arXiv:2603.08870v1 [math.AG] 9 Mar 2026

志村簇分裂模型上的循环

THIBAUD VAN DEN HOVE

Abstract. 当局部群是非分歧群的标量限制时，我们构造不同 PEL 型志村簇特殊纤维之间的奇异 Hecke 对应。特别地，局部群本身不一定是非分歧群，志村簇也可能有坏约化。借鉴 Xiao–Zhu 在好约化情形下的方法，我们据此构造了几何 Jacquet–Langlands 对应的新实例，包括一种动机精化，并验证了这些志村簇在非常特殊层处的特殊纤维的 Tate 猜想的若干一般情形。我们的主要工具是利用 Pappas–Rapoport 的分裂模型对整模型进行解消。我们还定义了局部 shtuka 模叠和仿射 Deligne–Lusztig 簇的分裂版本，并研究其几何性质。

Contents

1. 引言 12. 志村簇的模型 103. Display 与局部 shtuka 174. 奇异 Hecke 对应 235. 分裂仿射格拉斯曼量上的混合泰特动机 276. 分裂仿射 Deligne–Lusztig 簇 397. 局部 shtuka 模空间上的动机对应 488. 动机 Jacquet–Langlands 转移 659. 关于志村簇分裂模型的 Tate 猜想 69附录 A. 补充内容： ´étale 动机 81参考文献 89

1. Introduction

志村簇构成了一类非常有趣的代数簇。其上同调已被成功用于实现朗兰兹对应的若干实例；此外，得益于其算术性质，许多关于一般代数簇的猜想在志村簇的情形下更易处理。例如，朗兰兹猜想断言所有动机 L 函数都是自守的 [Lan80], ，以及 Tate 猜想（关于一般纤维的一个例子，参见 [HLR86] ）。在 [XZ17], 中，Xiao–Zhu 研究了志村簇特殊纤维上的某些闭链，并利用它们展示了朗兰兹对应和 Tate 猜想的更多实例，将 [TX19、HTX17]中的某些构造加以推广。 [XZ17]所研究的志村簇具有好约化，即在一个固定素数 p处具有超特殊层。本文的主要目标是通过研究具有某些坏约化的志村簇，将 [XZ17], 中的方法加以推广，并证明这类志村簇的 Jacquet–Langlands 对应和 Tate 猜想的若干实例。另一个目标是将这一构造提升到动机层面，为朗兰兹对应具有动机起源这一猜想提供更多证据。为简化论述，我们在引言中分别阐述这两部分内容。具体而言，在整个引言中，我们将陈述若干涉及 ℓ-adic ´étale 层的结果，其中 $\ell \neq p$，而在正文中，我们将把这些结果细化到 ´étale 动机的层面。（在 ℓ-adic 情形下的证明可以逐字照搬，而且远比动机版本简单。）

1.1. **主定理**。 固定一个素数 p，在整个引言中我们都假设它是奇数。对于 p处的超特殊层，预期志村簇具有（且几乎所有情形下已知具有）典范光滑整模型，其底环为反射域某个完备化的整数环。存在这样的超特殊层，当且仅当 Shimura 数据中出现的 p 处的局部群是非分歧的，即它是拟分裂的，并且在某个非分歧扩张上分裂。我们将关注局部群仍然拟分裂、但不一定在非分歧扩张上分裂的情形。在这种情况下，仍然存在非常特殊层（依照 [Zhu15，定义 6.1]），这是对超特殊层概念的推广。

本文 [XZ17] 既运用了整体论证，也运用了局部论证。局部方面，主要工具包括几何Satake等价（它将仿射格拉斯曼量上的等变层范畴与朗兹对偶群的表示联系起来）、在局部shtuka模栈上构造上同调对应，以及研究某些仿射 Deligne–Lusztig 簇的不可约分支。所有出现的几何对象都依赖于某个（仿抛物）层。此外，在非常特殊层上，几何Satake等价有一个版本 [Zhu15，Ric16],其他要素在一定程度上也推广到了非常特殊层。

然而，整体方面的问题更多。这里， [XZ17] 中的关键内容是在不同志村簇的典范模型特殊纤维之间构造所谓的奇异 Hecke 对应（它们通常无法提升到一般纤维），并且这些特殊纤维是光滑的这一事实。当然，志村簇在非常特殊层上的特殊纤维很少是光滑的。此外，在 PEL情形中，奇异 Hecke 对应的构造使用了典范整模型的模空间解释；当局部群分歧时，这种解释通常并不存在 [Pap00]。（我们注意到，Xiao–Zhu 和 van Hoften–Sempliner 已宣布了更一般的奇异 Hecke 对应构造，但仍假设局部群在某个 $\mathbb{Q}_p$上分裂。）

我们通过考察 Shimura 簇的分裂整模型，同时解决这两个问题；这类模型由 [PR05]引入。事实上，我们将假设局部群的分歧主要来自限制标量（即按照定义5.1中的含义，它是本质非分歧的）。在这种情况下，PEL 型志村簇的分裂模型确实具有自然的模空间解释，并且在非常特殊层上是光滑的。事实上，它们为典范模型提供了自然的奇点消解。在整个引言中，我们用 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K}$ 表示层为 $K = K_pK^p$ 的志村簇分裂模型的几何特殊纤维的完美化，其中 $K_p = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ 表示仿抛物模型 $\mathcal{G}$ 的 $\mathbb{Z}_p$-值点。我们指出，引言中陈述的若干定理可以推广到本质非分歧情形之外。为便于阐述，我们将在整个引言中保留这一假设，并在正文中讨论推广情形。

利用分裂模型，我们得到以下两个主定理，它们证实了 Tate 猜想的若干情形，以及 [Zhu20，猜想 4。60]。更多细节以及文中未解释的符号，请参见定理 9。15 和推论 8。7。

定理 1.1。 设 $(\mathbb{G}, \mathbb{X})$ 是一个具有 *Hodge*余特征 μ 的 *PEL*型志村数据，假设$G := \mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$ 本质非分歧且具有连通中心，并且 $\mathcal{G}$ 是甚特殊仿抛物子群。假设 $B(G, \mu^*)$ 中的基本元素按定义 6。1 的意义是非常特殊的。那么：

(1) 基本*Newton*层 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}$ 是纯的，维数为 $\langle \rho, \mu \rangle$，其*Borel–Moore*同调同构于

$$\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) \cong C(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V_{\mu^*}^{\mathrm{Tate}_p}.$$

这里， $V_{\mu^*}^{\mathrm{Tate}_p} \subseteq V_{\mu^*}$ 是最高权为 μ^*的不可约 $\widehat{G}$表示的一个非平凡子空间，而 $\mathbb{G}'$ 是 $\mathbb{G}$的一个内形式，在有限位处是平凡的，并且在阿基米德位处模中心紧。

(2) 设 $\pi_f = \pi_{f,p}\pi_f^p$ 是一个不可约 $\mathcal{H}_{K,\mathbb{Q}_\ell}$-模。如果 p-分量$\pi_{f,p}$ 的 *Satake*参数是 V_{μ^*}一般的（按定义 9。12所述），则循环类映射在以下对象上的限制

π_f-等型分量

$$\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}})[\pi_f] \subseteq \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) \xrightarrow{\mathrm{cl}} \mathrm{H}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu\rangle))$$

是单射。

(3) 假设 $(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$ 给出一个紧酉群志村簇，并且 p 是一个分裂位，如 [SS13]所示。令 π_f^p 为一个不可约 $\mathcal{H}_{K^p,\ \mathbb{Q}_\ell}$-模。那么，循环类映射的 π_f^p -等型分量满射到

$$\sum_{\pi_p} T^{\langle\rho,\mu\rangle}(\pi_p\pi_f^p,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\pi_p\pi_f^p$$

如果 π_p 的 *Satake*参数全都强 V_{μ^*}-一般（定义 *9*9.12的意义下），其中 π_p 遍历局部 *Hecke* 代数 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ 的不可约表示，且满足 $\pi_p\pi_f^p$ 出现在 $C(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K,\mathbb{Q}_\ell)$。

这里， $T^{\langle\rho,\ \mu\rangle}(\pi_p\overline{\pi}_f^p,\ \mathbb{Q}_\ell)$ 表示 Sh $\pi_p\pi_f^p$中次数$\langle\rho,\ \mu\rangle$ 上同调的 -等型分量中的泰特类空间$^{\mathrm{spl}}_{\mu}$ ，$_K$；参见 §9.2。特别地，泰特猜想对这些 π_f^p成立。

R备注 1.2. 我们简要评论一下本定理中的假设 .

(1) 将（3）中的限制应用于 [SS13] 所考虑的志村簇，是因为所需的关于志村簇上同调的结果似乎尚未在其他（分歧）情形中出现。特别是，我们只考虑非内窥情形。很可能采用本文的方法，也能处理内窥情形，如 [XZ17, §23], 所述；前提是已知非常特殊层上的志村簇的稳定迹公式。预计 Haines–Zhou–Zhu 即将发表的工作中会给出这一结果。

(2) 假设 $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$ 本质非分歧，对于获得奇点消解至关重要。事实上，当 $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$ 是分歧酉群时，预计志村簇的典范整模型不允许存在光滑解消。（唯一的例外是 $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$ 为奇分歧酉群，且非常特殊仿抛物子群 $\mathcal{G}$并非绝对特殊，此时典范模型已经是光滑的 [HR20a]。）

(3) 与本引言中出现的其他陈述不同，我们只考虑 ℓ-进上同调层面的 Tate 猜想，因为该猜想在动机层面并无意义。利用晶体上同调，可以得到 Tate 猜想的 $\mathbb{Q}_p$-进版本；对于这一版本，我们的方法应当能得出与定理 1.1 类似的结果。由于在一定意义上，有限域上的 Tate 猜想与 ℓ 无关（参见 [Tat94，定理 2。9] 关于精确表述；使用晶体上同调时，该论证对 $\ell = p$同样适用），故此处略去细节。

定理 1.3。 设$(B,*,\mathcal{O}_B,V_i,(,)\ \mathscr{L}_i,h_i)$ 是 $i\in\{1,2\}$ 的（在 p 处整的）*PEL* 数据，从而给出志村数据$(\mathbb{G}_i,\mathbb{X}_i)$，其 *Hodge* 余特征为 μ_i。固定一个与 *PEL* 数据相容的同构 $V_1\otimes\mathbb{A}_f\cong V_2\otimes\mathbb{A}_f$，它诱导出同构 $\mathbb{G}_{1,\ \mathbb{A}_f}\cong\mathbb{G}_{2,\ \mathbb{A}_f}$。假设 $\mathbb{G}_{1,\ \mathbb{Q}_p}$ 本质非分歧，固定一个非常特殊抛物子群模型 $\mathcal{G}/\mathbb{Z}_p$ 以及一个层 $K=K^p\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)\subseteq\mathbb{G}_{1,\ \mathbb{A}_f}$。则存在一个自然映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}(\widehat{G}^I\sigma/\widehat{G}^I)}\left(\overline{V}_{\mu_1},\overline{V}_{\mu_2}\right)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{K^p}}\left(\mathrm{H}^{\langle 2\rho\ \mu_1\rangle}_c{}_{,K}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu_1\rangle)),\mathrm{H}^{\langle 2\rho\ \mu_2\rangle}_c{}_{,K}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_2},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu_2\rangle))\right)$$

与复合相容，其中 I 表示 $\mathbb{Q}_p$的惯性群。

尽管这两个定理针对的是志村簇的分裂模型，但它们直接推出了关于典范模型的类似陈述。事实上，由于分裂模型消解了典范模型，其上同调与典范模型的邻近循环的上同调一致。因此，雅凯–朗兰兹转移映射确实给出了 [Zhu20，猜想 4 中所要求的映射的（非导出版本）60]。此外，尽管 Tate 猜想通常针对光滑射影簇表述，但对于奇异簇也存在相应版本 [Jan90，猜想 73]。而且，如果 Tate 猜想对于此类奇异簇的奇点消解成立，那么

Tate 猜想对于该奇异簇也已经成立 [Jan90，定理 7.10]。因此，即使人们主要关注的是志村簇的典范模型，上述定理仍然具有相关性。

尽管使用分裂模型解决了上文提到的整体问题，但局部方面仍会出现另一个问题：志村簇的特殊纤维与仿射格拉斯曼量、仿射 Deligne–Lusztig 簇及局部 shtuka 模空间之间的联系，是典范模型所特有的。为解决这些问题，我们将定义仿射格拉斯曼量、仿射 Deligne–Lusztig 簇和局部 shtuka 模空间的分裂版本，将它们与志村簇分裂模型的特殊纤维联系起来，并研究其几何。

1.2. **分裂仿射格拉斯曼量与局部 shtuka 模空间。** 回顾一下，具有仿抛物层级的志村簇的特殊纤维存在局部模型，其 étale 局部奇点由部分仿射旗簇中舒伯特簇的并给出。文献 [PR05]中的分裂模型思想是通过对较小舒伯特簇（的并）取卷积积来解决这一问题。为了将下文的某些结果置于更自然的背景中，定义一个无界版本是有意义的，称为分裂仿射格拉斯曼尼亚。

现在我们转向局部情形，并固定一个非阿基米德局部域 F，以及其上的本质非分歧约化群 G over F，并带有非常特殊抛物子群模型 $\mathcal{G}$。若 $G = \mathrm{Res}_{F'/F} H$ for 某个全分歧扩张 F'/F、非分歧 F'-群 H 和约化 $\mathcal{O}_{F'}$-模型 $\mathcal{H}$，我们将分裂仿射格拉斯曼尼亚 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$ 定义为 $[F' : \mathrm{Gr}_{\mathcal{H}} = LH/L^+\mathcal{H} \cong \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ 的 $F]$ 重卷积积。一般而言，我们必须谨慎处理连通分支；精确定义请参见定义 5.9。存在一个到通常仿射格拉斯曼量 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ 的自然映射。为区分二者，我们将其称为典范仿射格拉斯曼量，并记作 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$。此外，$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$ 带有一个自然的 $L^+\mathcal{G}$-作用，相应的商可视为分裂海克堆栈。

（典范）仿射格拉斯曼量在局部朗兰兹对应中具有根本重要性，这要归功于几何Satake等价。它是 $L^+\mathcal{G}$-$\widehat{\ }$等变层在 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$上的范畴与朗朗兹对偶群的表示 G （或者在分歧情形下，朗朗兹对偶群的惯性不变量）之间的等价。利用将分裂格拉斯曼簇描述为卷积积的方式，我们也可以类似地描述其上的等变层，参见命题 5.15。

命题 1.4。 存在一个自然的交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Perv}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Perv}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I), \end{array}$$

其中竖直箭头分别由推前和表示的限制给出。

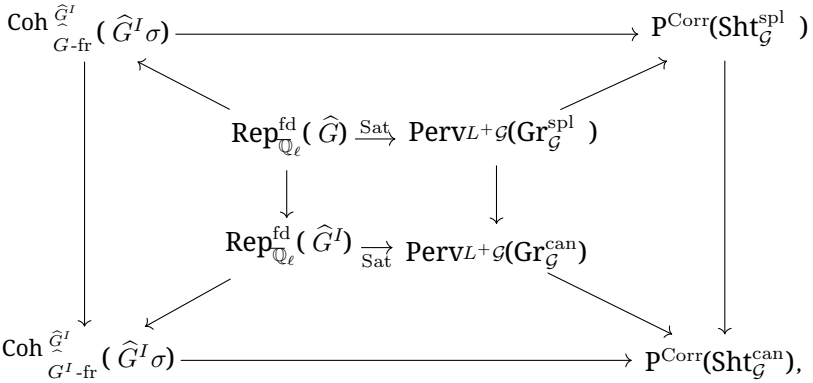
我们强调，尽管底部和右侧箭头对于 $\mathrm{Perv}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$ 上自然的卷积积是幺半的，范畴 $\mathrm{Perv}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}})$ 却不具有自然的幺半结构。相反，应将该命题视为一种几何方法，用以构造 $\widehat{G}^I$的表示；这些表示是 $\widehat{G}$的不可约表示的限制。事实上，尽管 $\widehat{G}^I$ 的简单表示对应于 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$中某些舒伯特簇上的交叉复形，但直接构造对应于$\prec G$-表示的限制的层则更为复杂。（另一种做法是使用邻近循环，如 [朱15]所述。但这会脱离$\mathbb{F}_q$上的完美几何范畴，因此不适用于我们当前的目的。）$\widehat{\ }$我们尤其关注这样一个 G-表示，其最高权是与某个Shimura 数据相关联的Hodge余特征的对偶，以及它在 $\widehat{G}^I$ 中的限制。

现在我们已有仿射格拉斯曼量和局部 Hecke 叠的分裂版本，便可以定义任何具有到（典范）局部 Hecke 叠映射的对象的分裂版本。这包括局部 shtuka 的模叠，我们将其记作 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} = LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} L^+\mathcal{G}$。

这里， σ 表示 F的算术 Frobenius。特别地，这两个对象都存在到 Kottwitz 叠 $LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} LG$的映射。在 Kottwitz 叠上分别对 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$ 和 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$取自纤维积，便得到 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$ 和 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$上的自然 Hecke 对应。按照 [XZ17，第 5.4], 节，我们可以定义范畴 $\mathrm{P}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}})$ 和 $\mathrm{P}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$，其对象分别是 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$ 和 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$上的纯粹层，其态射是支撑在上述 Hecke 对应上的上同调对应。详情请参见 §7.3。根据 h-下降，该范畴是 Kottwitz 叠上 ℓ-进层范畴的一种实现；这个 Kottwitz 叠参数化 G-等晶体，也就是说，它是 [Zhu20，朱25]中（猜想的）范畴化算术局部 Langlands 对应的可构造一侧。

通过应用一种类似于弗罗贝尼乌斯的范畴迹的构造，我们可以在 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$ and$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$上构造上同调对应，参见定理7。13。

定理 1.5。 设 G/F 是一个本质上非分歧拟分裂约化群，其仿抛子群为非常特殊仿抛子群 $\mathcal{G}/\mathcal{O}_F$。那么存在一个交换图



其中 $\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I}_{\widehat{G}\text{-fr}}(\widehat{G}^I\sigma) \subseteq \mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I}_{\widehat{G}^I\text{-fr}}(\widehat{G}^I\sigma) \subseteq \mathrm{Coh}(\widehat{G}^I\sigma/\widehat{G}^I)$是 $\widehat{G}^I\sigma/\widehat{G}^I$ 上凝聚层的子范畴，分别由从 $\widehat{G}$、$\widehat{G}^I$ 的表示拉回的自由向量丛生成。

根据 [vdH24b],，栈 $\widehat{G}^I\sigma/\widehat{G}$ 是来自[朱20]的局部朗兰兹参数栈的闭子叠。特别地，底部箭头是猜想中的范畴化局部Langlands对应的一部分。与该主题的大多数文献不同，我们强调这里没有关于分歧的任何假设，因此该定理也适用于野分歧群。事实上，对于一般的拟分裂群，该图表的下半部分均存在，无需假设 G 是本质非分歧的。

将底部箭头解释为范畴局部 Langlands 对应的一部分，意味着它应当是全忠实的。我们在此不讨论这个问题；不过，由于最左侧的箭头显然是全忠实的，这表明外层方框中的所有箭头都应当是全忠实的。对于最右侧的箭头，事实确实如此，我们在命题 7.9 中给出直接证明。因此，要构造图表的上半部分，只需在对象层面验证其分解，这很容易。尽管如此，对于定理 1.1 的应用，直接构造最上方的箭头仍然很重要。

1.3. **奇异 Hecke 对应**。 现在，让我们回到整体情形。为了应用定理 1.5 来证明定理 1.1 和1.3，我们将局部 shtuka 模空间之间的上同调对应拉回到志村簇上。为此，我们将在允许局部群发生分歧的情形下构造奇异 Hecke 对应。如前所述，我们将使用志村簇的分裂模型。由于奇异 Hecke 对应是通过局部 shtuka 模空间来刻画的，因此我们需要上一小节中引入的分裂局部 shtuka 模空间。

对 $i \in \{1,2\}$，设$(\mathbb{G}_i, \mathbb{X}_i)$为来自PEL 数据$(B, *, \mathcal{O}_B, V_i, (,)\ \mathscr{L}_i, h_i)$的两组志村数据。特别地，半单 $\mathbb{Q}$-代数 B 在两组PEL 数据中相同。记它们的反射域

为 $\mathbb{E}_i$，并将它们的霍奇余特征记为 μ_i。此外，我们固定一个与附加结构相容的同构 $V_1 \otimes \mathbb{A}_f \cong V_2 \cong \mathbb{A}_f$。由此得到一个同构$\mathbb{G}_{1,\mathbb{A}_f} \cong \mathbb{G}_{2,\mathbb{A}_f}$，从而 $\mathbb{G}_1$与 $\mathbb{G}_2$ 特别地在 p处同构。

通过使用模空间解释，[PR05] 定义了 Shimura簇的分裂整模型；记其在某个层级 $K \subseteq \mathbb{G}_1(\mathbb{A}_f) \cong \mathbb{G}_2(\mathbb{A}_f)$处特殊纤维的完美化为 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K}$。（在引言中，只需考虑它们在 $\mathbb{F}_p$上即可。）粗略地说，它们参数化带有 PEL结构的阿贝尔簇，以及其余切丛上的一个适当滤过。类似地，在 PEL 型情形下，我们可以证明，分裂局部 shtuka 的模空间的某个有界部分具有模空间解释，即用带有额外结构的 p-可除群来描述。为此，我们受到了 Hoff [Hof23a]的方法启发。通过使用这些模空间解释，我们可以构造奇异 Hecke 对应，参见定理4。7。

定理 1.6。令 $(\mathbb{G}_i, \mathbb{X}_i)$ 如上。假设 $\mathbb{G}_{1,\mathbb{Q}_p} \cong \mathbb{G}_{2,\mathbb{Q}_p}$ 是本质非分歧的，并令$\mathcal{G}$ 为甚特殊仿抛物子群模型。则存在一个具有笛卡尔方块的图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1,K} & \longleftarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_{\mu_2,K} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_1} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_2}, \end{array}$$

其中水平箭头可由归纳概形（完美适当）表示。这里，$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}$是分裂局部 *shtuka* 模空间之间一个适当的 *Hecke* 对应。

定理 1.6 的构造仅用到了 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K}$ 和 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_i}$的模空间解释。特别地，我们可以类似地构造来自 [RZ96] 的志村簇朴素整模型的特殊纤维 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_i,K}$ 之间的奇异 Hecke 对应。此外，自然映射 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_i,K}$ 的概形像与志村簇典范模型的特殊纤维一致。利用这一点，我们可以构造志村簇典范模型特殊纤维之间的奇异对应，作为自然映射 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$的概形像。详情请参见定理 4.7 。

事实上，关于$\mathbb{G}_1, \mathbb{Q}_p \cong \mathbb{G}_2, \mathbb{Q}_p$ 和 $\mathcal{G}$ 的假设可以大幅弱化：只需 [PR05] 中的分裂模型是平坦且绝对弱正规即可。本质非分歧情形下的一般仿抛物情形，以及某些分歧酉群情形，均已知这一点[BH25b]。对于更一般的酉群，这种分裂模型的修改版本很可能会具有奇异 Hecke 对应（并且这些对应会在典范模型之间诱导出奇异 Hecke 对应），但我们在此不作探讨。

结合定理 1.6 与定理 1.5中关于（分裂）局部shtuka模空间上的上同调对应的构造，我们得到定理1.3中的几何雅凯–朗兰兹对应。对于泰特猜想，我们可以借助 Rapoport–Zink一致化，得到一个类似于定理1.6中的图表，其中涉及更一般的 Hodge 型 Shimura 簇的分裂模型的特殊纤维，以及一个零维（弱）Shimura 簇（定理 9.6）。随后，可以将所得的雅凯–朗兰兹转移映射识别为循环类映射。为研究该映射的单射性和满射性，我们需要更精确地了解 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K}$的基本Newton层中的不可约分支。借助 Rapoport–Zink一致化，我们可以将问题归结为研究仿射 Deligne–Lusztig 簇的分裂版本的不可约分支。

1.4. **分裂仿射 Deligne–Lusztig 簇的不可约分支**。如上一小节所述，我们接下来的任务是介绍仿射 Deligne–Lusztig 簇的分裂版本。设 G/F 是一个本质非分歧约化群，且 $\mu \in X_*(T)^+$ 是一个优势余特征。那么我们有相应的舒伯特簇 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 和 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$，其中 $\mu_I \in X_*(T)^+_I$ 是 μ 的像。根据定义，与 及 （ G/F ）相关联的（典范）仿射 Deligne–Lusztig 簇

与 μ_I 和 $b \in G(\breve{F})$ 相关联的是

$$X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I}(b) := \left\{ gL^+\mathcal{G} \in LG/L^+\mathcal{G} \mid g^{-1}b\sigma(g) \in L^+\mathcal{G} \backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I} \right\} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} .$$

特别地，它有一个到 $L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I}$ 的映射，并且我们通过下述笛卡尔图定义与 μ 和 b 相关的分裂仿射 *Deligne–Lusztig* 簇：

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b) & \longrightarrow & L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq \mu} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\mathrm{can}}_{\leq,\mu_I}(b) & \xrightarrow[gL^+\mathcal{G}\mapsto g^{-1}b\sigma(g)]{} & L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I} . \end{array}$$

特别地，Shimura簇和仿射 Deligne–Lusztig 簇的分裂版本都是沿同一个映射拉回得到的。根据典范模型的 Rapoport–Zink一致化，这意味着 Shimura簇分裂模型特殊纤维的基本Newton层可由仿射 Deligne–Lusztig 簇的分裂版本进行 Rapoport–Zink一致化，定理 9。6。

