等式（1.7）的证明已完成。 □

## 3. 连续 $p$-Birman不等式

本节中，我们沿用 $p$ 在 $p=2$ 中采用的方法， [17]从离散对应形式（1.7）推导出连续 $p$-Birman 不等式。除了离散不等式到连续不等式的过渡本身颇有趣味之外，这一步还有另外两个目的。首先，相较于标准做法（如备注 10 所述，该做法自然地避开了离散形式），这为证明 $p$-Birman 不等式提供了一种替代方法。其次，我们借此在下一节证明定理 1 和 3 中常数的最优性。

**定理 7** (连续 $p$-Birman不等式)。 设 $\ell\in\mathbb{N}$ 且 $p>1$。那么对于任意 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$，有如下不等式

$$\int_0^\infty \left|\varphi^{(\ell)}(x)\right|^p \mathrm{d}x \geq B_p^{(\ell)} \int_0^\infty \frac{|\varphi(x)|^p}{x^{\ell p}}\,\mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

其中常数 $B_p^{(\ell)}$由公式 (1.8) 给出，且是尖锐的。

常数 $B_p^{(\ell)}$在 (3.1) 中的最优性证明推迟到下一节。在证明不等式 (3.1之前，我们先准备一个引理，该引理将离散导数与连续导数联系起来。

**引理 8**。 对于 $N>0$、 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$，记 $v_n^{(N)}:=\varphi(n/N)$。那么对于任意 $\ell\in\mathbb{N}$, 有

$$\nabla^\ell v_n^{(N)} = \frac{1}{N^\ell}\,\varphi^{(\ell)}\left(\frac{n}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\ell+1}}\right), \quad as\ N\to\infty,$$

对所有 $n\geq\ell$ 一致成立，即 *Landau* $\mathcal{O}$ 符号中隐藏的常数与 $n$ 无关 $t.$

证明。 根据定义（1.6），我们有

$$\nabla^\ell v_n^{(N)} = \sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}v_{n-k}^{(N)}.$$

此外，应用泰勒–拉格朗日公式可得

$$v_{n-k}^{(N)} = \varphi\left(\frac{n-k}{N}\right) = \sum_{j=0}^{\ell}\frac{1}{j!}\,\varphi^{(j)}\left(\frac{n}{N}\right)\left(\frac{-k}{N}\right)^j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\ell+1}}\right),$$

其中，Landau $\mathcal{O}$ 符号中的常数可以取为与 $n$ 无关，因为 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$。因此

$$\begin{aligned}\nabla^\ell v_n^{(N)} &= \sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}\left[\sum_{j=0}^{\ell}\frac{1}{j!}\,\varphi^{(j)}\left(\frac{n}{N}\right)\left(\frac{-k}{N}\right)^j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\ell+1}}\right)\right]\\ &= \sum_{j=0}^{\ell}\frac{(-1)^j}{j!}\left[\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}k^j\right]\frac{1}{N^j}\varphi^{(j)}\left(\frac{n}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\ell+1}}\right),\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$时，对 $n\geq\ell$一致成立。现在，只需将恒等式 [8, 式（26.8.6）]

$$\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}k^j = \begin{cases}0 & \text{for } j<\ell,\\ (-1)^\ell\ell! & \text{for } j=\ell,\end{cases}$$

应用于方括号中的项，即可完成证明。 □

不等式（（3.1））的证明。 首先注意到，通过对变量进行缩放 $x$，将其用于（3.1）两边即可。只需证明（3.1）对支撑于 $\varphi$ 的测试函数成立，其中支撑集包含于 $(0,1)$。

固定 $\varphi\in C_0^\infty(0,1)$, $\ell\in\mathbb{N}$，并定义 $v_n^{(N)}:=\varphi(n/N)$ 对于所有 $n\in\mathbb{N}_0$ 以及 $N>0$ 充分大，使得 $v_n^{(N)}=0$ 对于 $n<\ell$。由于同样有 $v_n^{(N)}=0$ 对于所有 $n>N$，应用引理 8，