要理解 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b)$ 的不可约分支，只需理解$X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu'_I}(b)$ 的几何（对一般的 $\mu'_I \leq \mu_I$ 而言），以及映射 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq \mu} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I}$ 的纤维。但这本质上是一个卷积态射，其纤维已得到充分理解，并且可以通过对偶群（的惯性不变量）的不可约表示的张量积中出现的重数，得到表示论上的解释；参见 [Hai03]。此外，在典范且（本质上）非分歧的情形下，仿射 Deligne–Lusztig 簇的不可约分支已由 [XZ17、Nie22、ZZ20]充分研究。由此得到以下定理，参见定理 6.11。我们用 $\mathbb{MV}^{\mathrm{can}}$ 和 $\mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}$ 表示典范仿射格拉斯曼量和分裂仿射格拉斯曼尼亚中的各种 Mirković–Vilonen 环的集合，它们构成 $\widehat{G^I}$ 和 G 的不可约表示的自然基。此外，$\lambda_b \in X_*(T)^{\Gamma_F}$ 表示 $b \in B(G)$ 的最佳整近似，其含义见 [HV18、ZZ20], 和 Γ_F：$=\mathrm{Gal}(F/F)$ 是 F 的绝对Galois群。

—

定理 1.7. 令 $\mu \in X_*(T)^+$ 和 $b \in B(G,\mu)$。存在如下自然的集合交换图

$$\begin{array}{ccc} J_b(F)\backslash \mathrm{Irr}^{\mathrm{top}}\, X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b) & \xrightarrow{\cong} & \bigsqcup_{\lambda \in X^*(\widehat{T}),\lambda_{\Gamma_F}=\lambda_b} \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I} J_b(F)\backslash \mathrm{Irr}^{\mathrm{top}}\, X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b) & \xrightarrow{\cong} & \bigsqcup_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I} \bigsqcup_{\lambda_I \in X^*(\widehat{T})_I,(\lambda_I)_{\Gamma_F}=\lambda_b} \mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(\lambda_I), \end{array}$$

其中水平映射均为双射。此外，右侧水平箭头的构造方式是：将最高权为 μ 的不可约 $\widehat{G}$ 表示分解为不可约 $\widehat{G}^I$ 表示，然后通过映射 $X_*(T) \to X_*(T)_I$ 比较权空间。

这一结果体现了分裂模型的另一项优势。在研究志村簇（定义在数域上）的上同调时，出现的是最高权为 Hodge余特征 μ^* （或其对偶）的 G 表示 V_{μ^*}，而非最高权为 μ^*_I 的 $\widehat{G}^I$ 表示 $V_{\mu^*_I}$。特别是，当利用志村簇上同调的已知结果推导 Tate 猜想的实例时，我们需要出现的是 V_{μ^*}，而不是 $V_{\mu^*_I}$。这对于 $X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu^*_I}(b)$ 不会发生，但对于 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu^*}(b)$ 则会发生。

此外，如果 b 是非常特殊的（其含义见定义6.1，这是对 [XZ17中的非分歧元素概念的推广§4.2] 到拟分裂情形），我们可以获得关于不可约分支的更精细信息，参见推论6.12。此外，为了应用于Tate 猜想，我们需要精确构造分裂仿射 Deligne–Lusztig 簇的不可约分支。这在§6.3中通过研究仿射 Deligne–Lusztig 簇与半无限轨道之间的关系，并从 G/F 为非分歧的情形出发逐步推广来完成；该情形已在 [XZ17,§4.4]中处理。

上述结果使我们很好地理解了志村簇分裂模型特殊纤维的循环类映射，至少对于基本Newton层中的闭链是如此。为了推出定理1.1，还需要理解群 $\widehat{G}^I$的某个 Chevalley 限制映射（如 [XZ17, §1.4]所述），以及志村簇上同调中的 Frobenius 作用（在一般纤维上，因此不涉及模型的选择）。由于我们的局部群本质非分歧，可以通过从 [XZ19]中的情形逐步推广来理解 Chevalley 限制映射。此外，紧致酉群志村簇的上同调已经在 [SS13], 中得到研究，而其中所采用的假设恰好对应于局部群本质非分歧。

1.5. **Langlands 纲领的动机方面**。 本文的另一个目标是说明， [XZ17] 中的构造可以在动机层面进行，即以 ´étale 上同调替代 ´étale 动机。这进一步佐证了 Langlands 纲领源自动机的猜想。更准确地说，定理1.5中 categorical local Langlands functor 的部分构造在动机层面同样成立。这是迈向算术范畴局部 Langlands 对应之动机精化的第一步，正如 [Zhu20，注释 441]所提出的。我们将在后续工作中详细阐述这一对应的动机性质。

回顾一下， [XZ17], 的主要上同调要素，也即本文的主要上同调要素，是几何Satake等价。在分歧群的情形下，这一等价的动机精化已在 [vdH24a]中构造。凭借这一额外结果，引言中陈述的大多数定理都可以精化到动机层面，详情请参见正文。作为一个具体应用，我们推导出， [Zhu20的猜想 460] 和定理 1.3 中的 Jacquet–Langlands 对应源自动机，因而独立于辅助素数 ℓ。此外，当志村簇分裂模型的特殊纤维是 proper 时，我们可以在这些特殊纤维的（有理化）高阶 Chow 群之间构造雅凯–朗兰兹转移，参见推论 8.4。通过应用刚性实现函子，我们还可以推导出它们的晶体上同调之间存在雅凯–朗兰兹转移。

注 1.8。 我们来阐明本文的论证与先前工作的关系，尤其是在使用动机时。

(1) 显然，我们的论证受到 [XZ17], 的启发；我们在（典范或分裂）局部 shtuka 的模空间上构造动机对应，其思路也与该文献中的构造相似。为了突出由此出现的动机方面的困难，尤其是与我们未将其平凡化的泰特扭曲有关的困难（参见引理 7。16，以及定理 $\widehat{G}^I q^{-1}\sigma/\widehat{G}^I$7。*13* 中出现的 $\widehat{G}^I\sigma/\widehat{G}^I$，而非定理 1。5 中的 ），我们详细阐述了定理 *1*。5 中函子的构造。不过，在验证我们构造的某些性质时，若无需新的想法，我们会参照 [XZ17] 。我们也借此机会说明， [XZ17], 中的若干论证，尤其是涉及受限局部 shtuka 模空间之间对应的论证，可以如何简化。

（2）在 [朱25], 朱构建了算术范畴局部 Langlands 对应中更大的一部分。他在 [朱25] 的研究在理念上类似于 [XZ17], ，都采用了弗罗贝尼乌斯的范畴迹，但依赖于更稳健、更普适的框架。我们沿用了 [XZ17], 的构造，因为我们需要处理阿贝尔范畴（动机的和/或分歧 Satake 等价的导出版本目前尚不可用），并且希望明确了解某些动机方面的困难如何出现以及如何得到解决。在即将开展的工作中，我们将重新研究算术范畴局部 Langlands 对应的动机精化，并阐明其与弗罗贝尼乌斯的范畴迹之间的关系。

(3) 最后，Yu [Yu22] 将 [XZ17] 的某些论证加以改进，使其适用于 $\mathbb{Z}_\ell$-层，并用它们为具有非平凡系数系统的志村簇的上同调构造了几何雅各特–朗兰兹转移。他的论证无法直接推广到动机的情形：在定理 1.3的情形中，他利用了 $\mathbb{G}_1$ 和 $\mathbb{G}_2$ 在 $\mathbb{Q}_\ell$上同构这一事实，这在使用 ℓ-进上同调时已足够。另一方面，我们使用的是带有 $\mathbb{Q}$-系数的动机，而在 $\mathbb{Q}$上， $\mathbb{G}_1 \cong \mathbb{G}_2$ 未必成立。

相反，鉴于我们主要研究 PEL 型志村簇，我们利用模空间解释，以动机论论证取代 [Yu 22] 的论证。这样仍可构造涉及非平凡局部系统的几何 Jacquet–Langlands 转移，而无须使用整系数；详情请参见定理 8.5 。

1.6. **概要**。现在我们概述本文的内容。

在§2中，我们回顾志村簇的朴素、典范和分裂局部模型及其整模型，并介绍相关的 PEL 数据。在此基础上，我们在§3 中定义各种（有界）局部 shtuka 的栈，并给出朴素情形和分裂情形下的模空间解释。利用这些结果，我们在§4中构造奇异 Hecke 对应。以上各节主要采用模空间论的方法。

接下来，我们转向一种更偏重群论的方法。在§5中，我们定义并研究本质非分歧群的仿射格拉斯曼量的分裂版本，并证明命题 1。4。随后，我们在§6中引入仿射 Deligne–Lusztig 簇的分裂版本，并研究其不可约分支。在§7中，我们引入分裂局部 shtuka 模空间栈的群论版本，并利用 [vdH24a]中的动机 Satake 等价，构造定理 1。5所述的动机对应。在这些章节中，我们主要使用取值于 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$的动机系数。但从§7.4起，我们将改用 $\mathbb{Q}$系数，以便应用彼得–外尔定理。 –

在本文的最后一部分，我们将所有内容综合起来。通过把局部 shtuka 模空间上的动机的对应拉回到奇异Hecke对应，我们构造动机 Jacquet–Langlands 转移于§8。而在§9中，我们推出志村簇分裂模型的特殊纤维上 Tate 猜想的通有情形。

最后，在附录 A中，我们回顾 ´平展动机理论，即本文通篇所使用的理论。我们还回顾上同调对应的概念。本附录的结果或许已广为人知，但我们仍将其收录，因为它们尚未以本文所需的具体形式出现在文献中。

1.7. **记号**。 在本文中，我们固定一个素数 p；在若干处将假定它为奇数，但并非在一般情况下都如此。我们将用 F 表示一个剩余特征为p的非阿基米德局部域，并固定一个一致化元 $\varpi \in F$。其整数环记作 $\mathcal{O}_F$，其剩余域记作$k = k_F \cong \mathbb{F}_q$，其伽罗瓦群记作 Γ_F =伽罗瓦群(F/F)，其惯性群记作 $I = I_F$。类似地，我们将剩余伽罗瓦群记作 Γ_k =伽罗瓦群(k/k)。此外，我们还固定（算术）q-弗罗benius $\sigma \in \Gamma_F$的一个提升，或等价地，取自然商的一个截面 $\Gamma_k \to \Gamma_F$ （该自然商为 $\Gamma_F \to \Gamma_k$）。

我们将 Perf_k 记为完美 k-概形的范畴，将 $\mathrm{AffSch}_k^{\mathrm{perf}} \subseteq \mathrm{Perf}_k$ 记为完美仿射 k-概形的子范畴。更一般地，对于环 R，我们将 AffSch_R 记为仿射 R-概形的范畴。对于完美 k-代数 R，我们有分歧维特向量环 $W_{\mathcal{O}_F}(R) := W(R) \widehat{\otimes}_{W(k)} \mathcal{O}_F$，以及其截断版本 $W_{\mathcal{O}_F,\, n}(R) := W_{\mathcal{O}_F}(R) \otimes_{\mathcal{O}_F} (\mathcal{O}_F/\varpi^{n+1})$（其中 $n \geq 0$）。这些分歧维特向量环带有自然的弗罗benius自同构，我们也将其记为 σ。

接下来，我们回顾一些群论记号。对于 F 上的光滑仿射群概形 H ，我们将其圈群记为 LH: $(\mathrm{AffSch}_k^{\mathrm{perf}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$: $\mathrm{Spec}\ R \mapsto H(W_{\mathcal{O}_F}(R) \otimes_{\mathcal{O}_F} F)$；它可由一个 ind-(完美概形) 表示 [Zhu17a，命题 1.1]。对于光滑仿射群概形$\mathcal{H}/\mathcal{O}_F$，我们有正环群 $L^+\mathcal{H}$: $(\mathrm{AffSch}_k^{\mathrm{perf}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$: $\mathrm{Spec}\ R \mapsto \mathcal{H}(W_{\mathcal{O}_F}(R))$。这是一个闭子群概形 LH [Zhu17a，引理 1.2], ，并且可由一个 pro-光滑仿射群概形表示。更准确地说，它是极限 $L^+\mathcal{H} := \varprojlim_n L^n\mathcal{H}$，其中 $L^n\mathcal{H}$: $(\mathrm{AffSch}_k^{\mathrm{perf}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$: $\mathrm{Spec}\ R \mapsto \mathcal{H}(W_{\mathcal{O}_F,n}(R))$ 是截断环群。随后，我们将 ´etale 层化 $(LH/L^+\mathcal{H})^{\text{ét}} =: \mathrm{Fl}_{\mathcal{H}}$ （作为函子 $(\mathrm{AffSch}_k^{\mathrm{perf}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$）称为 $\mathcal{H}$ 的仿射旗簇。

现在，假设 $H = G$ 是约化的，且 $\mathcal{G}/\mathcal{O}_F$ 是一个仿抛模型，对应于$\mathbf{f}$ 在 H的布鲁哈-蒂茨建筑中的一个面。我们将始终固定一个极大分裂环面 $A \subset G$、一个包含 A的极大F-分裂环面 S，并令 $T := \mathrm{Cent}_G H$，它是一个极大环面。我们用 $X_*(-)$表示余特征群，用 $X^*(-)$表示特征群。我们将 Iwahori– Weyl 群记为 $\tilde{W} = \mathrm{Norm}_G(S)(\breve{F})/\mathcal{T}(\breve{\mathcal{O}}_F)$，其中 $\mathcal{T}$是 T的连通 N´eron 模型，它自动包含于 $\mathcal{G}$中。令 $W_{\mathbf{f}} = \left(\mathrm{Norm}_S(G)(\breve{F}) \cap \mathcal{G}(\breve{\mathcal{O}}_F)\right)/\mathcal{T}(\breve{\mathcal{O}}_F) \subseteq \tilde{W}$表示

对应于 $\mathbf{f}$的子群，因此 $L^+\mathcal{G}$在 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$(基变换至谱 k后）的轨道由~ $W_{\mathbf{f}}\backslash W/W_{\mathbf{f}}$ [Ric13，命题 2。8]; 我们将此分解记为

$$\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} = \bigsqcup_{w\in W_{\mathbf{f}}\backslash\tilde{W}/W_{\mathbf{f}}} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}\,.$$

这样的轨道称为舒伯特胞腔，我们将其闭包（称为舒伯特簇）记为 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},\leq w} = \bigsqcup_{w'\leq w}\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w'}$，其中 $\leq$ 表示布鲁哈特偏序。对于 $\mu\in X_*(T)$，我们将 [Rap05，(3.6)] 中的μ-可容许子集记为 $\mathrm{Adm}^{\mathbf{f}}_{\mu}$，并记 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} := \bigsqcup_{w\in\mathrm{Adm}^{\mathbf{f}}_{\mu}}\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}\subseteq\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$。我们~ ~将由 W 的拟 Coxeter 结构导出的长度函数记为 $l\colon W\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$，并将其延拓到双陪集空间，经由

$$l\colon W_{\mathbf{f}}\backslash\tilde{W}/W_{\mathbf{f}}\colon w\mapsto\max_{v\in W_{\mathbf{f}}}\min_{v'\in W_{\mathbf{f}}} l(vwv').$$

于是轨道 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}$ 的维数为 $l(w)$ [Ric13，命题 2.8]。

当 $H=G$ 为约化且 $\mathcal{H}=\mathcal{G}$ 为非常特殊抛物子群模型（在 [Zhu15，定义 6.1]的意义下）时，我们也将记 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}=\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$，并称之为 $\mathcal{H}$ 的（典范、扭曲）仿射格拉斯曼量（我们将始终使用下标 can，以便将其与定义 5.9 中引入的分裂仿射 Grassmannian 区分开来）。这样的约化群 G 自动是拟分裂的 [Zhu15，引理 6.1], ，并且我们固定一个博雷尔子群 $T\subseteq B\subseteq G$，由此得到支配余特征的概念 $X_*(T)^+\subseteq X_*(T)$。此外， $X_*(T)$ 配备有 Γ_F-作用，并且惯性余不变量 $X_*(T)_I$也容许一个 B-占优元素子集 $X_*(T)^+_I$。将自然配对 $X^*(T)\times X_*(T)\to\mathbb{Z}$ 记为 $\langle -,-\rangle$。该配对是 I-不变的，因而下降为一个配对$X^*(T)\times X_*(T)_I\to\mathbb{Z}$。采用上述记号， $W_{\mathbf{f}}=W^I$同构于（绝对）有限魏尔群 W的惯性不变量，并且我们有 $W_{\mathbf{f}}\backslash\tilde{W}/W_{\mathbf{f}}\cong X_*(T)^+_I$。我们将相应的舒伯特胞腔和舒伯特簇记为 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},(\leq)\mu_I}$，其维数为 $\langle 2\rho,\mu_I\rangle$，其中 ρ是 G 的正绝对根（相对于 B）的半和。对于元素 $\lambda\in X_*(T)$，我们将其在惯性余不变量中的像记为 $\lambda_I\in X_*(T)_I$。一般地，为了明确我们是在 $X_*(T)$ 还是 $X_*(T)_I$中工作，我们将 $X_*(T)_I$中的元素用下标 $(-)_I$来标记，即使它们并非来自 $X_*(T)$中的某个固定提升。采用这一记号，我们有 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}=\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$。

1.8. **致谢**。 感谢 Remy van Dobben de Bruyn、Arnaud Eteve、Tom Haines、Manuel Hoff、Pol van Hoften、Timo Richarz、Peter Scholze、Torsten Wedhorn、Liang Xiao、Jize Yu、Mingjia Zhang、Rong Zhou 和 Xinwen Zhu 与我进行了有益的交谈，和/或对本文早期版本提出了宝贵意见。本项目始于我在达姆施塔特工业大学攻读博士期间，当时我获得了欧盟地平线2020研究与创新计划项下欧洲研究理事会（ERC）的资助（资助协议编号 101002592），以及代数学 LOEWE 教授职位的支持（通过 Timo Richarz），项目编号 LOEWE/4b//519/05/01.002(0004)/87。本项目在波恩的马克斯·普朗克数学研究所完成，感谢该研究所提供的热情接待和优越的工作条件。

2. Models of Shimura varieties

本文的主要目标之一是研究志村簇的分裂模型的几何，因此我们首先回顾必要的定义。凡是使用 PEL 型志村簇时，我们都假设 $p\neq 2$；特别地，本节始终采用这一假设。

2.1. **PEL与分裂数据**。 我们先回顾志村簇的模空间诠释中出现的数据。

记号 2.1。 本文始终考虑以下几种 PEL 数据。

(1) 局部有理 PEL 数据是一个元组（B、$*$、V、$(\ ,\ )$ μ），其中 B是带对合的有限维半单$\mathbb{Q}_p$-代数， V是有限的（左） B-模，且（、）是满足（bv、w） $=$（v、b^*w）的 $V\times V\to\mathbb{Q}_p$非退化交替双线性形式，其中 v、$w\in V$和 $b\in B$。该

通过以下方式在 $\mathbb{Q}_p$ 上定义代数群 G

$$G(R)=\left\{g\in \mathrm{GL}_B(V\otimes_{\mathbb{Q}_p}R)\mid (gv,gw)=c(g)(v,w),c(g)\in R^\times\right\},$$

我们始终假设其为连通的。于是，μ 是一个余特征 μ: $\mathbb{G}_m\to G$，定义在 $\mathbb{Q}_p$的某个有限扩张上，其定义域为 $E/\mathbb{Q}_p$；其剩余域记为$k_E\cong\mathbb{F}_q$。在这样的有限扩张上，我们得到一个特征子空间分解，并且只假设可能出现权 0 和 1，即我们有 $V=V_0\oplus V_1$；特别地，μ 是微小的。最后，对于上述局部有理 PEL 数据，我们将 B的中心记为 F，并将 $*$下的不变量记为 $F_1\subseteq F$。

(2) 一个局部整 PEL 数据（细化了（B，$*$，V，(,) μ））由一个 *-稳定的极大阶$\mathcal{O}_B\subseteq B$以及 V [RZ96，定义 3.4]中的 $\mathcal{O}_B$-格的一个自对偶（关于(,)）多重链 $\mathscr{L}$ 组成。令 $\mathcal{G}/\mathbb{Z}_p$ 为 $\mathscr{L}$的自同构群；这是一个光滑仿射群概形，其一般纤维为 G，其单位连通分支是仿抛抄 [SW20，注 21.6.7]，，并且我们假设 $\mathcal{G}$ 实际上是一个连通的 Bruhat–Tits 稳定子群概形。我们记 $K_p:=\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)\subseteq G(\mathbb{Q}_p)$，它是 $\mathscr{L}$的稳定子。

(3) 全局有理 PEL 数据由一个元组 $(B,*,V,(,)\ h)$ 构成，其中 B是一个带有正 involution 的有限维半单 $\mathbb{Q}$-代数 B $*$，而 V是一个有限维左 B-模，其上有非退化双线性型 (,):
$V\times V\to\mathbb{Q}$，满足对于 $v,w\in V$和 $b\in B$，$(bv,w)=(v,b^*w)$。最后，h: $\mathbb{C}\to\mathrm{End}_{B\otimes\mathbb{R}}(V\otimes\mathbb{R})$是一个 $*$- 同态，使得对称双线性型 $(V\otimes\mathbb{R})\times(V\otimes\mathbb{R})\to\mathbb{R}$: $(v,w)\mapsto(v,h(i)w)$ 是正定的。
上述数据通过以下方式定义了一个在 $\mathbb{Q}$上的代数群 $\mathbb{G}$

$$\mathbb{G}(R)=\{x\in \mathrm{GL}_B(V\otimes_{\mathbb{Q}}R)\mid (gv,gw)=c(g)(v,w),c(g)\in\mathbb{Q}\}.$$

与局部情形一样，我们假设 $\mathbb{G}$是连通的（这相当于排除 Kottwitz 分类中的 D 型），但现在还假设 $\mathbb{G}$满足 Hasse 原理（即 $H^1(\mathbb{Q},\mathbb{G})\to\prod_v H^1(\mathbb{Q}_v,\mathbb{G})$ 是单射）。那么，上述全局有理 PEL 数据定义了一个反射域为 $\mathbb{E}$的 Shimura 数据 $(\mathbb{G},\mathbb{X})$。我们将相关 Shimura簇在（充分小的）层 $K\subseteq\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$上的典范 $\mathbb{E}$模型记为 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\mathbb{X})$。

(4) 最后，一个整体整（在 p 处）PEL 有理数据由整体有理数据以及一个局部整数据构成；后者细化了局部有理数据，而该局部有理数据是将整体数据基变换到 $\mathbb{Q}_p$ 后得到的（并且 μ 由 h 诱导）。注意，此时我们有 $G=\mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$。在这种情形下，我们还将固定 $\mathbb{E}$ 上方的一个素位 $\mathfrak{p}$，以及 p 的 $\mathfrak{p}$-进完备化 $E:=\mathbb{E}_{\mathfrak{p}}$。此外，$K^p\subseteq\mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)$ 表示一个充分小的紧开子群，并且 $K:=K^pK_p$。

回忆一下，若 $\Lambda\in\mathscr{L}$ 蕴含 $\hat{\Lambda}\in\mathscr{L}$，则称 $\mathscr{L}$ 自对偶；这里，$\hat{\Lambda}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda,\ \mathbb{Z}_p)$ 在同构 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V\otimes\mathbb{Q}_p,\ \mathbb{Q}_p)\cong V\otimes\mathbb{Q}_p$ 下的像，而该同构由 (，) 诱导。

注 2.2. (1) 我们假设 Hasse 原理成立，以确保下文通过模空间解释定义的志村簇与 Deligne 意义下的志村簇一致（否则，它们将是这类志村簇的不交并）。本文中的许多技巧在不作此假设的情况下仍应适用，具体细节留给有兴趣的读者。

(2) 给定一个全局整 PEL 数据 $(B,*,V,(,)\ h,\mathcal{O}_B,\mathscr{L})$，我们可以得到第二个全局整 PEL 数据 $(\mathbb{Q},*,V,(,)\ h,\mathbb{Z}_p,\mathscr{L})$。相应的代数群 $\mathbb{G}'/\mathbb{Q}$与 $\mathrm{GSp}(V)$ 一致，并且存在自然的闭浸入 i: $\mathbb{G}\subseteq\mathbb{G}'$，它与余特征 μ相容。此外，显然有 $K_p=i^{-1}(\mathrm{GSp}(\mathscr{L})(\mathbb{Z}_p))\cap G(\mathbb{Q}_p)$。

定义分裂结构时将使用以下记号。

记号 2.3. 固定如上所述的一个局部整 PEL 数据。
(1) 令 Υ 表示同态 $F\to\mathbb{Q}_p$ 的集合；对于 $\tau\in\Upsilon$，记 $F_\tau:=\tau(F)$ 和 $F_\tau^+:=\tau(F^+)$ 为它们在 $\mathbb{Q}_p$ 中的像。(2) 我们用 $\sim$ 表示 Υ上的等价关系，使得当它们在 F^+ 上的限制属于同一个伽罗瓦群$(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$-轨道时，$\tau\backsim\tau'$。