我们推断出

$$\sum_{n=\ell}^{\infty}\left|\nabla^{\ell}v_n^{(N)}\right|^p=\sum_{n=1}^{N}\left|\nabla^{\ell}v_n^{(N)}\right|^p=\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{1}{N^{\ell}}\,\varphi^{(\ell)}\left(\frac{n}{N}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\ell+1}}\right)\right|^p$$
$$=\frac{1}{N^{\ell p}}\sum_{n=1}^{N}\left|\varphi^{(\ell)}\left(\frac{n}{N}\right)\right|^p+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\ell p}}\right),$$

如 $N\to\infty$。对于数列 $u^{(N)}:=N^{\ell-1/p}v^{(N)}$ 由此可得

$$\sum_{n=\ell}^{\infty}\left|\nabla^{\ell}u_n^{(N)}\right|^p=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\varphi^{(\ell)}\left(\frac{n}{N}\right)\right|^p+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),\quad\text{as } N\to\infty.$$

又由于 $u_n^{(N)}=0$ 对 $n<\ell$ 以及 $n>N$成立，我们可以应用离散 $p$-Birman不等式（1.7）得到

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}\left|\varphi^{(\ell)}\left(\frac{n}{N}\right)\right|^p+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)\geq B_p^{(\ell)}\sum_{n=\ell}^{\infty}\frac{\left|u_n^{(N)}\right|^p}{n^{\ell p}}=B_p^{(\ell)}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}\frac{\left|\varphi\left(n/N\right)\right|^p}{(n/N)^{\ell p}}$$

对 $N\to\infty$。识别出黎曼和并取极限 $N\to\infty$ 于上述不等式中，我们得到所需的积分不等式（3.1）。□

注9。我们指出，在不展开细节的情况下，可以仿照不等式（3.1）的证明类似进行，此次使用采样序列

$$u_n^{(N)}:=N^{1-(\alpha+1)/p}\,\varphi\left(\frac{n}{N}\right),$$

从而由（1.10）和（1.11）推出它们的连续对应形式

$$\int_0^{\infty}x^{\alpha}\left|\varphi'(x)\right|^p\,\mathrm{d}x\geq C_p(\alpha)\int_0^{\infty}x^{\alpha-p}\left|\varphi(x)\right|^p\,\mathrm{d}x,\tag{3.2}$$

该式对所有 $\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$以及 $\alpha<p-1$ 成立（连续极限取相同形式，而与 $\alpha$的符号无关）。

注10. 不等式（3.2）的积分形式早已出现在 Hardy、Littlewood 和 Pólya 的经典著作中 [16, 定理 330], 另见 [24, 定理 2]。连续$p$-Birman不等式（3.1）可通过迭代应用（3.2）迅速证明。具体而言，从测试函数 $\ell$的阶导数开始，并在第 $\varphi$ 步选取 $\alpha=-(j-1)p$，其中 $j$ 阶为 $j\in\{1,\dots,\ell\}$，即可直接得到结论。

## 4. 最优性

4.1. **常数最优性的证明**。 我们证明定理 $B_p^{(\ell)}$和 $C_p(\alpha)$ 1 和 3中的常数具有最优性。由于第 3 节所述的连续情形转换，只需证明不等式（3.1）和（3.2）中常数的锐性；我们将构造测试函数的逼近序列，使得这些不等式在极限下取等号。尽管也可以直接为离散不等式（1.7）和（1.10）、（1.11）构造这样的序列，但连续方法在技术上更简单：单项式函数的导数所得表达式比其离散对应形式更为简单。这个简单而有用的思想已在此强调过[17]。

定理 $p$中的 $B_p^{(\ell)}$-*Birman* 常数的最优性证明 *1* 和7。 第3 节的证明表明，不等式（3.1）可由（1.7）推出，而与常数 $B_p^{(\ell)}$的具体形式无关。因此，连续 $B_p^{(\ell)}$-Birman 不等式（1.8）中定义的常数 $p$（3.1）的最优性，立即意味着其离散对应式（1.7）中的最优性。

为完整起见，我们验证连续 $B_p^{(\ell)}$-Birman 不等式（ $p$3.1）中常数的最优性，这相当于证明

$$\inf_{0\neq\varphi\in\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)} \frac{\int_0^\infty |\varphi^{(\ell)}(x)|^p\,\mathrm{d}x}{\int_0^\infty |\varphi(x)|^p/x^{\ell p}\,\mathrm{d}x} = B_p^{(\ell)} \tag{4.1}$$

通过构造测试函数的逼近序列 $\varphi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$，使得下确界中的比值在 $N\to\infty$趋于 $B_p^{(\ell)}$。具体地，对于 $N>2$ 和 $x>0$，我们设

$$\varphi_N(x) := x^{\ell-1/p}\,\xi_N(x), \tag{4.2}$$

其中截断函数 $\xi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ 满足

$$\xi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x\in[2/N,1],\\ 0 & \text{if } x\in\mathbb{R}_+\setminus[1/N,2], \end{cases} \quad \text{and} \quad \left|\xi_N^{(j)}(x)\right| \le \begin{cases} CN^j & \text{if } x\in[1/N,2/N],\\ C & \text{if } x\in[1,2], \end{cases} \tag{4.3}$$

对所有 $j\in\{0,\dots,\ell\}$均成立，其中 $C>0$为常数。例如，可以构造如下函数:

$$\xi_N(x) := \eta(Nx-1)\eta(2-x),$$

其中 $\eta$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数，满足 $\eta(x)=0$ 当 $x\le 0$ 且 $\eta(x)=1$ 当 $x\ge 1$。这种正则化曾在略有不同的情形下用于 [25,注 2。6]利用莱布尼茨法则，我们估计 $L^p$范数下的 $\ell$阶导数 $\varphi_N$ 如下:

$$\left(\int_0^\infty \left|\varphi_N^{(\ell)}(x)\right|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\left(1-\frac{1}{p}+j\right)_{\ell-j}\left(\int_0^\infty \left|x^{j-1/p}\xi_N^{(j)}(x)\right|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

利用性质（4.3），我们进一步分别估计最后一项中的积分 ly
对于 $j=0$和 $1j\in\{1,\dots,\ell\}$。当 $j=0$时，我们有

$$\int_0^\infty \left|x^{-1/p}\xi_N(x)\right|^p\,\mathrm{d}x \le C^p\int_{1/N}^{2/N}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{2/N}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}+C^p\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2C^p\log 2+\log(N/2),$$

而对于 $j\in\{1,\dots,\ell\}$，我们得到

$$\int_0^\infty \left|x^{j-1/p}\xi_N^{(j)}(x)\right|^p\,\mathrm{d}x \le C^pN^{jp}\int_{1/N}^{2/N}x^{jp-1}\,\mathrm{d}x + C^p\int_1^2 x^{jp-1}\,\mathrm{d}x = 2C^p\,\frac{2^{jp}-1}{jp}.$$

回顾公式（1.8），我们得到上界

$$\left(\int_0^\infty \left|\varphi_N^{(\ell)}(x)\right|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le B_p^{(\ell)}\left(A_0+\log(N/2)\right)^{1/p}+A_1,$$

其中 $A_0$ 和 $A_1$ 是与 $N$无关的常数。反过来，我们得到

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi_N(x)|^p}{x^{\ell p}}\,\mathrm{d}x \ge \int_{2/N}^1\frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(N/2).$$

综上，结合（3.1），我们有

$$B_p^{(\ell)} \le \frac{\int_0^\infty |\varphi_N^{(\ell)}(x)|^p\,\mathrm{d}x}{\int_0^\infty |\varphi_N(x)|^p/x^{\ell p}\,\mathrm{d}x} \le \frac{\left(B_p^{(\ell)}\left(A_0+\ln(N/2)\right)^{1/p}+A_1\right)^p}{\ln(N/2)} \longrightarrow B_p^{(\ell)}, \quad \text{as } N\to\infty,$$