(3) 对于每个等价类 $[\tau]$，我们固定一个代表元 τ，并记 $F^+_{[\tau]} := F^+_\tau$ 和 $F_{[\tau]} := F^+_{[\tau]} \otimes_{F^+} F$。于是有 $F \cong \prod_{[\tau]\in\Upsilon/\sim} F_{[\tau]}$ 和 $F^+ \cong \prod_{[\tau]\in\Upsilon/\sim} F^+_{[\tau]}$。对整数环 $\mathcal{O}_F$ 和 $\mathcal{O}_{F^+}$，以及 $\{F^+, F, \mathcal{O}_{F^+}, \mathcal{O}_F\}$ 中某个环上的任意模（例如 $V \otimes \mathbb{Q}_p$），也存在类似的分解。

(4) 对于等价类 $[\tau] \in \Upsilon/\sim$，我们固定其元素的一个排序 $(\tau_{[\tau],i})_{i=0,\dots,[F_{[\tau]}:\mathbb{Q}_p]-1}$，使得任意两个在 F^+ 上具有相同限制的元素彼此相邻。

(5) 我们定义整数 $(r_\tau)_{\tau\in\Upsilon}$，使得对任意 $a \in F$，我们有

$$\det(T - a \mid V_1) = \prod_{\tau\in\Upsilon} (T - \tau(a))^{r_\tau}.$$

注意，对每个 $\tau \in \Upsilon$，$F_{[\tau]}$-模 $V_{[\tau]}$ 是秩为 $r_\tau + r_{\tau\circ *}$ 的自由模。

(6) 最后，我们用 E^{Gal} 表示 E 在 $\mathbb{Q}_p$ 中的伽罗瓦闭包；它包含所有 F_τ。

对任意正规化 $\mathcal{O}_B$ 的 $b \in B^\times$，以及任意 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$-模 M，用 M^b 表示其沿同构 $\mathcal{O}_B \to \mathcal{O}_B$: $x \mapsto b^{-1}xb$ 的限制标量。

定义 2.4. 固定一个局部整 PEL 数据，并令 S 为任意 $\mathcal{O}_E$概形。一个带极化 $\mathscr{L}$-模的 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$-集合是一个函子

$$\underline{\mathscr{H}} \colon \mathscr{L} \to \mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S\text{-}\operatorname{Mod} \colon \Lambda \mapsto \mathscr{H}_\Lambda,$$

带有$\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$-线性的周期性同构

$$\theta^b_\Lambda \colon \mathscr{H}^b_\Lambda \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_{b\Lambda},$$

满足以下条件:

(1) 每个 $\mathscr{H}_\Lambda$ 都是有限局部自由的 $\mathcal{O}_S$-模。(2) 对每个 $\Lambda \in \mathscr{L}$，存在一个完美配对 $\mathscr{H}_\Lambda \times \mathscr{H}_{\hat\Lambda} \to L$，它诱导出一个同构$\mathscr{H}_\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^\vee_{\hat\Lambda} \otimes L$，其中线丛 L 定义在 S 上（与 $\Lambda \in \mathscr{L}$无关）。此外，这些同构还必须以自然的方式相容（参见 [Lan18，定义 2.1.12 (5)]）。

请注意，这个可逆线丛并未出现在 [RZ96、Lan18], 中，但对我们而言是必要的[SW20，注 21.6。3]。

现在我们可以定义分裂结构。此定义与 [Lan18，定义 2.3 略有不同。3], 但它可以直接应用于局部模型，而不只是 Shimura簇的整模型。

定义 2.5。设 S 为一个 $\mathcal{O}_E$-概形，且 $\mathscr{H}$为一组带极化的 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$-模。对于 $\mathscr{H}$，一个分裂结构由数据 $\left\{(\mathscr{F}^i_{[\tau]},\ j^i_{[\tau]})_{[\tau]\in\Upsilon/\sim} \mid 0 \le i < [F_{[\tau]} \text{组成}:\ \mathbb{Q}_p]\right\}$ 如下:

(1) 对每个 $[\tau] \in \Upsilon/\sim$和 $0 \le i < [F_{[\tau]}:\mathbb{Q}_p]$，对象 $\mathscr{F}^i_{[\tau]}$是一个函子

$$\mathscr{L} \to \mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S\text{-}\operatorname{Mod} \colon \Lambda \mapsto \mathscr{F}^i_{\Lambda,[\tau]},$$

且 $j^i_{[\tau]} = \{j^i_{\Lambda,[\tau]}\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ 由单射 $\mathscr{F}^i_{\Lambda,\ [\tau]} \hookrightarrow \mathscr{H}_{\Lambda,\ [\tau]}$组成。

(2) 每个 $\mathscr{F}^i_{\Lambda,\ [\tau]}$和 $\mathscr{H}_{\Lambda,\ [\tau]}/\mathscr{F}^i_{\Lambda,\ [\tau]}$都是有限局部自由的 $\mathcal{O}_S$-模。(3) 设 $\Lambda \in \mathscr{L}$和 $[\tau]_{\mathbb{Q}_p} \in \Upsilon/\sim$。那么对于每个 $0 \le i < [F_{[\tau]}:\mathbb{Q}_p]$，我们有 $\mathscr{F}^{i+1}_{\Lambda,\ [\tau]} \subseteq \mathscr{F}^i_{\Lambda,\ [\tau]}$（其中 $\mathscr{F}^{[F_{[\tau]}:\ \Lambda}_{[\tau]} = 0$），且该商是秩为 $r_{\tau_{[\tau],\ i}}$ 的局部自由 $\mathcal{O}_S$-模；此外，对于任意 $a \in \mathcal{O}_{F_{[\tau]}}$，它都被 $a \otimes 1 - 1 \otimes \tau_{[\tau],\ i}(a)$ 所湮灭。

(4) 设 $\Lambda, [\tau], i$ 如上，并设 $b \in B^\times$ 正规化 $\mathcal{O}_B$。那么周期性同构 $\theta^b_\Lambda \colon \mathscr{H}^b_\Lambda \cong \mathscr{H}_{b\Lambda}$ 限制为 $\mathscr{F}^i_{\Lambda,[\tau]}$的周期性同构，即存在一个

（必然唯一的）交换图表

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{F}^i_{\Lambda,[\tau]})^b & \longrightarrow & (\mathscr{H}_{\Lambda,[\tau]})^b \\ {\scriptstyle \theta^{b,i}_{\Lambda,[\tau]}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta^b_\Lambda} \\ \mathscr{F}^i_{b\Lambda,[\tau]} & \longrightarrow & \mathscr{H}_{b\Lambda,[\tau]}. \end{array}$$

(5) 行列式条件成立，即多项式 $\det_{\mathcal{O}_S}(a \mid \mathscr{F}^0_{\Lambda,\,[\tau]}) = \det_{\mathcal{O}_S}(a \mid V_1)$ 在 $a \in \mathcal{O}_B$ 中相等。

(6) 设 Λ，$[\tau]$，i 如常，并考虑完美配对 $\mathscr{H}_{\Lambda,\,[\tau]} \times \mathscr{H}_{\hat{\Lambda},\,[\tau]} \to L$。则在此配对下，$\mathscr{F}^i_{\Lambda,\,[\tau]}$ 的正交补 $(\mathscr{F}^i_{\Lambda,\,[\tau]})^\perp$ 满足

$$\left(\prod_{k=0}^{i}(a\otimes 1 - 1\otimes \tau_{[\tau],k}(a))\right)\left((\mathscr{F}^i_{\Lambda,[\tau]})^\perp\right) \subseteq \mathscr{F}^i_{\hat{\Lambda},[\tau]},$$

对任意 $a \in \mathcal{O}_{F_{[\tau]}}$ 和 $0 \le i \le [F_{[\tau]}:\ \mathbb{Q}_p]$ 可被 $[F_{[\tau]}$ 整除：$F^+_{[\tau]}]$。

存在 分裂结构的同构的显然概念，参见 [Lan18，定义 2.3。5] .

2.2. **局部模型。** 局部模型最早是在 PEL 情形下系统研究的，见 [RZ96],其目的是刻画 Shimura 簇整模型及其特殊纤维的奇点。固定一个局部整 PEL 数据；于是可以为它赋予各种局部模型。下述定义出自 [RZ96，定义 3。27]。

定义 2.6。 朴素局部模型 $\mathscr{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\,\preccurlyeq\mu}$ 是表示如下函子的射影 $\mathcal{O}_E$-概形：该函子将概形 S 映为以下数据（视同构而定）：

(1) 一个函子 $\mathscr{L} \mapsto \mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$- 模：$\Lambda \mapsto t_\Lambda$；

(2) 一个自然变换 φ_Λ：$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S \to t_\Lambda$。

此外，这些数据还必须满足以下条件：

(1) 每个 t_Λ 都是有限局部自由的 $\mathcal{O}_S$-模；(2) 每个 φ_Λ 都是满射；(3) 自然的周期性同构 $\Lambda^b \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S \cong b\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ 通过 φ_Λ 和 $\varphi_{b\Lambda}$诱导出（必然唯一的）周期性同构 $t^b_\Lambda \cong t_{b\Lambda}$。(4) 有多项式 $\det_{\mathcal{O}_S}(b \mid t_\Lambda) = \det_L(b \mid V_0)$ 在 $b \in \mathcal{O}_B$ 中相等；(5) 复合映射 $t^\vee_\Lambda \xrightarrow{\varphi^\vee_\Lambda} (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S)^\vee \cong \hat{\Lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\varphi_{\hat{\Lambda}}} t_{\hat{\Lambda}}$ 为零。

如果 G 在非分歧扩张上不分裂，则局部模型 $\mathscr{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\,\preccurlyeq\mu}$ 通常不是 $\mathcal{O}_E$ [Pap00]上的平坦模型。相反，我们可以如下得到一个平坦模型。

定义 2.7。 典范局部模型 $\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\,\preccurlyeq\mu}$ 是其一般纤维在 $\mathscr{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\,\preccurlyeq\mu}$中的概形闭包的绝对弱正规化，$\preccurlyeq\mu$。换言之，它是 $\mathscr{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\,\preccurlyeq\mu}$中与其一般纤维相同的唯一平坦闭子概形的绝对弱正规化 $\preccurlyeq\mu$ Gro65，命题 2.8。5]。

回忆一下，如果到某个概形的每个泛同胚都是同构，则称该概形为绝对弱正规。此外，对于任意概形，到它的泛同胚所成的范畴都有一个始对象，称为它的绝对弱正规化。

将这个典范局部模型与局部模型的群论定义进行比较会很有用。回忆一下， [SW20猜想 21.4 中提出的（概形态）局部模型，1], 其存在性已在 [AGLR22、GL24]中得到证明。

命题 2.8. 典范局部模型 $\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\,\preccurlyeq\mu}$ 与来自 [SW20，猜想 21.4 的局部模型一致1]。

证明。 朴素局部模型 $\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{naive}}{}_{,\preccurlyeq\mu}$ 在 $\mathcal{O}_E$ 上是射影的，因此典范局部模型同样如此。由定义，$\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}{}_{,\preccurlyeq\mu}$ 是绝对弱正规的，其平坦性源于 [AGLR22，命题2.18 (1)]。

现在，设 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{BD}},_{\mathcal{O}_E}$ 为来自 [SW20, §20.3]，、定义在 Spd $\mathcal{O}_E$ 上的贝林森–德林费尔德格拉斯曼簇。由 [SW20, 推论 21.6.10]，，存在闭浸入 $\mathscr{M}$朴素$_{\mathcal{G}}{}^{\diamondsuit}{}_{,\preccurlyeq\mu} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{BD}},_{\mathcal{O}_E}$，它诱导同构 $\mathscr{M}^{\mathrm{naive}},_{\mathcal{G}}{}^{\diamondsuit}{}_{,\preccurlyeq\mu} \cong \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{BD}},_{E,\mu}$（在基变换到 Spd E 之后）；这里 $(-)^{\diamondsuit}$ 是 [SW20, §18.1]中定义的函子。由于 $(-)^{\diamondsuit}$ 保持闭浸入，并且在取绝对弱正规化下不变 [AGLR22, 引理 2.13]，，我们还有闭浸入

$$\mathscr{M}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{can},\diamondsuit} \hookrightarrow \mathscr{M}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{naive},\diamondsuit} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mathcal{O}_E}^{\mathrm{BD}}.$$

根据定义，v-层局部模型 $\mathbb{M}_{\mathcal{G}\,\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{AGLR}}$，来自 [AGLR22, 定义 4.11]，是 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{BD}},_{E,\mu}$ 在 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{BD}},_{\mathcal{O}_E}$ 内的 v-闭包，即 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{BD}},_{\mathcal{O}_E}$ 的包含 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{BD}},_{E,\mu}$ 的最小闭子v-层。特别地，存在闭浸入 $\mathbb{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{AGLR}},_{\preccurlyeq\mu} \hookrightarrow \mathscr{M}^{\mathrm{can}}$，$_{\mathcal{G}\,\preccurlyeq\mu}{}^{\diamondsuit}$，，它在一般纤维上诱导一个同构。由 [AGLR22, 定理 7.21] 与 [GL24, 推论 1.4]，，存在一个正规平坦射影 $\mathcal{O}_E$-概形 $\mathscr{M}_{\mathcal{G}\,\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{AGLR}}$，配备同构 $\mathscr{M}$AGLR$_{\mathcal{G}}{}^{\diamondsuit}{}_{,\preccurlyeq\mu} \cong \mathbb{M}_{\mathcal{G}\,\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{AGLR}}$，；这正是满足 [SW20, 猜想 21.4.1]的概形局部模型。

根据 [AGLR22，定理 2.16]，闭浸入 $\mathbb{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{AGLR}},_{\preccurlyeq\mu} \hookrightarrow \mathscr{M}^{\mathrm{can}},_{\mathcal{G}\,\preccurlyeq\mu}{}^{\diamondsuit}$ 可提升为唯一的态射α：$\mathscr{M}$AGLR$_{\mathcal{G}},_{\preccurlyeq\mu} \to \mathscr{M}can_{\mathcal{G}},_{\preccurlyeq\mu}$。我们断言 α 是同构。由于两个概形都是绝对弱正规，只需证明 α 是万有同胚。由$\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$的平坦性以及 α的适当性，只需证明 α 是普遍单射。这可以在 Spec $\mathcal{O}_E$ 上逐纤维检验；由于我们已经知道 α 在一般纤维上诱导同构，只需检验特殊纤维。特别地，根据 [BS17, 引理 3.4]，，我们可以转而考察完美化。但由于 $\alpha^{\diamondsuit}$ 是闭浸入，按定义它是单态射 [（Sch17，定义 5.6]），因此 $\alpha^{\diamondsuit}$ 在域值点上诱导单射，故根据 [SW20，命题 18.3.1]，α 也满足同样性质。这意味着 α 是普遍单射，证明完毕。□

推论 2.9. 典范局部模型$\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}{}_{,\preccurlyeq\mu}$ 是正规的。

证明。 这由 [GL24，推论 14]得出。 □

推论 2.10. $\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}{}_{,\preccurlyeq\mu}$ 的特殊纤维的完美化与仿射旗簇$\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \subseteq \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$的 μ-可容许轨迹一致。

证明。 由命题2.8，这由 [AGLR22，定理 616]得出。 □

最后，我们有分裂局部模型，引入于 [PR05， §14]。设 Λ 为 $\mathscr{L}$-集，即极化 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$-模的集合，由 $\Lambda \mapsto \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$给出。

定义 2.11. 该分裂局部模型 $\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}{}_{,\preccurlyeq\mu}$ 是射影 $\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$-概形，它表示将概形 S 映到 Λ的分裂结构的同构类集合的函子。 —

本文中，我们将始终通过从朴素模型和分裂模型的类似结果推导典范模型的结果来开展研究；由于这些模型具有模空间解释，因此更容易处理。为此，我们经常假设分裂模型是平坦且绝对弱正规。尽管这一点并非普遍成立（正如 [PR05，§14], 所指出的，正交群和分歧酉群可能会带来问题），但在许多情形下这一点已得到证实。关于相关例子，请参见 [PR05、BH23、BH25b、SZ25]；此外，我们将在下文的例2.15中重点介绍一些分裂模型甚至是光滑的例子。

假设 2.12。 分裂模型 $\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}{}_{,\preccurlyeq\mu}$ （附属于固定的局部整 PEL 数据）在 $\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$上是平坦的，并且是绝对弱正规。

总是存在一个自然映射 $\mathscr{M}_{\text{分裂}\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathscr{M}^{\text{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$，它将分裂结构映射为赋值

$$\Lambda \mapsto \left(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S\right) / \left(\bigoplus_{[\tau]\in\Upsilon/\sim} \mathscr{F}^0_{\Lambda,[\tau]}\right).$$

如果我们进一步假设 2.12成立，则此映射唯一地经由 $\mathscr{M}^{\text{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$分解，从而得到映射 s

$$\mathscr{M}^{\text{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathscr{M}^{\text{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathscr{M}^{\text{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}.$$

此外，仿抛物群概形 $\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ 作用于这三个局部模型（对于分裂模型，我们还需要进一步基变换到 $\mathcal{O}_{E^{\text{Gal}}}$），上述映射均为等变映射。

引理 2.13。 在假设 2.12下，典范模型 $\mathscr{M}^{\text{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 是自然映射 $\mathscr{M}^{\text{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathscr{M}_{\text{朴素}\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 的概形像的绝对弱正规化。

证明。 由于根据假设 $\mathscr{M}^{\text{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 是平坦的，它就是其一般纤维在自身中的概形闭包。此外，$\mathscr{M}_{\text{分裂}\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathscr{M}^{\text{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 在一般纤维上诱导同构（相差一次基域变换）。因此，$\mathscr{M}_{\text{分裂}\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathscr{M}_{\text{朴素}\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 的概形闭包就是其一般纤维在 $\mathscr{M}^{\text{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 中的概形闭包。再取绝对弱正规化，所得恰为典范局部模型。□

对于下一个推论，我们将处理局部模型的特殊纤维的完美化。由于绝对弱正规化映射是泛同胚，它们在完美化之后成为同构，因此自然映射 $(\mathscr{M}^{\text{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu})^{\text{perf}}_{\mathbb{F}_q} \to (\mathscr{M}_{\text{朴素}\mathcal{G},\preccurlyeq\mu})^{\text{perf}}_{\mathbb{F}_q}$ 是一个闭浸入。

推论 2.14. 在假设 2.12 下，自然映射 $(\mathscr{M}_{\text{spl}\,\mathcal{G},\preccurlyeq\mu})^{\text{perf}}_{\mathbb{F}_q} \to (\mathscr{M}^{\text{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu})^{\text{perf}}_{\mathbb{F}_q}$ 分解为

$$(\mathscr{M}^{\text{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu})^{\text{perf}}_{\mathbb{F}_q} \to (\mathscr{M}^{\text{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu})^{\text{perf}}_{\mathbb{F}_q} \to (\mathscr{M}^{\text{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu})^{\text{perf}}_{\mathbb{F}_q},$$

其中第一个映射是完美适当且满射的，第二个映射是闭浸入。

证明。 该分解由引理 2.13 以及泛同胚在完美化之后成为同构这一事实得到。由上述讨论，第二个映射是闭浸入。最后，该映射是完美适当的，因为所有概形都是（完美）射影的，而满射性再次由引理 2.13 得到。□

例 2.15。下面举出一些满足假设 2.12 的例子，并更明确地描述分裂模型的特殊纤维。假设 $G_{\text{ad}} = \text{Res}_{F'/F} G'$ 是沿全分歧扩张 F'/F 的非分歧 F'-群 G' 的限制标量，且 $\mathcal{G}$ 是 G 的甚特殊仿抛物子群。（回想一下，局部模型在中心等源下保持不变。）那么，由 $\mathscr{M}^{\text{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 对应的分裂局部模型根据 [SZ25，命题 2.3]，在 $\mathcal{O}_{E^{\text{Gal}}}$ 上是光滑的。更确切地说，证明表明，$\mathscr{M}^{\text{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 的特殊纤维是 G' 的（幂级数）仿射格拉斯曼量中的微小舒伯特簇的卷积积。注意，根据 [AGLR22，引理 3.15]，，这些卷积积与 [Zhu17a，BS17] 中的 Witt向量仿射格拉斯曼空间里的微小舒伯特簇的卷积积相同。

更一般地，在对 G_{ad} 作出相同假设的情况下，若 $\mathcal{G}$ 是一般仿抛物，[SZ25，命题 A.6] 表明，分裂模型 $\mathscr{M}^{\text{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 在 $\mathcal{O}_{E^{\text{Gal}}}$ 上是平坦的，其特殊纤维由卷积部分仿射旗簇中容许轨迹的卷积积给出。相同的证明（即将问题化归到非分歧群的局部模型情形）表明，$\mathscr{M}^{\text{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 是正规的，尤其是绝对弱正规。

最后，局部模型与乘积相容，并且在中心等源下保持不变。此外，沿非分歧限制的 Weil 限制的局部模型，对应于沿相应剩余域扩张对局部模型作 Weil 限制。因此，当 G 按照定义 5.1 下文所述的意义是本质非分歧时，上述例子便足以更一般地描述分裂局部模型。

2.3. **Shimura簇的整模型**。 接下来，我们转向整体情形，并介绍 PEL 型志村簇的整模型。为此，我们固定一个全局整 PEL 数据，并令 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\ \mathbb{X})/\mathbb{E}$ 为与底层有理数据相关联的志村簇。对于 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathbb{E}$ 中的一个素位，其完备化为 E，该志村簇在 $\mathcal{O}_E$ [Pap23，PR24]上有唯一的典范整模型。然而，这个典范模型通常没有良好的模空间解释。为了解决这个问题，我们还将考虑 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$ 的更一般的整模型，这些模型具有模空间解释，并且与典范整模型相关。第一个模型定义于 [RZ96，定义 6。9], 未作解释的术语请参见该文献。

定义 2.16。 朴素整模型 $\mathscr{S}_{\text{朴素}K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$ 是表示函子的拟射影 $\mathcal{O}_E$-概形：该函子将测试概形 S 映射到以下数据（视同构而定）：

(1) 定义在 S 上的阿贝尔簇的 $\mathscr{L}$-集 $A=\{A_\Lambda\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$（[RZ96，定义 6.5]）；(2) A 的 $\mathbb{Q}$-齐次极化 λ（[RZ96，定义 6.7]）；(3) 一个 K^p-层结构 η： $H_1(A,\mathbb{A}_f^p)\ \cong\ V\otimes\mathbb{A}_f^p$ 模 K^p，使两边的双线性形式在 $(\mathbb{A}_f^p)^\times$ 中相差一个标量，

使得对每个 $\Lambda\in\mathscr{L}$，行列式条件 $\det_{\mathcal{O}_S}(b\mid \mathrm{Lie}A_\Lambda)\ =\ \det^{\mathbb{Q}_p}(b\mid V_0)$（作为 $b\in\mathcal{O}_B$ 中的多项式）成立。

与局部模型一样，这个朴素整模型一般并非平坦，因此不能作为典范整模型。不过，我们可以像之前那样得到一个平坦模型。

定义 2.17. 典范整模型 $\mathscr{S}_{\mathrm{can}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是包含映射的概形闭包的正规化

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\mathbb{X})_E\to\mathscr{S}^{\mathrm{naive}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}).$$

这个定义适合我们的目的，并且与文献中较新的构造相符。由下文的（2.1）结合推论2.9可知，事实上，在上述定义中取绝对弱正规化就足够了。不过，为了证明下述命题，预先知道 $\mathscr{S}_{\mathrm{can}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是正规的会更方便。

命题2.18. 定义 2.17 中的整模型满足 [PR24，猜想 4.2 中的条件。2]。

证明。 由注 2.2 (2)，我们可以找到 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 到某个 Siegel 模簇的霍奇嵌入，它满足 [KPZ24，定理 7.1 中的条件。8]。该 Siegel 模簇具有一个自然的整模型，其在 p 处的仿抛层级由同一个格多重链 $\mathscr{L}$给出，并由通常的模空间解释定义，我们将其记为 $\mathscr{S}$。考虑开浸入和闭浸入

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathscr{S}^{\mathrm{naive}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathscr{S},$$

自然地由定义 2.16 产生。于是，$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 在 $\mathscr{S}_{\text{朴素}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 与 $\mathscr{S}$ 中的概形闭包一致，并且 $\mathscr{S}_{\mathrm{can}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 按定义是该概形闭包的正规化。因此$\mathscr{S}_{\mathrm{can}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 与 [KPZ24，定理 7.1 中构造的整模型一致。8], 从而它满足 [PR24，猜想 4.2。2] 由 [KPZ24，注记 7.1.9 b)]。 □

最后，我们还有一个分裂整模型 [PR05，§15]。

定义 2.19。分裂模型 $\mathscr{S}_{\mathrm{spl}\,K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是一个准射影 $\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$-概形，它表示如下函子：该函子将概形 S 映为元组 $\{(\{A_\Lambda\}_{\Lambda\in\mathscr{L}},\lambda,\eta,\mathscr{F}^i_{[\tau]},j^i_{[\tau]})\}$的同构类集合。这里，$(\{A_\Lambda\}_{\Lambda\in\mathscr{L}},\lambda,\eta)$ 是 $\mathscr{S}_{\mathrm{naive}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 的一个 S-值点。此外，$(\mathscr{F}^i_{[\tau]},j^i_{[\tau]})$ 是一组极化 $\mathcal{O}_B\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_S$-模 $\mathscr{H}$ 的 $\mathscr{L}$-集上的分裂结构，它将 Λ 映至 A_Λ 的泛向量扩张的李代数（或者等价地，映至 A_Λ 的第一德拉姆上同调；参见 MM74, §4]）。最后，要求每个 $\mathscr{F}^0_{\Lambda,[\tau]}$ 都与自然满射 $\mathscr{H}_{\Lambda,[\tau]}\to(\mathrm{Lie}\ A_\Lambda)_{[\tau]}$ 的核一致。