由此得到（4.1）。定理 1的证明以及定理 7的证明均已完成。 □

*Copson* 常数的最优性证明 $C_p(\alpha)$ 在定理 *3* 和不等式 (3.2) 中。此处省略细节，因为不等式 ( $C_p(\alpha)$（3.2）中的常数 3的最优性证明（以及不等式（1.10）中的证明）与上文详述的论证类似。在此情形下，试验函数（4.2）替换为

$$\varphi_N(x) := x^{1-(\alpha+1)/p}\,\xi_N(x).$$

非光滑函数空间中的锐性也在 [24, 定理 2(iii)]中得到了证明。□

4.2. **关于权的最优性的评述**。 近年来，Hardy 型不等式的研究逐渐转向更强的最优性概念，这些概念考量的是整个权函数，而不仅仅是乘法常数的锐性。这些概念的核心是临界性。在诸如（1.1）或（1.2）这类不等式的右侧出现的权序列或权函数，若在上是临界的，即不存在逐点改进，则称其为临界权； $\mathbb{N}$ （离散情形）或在 $\mathbb{R}_+$（连续情形）几乎处处成立。本小节简要概述这一背景下临界权的最新研究进展。

尽管式 (1.1) 和 (1.2) 中 $p$-Hardy 常数 $B_p^{(1)}$ 是最优的，但式 (1.2) 中的 $p$-Hardy 权函数 $B_p^{(1)}/x^{2p}$ 是临界的，而其离散对应形式 $B_p^{(1)}/n^{2p}$ （见式 (1.1)）则不是。最早在 [20]，中针对 $p=2$ 观察到这一差异，当时确定了一个临界离散Hardy权；另见 [19, 22]。适用于一般 $p>1$ 的临界离散 $p$-Hardy 权见于 [11]，并在 [28] 中作了进一步讨论。此外， [6] 给出了针对特定幂次的 Copson不等式 (1.10) 的临界改进。关于不同情形下离散Hardy不等式最优性的进一步研究，见 [7, 9, 10, 18, 21]。

仔细考察第 2 节中离散 $p$-Birman不等式的证明 中的估计可知，离散 $p$-Birman 权（式 1.7）也可以改进。对于 $p=2$，文献 $\ell=2$首次报告了离散Rellich权的改进[13]。适用于任意 $\ell\in\mathbb{N}$ 和 $p=2$ 的临界离散Birman权最近见于文献 [29]。最后，关于一般情形 $p$的临界离散 $p>1$-Birman权，以及一个推广 [29],的理论框架，将在即将发表的工作 [27] 中给出。