关于该模型的一般纤维与 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\mathbb{X})_{E^{\mathrm{Gal}}}$ 一致的显式证明，参见 [Lan18, 引理 2.3。9]；关于泛向量扩张的李代数确定一组极化 $\mathcal{O}_B\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_S$-模的 $\mathscr{L}$-集这一事实的证明，参见 [Lan18, 引理 2.2。7]。注意，总有一个显然的映射 $\mathscr{S}\mathrm{spl}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to\mathscr{S}\mathrm{naive}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$，它是通过遗忘分裂结构得到的。若假设 2.12 成立，则如 [PR05, §15], 所述，有如下具有笛卡尔方块的局部模型图表，其中竖直箭头是相对维数为 $\dim G$ 的光滑映射：

$$\begin{array}{ccccc}\mathscr{S}^{\mathrm{spl}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}) & \longrightarrow & \mathscr{S}^{\mathrm{can}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}) & \longrightarrow & \mathscr{S}^{\mathrm{naive}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ [\mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}] & \longrightarrow & [\mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}] & \longrightarrow & [\mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}].\end{array}\tag{2.1}$$

特别地，如果任一局部模型是平坦或光滑的，那么相应的 Sh 整模型也具有同样的性质$_K(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$。最后，以下引理可用与引理 2.13. 类似的方法证明。

引理 2.20。若假设 2.12 成立，则典范模型 $\mathscr{S}_{\mathrm{can}}{}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是自然映射 $\mathscr{S}_{\mathrm{spl}}{}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to\mathscr{S}_{\mathrm{naive}}{}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$的概形闭包的绝对弱正规化。

3. Displays and local shtukas

本节的一个关键工具是 [XZ17]，即以群论方式定义的局部 shtuka 模空间。另一方面，为了在志村簇典范模型的特殊纤维之间构造奇异对应，我们将在线性代数框架下定义分裂模型与朴素模型的特殊纤维之间的奇异对应。为刻画这些对应，我们还将用线性代数定义局部 shtuka 模空间的“朴素”与“分裂”类比对象。我们还需要这些变体之间的自然映射，使得（典范）局部 shtuka 叠成为朴素局部 shtuka 叠的闭子叠，这与局部模型和志村簇整模型的情形类似。此外，我们希望从志村簇的各种模型到局部 shtuka 模空间的自然映射是原完美光滑的；为此，使用形式概形更为方便，无需转至完美化。在典范情形下，Hoff [Hof23a], 通过构造带额外结构的 display 叠实现了这一点。该叠可由局部模型得到，其特殊纤维经过完美化后给出局部 shtuka 模空间。本节的目标是将此结果推广到不同的局部模型，从而得到 display 和局部 shtuka 的朴素版本与分裂版本。本节中我们再次假设 $p\neq 2$。

注 3.1. 请注意，[Hof23a]（除其他事项外）使用了典范局部模型的平坦性，因此某些技巧并不直接适用于朴素模型（甚至分裂模型）。不过，可以通过诉诸它们的模空间解释来解决这一问题。特别是，假设[Hof23a,2.28] 对我们并不重要。

3.1. **Display**。固定一个如记号 2.1 所述的整数局部 PEL 数据，并令 E 为 μ的定义域。在本节中，R 表示一个 p-完备的 $\mathcal{O}_E$代数或$\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$代数，具体取决于我们处于朴素、典范还是分裂情形。我们还将 $\mathrm{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}\to\mathrm{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}\to\mathrm{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$ 记为 $\mathscr{M}_{\mathrm{spl}\,\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}\to\mathscr{M}_{\mathrm{can}\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}\to\mathscr{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}\preccurlyeq\mu}$,的 p-完备化。

记号 3.2. (1) 仅在本节和下一节中，对于任意 p-完备的 $\mathbb{Z}_p$-代数 R，我们将考虑维特向量环$W(R)$及其截断版本 $W_n(R)$。我们将增广理想（即 $W_n(R)\to R$ 的核）记为 $I_R\subseteq W_n(R)$。若 R 还是一个剩余域有限（或其代数闭包）的完备诺特局部 $\mathbb{Z}_p$-代数，$\widehat{\ }$我们将由 [Zin01] 定义的相应 Zink 环记为 $W(R)\subseteq W(R)$。使用这一记号，我们可以将正环群 $L^+\mathcal{G}$ 及其截断 $L^n\mathcal{G}$的通常定义推广到任意 p-完备的 $\mathbb{Z}_p$-代数。

(2) 在本节中，我们将同时处理截断对象和非截断对象，并在术语中省略对它们的区分。为此，我们固定某个 $m \geq 0$，并允许 $m = \infty$。于是，∞-截断维特向量定义为通常的维特向量。

定义 3.3。在 R 上，一个朴素（分别地，典范的、分裂的）$(\mathcal{G}, \mu)$-对是一个对 $(\mathcal{P}, q)$，其中$\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{G}$ 在 $W_m(R)$ 上的扭子，并且 q 是一个 $\mathcal{G}$-等变映射 $\mathcal{P}_R \to (\mathrm{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}, \preccurlyeq\mu})_R$（分别地，$\mathcal{P}_R \to (\mathrm{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \preccurlyeq\mu})_R$，分别地，$\mathcal{P}_R \to (\mathrm{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}, \preccurlyeq\mu})_R$）。

如果 R 是完备的、诺特的、局部的，且剩余域为 $\mathbb{F}_p$，则一个（朴素的、典范的或分裂的）Dieudonné $(\mathcal{G}, \mu)$-对 定义为类似的对 $(\mathcal{P}, q)$，其中 $\mathcal{P}$改为 $\mathcal{G}$ 在 $W(R)$ 上的扭子。

对的同构有显然的定义。

引理 3.4。将 R 映射到朴素 $(\mathcal{G}, \mu)$-对的群胚，定义了 $\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_E$ 上的一个栈，记作$\mathrm{Pair}^{\mathrm{naive}\ (m)}_{\mathcal{G}, \preccurlyeq\mu}$。存在自然等价 $\mathrm{Pair}^{\mathrm{naive}\ (m)}_{\mathcal{G}, \preccurlyeq\mu} \cong (L^m\mathcal{G}\backslash \mathrm{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}, \preccurlyeq\mu})^{\text{ét}}$。对于典范的和分裂的对，也有类似的陈述（后者在 $\mathrm{Spf}\, \mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$ 上定义了一个栈）。

证明。只需注意到 $\mathcal{G}$-扭子在 $W_m(R)$ 上等价于 $L^m\mathcal{G}$-扭子在 R [BH20，引理2。12], 其余部分是清楚的。□

为了在朴素情形与分裂情形下给出这些代数栈的线性代数模空间描述，我们回顾 [RZ96，定义 3.14] 中的极化多链概念（另见 [SW20，定义21.6.2]）。

定义 3.5. (1) 一个 $\mathscr{L}$-多重链（由 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$-格组成）$\{M_\Lambda\}$ 是一个函子

$$\mathscr{L} \to \mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} R\text{-Mod}\colon \Lambda \mapsto M_\Lambda$$

其中过渡映射是单射，并且带有周期性同构 $\theta^b_\Lambda\colon\ M^b_\Lambda \cong M_{b\Lambda}$，对每一个正规化 $\mathcal{O}_B$的 $b \in B^\times$。此外，这些数据须满足：

(a) 在谱 R上局部地，M_Λ 作为$\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$-模同构于$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$。(b) 若 F 是一个域，则对任意两个相邻格 $\Lambda \subseteq \Lambda'$，商 $M_{\Lambda'}/M_\Lambda$作为 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$-模同构于 $\Lambda'/\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$，在谱 R上局部地。一般地，F分解为域的乘积，这诱导了 V 与 $\mathscr{L}$的分解，并且在投影到该分解的每个因子之后，要求类似的条件。(c) 周期性同构 θ^b_Λ 与过渡映射 $M_\Lambda \to M_{\Lambda'}$可交换。(d) 对正规化 $\mathcal{O}_B$的 $b \in B^\times \cap \mathcal{O}_B$，复合 $M^b_\Lambda \cong M_{b\Lambda} \to M_\Lambda$是乘以 b。

(2) 一个极化的 $\mathscr{L}$-多链$\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$-格是一个元组 $(\{M_\Lambda\}, L, \lambda)$，其中 $\{M_\Lambda\}$ 是一个 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$-格的多链，$L$是一个可逆的 R-模，而 $\lambda\colon \{M_\Lambda\} \cong \{M^\vee_{\hat\Lambda} \otimes L\}$ 是多链的反对称同构。

(3) 一个极化对的 $\mathscr{L}$-多链是一个元组 $(\{M_\Lambda\}, \{M_{1,\Lambda}\}, L, \lambda)$。这里，$(\{M_\Lambda\}, L, \lambda)$是一个 $\mathscr{L}$-多链的极化 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_m(R)$-格，而$\Lambda \mapsto M_{1,\Lambda} \subseteq M_\Lambda$ 是一个函子，其中每个$M_{1,\Lambda} \subseteq M_\Lambda$ 都是直和项$M_{1,\Lambda}/I_R M_\Lambda \subseteq M_\Lambda/I_R M_\Lambda$的原像，使得$\det_R(b \mid M_\Lambda/M_{1,\Lambda}) = \det_L(b \mid V_0)$作为 $b \in \mathcal{O}_B$中的多项式相等。最后，我们假设由 λ诱导的同构 $M_\Lambda \cong M^{\vee_{\hat\Lambda}} \otimes L$将子模$M_{1,\Lambda} \cong M^*_1$，$\hat\Lambda \otimes L$相互识别，其中

$$M^*_{1,\hat\Lambda} = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{W_m(R)}(M_{\hat\Lambda}, W_m(R)) \mid \varphi(M_{1,\hat\Lambda}) \subseteq I_R\}.$$

(4) 如果 R 进一步是完备、诺特、局部的，且剩余域为 $\mathbb{F}_p$，则如 (3) 中类似地定义极化对的 Dieudonné $\mathscr{L}$-多重链，其中 $(\{M_\Lambda\} L \lambda)$ 是极化 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$-格的$\mathscr{L}$-多重链。

命题 3.6。(1) R 上的朴素$(\mathcal{G}, \mu)$-配对的群胚，自然等价于 R上的极化对的 $\mathscr{L}$-多链群胚。

(2) R 上的分裂$(\mathcal{G},\mu)$-配对的群胚，自然等价于 R上的极化对的 $\mathscr{L}$-链群胚，并且在$M_{1,\Lambda}/I_RM_\Lambda$上带有一个分裂结构。

当 R 是完备的、诺特的局部环，且剩余域为 $\mathbb{F}_p$ 时，对于 *Dieudonn´e* 版本同样成立。

证明。一个 $\mathscr{L}$-极化格的多重链等价于一个 $\mathcal{G}$-扭子上的 $W_m(R)$ [SW20，推论 21.6.6]。附加数据 $M_{1,\Lambda}/I_RM_\Lambda \subseteq M_\Lambda/I_RM_\Lambda \cong M_\Lambda \otimes_{W_m(R)} R$ （或者更确切地说，该子模的商）于是等价于一个映射 $\mathcal{P}_R \to (\mathrm{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\mu,\cdot})_R$。

在分裂情形下，$M_{1上的\Lambda}/I_RM_\Lambda$ 分裂结构等价于一个提升 $\mathcal{P}_R \to (\mathrm{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\mu,\cdot})_R$。Dieudonn´e 情形可以类似地处理-□

接下来，我们想要定义 display。我们固定某个 $n>0$ （其中允许 $n=\infty$），使得$\sim m \geq n+1$。回顾一下，对于一对（M， M_1），可以关联一个有限投射 W_n（R）-模 M_1，如 [Hof25，定义 27]中所述；这构成一个 σ-线性函子。我们将（–）$^\sigma$ 记作 Frobenius 扭曲。

命题 3.7。上文的函子$(M,M_1) \mapsto M_1$ 诱导出一个自然函子

$$(\{M_\Lambda\},\{M_{1,\Lambda}\},L,\lambda) \mapsto (\widetilde{M_{1,\Lambda}},L^\sigma,\widetilde{\lambda}),$$

从 R 上 $\mathscr{L}$-极化对多重链的范畴到 $\mathscr{L}$-极化(R)-格多重链的范畴。

若 R 是完备的诺特局部环，且剩余域为 $\mathbb{F}_p$，则可得到一个类似的函子：从 *Dieudonn´e* $\mathscr{L}$-极化对多重链的范畴到 $\mathscr{L}$-极化$\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$-格多重链的范畴。

证明。根据 [Hof25，定义 2.7]，，赋值 $(M,M_1) \mapsto M_1$ 是函子性的，并且保持单射。特别地，我们得到所需的周期性同构 $M_{1,\Lambda} \cong M_{1,b\Lambda}$。因此，为了验证 $\{M_{1,\Lambda}\}$ 构成一个 $\mathscr{L}$-多重链的 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_m(R)$- 格，我们必须检查定义 3.5 (1) 的条件是否满足。条件 (c) 和 (d) 由函子性推出；条件 (a) 由$\widetilde{\ }$函子性以及 $M_{1,\Lambda}$ 秩正确这一事实推出（这包含在 [Hof25，定义2,7]中）；最后，条件 (b) 可仿照 [Hof25，命题 3.5] 进行验证。最后，$(M_{1,\Lambda},L^\sigma,\lambda)$ $\widetilde{\ }$构成极化格的多重链这一事实成立，因为 $(M,M_1) \mapsto M_1$ 与对偶和扭转相容，见 [Hof25，注 3.10]。

Dieudonn´é 情形也可以类似处理（另见 [Hof23b，命题 4.3。3]）。 □

特别地，根据 [SW20，推论 21.6。6] 和 [BH20，引理 2。12]，，我们得到一个态射 m

$$\mathrm{Pair}^{\mathrm{naive},(m)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \{L^n\mathcal{G}\text{-torsors over } R\}.$$

定义 3.8。上述讨论确定了一个在 $(L^m\mathcal{G}\backslash \mathrm{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu,\cdot})^{\text{ét}}$ 上的 $L^n\mathcal{G}$-扭子，即一个 $\mathrm{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu,\cdot}$ 上的 $L^m\mathcal{G}$-等变 $L^n\mathcal{G}$-扭子，记作 $\mathrm{M}^{\mathrm{naive}\,(n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu,\cdot,\cdot,\cdot}$。这些可以拉回为 $L^m\mathcal{G}$-等变$L^n\mathcal{G}$-扭子 $\mathrm{M}^{\mathrm{can}\,(n)}_{\mathcal{G},\cdot,\cdot,\preccurlyeq\mu} \to \mathrm{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\cdot,\preccurlyeq\mu}$ 和 $\mathrm{M}^{\mathrm{spl}\,(n)}_{\mathcal{G},\cdot,\cdot,\preccurlyeq\mu} \to \mathrm{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\cdot,\preccurlyeq\mu}$。

请注意，在典范情形下，此扭子与 [Hof23a] 中构造的扭子一致（当该文中的构造适用时）：这可由 [Hof23b，命题 4.3.8 和 4.6。7] 得出。现在我们可以引入与各种局部模型相关联的 display 概念。

定义 3.9。朴素（$\mathcal{G}$， μ）-display 的栈是商栈 $\mathrm{Disp}^{\mathrm{naive}\,(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu,\cdot,\cdot} := (L^m\mathcal{G}\backslash \mathrm{M}^{\mathrm{naive}\,(n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu,\cdot,\cdot})^{\text{ét}}$，其中商是针对对角作用取得的。典范和分裂（$\mathcal{G}$， μ）-display 的代数栈类似地定义。

在朴素情形和分裂情形中，这些都有自然的模空间解释。

命题 3.10。 群胚 $\mathrm{Disp}^{\mathrm{naive}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\preccurlyeq\mu}{}_{,,}(R)$等价于由以下元组构成的群胚

$$(\{M_\Lambda\},\{M_{1,\Lambda}\},L,\lambda,\Psi),$$

带有 $(\{M_\Lambda\},\{M_{1,\Lambda}\},L,\lambda)\in$配对$^{\mathrm{naive}\ (m)}_{\mathcal{G}\preccurlyeq\mu}{}_{,,}(R)$，以及 $\Psi\colon(\{M_\Lambda\},L,\lambda)\cong(\widetilde{M_{1\,\Lambda}},L^\sigma,\widetilde{\lambda})$一个由极化的 $\mathcal{O}_B\otimes_{\mathbb{Z}_p}W_n(R)$-格组成的 $\mathscr{L}$-多重链的同构。

类似的描述也适用于 $\mathrm{Disp}^{\mathrm{spl}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\preccurlyeq\mu}{}_{,,}(R)$，只需将配对$^{\mathrm{naive}\ (m)}_{\mathcal{G}\preccurlyeq\mu}{}_{,,}(R)$ 替换为 配对$^{\mathrm{spl}\ (m)}_{\mathcal{G}\preccurlyeq\mu}{}_{,,}(R)$即可。

证明。 这由定义以及 [SW20，推论 21.6。6] 和 [BH20，引理 2。12]。□

典范 display 的群胚已在 [Hof23a], 中描述，但这种描述与我们无关。另一方面，上述命题引出了以下 Dieudonn´e displays 的概念，我们只会在朴素情形下用到它。

定义 3.11. 设 R 是一个完备的诺特局部 $\mathcal{O}_E$-代数，其剩余域为 $\mathbb{F}_p$。则 R 上的一个朴素 $\breve{}$ Dieudonn´e $(\mathcal{G},\mu)$-display 由如下数据给出： R上极化$\widetilde{}$ $\widetilde{}$配对的一个 Dieudonn´e $\mathscr{L}$-多重链 $(\{M_\Lambda\},\{M_{1,\Lambda}\},L,\lambda)$，以及极化 $\mathcal{O}_B\otimes_{\mathbb{Z}_p}W(R)$-格的$\backsim\mathscr{L}$-多链的一个同构 $(\{M_\Lambda\},L,\lambda)\cong(M_{1,\Lambda},L^\sigma,\lambda)$。分裂 Dieudonn´e $(\mathcal{G},\mu)$-display 可类似地定义。

为了将显示栈与志村簇联系起来，我们将使用 p-可除群链，如 [SW20，定义 24.3。1]。

定义 3.12. (1) R 上 $\mathcal{O}_B$-p-可除群的一个 $\mathscr{L}$-多重链是函子 $\Lambda\mapsto X_\Lambda$，取值于 R 上带有 $\mathcal{O}_B$-作用的 p-可除群，并带有周期性同构

$\theta^{\Lambda}_{\Lambda}\colon X_{\Lambda}\cong X_{b\Lambda}$，满足以下条件：(a) 若 M_Λ 是 X_Λ 的泛向量扩张的李代数，则 $\Lambda\mapsto M_\Lambda$ 定义一个 $\mathscr{L}$-多重链的 $\mathcal{O}_B\otimes_{\mathbb{Z}_p}R$格。(b) 周期性同构 θ^b_Λ 与过渡映射 $X_\Lambda\to X_{\Lambda'}$可交换。(c) 对于将 $\mathcal{O}_B$正规化的 $b\in B^\times\cap\mathcal{O}_B$，复合 $X^b_\Lambda\cong X_{b\Lambda}\to X_\Lambda$ 是乘以 b的映射。(2) 极化的 $\mathcal{O}_B$-p-可除群的 $\mathscr{L}$-多重链是一个元组 $(\{X_\Lambda\},\ \mathbb{L},\ \lambda)$，其中 X_Λ 是一个 $\mathcal{O}_B$-p-可除群的 $\mathscr{L}$-多重链，$\mathbb{L}$ 是 Spec R 上的一个 ´étale 秩 1 $\mathbb{Z}_p$ 局部系统，且λ: $X_\Lambda\cong X^\vee_{\hat{\Lambda}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{L}$ 是多重链的反对称同构。

现在固定一个整体整模型（在 p）PEL 数据，如记号2。1所述，它提升了本节开头固定的局部 PEL 数据。我们将相应的 Shimura 数据记为 $(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$，并将 $\widehat{\mathscr{S}}_{\text{朴素}K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$ 等记为各种 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$ 整模型的 p-进完备化。

命题 3.13。 存在一个自然的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{\mathscr{S}}^{\text{分裂}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X}) & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{S}}_{\text{可以}K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X}) & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{S}}^{\text{朴素}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Disp}^{\mathrm{spl},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Disp}^{\mathrm{can},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Disp}^{\text{朴素},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Pair}^{\text{分裂},(m)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Pair}^{\text{能},\ (m)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Pair}^{\text{朴素},\ (m)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}}\backslash\mathbf{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathbf{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathbf{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}\preccurlyeq\mu,}\ ,
\end{array}$$

带有笛卡尔方块。

证明。模型 $\mathscr{S}$朴素$^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 和 $\mathscr{S}$spl $^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 参数化了带有额外结构的阿贝尔簇，如定义 2.16 所述。特别地，我们可以将其完备化的任意 R-值点关联到一个极化的 $\mathcal{O}_B$-p可除群的 $\mathscr{L}$多重链，进而根据[Lau13、命题 2.1] 和命题 3.10 得到一个（朴素或分裂的）显示（尽管我们采用了 [Hof23a、注 1.30] 中的逆变规范化）。我们注意到，为了从极化的 p可除群过渡到极化的显示，$\mathbb{Z}_p$-局部系统 $\mathbb{L}$ 通过 $R\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{L}$在 R 上诱导出一个线丛。这就给出了所需的映射$\widehat{\mathscr{S}}$朴素$^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to \mathrm{Disp}^{\text{naive }(m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$,, 以及 $\widehat{\mathscr{S}}$ spl $^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to \mathrm{Disp}^{\mathrm{spl}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$,, 。结合引理 3.4 和定义 3.9，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{\mathscr{S}}^{\text{分裂}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}) & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{S}}_{\text{典范}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}) & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{S}}^{\text{朴素}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Disp}^{\mathrm{spl},(m,\ n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Disp}^{\mathrm{can},(m,\ n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Disp}^{\text{朴素},(m,\ n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Pair}^{\mathrm{spl},\ (m)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Pair}^{\mathrm{can},\ (m)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Pair}^{\text{朴素},\ (m)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}}\backslash \mathbf{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash \mathbf{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash \mathbf{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu,}.
\end{array}$$

由于我们已经有了一个映射 $\mathscr{S}_{\text{可以}K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X})\to \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathscr{M}_{\text{可以}\mathcal{G},\ \preccurlyeq\mu}$ (2.1)，剩下的映射 $\mathscr{S}_{\text{可以}K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X})\to$导出范畴$^{\mathrm{can}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$,, 只要知道底部两行中的方块是笛卡尔的，这一点便随之成立。上方方块的笛卡尔性随后也成立，因为 (2.1) 中的方块是笛卡尔的。

由于 $\mathrm{Pair}^{\text{naive }(m)}_{\mathcal{G}\ ,\ ,\ \preccurlyeq\mu}\cong(L^m\mathcal{G}\backslash \mathbf{M}^{\text{naive}}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu,})^{\text{ét}}$ 和 $\mathrm{Disp}^{\text{naive }(m,n)}_{\mathcal{G}\ ,\ ,\ \preccurlyeq\mu}\cong(L^m\mathcal{G}\backslash \mathbf{M}^{\text{naive }(n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu,\ ,\ ,})^{\text{ét}}$，以及典范版本和分裂版本中的类似情形，中间竖直箭头是 $L^m\mathcal{G}$-商的 $L^n\mathcal{G}$-扭子，因此中间的方块是笛卡尔的。另一方面，描述 $\mathrm{Pair}^{\text{naive }(m)}_{\mathcal{G}\ ,\ ,\ \preccurlyeq\mu}\cong(L^m\mathcal{G}\backslash \mathbf{M}^{\text{naive}}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu,})^{\text{ét}}$，等等，也表明下方的方块是笛卡尔的，正如所需。□

最后，映射 $\widehat{\mathscr{S}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X})\to \mathrm{Disp}^{(m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$, 具有以下重要的几何性质，它将 [Hof23a，定理 2。56] 推广到了不同的局部模型。

定理 3.14。假设 m,n 有限。那么映射 $\widehat{\mathscr{S}}_{\text{朴素}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to \mathrm{Disp}^{\text{naive }(m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$,,$\widehat{\mathscr{S}}_{\mathrm{can}K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to \mathrm{Disp}^{\mathrm{can}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$,,以及 $\widehat{\mathscr{S}}_{\text{分裂}\ K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to \mathrm{Disp}^{\mathrm{spl}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$,,均为光滑映射。

证明。 根据命题 3。13，只需考虑朴素模型（尽管分裂模型的情形也可以通过类似论证直接处理）。

设 $x\in\mathscr{S}$朴素$^{K^pK_p}(\overline{\mathbb{G}},\mathbb{X})(\mathbb{F}_p)$ 是一个点，并设 R 是 $\mathscr{S}$朴素$^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 在 x 处的完备局部环。那么，$\mathscr{S}$朴素$^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 的模空间解释给出一个定义在 R 上、带有额外结构的阿贝尔簇，因此得到一个定义在 R 上的极化 $\mathcal{O}_B$-p 可除群的 $\mathscr{L}$-多链。由 Dieudonn´e 理论[Zin01],, 这给出一个定义在 R 上的朴素 Dieudonn´e $(\mathcal{G},\mu)$-display M_x。我们断言，M_x 是其基变换到 x 后的万有形变。换言之，将一个完备诺特局部 $\mathcal{O}_E$-代数 R^-（其剩余域为 $\mathbb{F}_p$）映到 R 上 x 中 M_x 的基变换的形变（作为朴素 Dieudonn´e $(\mathcal{G},\mu)$-display）的集合的形变函子，由 $\mathscr{S}$朴素$^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 在 x 处的完备局部环所形式表示，其万有对象为 M_x。事实上，回顾塞尔-泰特定理 [Mes72, Theorem V.2.3] 告诉我们，阿贝尔簇及其底层 p 可除群的形变理论是一致的。此外，在剩余域为 $\mathbb{F}_p$ 的完备诺特局部 $\mathcal{O}_E$- 代数 R 上，朴素 $(\mathcal{G},\mu)$-display 的范畴等价于极化 $\mathcal{O}_B$-p 可除群的 $\mathscr{L}$-多链范畴；这由 [Zin01], 的主定理结合[Hof23b、推论4.3.2 和引理 4.7.4] （用于处理额外结构）得出。这表明 M_x 确实是其基变换到 x 后的万有形变。

现在，为了证明 $\widehat{\mathscr{S}}_{\text{朴素}K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X}) \to \mathrm{Disp}^{\mathrm{naive}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$,,是光滑的，无穷小提升判据[Hof25，引理 4.9]表明只需证明每个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, R & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{S}}^{\mathrm{naive}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, R' & \longrightarrow & \mathrm{Disp}^{\mathrm{naive},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}, \end{array}$$

其中 $R' \to R$ 是 Artin 局部 $\mathcal{O}_E$-代数到剩余域 $\mathbb{F}_p$的满射，存在一个提升 $\mathrm{Spec}\, R' \to \widehat{\mathscr{S}}_{\text{朴素}K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$。但这可由 Dieudonn´e display M_x的泛性质，以及 $\mathrm{Disp}^{\mathrm{naive}\ (\infty,\infty)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$ 、$\to \mathrm{Disp}^{\mathrm{naive}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$ 、形式光滑这一事实直接推出（后者又直接由定义 3.9 得出）。□

3.2. **μ-有界局部 shtuka**。XZ17 中局部 shtuka 的栈（层 $\mathcal{G}$）[XZ17，§5.2] 被定义为 ´商的 étale 栈化 LG ，其中 的弗罗benius 扭曲共轭作用于 $L^+\mathcal{G}$，所有对象均定义在 $\mathbb{F}_q$上。这一群论定义通过 G-等晶体的栈，与仿射旗簇、仿射 Deligne–Lusztig 簇以及范畴局部 Langlands 对应相联系 [Zhu20，朱25]。然而，为了将其与志村簇联系起来，线性代数描述很有用。以下定义受[Hof23a命题 241], 启发，且仅依赖于局部整 PEL 数据。

定义3.15. 朴素局部*Shtuka*叠定义为 $\mathrm{Disp}^{\mathrm{naive}\ (m.n)}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}$,,的特殊纤维的完美化；记为

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} := (\mathrm{Disp}^{\mathrm{naive},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu})^{\mathrm{perf}}_{\mathbb{F}_q}.$$

典范或分裂局部 *shtuka*的栈以类似方式定义并记法。

注3.16. 定义3.9 表明，$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq}$ 的这一定义（在重新正规化的意义下）与截断局部 shtuka 的模空间的群论定义一致，这些定义来自 [XZ17, SYZ21,朱25]（另见 [Hof23a，命题 2.41]）。特别地，当 $m = n = \infty$ 时，可见 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}\ \infty\ \infty}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq}$,,容许到 $(LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} L^+\mathcal{G})^{\text{ét}}$ 的一个自然闭浸入。

由这些定义，我们得到自然映射

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive},(m,n)}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu},$$

其中第二个映射是闭浸入。

我们也可以给出 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}\ ,\preccurlyeq\mu}$ 与 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}\ ,\preccurlyeq\mu}$ 的模空间描述。

引理 3.17. 设 R 是一个完美的 $\mathbb{F}_q$-代数。那么，$\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu,}(R)$ 等价于由 $\mathscr{L}$- 极化 $\mathcal{O}_B$-p-可除群的多链组成的群胚 $\{X_\Lambda\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$，满足 $\det_R(b \mid \mathrm{Lie}\, X_\Lambda) = \det^{\mathbb{Q}_p}(b \mid V_0)$作为 $b \in \mathcal{O}_B$ 中的多项式相等。

此外，$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}\ ,\preccurlyeq\mu}(R)$ 等价于由元组 $(X, \mathscr{F}^i_{[\tau]}, j^i_{[\tau]})$组成的群胚，其中 $X \in \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}\ \mu\ ,}(R)$，且 $(\mathscr{F}^i_{[\tau]}, j^i_{[\tau]})$ 是 $\mathscr{L}$-集的极化 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} R$-模 $\mathscr{H}$ 的一个分裂结构，它将 Λ 映到 X_Λ 的泛向量扩张的李代数。

证明。 根据 Artin–Schreier–Witt 理论（参见 [SW20，定理 12.3。4], 或 [BH25a，引理 2。22]），´Spec 上的 étale 秩 1 $\mathbb{Z}_p$-局部系统 R 等价于 Spec $W(R)$ 上的线丛，并带有到其 Frobenius 扭曲的同构，其中 R 是一个完美的 $\mathbb{F}_p$-代数。因此，由于在完美环上，display 根据 Dieudonn´e 理论 [Lau13，定理 6。.□

注 3.18. 我们本可以将上述模空间解释用作 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}\ ,\preccurlyeq\mu}$ 和 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}\ ,\preccurlyeq\mu}$ 的定义。然而，这样一来，如何将这些代数栈与 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}\ ,\preccurlyeq\mu}$ 的群论定义联系起来就不那么明晰了，进而也难以看出它们与局部模型的联系。

最后，我们明确说明志村簇的特殊纤维与局部 shtuka 模空间之间的联系。为此，我们固定一个整体整（在 p）PEL 数据。记 $\mathrm{Sh}_{\mu,K}^{\mathrm{naive}}$，为 $\mathscr{S}_{\text{朴素}}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 特殊纤维的完美化；典范模型和分裂模型也类似。应用命题3.13 并转到特殊纤维的完美化后，我们得到如下由笛卡尔方构成的图表：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sh}_{\mu,K}^{\mathrm{spl}} & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_{\mu,K}^{\mathrm{can}} & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_{\mu,K}^{\mathrm{naive}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{loc}_p^{\mathrm{spl},(m,n)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{loc}_p^{\mathrm{can},(m,n)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{loc}_p^{\mathrm{naive},(m,n)}} \\ \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{spl},(m,n)} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{can},(m,n)} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{naive},(m,n)}. \end{array} \tag{3.1}$$

这些映射 loc_p 通常称为晶体周期映射。至少对于朴素模型和分裂模型，它们由将带有额外结构的阿贝尔簇映到其底层的 p-可除群（带有类似的额外结构）给出。定理3.14 立即蕴含下述结论。

推论 3.19. 若 $m > n$有限，则晶体周期映射$\mathrm{loc}_p^{\mathrm{naive}\ (m,n)}$,: $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{naive}}{}_{,K} \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu}^{\mathrm{naive}\ (m,n)}$,,是完美光滑的。对$\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can}\ (m,n)}$,与$\mathrm{loc}_p^{\mathrm{spl}\ (m,n)}$,同样成立。

最后，我们指出，阿贝尔簇上的分裂结构等价于相伴的 p-可除群上的分裂结构 [MM74，1.12]。这给出了（3.1）中的大矩形为笛卡尔的另一证明。

4. Exotic Hecke correspondences

奇异Hecke对应是可能不同的志村簇的特殊纤维之间的对应，它们不一定提升到整模型。它们在Langlands纲领中有引人注目的应用，例如不同志村簇的上同调之间Jacquet–Langlands转移的几何实现。此类奇异对应的例子已出现在 [Hel10，TX19，HTX17]，中，而更一般的构造已在[XZ 17]中得到研究。然而，所有这些文献都涉及具有好约化的志村簇，即在 p处具有超特殊层，从而志村数据中出现的群在 p处非分歧。我们将在分歧情形中给出此类奇异对应的例子。在本节中，我们将只在正特征下并针对完美对象进行讨论。我们还设定 $m = n = \infty$，即我们处理非截断对象，并从记号中去掉（m，n）。为了使用模空间解释，我们继续假设 $p \neq 2$。

4.1. 局部 shtuka 模空间之间的 Hecke 对应。

为刻画奇异 Hecke 对应，我们来定义局部 shtuka 模空间上的某些对应。固定两个局部整 PEL 数据 $(B,\ *,\ V,\ (,\ )\ \mu_i,\ \mathcal{O}_B,\ \mathscr{L})$，其中 $i = 1,\ 2$，也就是说，只允许余特征 μ_i 不同。考虑商栈 $\mathfrak{B}(G)' := (LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} LG)^{\text{ét}}$。

引理 4.1。 存在一个自然态射 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}\ ,\ \preccurlyeq\mu}^{\mathrm{naive}} \to \mathfrak{B}(G)'$，它延拓了由注记 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}\ ,\ \preccurlyeq\mu}^{\mathrm{can}} \subseteq LG/\ \mathrm{Ad}$ $_{\sigma^{-1}}\ L^+\mathcal{G} \to LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}}\ LG = \mathfrak{B}(G)'$ 诱导的通常映射 3。16。

证明。 由 [SW20、推论21.6.10 和命题 18.31]，，存在一个自然的闭浸入$L^+\mathcal{G}\backslash\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{naive}}{}_{,}$ $_{\preccurlyeq\mu}\ \to\ L^+\mathcal{G}\backslash\ \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$，它延拓了推论 μ 中典范局部模型与 2。10 的 -可容许轨迹之间的识别。沿着 $LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}}\ L^+\mathcal{G} \to L^+\mathcal{G}\backslash\ \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$ 对此闭浸入作基变换，得到一个 $L^+\mathcal{G}$-纤维化，位于 $L^+\mathcal{G}\backslash\mathscr{M}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu,}^{\mathrm{naive}}$ 之上；它可识别为 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}\ \preccurlyeq\mu,}^{\mathrm{naive}}$。由此，我们通过复合得到了所需的映射

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}^{\mathrm{naive}} \to LG/\ \mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}}\ L^+\mathcal{G} \to LG/\ \mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}}\ LG = \mathfrak{B}(G)'.$$

□

注 4.2. (1) 栈 $\mathfrak{B}(G)' := (LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} LG)^{\text{ét}}$ 与 Kottwitz 叠$\mathfrak{B}(G) := (LG/\mathrm{Ad}_{\sigma} LG)^{\text{ét}}$ 出自 [Zhu20, Zhu25], 类似，并解释了我们的记号 $\mathfrak{B}(G)'$。我们

选择采用 $\mathfrak{B}(G)'$，以遵循 [XZ17、Hof23a]的惯例。不过，我们也可以改用 $\mathfrak{B}(G)$，只需做少许修改。

(2) 根据 [Zhu25，引理 3.23], $\mathfrak{B}(G)$ 对 G-等晶体进行了分类。此外，对于完美的 $\mathbb{F}_q$-代数R, Dieudonné 理论给出一个从模掉等源的 p-可除群到等晶体范畴的全忠实函子；对于带有额外结构的 p-可除群也有类似结果。这为定义映射 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu} \to \mathfrak{B}(G)'$ 提供了另一种等价方式。

定义 4.3。 Hecke 对应 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} \leftarrow \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2} \rightarrow \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2}$ 定义为如下纤维积

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} & & \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathfrak{B}(G)'. & \end{array}$$

$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} \leftarrow \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \rightarrow \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2}$ 以及 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} \leftarrow \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} \rightarrow \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2}$的定义方式类似。

对于典范局部 shtuka 的栈，定义4.3 与 [XZ17，定义 5.2 中的相应定义一致。8]此外，对于分裂和朴素局部 shtuka，我们有以下模空间解释，这可直接由定义得出。

引理 4.4。 令 R 为任意完美的 $\mathbb{F}_q$-代数

(1) 群胚 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}(R)$ 自然等价于三元组 $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \beta)$所成的群胚，其中$\mathcal{E}_i = \{\mathcal{E}_{i,\Lambda}\}_{\Lambda\in\mathscr{L}} \in \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i}$，且 $\beta = \{\beta_\Lambda : \mathcal{E}_{1,\Lambda} \sim \mathcal{E}_{2,\Lambda}\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$是一个 $\mathscr{L}$-多重链极化 $\mathcal{O}_B$-p-可除群之间的准同源（即按自然意义与额外结构相容）。(2) 将“朴素”替换为“*spl*”时，同样成立。

注意， G-等晶体不依赖于整模型 $\mathcal{G}$，因此我们不需要要求 β与分裂结构相容。特别地，这些局部 shtuka 的 Hecke 对应的点可以视为带额外结构的 p-可除群的修改。

各种局部 shtuka 叠的 Hecke 对应之间可以如下关联。

引理 4.5. 存在一个自然的交换图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2}. \end{array}$$

此外，下方竖直映射是闭浸入；若两个局部整 *PEL* 数据均满足假设2.12 ，则上方竖直映射是适当且满射的。

证明。 该图表的存在性和交换性由定义可知。剩下需要证明中间竖直箭头分别是满射和闭浸入，其余部分显然。由于映射 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} \rightarrow \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$ 可以分解为

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} = \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2} = \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2},$$

根据推论 2.14，它是一个闭浸入。

现在，假设这两组局部整 PEL 数据均满足假设2.12。令 X^{naive} 为 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1}$ 与 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$ 在 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1}$上的纤维积，并类似地定义 X^{can} 。利用模空间诠释，我们得到一个同构

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \cong X^{\mathrm{naive}} \times_{(\mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2})^{\mathrm{perf}}_{\mathbb{F}_q}} (\mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2})^{\mathrm{perf}}_{\mathbb{F}_q}.$$

由此得到进一步的同构

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \cong X^{\mathrm{can}} \times_{(\mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2})^{\mathrm{perf}}_{\mathbb{F}_q}} (\mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2})^{\mathrm{perf}}_{\mathbb{F}_q},$$

从而复合 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \to X^{\mathrm{can}} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2}$ 由推论 2.14 可知是适当且满射。 □

推论 4.6。 映射 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i}$ 可由归纳极限（完美适当概形）表出。典范版本也同样如此；在假设 2.12 下，分裂版本也同样如此。

证明。 由于 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i}$ 和 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i}$ 通过 $LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} L^+\mathcal{G}$ 自然闭嵌入到 [SW20，推论 21.6。10], 由基变换可得朴素模型和典范模型的结论，因为 $LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} L^+\mathcal{G} \to \mathfrak{B}(G)'$ 可由归纳极限（完美适当概形）表出 [Zhu25，引理 3。28]。

对于分裂模型，存在一个交换图

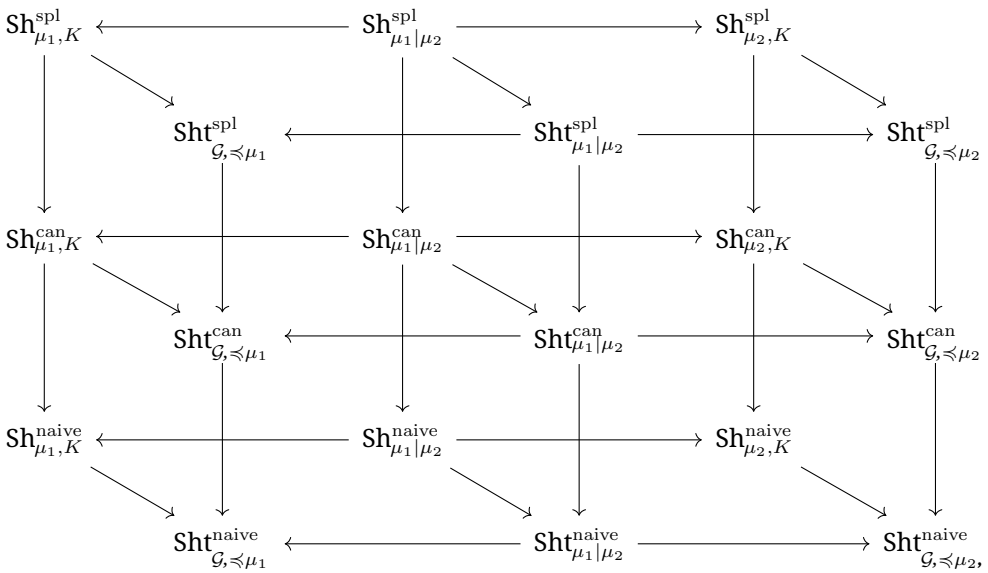
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i} \end{array}.$$

这里，右侧箭头可由完美适当概形表示，因为这在局部模型层面成立；根据引理 4。5。由于我们已经知道朴素模型的推论，因此分裂模型也同样成立。 □

4.2. **通过分裂模型构造奇异对应**。 最后，我们可以利用模空间解释，在志村簇的各种模型的特殊纤维之间构造奇异 Hecke 对应。固定两个全局整 PEL 数据 $(B,*,\mathcal{O}_B,V_i,(,)_i,\mathscr{L}_i,h_i)$，其中 $i=1,2$。这确定了两个志村数据 $(\mathbb{G}_i,\mathbb{X}_i)$。令 $\mathbb{E}_i$ 为它们各自的反射域，并令 μ_i 为由 $\mathbb{X}_i$确定的霍奇余特征的支配代表元。考虑它们的复合域 $\mathbb{E}$，并固定 $\mathbb{E}$ 的一个素位 $\mathfrak{p}$，其完备化为 $E=\mathbb{E}_{\mathfrak{p}}$；下文中我们将所有对象都视为定义在剩余域 $k=k_E$上。假设给定一个同构 $V_1\otimes\mathbb{A}_f \cong V_2\otimes\mathbb{A}_f$，且它与配对 $(,)_i$ 及 $\mathcal{O}_B$-结构相容。那么我们还有 $\mathbb{G}_{1,\mathbb{A}_f} \cong \mathbb{G}_{2,\mathbb{A}_f}$，因此 $\mathbb{G}_i$ 具有伽罗瓦等变同构的对偶群。最后，我们还假设 $\mu_{1|Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}} = \mu_{2|Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}}$。

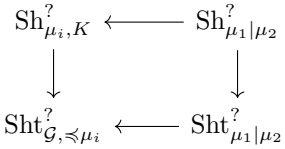
定理 4.7。 使用上述记号，假设2。12 对由以下数据得到的两个局部整 *PEL* 数据均成立：$(B,*,\mathcal{O}_B,V_i,(,)_i,\mathscr{L}_i,h_i)$。那么存在（且必然唯一）

ind-完美概形 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}$、$\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2}$ 和 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$，它们构成如下交换图



(4.1)

其中所有形如以下形式的方块



都是笛卡尔的。

证明。 (4.1) 中由局部 shtuka 模空间构成的部分已在引理4.5中构造，而映射 $\mathrm{Sh}_{\mu_i,\ K} \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\ \preccurlyeq\mu_i}$ 是来自 (3.1) 的晶体周期映射。剩下的工作是构造 $\mathrm{Sh}_{\mu_1|\mu_2}$，并证明它们使所需的方块成为笛卡尔方块。随后，这些预层栈由 ind-完美概形表示这一点将由推论 4.6推出。我们先从朴素模型和分裂模型开始。

根据引理 3.17 和引理 4.4，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1},_K \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G}},\preccurlyeq\mu_1} \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$ 的一个点由一个齐次极化的 $\mathscr{L}$-集 $A_1 = \{A_{1,\Lambda}\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ 个阿贝尔簇、一个层结构 η，以及相应的极化 $\mathcal{O}_B$-p 可除群 $\mathscr{L}$-多重链的一个修改构成。根据经典论证（例如参见 [RZ96, 6.13], ），对 A_1 的 p 可除群作这样的修改会得到另一个齐次极化的 $\mathscr{L}$-集 $A_2 = \{A_{2,\Lambda}\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$，以及一个准同源 $A_1 \sim A_2$。利用这个准同源，我们可以给 A_2 配备由 η 诱导的层结构。由于阿贝尔簇的行列式条件可以在 p 可除群的层面上检验，因此这给出 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_2}{}_K,,$ 的一个点，从而得到一个映射

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1,K} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_1}} \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_2,K} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_2}} \mathrm{Sht}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}\,.$$

Si样地，我们可以构造一个反方向的映射，并且它们互为逆。

分裂模型的情形也类似，因为阿贝尔簇上的分裂结构（在特征 p下）等价于其对应的 p-可除群 [MM74,1.12]。

注意，存在一个自然态射 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$，它是归纳完美适当的。事实上，它位于如下交换图中

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1,K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1,K}, \end{array}$$

其中所有其他箭头都由推论4.6 和（2.1）是 ind-完美适当的。

现在将 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} \subseteq \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$ 定义为 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$的概形像。由该映射的适当性，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}$ 满射到 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2}$。因此，作为复合

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_i,K}$$

经过 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K} \subseteq \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_i,K}$（由推论2.14 和（2.1），映射

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_i,K}$$

也经过 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K}$。由此得到（4.1）中的所有箭头，接下来只需证明在典范情形下所需的方块是笛卡尔的。

令 X_i 表示 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K}$ 与 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2}$ 在 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i}$ 上的纤维积。于是存在一个自然映射 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} \to X_i$；由于这两个 ind-(完美概形) 都自然闭浸入 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{naive}}_{\mu_1|\mu_2}$，该映射是闭浸入。因此只需证明该映射是满射。为此，取一个点 $x = (y, z) \in X$，其中 $y \in \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K}$ 且 $z \in \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2}$。由于 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2}$ 由引理 4.5 是满射的，我们可以找到 z 在 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}$ 中的一个原像。由于方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\mu_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i} \end{array}$$

由于（3.1）中出现的映射是笛卡尔的，我们可以找到一个（唯一的）$y' \in \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K}$ 映射到 $y \in \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K}$ 且在 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu_i}$ 中的像与 z'相同。这给出一个点 $x' = (y', z') \in \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}$，其在 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2}$中的像映到 $x \in X$。由于我们处理的是 ind-完美概形，这表明 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} \to X_i$ 是一个同构，正如所需。□

5. Mixed Tate motives on splitting affine Grassmannians

现在我们转而采用一种更偏群论的方法来研究分裂模型。目前，我们允许p 为任意素数。此外，本文其余部分所用的方法不需要模空间解释（但会用到此前构造的奇异 Hecke 对应），因此我们将在比前几节更一般的情形下开展研究。在许多地方，我们会假设我们的群是本质非分歧的。

定义 5.1. 设 G/F 为一个约化群。其伴随商分解为积 $G_{\mathrm{ad}} = \prod_i \mathrm{Res}_{F_i/F} H_i$，其中每个 F_i/F 是有限可分域扩张，且 H_i/F_i 是绝对单约化群。则称 G 为本质非分歧，如果每个 H_i 是非分歧的 F_i-群。

记号 5.2。 每当 G/F 本质非分歧且拟分裂时，我们固定以下记号。首先，将伴随商分解为绝对单非分歧群的标量限制，并记作 $G_{\mathrm{ad}} = \prod_i \mathrm{Res}_{F_i/F} H_i$。对每个 i，我们固定一个极大 F_i-分裂环面 $A_i \subseteq H_i$，它包含于一个极大 F_i-分裂环面 $S_i \subseteq H_i$中，并令 $T_i := \mathrm{Cent}_{H_i} S_i$。如 [HR20b, §4。2], 所示，我们可以构造自然环面 $A_i \subseteq S_i \subseteq T_i \subseteq \mathrm{Res}_{F_i/F} H_i$，它们是极大 A_i

$\mathcal{J}F$-分裂、 S_i 极大 F-分裂，且 T_i 极大。根据下文引理 5。3，我们得到一系列类似的环面 $A \subseteq S \subseteq T \subseteq G$。我们还固定 G 和 H_i的相容博雷尔子群，从而为这些群得到相容的正根系统和支配（余）特征系统。G 的约化布鲁哈-蒂茨建筑与 H_i的约化布鲁哈-蒂茨建筑的乘积一致，据此我们固定一个甚特殊仿抛物子群 $\mathcal{G}/\mathcal{O}_F$，它在 $\mathcal{H}_i$ 上诱导出超特殊抛物型子群 H_i。

最后，令 k_i 为 F_i的剩余域，令 $F_i^{\mathrm{unr}} \subseteq F_i$ 为在 F上非分歧的最大子扩张。我们还令 $e_i = [F_i\colon F_{\mathrm{unr}_i}\ ]$为 F_i/F的分歧指数，令 $f_i = [F_i^{\mathrm{unr}}\colon F]$为剩余次数；特别地， $[F_i\colon F] = e_i f_i$。

引理 5.3。 设 G/F 拟分裂， $A_{\mathrm{ad}} \subseteq S_{\mathrm{ad}} \subseteq T_{\mathrm{ad}} \subseteq G_{\mathrm{ad}}$ 为三个环面，其中 T_{ad} 是极大环面，$\mathcal{J}S_{\mathrm{ad}}$ 是极大 F-分裂的，且 A_{ad} 是极大 F-分裂的。那么， T_{ad} 的原像 $T \subseteq G^{\smile}$的约化中性分支是一个极大环面。此外，它包含唯一一个极大 F-分裂环面$S \subseteq G$，而后者又包含唯一一个极大 F-分裂环面 $A \subseteq G$。最后，$A \subseteq S \subseteq T \subseteq G$ 在 G_{ad} 中的像是 $A_{\mathrm{ad}} \subseteq S_{\mathrm{ad}} \subseteq T_{\mathrm{ad}} \subseteq G_{\mathrm{ad}}$。

证明。 令 T 为 T_{ad} 在 G中的原像的约化中性连通分支。根据 [Mil17，定理 12.9 和 15，39], 具有乘法型，因此它是一个环面，因为它约化且连通。考察 Z_G 和 G_{ad}的秩可知， $T \subseteq G$ 是一个极大环面。