**致谢**。 我们感谢Fritz Gesztesy对连续 $p$-Birman不等式起源的有益评论，该不等式在注10中提及。

## 参考文献

[1] Bennett, G. 一些初等不等式。《牛津季刊数学杂志》（第二辑）*38*，152（1987），401–425。 [2] Birman, M. Š. 关于奇异边值问题的谱。《数学文集》（新辑）*55*（*97*）（1961），125–174。[3] Copson, E. T. 正项级数札记。《伦敦数学学会杂志》*3*，1（1928），49–51。[4] Das, B., 和 Manna, A. 关于改进Hardy和Copson不等式。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学会杂志*A*辑：数学》*117*，2（2023）。[5] Das, B., 和 Manna, A. 一条改进的Copson不等式。arXiv:2508.00388 [math.CA] （2025）。[6] Das, B., Manna, A., 和 Paul, T. 离散加权变体Hardy不等式的改进及改进权的临界性。《几何分析杂志》*35*，12（2025），22页。[7] Das, U., 和 de la Fuente-Fernández, R. 离散半直线上的最优分数阶Hardy不等式。《变分法与偏微分方程》*65*，2（2026）。[8] *NIST*数学函数数字图书馆。http://dlmf.nist.gov/，2022-03-15发布的1.1.5版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。[9] Fischer, F. 非局部拟线性基态表示与临界性理论。《变分法与偏微分方程》*62*，5（2023），33页。[10] Fischer, F. 图上的 $p$-Hardy权的最优性与衰减。《变分法与偏微分方程》*63*，7（2024），37页。[11] Fischer, F., Keller, M., 和 Pogorzelski, F. 一条改进的离散 p-Hardy 不等式。《积分方程与算子理论》*95*，24（2023）。[12] Frank, R. L., 和 Seiringer, R. 非线性基态表示与尖锐Hardy不等式。《泛函分析杂志》*255*，12（2008），3407–3430。[13] Gerhat, B., Krejčiřík, D., 和 Štampach, F. 半直线上的一条改进离散Rellich不等式。《以色列数学杂志》*268*，1（2025），45–72。[14] Gesztesy, F., Littlejohn, L. L., Michael, I., 和 Wellman, R. 关于Birman序列的Hardy-Rellich型不等式。《微分方程杂志》*264*，4（2018），2761–2801。[15] Glazman, I. M.奇异微分算子定性谱分析的直接方法。Daniel Davey & Co., Inc.，纽约，1966。[16] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 和 Pólya, G. 不等式。剑桥大学出版社，1952。[17] Huang, X., 和 Ye, D. 一维尖锐离散Hardy-Rellich不等式。《伦敦数学学会杂志》*109*，1（2024），26页。[18] Keller, M., 和 Nietschmann, M. 整数格上的分数阶拉普拉斯算子的最优Hardy不等式。《亨利·庞加莱年刊》*24*，8（2023），2729–2741。[19] Keller, M., Pinchover, Y., 和 Pogorzelski, F. 一条改进的离散Hardy不等式。《美国数学月刊》*125*，4（2018），347–350。

[20] Keller, M., Pinchover, Y., 和 Pogorzelski, F. 图上Schrödinger算子的最优Hardy不等式。《数学物理通讯》*358*，2（2018），767–790。[21] Keller, M., Pinchover, Y., 和 Pogorzelski, F. 图上Schrödinger算子的临界性理论。《谱理论杂志》*10*，1（2020），73–114。[22] Krejčiřík, D., 和 Štampach, F. 离散Hardy不等式及Keller-Pinchover-Pogorzelski不等式的一个尖锐形式。《美国数学月刊》*129*，3（2022），281–283。[23] Kufner, A., Maligranda, L., 和 Persson, L.-E. Hardy不等式的前史。《美国数学月刊》*113*，8（2006），715–732。[24] Kufner, A., Maligranda, L., 和 Persson, L.-E.《*Hardy*不等式：历史及相关结果》。Vydavatelský Servis，比尔森，捷克共和国，2007。[25] Owen, M. P. 多调和算子的Hardy–Rellich不等式。《爱丁堡皇家学会学报*A*辑：数学》*129*（1999），825–839。[26] Rellich, F. 高阶半有界微分算子。载于《*1954*年国际数学家大会论文集，阿姆斯特丹，第*III*卷》（1956），North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，第243–250页。[27] Štampach, F., 和 Waclawek, J. 最优离散 $p$-Hardy-Rellich-Birman不等式。准备中（2026）。[28] Štampach, F. s., 和 Waclawek, J. 一个由最优离散 $p$-Hardy权导出的Herglotz–Nevanlinna函数。《美国数学会会刊》*154*，2（2026），807–819。[29] Štampach, F., 和 Waclawek, J. 最优离散Hardy–Rellich–Birman不等式。《数学分析杂志》（2025）。已接受发表。

(FrantišekŠtampach)数学系，核科学与物理工程学院，布拉格捷克技术大学，Trojanova 13，12000 布拉格2区，捷克共和国

电子邮箱：stampfra@cvut.cz

(Jakub Waclawek) 数学系，核科学与物理工程学院，布拉格捷克技术大学，Trojanova 13，12000 布拉格2区，捷克共和国电子邮箱：waclajak@cvut.cz