接下来，我们将 $S \subseteq T$ 定义为特征格为 $X^*(S) = X^*(T)_I/X^*(T)_{I,\,\mathrm{tors}}$即 $X^*(T)_I$ 除以其挠子群所得的商的子环面。特别地，它位于图表中

$$\begin{array}{ccc} X^*(T_{\mathrm{ad}}) & \hookrightarrow & X^*(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^*(T_{\mathrm{ad}})_I/X^*(T_{\mathrm{ad}})_{I,\,\mathrm{tors}} & \longrightarrow & X^*(T)_I/X^*(T)_{I,\,\mathrm{tors}}, \end{array}$$

对应于

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathrm{ad}} & \twoheadleftarrow & T \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_{\mathrm{ad}} & \hookleftarrow & S. \end{array}$$

要证明 $S \to S_{\mathrm{ad}}$ 是满射，只需证明 $X^*(T_{\mathrm{ad}})_I/X^*(T_{\mathrm{ad}})_{I,\,\mathrm{tors}} \to X^*(T)_I/X^*(T)_{I,\,\mathrm{tors}}$ 是单射。一方面，将其有理化后这一点成立，因此其核是挠元。但根据构造， $X^*(T_{\mathrm{ad}})_I/X^*(T_{\mathrm{ad}})_{I,\,\mathrm{tors}}$ 无挠，于是得到所需的单射性。（事实上，由于 T_{ad} 是伴随群中的极大环面，伽罗瓦作用会置换 $X^*(T_{\mathrm{ad}})$ 的一个基，因此$X^*(T_{\mathrm{ad}})_I$ 已经无挠。）

类似地，我们定义 $A \subseteq S \subseteq T$，其特征格为 $X^*(A) = X^*(T)_{\Gamma_F}/X^*(T)_{\Gamma_F,\,\mathrm{tors}}$，上述相同的论证表明，它在 G_{ad} 中的像为 A_{ad}。最后，通过考察秩，我们看到 $S \subseteq G$（分别为 $A \subseteq G$）是极大 $\check{F}$-分裂的（分别为极大分裂的）。□

尽管我们的主要结果将涉及本质非分歧群，但这一假设并非总是必要的；我们将在每个（子）节的开头说明是否施加该假设。注意，当 $G/\mathbb{Q}_p$ 与一个积分局部 PEL Shimura 数据相关联的群是本质非分歧的时，相应分裂模型的特殊纤维（如定义 2.19）同构于舒伯特簇的卷积积，例2.15。特别地，下一节中的群论方法将适用于这些通过线性代数定义的分裂模型。

在本节中，我们将使用 ´étale 动机 [导出范畴16], 理论，相关内容回顾于附录A。目前，我们将使用带 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$系数的动机；从§7.4起，¯ 我们将改用带 $\mathbb{Q}$系数的动机。

5.1. **卷积仿射旗簇上的混合泰特动机**。 由于分裂局部模型的有界部分源自仿射格拉斯曼量中舒伯特簇的卷积积（至少在非常特殊层和本质非分歧情形下如此），我们来更一般地研究（无界）仿射格拉斯曼量的卷积积，尤其是它们的动机

方面。这将立即推出仿射格拉斯曼量分裂模型的类似结果（待我们定义这些模型之后），但本小节并不需要将讨论范围限制在本质非分歧群上。事实上，本小节的大部分内容对更一般的部分仿射旗簇也适用。现在，设 G/F 为任意一个拟分裂约化群，本小节中我们始终假设它是剩余分裂的（即，G 的任意仿抛物模型的特殊纤维的约化商都是分裂的）。特别地，极大 $\breve{F}$-分裂环面 $S \subseteq G$ 已经在 F 上分裂。我们还固定一个伊瓦霍里模型 $\mathcal{I}/\mathcal{O}_F$ 和一个对应于面 $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{I}$ 的抛物型模型$\mathbf{f}$，并请参阅 §1.7和 [vdH24a，§3]，了解部分仿射旗簇的基础知识。

固定一个整数 t，并考虑 t 重卷积仿射旗簇

$$\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{\widetilde{\times} t} := \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} \widetilde{\times} \ldots \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} := LG \overset{L^+\mathcal{G}}{\times} \ldots \overset{L^+\mathcal{G}}{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$$

例如，参见 [vdH24a，定义 5。1]。它可表为一个归纳（完美射影）归纳概形，~ ~并具有卷积态射 m：$\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$。此外，它按卷积舒伯特胞腔分层

$$\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_\bullet} := \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_1} \widetilde{\times} \ldots \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_t},$$

对于 $w_\bullet = (w_1, \ldots\ldots, w_t) \in (W_{\mathbf{f}} \backslash \tilde{W} / W_{\mathbf{f}})^t$，其闭包为

$$\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},\leq w_\bullet} := \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},\leq w_1} \widetilde{\times} \ldots \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_t},$$

称为卷积舒伯特簇。这些卷积舒伯特胞腔在自然的 $L^+\mathcal{G}$ 作用下保持不变，该作用由其在第一个因子上的作用诱导。

在 [vdH24a，定理 3。7], 中，我们证明了部分仿射旗簇的舒伯特分层是惠特尼–泰特的且为完美胞腔的（依照 [RS21，定义 3.2 和 3。3]）。因此，部分仿射旗簇具有良好的分层泰特动机范畴，并且可以赋予动机 t-结构（与概形上的整个动机范畴不同，后者中动机 t-结构的存在依赖于关于代数闭链的标准猜想）。事实证明，卷积仿射旗簇也具有惠特尼–泰特分层，且其分层由完美胞腔概形构成。

引理 5.4. 对于任意 $w \in \tilde{W}$，存在一个子概形 $X \subseteq L^+\mathcal{I}$，同构于 $\mathbb{A}^{l(w)}{}_k{}^{\mathrm{perf}}$，使得在 $w \in \mathrm{Fl}_{\mathcal{I}}$ 上的作用诱导出一个同构 $X \cong \mathrm{Fl}_{\mathcal{I},w}$。

证明. 对于任意相对仿射根 $\psi = \alpha + n$，若 $\alpha \in \Phi(G, S)$ 是一个相对根且 $n \in \mathbb{Z}$，我们将 $\mathbb{G}_a^{\mathrm{perf}} \to LG$: $x \mapsto u_\alpha([x]\varpi^n)$ 的像记为 U_ψ。这里，$[x]$ 是 x 的 Teichmüller 代表元，而 u_α 是与 α 对应的根同态。

取一个约化分解 $\dot{w} = s_1 s_2 \ldots s_{l(w)} \tau$，其中包含 s_i 个简单仿射反射，并且 $\tau \in \tilde{W}$ 长度为 0；我们不妨设 $\tau = 1$。令 $\mathbf{a}$ 为与 $\mathcal{I}$对应的壁室，并令 $\mathbf{a}_i = s_1 \ldots s_i(\mathbf{a})$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, l(w)$。令 ψ_i 为唯一的正相对仿射根，使得相应的反射超平面包含分隔 $\mathbf{a}_{i-1}$ 与 $\mathbf{a}_i$的墙。由[vdH24a命题 3.6 (1)] 的证明可知，作用映射

$$\prod_{i=1}^{l(w)} U_{\psi_i} \to \mathrm{Fl}_{\mathcal{I}} \colon (y_i) \mapsto y_1 y_2 \ldots y_{l(w)} w$$

诱导出一个到 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{I},w}$ 上的同构。 □

~ ~**命题 5.5.** $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} \times \ldots \times \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$ 按卷积舒伯特胞腔作出的分层是 *Whitney*– 泰特分层，且其分层是完美胞腔的。

证明。为简便起见，我们只处理两个仿射旗簇的卷积积。令v、v'、w、$w' \in W_{\mathbf{f}} \backslash \tilde{W} / W_{\mathbf{f}}$分别对应于舒伯特胞腔 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}, v}$、$w \xrightarrow{\iota_w} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$ 等。于是 $(\iota_v \widetilde{\times} \iota_w)^*(\iota_{v'} \widetilde{\times} \iota_{w'})_* \mathbb{1}$~可被识别为扭曲外积 $(\iota_v^* \iota_{v'}, {}_*\mathbb{1}) \boxtimes (\iota_w^* \iota_{w'}, {}_*\mathbb{1})$（如 [vdH24a 的记号 6.10], 所定义，但不进行截断）。事实上，这由 *-拉回和 *-前推均与外积相容这一事实得出 [JY21，命题 2.1.20]。因此，由于 $\iota_v^* \iota_{v'}, {}_*\mathbb{1} \in \mathrm{DM}(\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}, v})$ 和 $\iota_w^* \iota_{w'}, {}_*\mathbb{1} \in \mathrm{DM}(\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}, w})$ 根据 [vdH24a，定理 3.7], 均为泰特对象，只需证明

幺半单位的扭曲外积是泰特对象。但这显然与 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},v} \times \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}$ 的幺半~单位一致。

尚需证明 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},v} \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}$ 是完美胞腔的。由 [vdH24a, Proposition 3.6 (3)]，我们可以假设 $\mathcal{G} = \mathcal{I}$ 是 G 的伊瓦霍里模型。于是，应用引理 5.4，可找到一个子概形 $H \subseteq L^+\mathcal{I}$，它同构于某个完美仿射空间，且作用映射诱导出同构 $H \times \left(\{v\} \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}\right) \cong \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},v} \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_\circ}$。由于根据 [vdH24a, Proposition 3.6 (1)]，$\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w} \cong \{v\} \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}$ 已经是完美胞腔的，故得证。□

特别地，卷积仿射旗簇上的分层泰特动机范畴 $\mathrm{DTM}(\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} \widetilde{\times} \dots \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}})$（如 [vdH24a，定义 2.11] 所述）根据 [vdH24a，命题 2.12]，具有自然的 t-结构，其心 $\mathrm{MTM}(\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} \widetilde{\times} \dots \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}})$ 称为混合泰特动机范畴。类似地，我们可以定义等变版本 $\mathrm{DTM}^{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} \widetilde{\times} \dots \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}})$ 和 $\mathrm{MTM}^{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}} \widetilde{\times} \dots \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}})$。

为了在局部shtuka模栈上定义合适的分层泰特动机范畴，考虑（卷积）仿射旗簇上的自然扭子也会很有用。

具体而言，考虑 $L^+\mathcal{G}$ 在 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$ 上的扭子 $\widetilde{\times} \dots \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}$，由 LG 给出 $\overset{L^+\mathcal{G}}{\times} \dots \overset{L^+\mathcal{G}}{\times} LG$；特别地，当 $t = 1$ 时，这恰好就是 LG。我们将此扭子在卷积舒伯特胞腔或簇上的限制记为 $\mathrm{Fl}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\leq w_\bullet} \to \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},(\leq)w_\bullet}$。此外，对于任意 $n \geq 0$，商 $L^+\mathcal{G} \to L^n\mathcal{G}$ 诱导出一个 $L^n\mathcal{G}$-扭子 $\mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},(\leq)w_\bullet} \to \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},(\leq)w_\bullet}$。于是我们得到分层

$$LG \overset{L^+\mathcal{G}}{\times} \dots \overset{L^+\mathcal{G}}{\times} LG = \bigsqcup_{w_\bullet \in (W_{\mathbf{f}} \backslash \tilde{W} / W_{\mathbf{f}})^t} \mathrm{Fl}^{(\infty)}_{\mathcal{G},w_\bullet} \quad \text{and} \quad LG \overset{L^+\mathcal{G}}{\times} \dots \overset{L^+\mathcal{G}}{\times} \mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G}} = \bigsqcup_{w_\bullet \in (W_{\mathbf{f}} \backslash \tilde{W} / W_{\mathbf{f}})^t} \mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},w_\bullet}. \tag{5.1}$$

推论 5.6. 对于有限的 $n \geq 0$，分层 (5.1) 是惠特尼–泰特的，且其分层是完美胞腔的。

证明。令 $v_\bullet \leq w_\bullet$，并考虑由笛卡尔方块组成的图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},v_\bullet} & \xrightarrow{\iota^{(n)}_{v_\bullet}} & \mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},\leq w_\bullet} & \xleftarrow{\iota^{(n)}_{w_\bullet}} & \mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},w_\bullet} \\ {\scriptstyle f_{v_\bullet}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{\leq w_\bullet}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{w_\bullet}} \\ \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},v_\bullet} & \xrightarrow[\iota_{v_\bullet}]{} & \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},\leq w_\bullet} & \xleftarrow[\iota_{w_\bullet}]{} & \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_\bullet}, \end{array}$$

其中竖直箭头是 $L^n\mathcal{G}$-扭子。由于 $L^n\mathcal{G}$ 是完美光滑的，这给出了等价

$$(\iota^{(n)}_{v_\bullet})^*(\iota^{(n)}_{w_\bullet})_* f^*_{w_\bullet} \cong (\iota^{(n)}_{v_\bullet})^* f^*_{\leq w_\bullet}(\iota_{w_\bullet})_* \cong f^*_{v_\bullet}(\iota_{v_\bullet})^*(\iota_{w_\bullet})_*.$$

分层的惠特尼–泰特性随后由命题 5.5 得出，因为沿竖直映射的 *-拉回保持分层泰特动机。

还需证明每个 $\mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},w_\bullet}$ 都是完美胞腔的。注意到 $\mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},w_\bullet} = \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_1} \widetilde{\times} \dots \widetilde{\times} \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_{t-1}} \widetilde{\times} \mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},w_t}$，因此反复使用引理 5.4（并将第一个因子分解为其伊瓦霍里轨道）后，我们可以假设 $t = 1$。类似地，引理 5.4 给出了 $\mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}$ 的一个分层，其中每个分层片都是一个完美仿射空间与 $\mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},w} \to \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w}$ 的一个纤维的乘积，即 $L^n\mathcal{G}$。但 $L^n\mathcal{G}$ 是其幺幂根基的一个延拓，而该幺幂根基是分裂幺幂的；同时它还是一个分裂约化群的延拓，后者根据布鲁哈分解是胞腔的，从而引理得证。□

注 5.7. (1) 前一个推论假设 n 是有限的，以便这些分层都是有限型的完美概形。然而，我们有 $L^+\mathcal{G} = \lim_{\longleftarrow n>0} L^n\mathcal{G}$，因此 $\mathrm{Fl}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\leq w_\bullet} = \lim_{\longleftarrow n>0} \mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},\leq w_\bullet}$。因此，由于动机范畴是从 pfp 概形通过 Kan 延拓得到的，我们有

$$\mathrm{DM}(\mathrm{Fl}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\leq w_\bullet}) \cong \varinjlim_{n>0} \mathrm{DM}(\mathrm{Fl}^{(n)}_{\mathcal{G},\leq w_\bullet})$$

由（A.3），其中过渡映射由 !-拉回给出。但这些映射是全忠实的，因为 $L^+\mathcal{G} \to L^m\mathcal{G} \to L^n\mathcal{G}$ 的核是分裂原幺幂的。特别地，对于 $m \geq n$，这样的

!-拉回诱导等价 DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(n)}$, $\leq w_\bullet$) $\cong$ DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(m)}$, $\leq w_\bullet$)。因此，我们有时会用 DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(\infty)}$, $\leq w_\bullet$) 表示全忠实的 !-拉回 DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(n)}$, $\leq w_\bullet$) $\to$DM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(\infty)}$, $\leq w_\bullet$) 的本质像。对于等变版本和无界变体，我们也将使用类似记号。特别地，这给出了一个范畴 DTM(LG)，它由圈群LG上的分层泰特动机构成，其中分层由 Fl$_{\mathcal{G}}$上的分层诱导；这取决于仿抛物 $\mathcal{G}$的选择。

(2) 根据推论5.6，我们也可以应用 [vdH24a，命题 2.12]，为每个 DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(n)},\leq w_\bullet$) 配备一个 t-结构。然而，为了定义局部 shtuka 模空间上的混合泰特动机，我们将对 t-结构重新归一化。也就是说，我们将不采用 [vdH24a 命题 2.7], 中的 t-结构，而改用通过粘合 DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(n)},w_\bullet$) 上的 t-结构得到的 t-结构，其中连通部分由以下对象生成

$$\{f^!_{w_\bullet}\mathbb{1}(m)[\sum_{i=1}^{t} l(w_i)] \mid m \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $f_{w_\bullet}\colon \mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(n)},w_\bullet \to \mathrm{Fl}_{\mathcal{G},w_\bullet}$ 是 $L^n\mathcal{G}$-扭子。我们仍将所得的心记为 MTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(n)},\leq w_\bullet$)，并称其为（分层）混合泰特动机范畴。特别地，这使得等价 DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(n)},\leq w_\bullet$) $\cong$ DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(m)},\leq w_\bullet$)（对于 $m \geq n$，由 !-拉回给出）成为 t-正合的，从而在 DTM($\mathrm{Fl}_{\mathcal{G}}^{(\infty)},\leq w_\bullet$) 上诱导出一个 t-结构。我们对等变情形和无界变体也作类似考虑。

(3) 所有 上述分层事实上是反有效的（在 [CvdHS25，定义)2,6]但这对本论文并不重要。

（4）若 G 是拟分裂但非剩余分裂的，我们可以用Artin–泰特动机DATM代替DTM，如 [vdH24a，§2.4]中所述。上述评注此时仍然成立。这些范畴DATM及其心MATM依赖于域扩张 k'/k 在此之后 G 变为剩余分裂。在本文其余部分，我们将不使用Artin–泰特动机。

现在我们专门考虑 $\mathcal{G}$ 为非常特殊的情形，并记$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$ =Fl$_{\mathcal{G}}$。于是$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$上的混合泰特动机经由动机Satake等价与朗兰兹对偶群的惯性不变量相关联 [vdH24a，定理1.1]。下述结果也使我们能够将卷积格拉斯曼量上的动机与朗兰兹对偶数据联系起来。我们用$\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$:= $(L^+\mathcal{G}\backslash\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})^{\text{ét}}$表示局部海克堆栈，并定义DTM(Hck$_{\mathcal{G}}$) := $\mathrm{DTM}^{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$（它配备有一个t-结构）。

命题5.8. 沿两个态射的 *!*-拉回

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \widetilde{\times} \ldots \widetilde{\times} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \to L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \widetilde{\times} \ldots \widetilde{\times} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \to \mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \times \ldots \times \mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$$

在分层混合泰特动机（即MTM）上诱导等价。

若 G 不一定是剩余分裂的（但仍是拟分裂的），则阿廷-泰特动机的类似结果仍然成立，证明方法相同（或可利用伽罗瓦下降）。

证明。 为简单起见，我们仍然只考虑 $t = 2$ 的情形。首先注意，这两个映射都保持分层，因此沿它们的!-拉回保持分层泰特动机。根据 t-结构的定义，这个拉回也是 t-正合的，因此我们得到混合泰特动机之间诱导的函子。结合 [RS20、(2.2.8) 以及引理 2.2.12 和 3.2，12], 可知，这两个函子限制在 MTM 上时都是全忠实的。

现在，考虑由 $L^+\mathcal{G}$-扭子构成的下图：

$$\begin{array}{ccccc} & & LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \mathbin{\widetilde{\times}} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} & & & & \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \times \mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}. & & \end{array} \tag{5.2}$$

如上所述，沿这些态射的!-拉回保持混合泰特动机，并且限制在 MTM 上时是全忠实的（回顾我们在注LG中定义了 MTM(5。7)。（在证明的其余部分，我们可以放心地限制于舒伯特簇的有限并，此时可以将 $L^+\mathcal{G}$-扭子替换为有限型商上的、具有分裂原幺正核的扭子。为简化记号，略去这一点。）另考虑以下作用和投影映射：

$$\begin{aligned} a_1 &\colon L^+\mathcal{G}\times LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \to LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \colon (g,h,x)\mapsto (hg^{-1},x),\\ a_2 &\colon L^+\mathcal{G}\times LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \to LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \colon (g,h,x)\mapsto (hg^{-1},gx),\\ a_3 &\colon L^+\mathcal{G}\times LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \to LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \colon (g,h,x)\mapsto (h,gx),\\ p &\colon L^+\mathcal{G}\times LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \to LG\times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \colon (g,h,x)\mapsto (h,x). \end{aligned}$$

回顾 [RS20，命题 3.220]，全子范畴 MTM($\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}\times\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$) $\subseteq$ MTM($LG\times\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$) 由满足 $p^!\mathcal{F}\cong a_1^!\mathcal{F}$ 的混合泰特动机 $\mathcal{F}$组成。同样，MTM($\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}\mathbin{\widetilde{\times}}\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$) $\subseteq$MTM($LG\times\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$) 恰好由满足 $p^!\mathcal{F}\cong a_2^!\mathcal{F}$ 的对象 $\mathcal{F}$组成。此外，根据 [vdH24a，命题 6.21], ，每个 $\mathcal{F}\in$ MTM($LG\times\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$) 都满足 $p^!\mathcal{F}\cong a_3^!\mathcal{F}$。

我们断言，沿（5.2）中两条下方箭头的拉回在 MTM 上诱导等价；对于右下方的箭头，这由 [vdH24a，命题 6。21]可得。令 $\mathcal{F}\in \mathrm{MTM}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}\mathbin{\widetilde{\times}}\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$ $\subseteq$MTM($LG\times\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$)，并考虑态射

$$L^+\mathcal{G}\times X \xrightarrow{\nabla\colon (g,x)\mapsto(g^{-1},g,x)} L^+\mathcal{G}\times L^+\mathcal{G}\times X \xrightarrow{\mathrm{id}\times a_2} L^+\mathcal{G}\times X \xrightarrow{a_3} X,$$

wh这里我们记 $X:=LG\times\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$。那么该复合与 a_1 一致。但是 n

$$a_1^!\mathcal{F}\cong\nabla^!\circ(\mathrm{id}\times a_2)^!\circ a_3^!(\mathcal{F})\cong\nabla^!\circ(\mathrm{id}\times a_2)^!\circ p^!(\mathcal{F})\cong a_2^!\mathcal{F}\cong p^!\mathcal{F}.$$

因此 $\mathcal{F}\in\mathrm{MTM}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}\times\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$，于是（5.2）中的左下方箭头在 MATM 上诱导本质满的 !-拉回，因而也是等价。随后应用 [vdH24a，命题 6。21]，即可得出该命题。□

将此与动机 Satake 等价 [vdH24a，定理 1。1], 结合，并注意到 Hecke 叠与乘积相容，我们得到

$$\mathrm{MTM}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{,\mathcal{G}}{}^{\widetilde{\times t}}\cong)\bigotimes_{\mathrm{MTM}(\text{谱 } k)}^{t}\mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,k))\cong\mathrm{Rep}_{(\widehat{G}^I)^t}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,k)). \tag{5.3}$$

~尽管这通过结构的迁移使 $\mathrm{MTM}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}\times t},)$ 成为对称幺半，但尚不清楚如何直接描述这一幺半结构。

5.2. **无界分裂仿射 Grassmannian**。在前面各节中，我们考虑了局部模型的分裂版本，其特殊纤维（在良好情形下）是极小舒伯特胞腔的卷积积。人们可以自然地推广这一概念，并定义无界分裂仿射 Grassmannian。它们将与上文所研究的卷积仿射 Grassmannian密切相关，但为了把几何方面与表示论方面联系起来，我们必须谨慎处理它们的连通分支。在本节其余部分，我们将假设 G/F 是本质非分歧的（因而采用记号5.2）。我们还略去如下假设： G是剩余分裂的（尽管我们仍假设它是拟分裂的）；相反，我们将立即把我们的几何视为

定义在 k上。特别地，$\mathrm{Res}_{k_i/k}\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{H}_i}$将默认表示先沿 k_i/k对$\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{H}_i}$作限制标量，再基变换到 k；我们希望这不会引起混淆。

回忆一下，仿射格拉斯曼量的连通分支与 Borovoi 基本群的伽罗瓦共变元一致 [Zhu17a，命题 1。21]。因此，卷积仿射 Grassmannian 的连通分支可识别为这些分支的乘积。

定义 5.9。对于每个 i，令 $F_i^{\mathrm{unr}} \subseteq F_i$ 如记号 5所述。2，并在嵌入集合上固定一种排序 $F_i^{\mathrm{unr}} \to F$（其元素个数为 $\overline{e_i}$）。根据此选择，考虑 $\prod_i \mathrm{Res}_{k_i/k}\left(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{H}_i}{}^{\widetilde{\times} e_i}\right)$，其几何连通分支群典范地同构于 $\prod_i \pi_1(H_i)^{e_i f_i} \cong \pi_1(G_{\mathrm{ad}})$。

分裂仿射格拉斯曼尼亚 是由纤维积给出的 ind-(完美射影) ind-k-概形

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} := \pi_1(G) \times_{\pi_1(G_{\mathrm{ad}})} \prod_i \mathrm{Res}_{k_i/k}\left(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can},\widetilde{\times} e_i}_{\mathcal{H}_i}\right).$$

它带有自然的 $L^+\mathcal{G}$-作用，而分裂海克堆栈 定义为 ´étale 商

$$\mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} := (L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})^{\text{ét}}.$$

注 5.10。(1) 识别 $\prod_i \pi_1(H_i)^{e_i f_i} \cong \pi_1(G_{\mathrm{ad}})$ 与伽罗瓦作用不相容（参见 [Bor79, §5]）。因此，我们只在 k上定义 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$，而不定义 k。稍后在联系志村簇时，我们只需要 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 的某个子概形，它实际上自然定义在谱 k上，参见 [Lev16, §5.4]。尽管如此，我们仍给出了上述定义，因为它使第 5-7 节的结果处于一个自然且更一般的背景中。

(2) 根据构造，存在典范双射

$$\pi_0(\mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}) \cong \pi_0(\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}) \cong \pi_1(G).$$

(3) 存在自然映射 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}_{\mathrm{ad}}} \cong \prod_i \mathrm{Res}_{k_i/k}\left(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{H}_i}\right)$，它在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$的每个连通分支上诱导一个同构，依据 [HR20a,§3]。由此得到映射

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}.$$

由于 $\pi_1(G) \to \pi_1(G)_I$ 是满射，这些映射也都是满射。

~卷积格拉斯曼量 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{H}_i}{}^{\times e_i}$ 可按 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{H}_i}$ 中舒伯特胞腔的卷积积进行分层，从而诱导出一个分层

$$\prod_i \mathrm{Res}_{k_i/k}\left(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can},\widetilde{\times} e_i}_{\mathcal{H}_i}\right) \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, \overline{k} \cong \prod_i \prod_{f_i} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can},\widetilde{\times} e_i}_{\mathcal{H}_i}.$$

命题 5.11. 将上述分层拉回到 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$，得到 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 的一个 $L^+\mathcal{G}$-稳定分层，其指标由 $X_*(T)^+$ 自然给出。

~证明。这是因为 $\prod_i \prod_{f_i} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{H}_i}{}^{\times e_i}$ 的分层由 $\prod_i (X_*(T_{H_i})^+)^{e_i f_i}$ 编号；这一点可由所有相关对象的连通分支的描述，以及下述图表具有笛卡尔方块这一事实得出：

$$\begin{array}{ccccc} X_*(T)^+ & \longrightarrow & X_*(T) & \longrightarrow & \pi_1(G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i (X_*(T_{H_i})^+)^{e_i f_i} & \longrightarrow & \prod_i X_*(T_{H_i})^{e_i f_i} & \longrightarrow & \prod_i \pi_1(H_i)^{e_i f_i}. \end{array} \tag{5.4}$$

事实上，左边的方块是笛卡尔的，因为 T 的余特征占优，当且仅当它作为 G_{ad}的余特征占优。此外，右边的方块也是笛卡尔的，因为中间的垂直箭头在两个水平箭头的核之间诱导出一个同构，而这两个核由相同的余根生成。□

定义 5.12. (1) 对于 $\mu \in X_*(T)^+$，我们将由前一个命题得到的 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$ 中的相应分层记作 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu}^{\mathrm{spl}}$，其闭包记作 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu}^{\mathrm{spl}}$。它们分别称为分裂舒伯特胞腔和分裂舒伯特簇。

(2) 每个 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu}^{\mathrm{spl}}$ 都具有自然的 $L^+\mathcal{G}$-作用。特别地，对于元组 $\mu_\bullet = (\mu_1, \dots, \mu_t) \in (X_*(T)^+)^t$，我们定义卷积积

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} := \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu_1}^{\mathrm{spl}} \widetilde{\times} \dots \widetilde{\times} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu_t}^{\mathrm{spl}} \quad \text{and} \quad \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} := \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu_1}^{\mathrm{spl}} \widetilde{\times} \dots \widetilde{\times} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu_t}^{\mathrm{spl}}.$$

更一般地，我们还可以取 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$ 和 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$ 中各分层之间的卷积积。所有这些对象都具有左 $L^+\mathcal{G}$-作用，其商记为 $\mathrm{Hck}_{\mathcal{G},\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} := (L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}})^{\text{ét}}$ 等，称为卷积 *Hecke* 叠。

注 5.13. (1) 在本文余下部分，我们将经常比较典范仿射格拉斯曼量（其舒伯特分层由 $X_*(T)_I^+$ 索引）与分裂仿射格拉斯曼量（其舒伯特分层由 $X_*(T)^+$ 索引）的几何。回忆 §1.7，对于 $\mu \in X_*(T)$，我们将其在 $X_*(T)_I$ 中的像记为 μ_I。此外，即使我们没有在 $X_*(T)$ 中固定一个提升，也总是用下标 I 标记 $X_*(T)_I$ 中的元素。

(2) 典范态射 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$ 限制为一个满射双有理映射 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}^{\mathrm{can}}$。然而，它一般并不限制为一个映射 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu_I}^{\mathrm{can}}$。

(3) 对分层 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} = \bigsqcup_{\mu\in X_*(T)^+} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu}$ 显然的闭包关系成立。

(4) 与典范情形不同，一般不存在自然映射 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\sum_i \mu_i}^{\mathrm{spl}}$。然而，仍然存在自然卷积映射

$$m_{\mu_\bullet} \colon \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}.$$

下述推论由命题5.5 及 Gr 的定义直接得到[s]
推论 5.14. 分层 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} = \bigsqcup_{\mu\in X_*(T)^+} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu}^{\mathrm{spl}}$ 是惠特尼–泰特的，并具有完美胞腔分层。[pl$\mathcal{G}$]。

因此，我们可以定义 $\mathrm{DTM}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}})$ 和 $\mathrm{DTM}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}) := \mathrm{DTM}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}})$，并赋予它们具有心为 MTM 的 t-结构，这与卷积格拉斯曼量的情形类似（注 5.7）。随后可通过佐竹等价表述它们与表示论的联系如下。

命题 5.15。 存在自然等价，使下列交换图成立

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\widehat{G}}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,\overline{k})) & \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Sat}} & \mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,\overline{k})) & \xrightarrow[\mathrm{Sat}]{\cong} & \mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}), \end{array}$$

其中，竖直箭头分别由表示的限制和沿 $\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$ 的适当推前给出。

证明。 首先，沿 $\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$ 的推前保持 MTM，这一点可由卷积格拉斯曼量的类似断言 [vdH24a，命题 5.4].

命题 5.8 与 [vdH24a，定理1.1] 给出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\prod_i \widehat{H}_i^{e_i f_i}}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,\overline{k})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{MTM}(\prod_i \mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_i}^{\mathrm{can},\widetilde{\times} e_i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Rep}_{\prod_i \widehat{H}_i^{f_i}}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,\overline{k})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{MTM}(\prod_i \mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_i}^{\mathrm{can}}), \end{array} \tag{5.5}$$

其中，左竖直箭头由沿惯性不变量 $\prod_i \widehat{H}_i^{f_i} \subseteq \prod_i \widehat{H}_i^{e_i f_i}$的限制给出，右竖直箭头由适当推前给出。此外，MTM($\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$)中的一个对象等价于MTM($\prod_i \mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_i}^{\mathrm{can}\,\times e_i}$)中的一个对象，并附带将其 $\prod_i \pi_1(H_i)^{e_i f_i}$-分次（经由连通分支产生）细化为 $\pi_1(G)$-分次。利用上述等价，我们看到MTM($\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$)等价于（在MTM(谱 k)内部的）表示，即

$$\prod_i \widehat{H}_i^{e_i f_i} \overset{D(\prod_i \pi_1(H_i)^{e_i f_i})}{\times} D(\pi_1(G)),$$

其中， $D(-)$ 表示具有给定特征标群的可对角化群概形。但这恰好就是$\check{G}$，从而得到一个等价

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\widehat{G}}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,\overline{k})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{MTM}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Rep}_{\prod_i \widehat{H}_i^{e_i f_i}}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,\overline{k})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{MTM}(\prod_i \mathrm{Gr}_{\mathcal{H}_i}^{\mathrm{can},\widetilde{\times} e_i}). \end{array} \tag{5.6}$$

（我们注意到，在动机Satake等价中识别对偶群时也使用了类似的论证 [vdH24a，引理 9。5]。）类似的论证还表明，图表（5.5）和（5.6）的复合可分解为经由 $\mathrm{Rep}_{\underline{\check{G}}^I}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ k)) \cong \mathrm{MTM}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$。

最后，根据命题 $L^+\mathcal{G}$，我们可以将所有混合泰特动机范畴替换为其5.8版本，从而得到所需的等变等价。□

同样，目前尚不清楚如何直接在 MTM($\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$) 上构造幺半结构，使上述等价成为幺半等价。

记号 5.16。 回顾例如 [vdH24a，定义 6.17] 中定义的 IC函子。对于 $\underline{\ }\mu_I \in X_*(T)_I^+$和 $n \in \mathbb{Z}$，我们将 $V_{\mathrm{can}\mu_I}(n) \in \mathrm{Rep}\,\widehat{G}^I(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,k))$ 记为对应于 $\mathrm{IC}_{\mu_I}(\mathbb{1}(n)) \in \mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$ 的对象。

类似地，我们可以定义 IC函子

$$\mathrm{IC}_{\mu}\colon \mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,\overline{k}) \to \mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}),$$

对于 $\mu \in X_*(T)^+$。同样，我们将 $V_{\mathrm{spl}\mu}(n) \in \mathrm{Rep}\,\widehat{G}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ k))$ 中与 $\mathrm{IC}_{\mu}(\mathbb{1}(n)) \in \mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}})$ 对应的对象记为。

5.3. **Satake 对应**。 现在我们回顾并推广以下文献中的 Satake 对应[XZ17, (3.1.14)]。

定义 5.17。 设 $\mu_\bullet, \lambda_\bullet, \kappa_\bullet$为 $X_*(T)^+$ 中元素构成的元组。*Satake* 对应$\mathrm{Gr}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}}$ 定义为

$$\mathrm{Gr}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} := \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\le\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} \times_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\le\lambda_\bullet}^{\mathrm{spl}}.$$

这些对应存在合成态射

$$\mathrm{Gr}_{\kappa_\bullet|\lambda_\bullet}^{\mathrm{spl}} \times_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\lambda_\bullet}^{\mathrm{spl}}} \mathrm{Gr}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} \to \mathrm{Gr}_{\kappa_\bullet|\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}}. \tag{5.7}$$

此外，它们具有自然的（对角） $L^+\mathcal{G}$-作用，而取 ´étale 商则得到 Hecke 叠之间的 Satake 对应

$$\mathrm{Hck}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}} := (L^+\mathcal{G} \backslash \mathrm{Gr}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}^{\mathrm{spl}})^{\text{ét}}.$$

对于一个元组 $\mu_\bullet$，我们记 $\langle 2\rho,\ \mu_\bullet\rangle := \sum_i \langle 2\rho,\ \mu_i\rangle$。回顾§1.7可知 H^{BM} 表示 ℓ-进´étale Borel–Moore同调，为此我们选取了一个辅助素数 $\ell \neq p$。在下面的命题中，我们将使用动机对应 Corr 的概念，参见定义 A.5。

命题 5.18。 设 $\mu_\bullet, \lambda_\bullet$ 是 $X_*(T)^+$ 中的元素元组。

(1) *Satake* 对应 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}$ 的维数为 $\leq \langle \rho, \lambda_\bullet + \mu_\bullet \rangle$。

(2) 对于任意 $\mathcal{F}_1 \in \mathrm{MTM}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}, \lambda_\bullet)$ 和 $\mathcal{F}_2 \in \mathrm{MTM}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}, \mu_\bullet)$，存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{MTM}(\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}})^{\mathrm{can}}}(m_{\lambda_\bullet,*}\mathcal{F}_1, m_{\mu_\bullet,*}\mathcal{F}_2) \cong \mathrm{Corr}_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2).$$

若假设 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 是 $L^+\mathcal{G}$-等变的，则也存在类似的同构；也就是说，它们属于 $\mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$。此外，这些同构与复合相容（对应的复合通过构造 A.7 沿着 (5.7)定义）。

(3) 设 $V_{\mu_\bullet} = \bigotimes_{i=1}^t V_{\mu_i}$，其中 V_{μ_i} 是最高权为μ_i的不可约$\mathbb{Q}_\ell$-线性 $\widehat{G}$-表示，$\lambda_\bullet$也类似。则存在一个典范同构

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I}(V_{\lambda_\bullet}, V_{\mu_\bullet}) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho, \lambda_\bullet + \mu_\bullet \rangle}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}).$$

将 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet}$ 替换为涉及典范舒伯特簇卷积积的、在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$上的纤维积时，类似结果仍然成立；甚至可以替换为典范舒伯特簇与分裂舒伯特簇的卷积积。

证明。(1) 由卷积态射的半小性可知，这是众所周知的。[vdH24a，引理 5。6]。(2) 由沿笛卡尔图表的适当基变换可知。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\mu_\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_{\mu_\bullet}} \\ \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\lambda_\bullet} & \xrightarrow[m_{\lambda_\bullet}]{} & \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}. \end{array}$$

最后，(3) 可用类似于 [XZ17，命题 3.1.10 (3)]的方法证明。 □

为了后续应用，我们需要考虑使用仿射格拉斯曼量的典范模型和分裂模型构造的对应。为避免符号过于繁杂，我们只陈述所需一般性下的结果，并将显然的推广留给读者。

定义 5.19。设 $\mu \in X_*(T)^+$和 λ_I，$\nu_I \in X_*(T)^+_I$。Satake 对应 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I, \mu|\lambda_I}$定义为以下纤维积

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I} := (\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu}) \times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\lambda_I}.$$

由命题 5.18可知，该概形的维数为 $\leq \langle \rho, \mu_I + \nu_I + \lambda_I \rangle$。我们将 $\langle \rho, \mu_I + \nu_I + \lambda_I \rangle$维不可约分支的集合记为

$$\mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I} := \mathrm{Irr}^{\langle \rho, \mu_I+\nu_I+\lambda_I \rangle}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}).$$

对于 $\in \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I, \mu|\lambda_I}$，相应的不可约分支记为 $\mathbf{Gr}^{\mathrm{spl}, \mathbf{a}}_{\nu_I, \mu|\lambda_I} \subseteq \mathbf{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I, \mu|\lambda_I}$。类似地，我们定义

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I} := (\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}) \times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\lambda_I},$$

其维数也为 $\leq \langle \rho, \mu_I + \nu_I + \lambda_I \rangle$。我们还设

$$\mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I} := \mathrm{Irr}^{\langle \rho, \nu_I+\mu_I+\lambda_I \rangle}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I}).$$

这两个版本都允许自然的 $L^+\mathcal{G}$-作用，其商记为

$$\mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I} \quad \text{and} \quad \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I}.$$

对于 $\mu \in X_*(T)$，我们用 V_μ 表示最高权为μ的不可约 $\mathbb{Q}$-线性 G-表示，$\lambda_I \in X_*(T)^+_I$ 和 $\widehat{G}^I$ 也类似（参见 [Zhu15，引理 4。10]）。由命题 5.18 (3)，$\mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I, \mu|\lambda_I}$构成 $\mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I}(V_{\nu_I} \otimes V_\mu, V_{\lambda_I})$ 的自然基。同样，$\mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I, \mu|\lambda_I}$构成 $\mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I}(V_{\nu_I} \otimes V_{\mu_I}, V_{\lambda_I})$ 的自然基。

引理 5.20。 设 $\mu \in X_*(T)^+$和 $\lambda_I, \nu_I \in X_*(T)_I^+$。则存在一个自然映射

$$\beta^{\mathbb{S}} \colon \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I} \to \coprod_{\mu_I' \le \mu_I \in X_*(T)_I^+} \mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I'|\lambda_I}.$$

此外，对于任意 $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}$，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}$ 在$\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I}$ 中的像包含$\mathrm{Gr}^{\mathrm{can},\beta^{\mathbb{S}}(\mathbf{a})}_{\nu_I,\mu_I'|\lambda_I}$。

证明。 设$\mathbf{a} \in \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}$。那么，$\mathbf{Gr}^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}$ 的泛点在自然映射下的像

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I} \tag{5.8}$$

属于

$$(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\nu_I} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu_I'}) \times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\lambda_I} \tag{5.9}$$

存在唯一的 $\mu_I' \le \mu_I \in X_*(T)_I^+$。令 X 为$\mathbf{Gr}^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}$ 在$\mathbf{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I}$中的像与（5.9）的交。

注意，(5.8)在(5.9)上的纤维维数至多为 $\langle \rho, \mu_I - \mu_I' \rangle$。由于$\mathbf{Gr}^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}$的维数为 $\langle \rho, \nu_I + \mu_I + \lambda_I \rangle$，$X$的维数至少为

$$\langle \rho, \nu_I + \mu_I + \lambda_I \rangle - \langle \rho, \mu_I - \mu_I' \rangle = \langle \rho, \nu_I + \mu_I' + \lambda_I \rangle.$$

因此，X 在 $\mathbf{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I'|\lambda_I}$ 中的闭包定义了 $\mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I'|\lambda_I}$中的一个元素，从而得到所需的映射。

为证明最后一个结论，注意到 $\mathbf{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I} \to \mathbf{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I}$ 是完美适当的，因此 $\mathbf{Gr}^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}$ 的像是闭的。它与不可约的 $\mathbf{Gr}^{\mathrm{can},\beta^{\mathbb{S}}(\mathbf{a})}_{\nu_I,\mu_I'|\lambda_I}$ 的交因而是闭的、非空的，并且包含泛点。因此，这个交必定是整个 $\mathbf{Gr}^{\mathrm{can},\beta^{\mathbb{S}}(\mathbf{a})}_{\nu_I,\mu_I'|\lambda_I}$，证明完毕。□

5.4. **半无限轨道**。 接下来，我们研究分裂仿射格拉斯曼簇中的半无限轨道，将 [vdH24a, §3.2], 推广；不过，我们不需要一般抛物子群的半无限轨道。回想一下，G/F 是本质非分歧的，并且所有几何都定义在 $\mathrm{Spec}\bar{k}$.

例如，回顾 [vdH24a，§3.2], ，扭曲仿射格拉斯曼量允许按半无限轨道分层

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} = \bigsqcup_{\nu_I \in X_*(T)_I} \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I},$$

对应于仿射格拉斯曼量 $\mathbf{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{B}} := LB/L^+\mathcal{B}$（其中 $\mathcal{B}$ 是 B 在 $\mathcal{G}$中的概形闭包），或者等价地，是由正则支配余特征 $\mathbb{G}_m$所诱导的 Gr 上 $\mathcal{G}^{\mathrm{can}}$-作用的吸引子轨迹 [AGLR22，定理 5。2]。如 [vdH24a，§5.1], 所示，可以对这些半无限轨道取扭曲积，从而得到卷积格拉斯曼量的分解。根据定义 5.9，这立即给出分裂仿射格拉斯曼尼亚的分解，我们将其记为

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} = \bigsqcup_{\nu \in X_*(T)} \mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu}; \tag{5.10}$$

指标集为 $X_*(T)$ 这一事实由（5.4）可得。这是一个分层，因为典范格拉斯曼簇已经具有这一性质，因此卷积格拉斯曼量也具有这一性质。注意，在自然映射下

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}},$$

$\mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu}$被映射到 $\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I}$；这是由 [XZ17，（3.2.7）]。

我们现在有 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 与 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 的两种分层，分别由舒伯特胞腔和半无限轨道给出。由 [vdH24a 的命题 3.11] 可知，若 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu_I} \cap \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I}$ 非空，则它是等维的，维数为 $\langle \rho, \mu_I + \nu_I \rangle$。利用 [XZ17 中的 (3.2.8)]，（该结论对一般准分裂群同样成立），可知若 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\mu} \cap \mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu}$ 非空，则它是等维的，维数为 $\langle \rho, \mu + \nu \rangle$。

定义 5.21. 设 $\mu_I \in X_*(T)_I^+$ 与 $\nu_I \in X_*(T)_I$。则 （典范）*Mirkovic–Vilonen*（或 *MV*）闭链 $\mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu_I}(\nu_I)$ 的集合定义为 $\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu_I}$ 的不可约分支的集合。它们与 $\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$ 的不可约分支成双射，我们常常将这两个集合等同。对于 $\mathbf{b} \in \mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu_I}(\nu_I)$，我们将相应的不可约分支记为 $(\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I})^{\mathbf{b}}$。

同样，若 $\mu \in X_*(T)^+$ 且 $\nu \in X_*(T)$，则分裂*Mirkovic–Vilonen*簇 $\mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\nu)$定义为 $\mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\mu}$中的不可约分支集合。

引理 5.22. 设 $\mu \in X_*(T)^+$ 且 $\nu \in X_*(T)$。那么存在自然映射

$$\beta^{\mathbb{MV}} \colon \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\nu) \to \coprod_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)_I^+} \mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(\nu_I).$$

证明。 设 $(\mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu})^{\mathbf{b}} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 对应于某个$\mathbf{b} \in \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\nu)$。那么它在自然映射 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$下的像 X 仍然不可约，且位于 $\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$中。设 $\mu'_I \in X_*(T)_I^+$，使得 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I}$ 包含 $(\mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu})^{\mathbf{b}}$的唯一泛点的像；那么 $X \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I}$ 在 X中开且稠密，并且 $\mu' \leq \mu \in X_*(T)_I^+$。

现在，卷积映射 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 到 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I}$ 的纤维维数至多为$\langle \rho, \mu_I - \mu'_I \rangle$。由于 $(\mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu})^{\mathbf{b}}$的维数为 $\langle \rho, \mu_I + \nu_I \rangle$，$X$的维数至少为

$$\langle \rho, \mu_I + \nu_I - \mu_I + \mu'_I \rangle = \langle \rho, \mu'_I + \nu_I \rangle.$$

因此，$X \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I}$在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu'_I} \cap \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I}$中的闭包确定了 $\mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(\nu_I)$ 中的一个元素，从而得到所需的映射。□

注 5.23。 通过几何Satake等价，典范的 Mirkovic–Vilonen 环给出了（特征0下）的不可约表示的自然基。因此，分裂的Mirkovic–Vilonen 环给出了 的不可约表示的自然基。因此，上述引理中构造的映射给出了从 G- 表示到 $\widehat{G}^I$-表示的限制函子的几何描述，所用的是命题 5。15。

另一方面，典范 Mirković–Vilonen 环可对任意拟分裂 G定义，而不必本质非分歧。此外，在分歧 Satake 等价的背景下，沿 $\widehat{G}^I \subseteq \widehat{G}$的表示的限制由邻近循环 [朱15] 给出，这些邻近循环沿着将分裂仿射 Grassmannian 形变为 Gr$_{\mathcal{G}}$的变形。在该分裂仿射 Grassmannian 上，也存在 MV 环。一个有趣的问题是，寻找从这种分裂仿射 Grassmannian 上的 MV-循环到 Gr$_{\mathcal{G}}$上的典范 MV 环的直接映射，它对应于沿 $\widehat{G}^I \subseteq \widehat{G}$的限制。

命题 5.24. 设 $\mu \in X_*(T)^+$，以及 ν_I、$\lambda_I \in X_*(T)_I$，使得 ν_I与 $\lambda_I + \nu_I$为占优。则存在唯一的单射

$$\iota^{\mathrm{spl}}_{\mathbb{MV}} \colon \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I} \to \coprod_{\lambda \in X_*(T) \colon \lambda \mapsto \lambda_I \in X_*(T)_I} \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\lambda),$$

其特征为，对每个 $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I}$，我们有

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I} \cap \Big(\bigsqcup_{\lambda \in X_*(T) \colon \lambda \mapsto \lambda_I \in X_*(T)_I} \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \widetilde{\times} \mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\lambda} \Big) = (\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}) \widetilde{\times} (\mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\lambda} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu})^{\iota^{\mathrm{spl}}_{\mathbb{MV}}(\mathbf{a})}$$

作为 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 的子概形。

类似地，存在唯一的单射

$$\iota^{\mathrm{can}}_{\mathbb{MV}} \colon \mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I+\nu_I} \to \mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu_I}(\lambda_I),$$

使得对于每个$\mathbf{a} \in \mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I+\nu_I}$，我们有

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{can},\mathbf{a}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I+\nu_I} \cap (\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \widetilde{\times} \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\lambda_I}) = (\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}) \widetilde{\times} (\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\lambda_I} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I})^{\iota^{\mathrm{can}}_{\mathbb{MV}}(\mathbf{a})}$$

作为$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$的子概形。

最后，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_{\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I} & \xrightarrow{\iota_{\mathbb{MV}}^{\mathrm{spl}}} & \coprod_{\lambda\in X_*(T)\colon\, \lambda\mapsto\lambda_I\in X_*(T)_I} \mathbb{MV}_{\mu}^{\mathrm{spl}}(\lambda) \\ {\scriptstyle\beta^{\mathbb{S}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta^{\mathbb{MV}}} \\ \coprod_{\mu_I'\le\mu_I\in X_*(T)_I^+} \mathbb{S}_{\nu_I,\mu_I'|\lambda_I+\nu_I} & \xrightarrow[\iota_{\mathbb{MV}}^{\mathrm{can}}]{} & \coprod_{\mu_I'\le\mu_I\in X_*(T)_I^+} \mathbb{MV}_{\mu_I'}^{\mathrm{can}}(\lambda_I) \end{array} \tag{5.11}$$

可交换且为笛卡尔的。

证明。映射 $\iota_{\mathbb{MV}}^{\mathrm{can}}$ 可按类似于 [XZ17 引理 3.2 的方式构造7]；我们说明如何推出 $\iota_{\mathbb{MV}}^{\mathrm{spl}}$。令 $\mathbf{a}\in\mathbb{S}_{\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{spl}}$。只需证明交

$$Z^{\mathrm{spl}} := \mathrm{Gr}_{\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{spl},\mathbf{a}} \cap \Big(\bigsqcup_{\lambda\in X_*(T)\colon\, \lambda\mapsto\lambda_I\in X_*(T)_I} \mathcal{S}_{\nu_I}^{\mathrm{can}} \widetilde{\times} \mathcal{S}_{\lambda}^{\mathrm{spl}} \Big) \subseteq \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$$

是不可约的，维数为 $\langle\rho,\lambda_I+\mu_I+2\nu_I\rangle$。事实上，此时该子概形必为 $(\mathcal{S}_{\nu_I}^{\mathrm{can}}\cap\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\le\nu_I}^{\mathrm{can}})\widetilde{\times}(\mathcal{S}_{\lambda}^{\mathrm{spl}}\cap\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\le\mu}^{\mathrm{spl}})_{\iota_{\mathbb{MV}}^{\mathrm{spl}}(\mathbf{a})}$，其中某个唯一确定的 $\lambda\in X_*(T)$ 提升了 λ_I 和 $\iota_{\mathbb{MV}}^{\mathrm{spl}}(\mathbf{a})\in\mathbb{MV}_{\mu}^{\mathrm{spl}}(\lambda)$，从而确定映射 $\iota_{\mathbb{MV}}^{\mathrm{spl}}$。作为开浸入的基变换

$$(\mathcal{S}_{\nu_I}^{\mathrm{can}}\cap\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\le\nu_I}^{\mathrm{can}})\times(\mathcal{S}_{\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{can}}\cap\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\le\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{can}}) \subseteq \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\le\nu_I}^{\mathrm{can}}\times\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\le\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{can}},$$

我们看到，Z 是 $\mathrm{Gr}_{,\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{spl},\ \mathbf{a}}$ 的一个开子概形。特别地，一旦知道 Z^{spl} 非空，不可约性和所需的维数便随之得出。

为此，注意到由引理 5.20 可知，Z^{spl} 在 $\mathrm{Gr}_{\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{spl}}\to\mathrm{Gr}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{can}}$ 下的像包含

$$Z^{\mathrm{can}} := \mathrm{Gr}_{\nu_I,\mu_I'|\lambda_I+\nu_I}^{\mathrm{can},\beta^{\mathbb{S}}(\mathbf{a})} \cap \mathcal{S}_{\nu_I}^{\mathrm{can}} \widetilde{\times} \mathcal{S}_{\lambda_I}^{\mathrm{can}} \subseteq \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}},$$

对于某个 $\mu_I'\le\mu_I$。由于 Z^{can} 根据 [XZ17, 引理 3.27]，的证明非空，因此 Z^{spl} 也同样如此。

(5.11) 的交换性由构造可知。要证明它还是笛卡尔的，由于 是单射，只需注意到，对于由 标记的一个元素， 和 的纤维具有相同的基数。事实上，该基数等于 在 到 的限制中的重数；这分别由命题 5.18 (3) 和注记 5.23 得出。□

6. Splitting affine Deligne–Lusztig varieties

为了理解志村簇的牛顿分层，研究仿射 Deligne–Lusztig 簇的不可约分支至关重要；这些簇通过 Rapoport–Zink一致化与志村簇相关。本节的目标是在分裂模型的背景下定义仿射 Deligne–Lusztig 簇的变体，并研究它们的不可约分支。

6.1. 关于 Kottwitz 集的回顾。目前，令 G为非阿基米德局部域 F 上任意一个准分裂约化群，并令 $\mathcal{G}/\mathcal{O}_F$ 为一个非常特殊抛物子群模型。回忆一下，仿射 Deligne–Lusztig 簇附属于一对元素：$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$中的一个舒伯特胞腔，以及 Kottwitz 集 $B(G)$中的一个元素；该集合对 G-等晶体 [进行分类（Kot85，Kot97]）。这个 Kottwitz 集定义为 $B(G):=G(\breve{F})/b\sim g^{-1}b\sigma(g)$，即 $G(\breve{F})$ 中的 σ-扭曲共轭类集合。对于这样一个$b\in B(G)$，我们还可以关联一个扭曲中心化子群，它是由下式给出的约化 F-群：

$$J_b\colon R\mapsto\{g\in G(R\otimes_F\breve{F})\mid g^{-1}b\sigma(g)=b\}.$$

在同构意义下，这与 $b\in B(G)$ 的代表元选择无关。Kottwitz[Kot85]定义了 $B(G)$ 的两个不变量：牛顿映射

$$\nu\colon B(G)\to(X_*(T)_{\mathbb{Q}}^+)^{\Gamma_F}\colon b\mapsto\nu_b,$$

其中我们回顾一下， $T \subseteq B \subseteq G$ 是定义在 F上的极大环面和博雷尔子群，而科特维茨映射

$$\kappa\colon B(G) \to \pi_1(G)_{\Gamma_F}.$$

它们共同刻画了 $B(G)$，即： $\nu \times \kappa\colon B(G) \to (X_*(T)^+_{\mathbb{Q}})^{\Gamma_F} \times \pi_1(G)^{\Gamma_F}$是单射。这通过规定 $b \leq b'$ 当 $\kappa(b) = \kappa(b')$ 且$\nu_b \leq \nu_{b'}$ 相对于（有理化的）支配序时，在 $B(G)$ 上诱导出一个偏序 $\leq$。该偏序的极小元素恰好是基本元素，即满足 ν_b 为中心的那些 b。此外， κ 在 $B(G)$中的基本元素与 $\pi_1(G)_{\Gamma_F}$ [Kot85，命题 5.6]之间诱导出一个双射。

对于一个优势余特征 μ，我们记作

$$B(G,\mu) = \left\{ b \in B(G) \mid \kappa(b) = \mu^\flat \text{ and } \nu(b) \leq \overline{\mu} \right\},$$

其中 $\mu^\flat$是 μ在 π_1中的像（G）$_{\Gamma_F}$，并且$\mu^\flat = \frac{1}{|\text{伽罗瓦群}(\widetilde{F}/F)|} \sum_{\gamma \in \text{伽罗瓦群}(\widetilde{F}/F)} \gamma(\mu)$，其中 $\widetilde{F}/F$分裂 G有限。于是，根据 $B(G,\mu)$，其中包含唯一的基本元素 [Kot85，§5]。

在 G 在非分歧扩张上分裂的情况下，所谓的 $B(G)$ 的非分歧元素在 [XZ17，§4.2]中被引入并加以研究；这些元素属于 $B(T) \to B(G)$ 的像，或者等价地说，是满足 J_b 是一个非分歧 F-群的那些元素。以下概念是对一般准分裂群的自然推广。

定义 6.1。 $B(G)^{\mathrm{vsp}}$ 中的甚特殊元素构成的集合是映射 $B(T) \to B(G)$ 的像。由于任意两种对 T 的选择在有理意义下共轭， $B(G)^{\mathrm{vsp}}$ 与这一选择无关。

相同的定义也见于 [Ham22，定义 2。2], 其中这些元素仍称为非分歧元素。然而，如果 G不是非分歧的，那么 J_b也不会是非分歧的。相反，我们将在下文看到， $b \in B(G)^{\mathrm{vsp}}$ 当且仅当 J_b 是准分裂的，或者等价地说， J_b 具有一个甚特殊仿抛物子群[Zhu15，引理 6。1]；这就是术语有所不同的原因。

将 $W_0 = W^{\Gamma_F}$记为 G 的相对魏尔群；它作用于 $X_*(T)^{\Gamma_F}$。

引理 6.2. 映射 $X_*(T) \to B(G)\colon \mu \mapsto [\varpi^\mu]$ 诱导出一个双射

$$X_*(T)_{\Gamma_F}/W_0 \cong B(G)_{\mathrm{vsp}}.$$

证明。 这在 [XZ17，引理 4.2 中得到了证明。2] 当 G 是非分歧的情形下，而一般情形见 [Ham22，引理 2。3] □

现在，考虑 G 的朗朗兹对偶群 $\widehat{G}$ ，它定义在 $\mathbb{Q}$ 上。这是一个带标记的约化群，并配备了一个保持极大环面和博雷尔子群 $\widehat{T} \subseteq \widehat{B} \subseteq \widehat{G}$的 Γ_F-作用。于是，不动点 $\widehat{G}^{\Gamma_F}$ 具有分裂约化中性连通分支和常数 π_0, [ALRR22，命题 5.4 (1) 和 (7)]。此外，一个极大可对角化子群由 $\widehat{T}^{\Gamma_F}$ 给出，其特征标群为 $X_*(T)^{\Gamma_F}$。与 [Hai18, §5.5] 中相同的论证（另见 [Zhu15，引理 4.10]）表明，$\widehat{G}^{\Gamma_F}$ 的代数 $\mathbb{Q}$-线性表示范畴是半单的，其简单对象为最高权表示，并由 $X_*(T)^+_{\Gamma_F}$ 编号。

引理*6.3.* 设 $\mu \in X_*(T)^+$，其像为 $\mu_I \in X_*(T)^+_I$，并考虑 $\widehat{G}^I$ 的最高权为 μ_I 的不可约 $\mathbb{Q}$-表示V_{μ_I}。设 $\tau \in X_*(T)$，对应的元素为 $[\varpi^\tau] \in B(G)^{\mathrm{vsp}}$。那么$[\varpi^\tau] \in B(G,\mu)$ 当且仅当子空间 $\bigoplus_{\lambda_I \in \tau_I + (\sigma-1)X_*(T)_I} V_{\mu_I}(\lambda_I) \subseteq V_{\mu_I}$ 非零。

证明。 将 τ 替换为其 W_0-轨道中的一个元素后，我们可以假设 $\tau_{\Gamma_F} \in X_*(T)^+_{\Gamma_F}$。于是

$$\bigoplus_{\lambda_I \in \tau_I + (\sigma-1)X_*(T)_I} V_{\mu_I}(\lambda_I)$$

恰好是τ_{Γ_F}的权空间 $V_{\mu_I|\widehat{G}^{\Gamma_F}}$，且当且仅当$\tau_{\Gamma_F} \leq \mu_{\Gamma_F}$时非平凡。根据 [Ham22，推论 2，6], 这等价于 $[\varpi^\tau] \in B(G,\ \mu)$。□

设 m为某个非分歧扩张的次数，该扩张是 F 的扩张，并且在此扩张下 G变为剩余分裂；再设

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in X_*(T)_I \mid \sum_{i=0}^{m-1} \sigma^i(\lambda) \in X_*(Z_G)_I \right\}.$$

那么，对于一个 $\widehat{G}^I$-表示 V，我们定义

$$V^{\mathrm{Tate}_p} := \bigoplus_{\lambda_I \in \Lambda} V(\lambda_I). \tag{6.1}$$

类似地，根据定义 5.21，对于 $\mu_I \in X_*(T)_I^+$ （分别为 $\mu \in X_*(T)^+$），我们定义

$$\mathbb{MV}^{\mathrm{can},\mathrm{Tate}_p}_{\mu_I} := \bigsqcup_{\lambda_I \in \Lambda} \mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu_I}(\lambda_I), \quad \text{分别} \quad \mathbb{MV}^{\mathrm{spl},\mathrm{Tate}_p}_{\mu} := \bigsqcup_{\lambda \in X_*(T):\ \lambda_I \in \Lambda} \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\lambda), \tag{6.2}$$

它们给出了 $V_{\mu_I}^{\mathrm{Tate}_p}$（分别是 $V_{\text{泰特}_\mu}{}^{p}$）的基。

引理 *6.4.* 设 $\mu_I \in X_*(T)_I^+$。存在 $\tau_I \in \Lambda$，使得 $V_{\text{泰特}_{\mu_I}}{}^{p} = \bigoplus_{\lambda_I \in \tau_I + (\sigma-1)X_*(T)_I} V_{\mu_I}(\lambda_I)$。类似地，如果 $\mu \in X_*(T)^+$，并且将 V_μ视为一个 $\widehat{G}^I$-表示，则存在 $\tau_I \in \Lambda$，使得$V_{\text{泰特}_\mu}{}^{p} = \bigoplus_{\lambda_I \in \tau_I + (\sigma-1)X_*(T)_I} V_\mu(\lambda_I)$。

证明。我们从 $\mu_I \in X_*(T)_I^+$ 开始。设 λ_I, λ_I'是 V_{μ_I}的两个权，并假设它们属于 Λ。那么 $[\varpi^{\lambda_I}]$, $[\varpi^{\lambda_I'}] \in B(G)$ 都是基本的；由于它们属于 $B(G,\mu)$，因此必定相等。它们也都是非常特殊的，由引理 6.2 可知，存在 $w \in W_0$ 和 $\nu_I \in X_*(T)_I$，使得$\lambda_I = w(\lambda_I') + (\sigma-1)\nu_I$。现在，

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sigma^i(w(\lambda_I') - \lambda_I') = w(\sum_{i=0}^{m-1} \sigma^i(\lambda_I')) - \sum_{i=0}^{m-1} \sigma^i(\lambda_I'),$$

由于 $\lambda_I' \in \Lambda$ 且 W_0 在 $X_*(Z_G)_I$上平凡地作用，该项消失。由此可知，对某个 $\nu_I' \in X_*(T)_I$，有 $w(\lambda_I') - \lambda_I' = (\sigma-1)\nu_I'$，从而 $\lambda_I - \lambda_I' = (\sigma-1)(\nu_I + \nu_I')$。再取 $\tau_I = \lambda_I'$，便得到所需元素。

为证明第二个断言，即我们从 μ_I的一个占优提升 μ 出发，上述论证表明该命题对同一个 τ_I仍然成立。□

现在我们可以给出 $B(G)_{\mathrm{vsp}}$的其他刻画，先从基本元素开始。回忆 b 的亏格$\mathsf{def}_G(b)$定义为 G 与 J_b 的 F-秩之差。

命题 6.5. 设 $\mu \in X_*(T)$，且 $b \in B(G,\mu)$ 为基本元素。下列陈述等价：

(1) $b \in B(G)_{\mathrm{vsp}}$；(2) $V_{\mu_I}^{\mathrm{Tate}_p}$非平凡；(3) $\mathrm{def}_G(b) = 0$；(4) 将 μ_{ad} 视为 $\widehat{T}_{\mathrm{sc}}$的一个特征。于是，$\mu_{\mathrm{ad}}$ 对 $Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^{\Gamma_F}$ 的限制是平凡的。

此外，如果中心 $Z_G \subseteq G$ 是连通的且上述条件成立，那么 b 可以表示为 ϖ^τ，其中某个 $\tau \in X_*(Z_G)$。

证明。(1) ⇔(2)：这由引理 6.3 和 6.4得出。

(1) ⇔ (3)：如果 $b \in B(G)_{\mathrm{vsp}}$，那么 $J_b \cong G$，从而 $\mathsf{def}_G(b) = 0$。事实上，J_b 是 G的一个内形式，对于基本 b [而言见 Kot85，第 5 节2]，，而对于非常特殊的 b而言则是一个 Levi 子群。反之，回忆一下，$\mathsf{def}_G(b) = 0$当且仅当 b 在 $G_{\mathrm{ad}}(\check{F})$ 中与 1 经 σ-共轭。因此，由于 $G_{\mathrm{ad}}(\check{F})$ 由 $\mathrm{im}(G(\check{F}) \to G_{\mathrm{ad}}(\check{F}))$ 和 $T_{\mathrm{ad}}(\check{F})$ 生成，我们得到 $b \in B(G)_{\mathrm{vsp}}$。

(3) ⇔ (4)：我们将再次利用以下事实：$\mathsf{def}_G(b) = 0$ 当且仅当 $b = [1] \in B(G_{\mathrm{ad}})$。由于 1 总是基本的，它属于 $B(G_{\mathrm{ad}}, \mu_{\mathrm{ad}})$ 当且仅当 $[\mu_{\mathrm{ad}}] = 0 \in \pi_1(G_{\mathrm{ad}})_\Gamma = (Z(\widehat{G}_{\mathrm{sc}})^\Gamma)^D$，由此可得等价关系。

最后，若 Z_G 是连通的，则 $G(\breve{F}) \to G_{\mathrm{ad}}(\breve{F})$ 是满射。若上述条件另外成立，则 b 与 $1 \in G_{\mathrm{ad}}(\breve{F})$ 是 σ-共轭的，因此存在某个 $\tau \in X_*(Z_G)$，使得 b 与 ϖ^τ 是 σ-共轭的。□

推论 6.6。设 $b \in B(G)$ 为任意元素。则以下条件等价：

(1) b 非常特殊，(2) 定义 $G_b = 0$，并且 (3) 扭曲中心化子 J_b 在 F 上拟分裂。

证明。要证明 (1) 与 (2) 等价，我们可以转到 G 的一个 Levi 子群（它具有相同的 F-秩），使得 b 是基本的。然后我们可以应用命题 6.5。

要证明 (2) 与 (3) 等价，回顾一下，J_b 是 G 的一个（拟分裂）Levi 子群的内形式。如上所述，这个 Levi 子群与 G 具有相同的 F-秩，因此根据以下事实即可得出结论：约化 F-群与其（唯一的）拟分裂内形式具有相同秩，当且仅当它本身已经拟分裂。□

6.2. **仿射 Deligne–Lusztig 簇的分裂版本**。现在我们定义仿射 Deligne–Lusztig 簇的各种形式，并始终将其视为定义在 $\operatorname{Spec} k$ 上。我们先回顾其典范版本，其中令 G/F 为任意带有非常特殊抛物子群模型 $\mathcal{G}/\mathcal{O}_F$ 的拟分裂约化群。

定义 6.7。设 $\mu_I \in X_*(T)_I^+$ 且 $b \in G(\breve{F})$。与 μ_I 和 b 相关联的（典范）仿射 ***Deligne–Lusztig*** 簇是 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$ 中由下式给出的子概形：

$$X_{\leq \mu_I}^{\mathrm{can}}(b) := \left\{ g \in LG/L^+\mathcal{G} \mid g^{-1} b \sigma(g) \in L^+\mathcal{G} \backslash \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \mu_I}^{\mathrm{can}} \right\}.$$

换言之，它由下列笛卡尔图定义：

$$\begin{array}{ccc} X_{\leq \mu_I}^{\mathrm{can}}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \mathbin{\widetilde{\times}} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \mu_I}^{\mathrm{can}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr} \times m} \\ \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} & \xrightarrow{\mathrm{id} \times b\sigma} & \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}. \end{array}$$

类似地，将闭 Schubert 簇 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \mu_I}^{\mathrm{can}}$ 替换为舒伯特胞腔 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \mu_I}^{\mathrm{can}}$，即可定义 $X_{\mu_I}^{\mathrm{can}}(b)$；于是

$$X_{\leq \mu_I}^{\mathrm{can}}(b) = \bigsqcup_{\mu_I' \leq \mu_I \in X_*(T)_I^+} X_{\mu_I'}^{\mathrm{can}}(b).$$

最后，对于 $X_*(T)_I^+$ 中元素构成的元组 $\mu_{\bullet, I}$，卷积仿射 ***Deligne–Lusztig*** 簇 通过以下笛卡尔图定义：

$$\begin{array}{ccc} X_{\leq \mu_{\bullet, I}}^{\mathrm{can}}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \mathbin{\widetilde{\times}} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \mu_{\bullet, I}}^{\mathrm{can}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr} \times m} \\ \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} & \xrightarrow{\mathrm{id} \times b\sigma} & \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}, \end{array}$$

即，$X_{\leq \mu_{\bullet, I}}^{\mathrm{can}}(b) := X_{\leq |\mu_{\bullet, I}|}^{\mathrm{can}}(b) \times_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}, \leq \mu_{\bullet, I}}^{\mathrm{can}}$。

众所周知，$X_{\leq \mu_I}^{\mathrm{can}}(b)$（以及其他变体）在同构意义下仅取决于 μ_I 和 $G(\breve{F})$ 中 b 的 σ-扭曲共轭类；因此，以下我们通常将 b 视为 $B(G)$ 中的一个元素。根据下面的引理，本质非分歧群的仿射 Deligne–Lusztig 簇可以通过研究非分歧群的仿射 Deligne–Lusztig 簇来理解。

引理 6.8。(1) 设 G_1, G_2 是约化 F-群，并设 $b_i \in G_i(\breve{F})$ 和 $\mu_{i, I} \in X_*(T_i)_I^+$ 对于 $i = 1, 2$。那么存在一个典范同构

$$X_{\mu_{1,I}}^{\mathrm{can}}(b_1) \times X_{\mu_{2,I}}^{\mathrm{can}}(b_2) \cong X_{(\mu_{1,I}, \mu_{2,I})}^{\mathrm{can}}(b_1, b_2),$$

其中后者是群 $G_1 \times G_2$ 的仿射德利涅–吕斯蒂希变种。

(2) 设 F/F' 是一个全分歧扩张，且 $G' := \mathrm{Res}_{F/F'} G$，其极大环面为 $T' := \mathrm{Res}_{F/F'} T \subseteq G'$。在同构 $\in X_*(T)^+_{I_F} \cong X_*(T')^+_{I_{F'}}$ 下，令 μ_{I_F} 与 $\mu'_{I_{F'}}$ 彼此对应；对于 $G(\breve{F}) \cong G'(\breve{F}')$ 中的 b、b'，也有类似对应。于是存在一个自然同构

$$X^{\mathrm{can}}_{\mu_{I_F}}(b) \cong X^{\mathrm{can}}_{\mu'_{I_{F'}}}(b').$$

(3) 设 F'/F 是次数为 d 的非分歧扩张，$\sigma' = \sigma^d$ 是 F' 的算术 *Frobenius*。设 Σ 为 F 上的嵌入 $F' \to \breve{F}$ 集合，取定某个 $\tau_0 \in \Sigma$，并令 $\tau_i = \sigma^i(\tau_0)$ 对应于 $i = 0, \ldots, d-1$。假设 G/F 具有 $\mathrm{Res}_{F'/F} G'$ 的形式，其中 G'/F' 是某个拟分裂群，其对应的仿抛物型模型为 $\mathcal{G}'/\mathcal{O}_{F'}$。令 $b \in G(\breve{F}) = \prod_{\tau\in\Sigma} G'(\breve{F})$，并且

$$\mathrm{Nm}(b) := b_{\tau_0}\sigma(b_{\tau_1})\ldots\sigma^{d-1}(b_{\tau_{d-1}}) \in G'(\breve{F}).$$

对于 $\mu_I = (\mu_{\tau,I}) \in X_*(T)^+_I \cong \prod_{\tau\in\Sigma} X_*(T')^+_I$，令

$$\mu_{\bullet,I} = (\mu_{\tau_0}, \ldots \sigma(\mu_1), \ldots, \sigma^{d-1}(\mu_{\tau_{d-1}}))$$

是由 Σ 索引的 $X_*(T')^+_I$ 中的元素元组。那么存在一个典范同构

$$X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b) \cong X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_{\bullet,I}}(\mathrm{Nm}(b)).$$

此外，设 $2\rho_G$ 和 $2\rho_{G'}$ 分别为 G 和 G' 的正绝对根之和。那么

$$\langle 2\rho_G, \mu_I\rangle = \langle 2\rho_{G'}, \sum_i \sigma^i(\mu_{\tau_i,I})\rangle. \quad \textit{and} \quad \langle 2\rho_G, \nu_b\rangle = \langle 2\rho, \nu_{\mathrm{Nm}(b)}\rangle.$$

最后，设 J^G_b 为 $b \in G(\breve{F})$ 的扭曲中心化子，$J^{G'}{}_{\mathrm{Nm}(b)}$ 为 $\mathrm{Nm}(b) \in G'(\breve{F})$ 的扭曲中心化子。那么存在一个典范同构

$$J^G_b \cong \mathrm{Res}_{F'/F} J^{G'}_{\mathrm{Nm}(b)}.$$

(4) 设 $G \to G'$ 是一个核为中心核的满射态射，T' 是 T 在 G' 中的概形像。设 $\mu'_I \in X_*(T')^+_I$ 和 $b' \in G'(\breve{F})$ 是 $\mu_I \in X_*(T)^+_I$ 和 $b \in G(\breve{F})$ 的像。那么自然态射

$$X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b) \to X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu'_I}(b')$$

在相应的连通分支之间诱导同构。更确切地说，令 t

$$c_{b,\mu_I}\pi_1(G)^\sigma_I := \{\gamma \in \pi_1(G)_I \mid (\sigma-1)(\gamma) = [\mu_I] - w(b)\},$$

其中 w 表示自然映射 $LG \to \pi_0(LG_k) \cong \pi_1(G)_I$。那么下图是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b) & \longrightarrow & X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu'_I}(b') \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_{b,\mu_I}\pi_1(G)^\sigma_I & \longrightarrow & c_{b',\mu'_I}\pi_1(G')^\sigma_I. \end{array}$$

证明。(1) 直接由定义可得。

(2) 是因为仿射格拉斯曼量（以及舒伯特簇）在完全分歧的标量限制下保持不变 [HR20a，引理 3，2]，并且与 Frobenius 态射相容。(3) 可完全按照 [Zhu17a 中的引理 3.5 和 3，7] 证明。

(4) 见 [PR26中的引理 5.4。2]。

□

借助这些约化，在本质非分歧情形下，我们可以通过研究非分歧群的仿射 Deligne–Lusztig 簇来理解 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 和 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$（定义见下文）的不可约分支，正如 [XZ17、Nie22、ZZ20]（参见 [ZZ20、附录 A]，其中给出了分歧群情形下的数值结果）。

现在我们讨论仿射 Deligne–Lusztig 簇的分裂版本。在本节余下部分，我们假设 G/F 是拟分裂且本质非分歧的。根据定义，存在一个映射$X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b) \to L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$：$g \mapsto g^{-1}b\sigma(g)$。由此得到如下自然定义。

定义 6.9. 设 $\mu \in X_*(T)^+$ 和 $b \in B(G)$。与 μ 和 b 相关的分裂仿射*Deligne–Lusztig*簇通过以下笛卡尔图表定义：

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b) & \longrightarrow & L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b) & \xrightarrow{g\mapsto g^{-1}b\sigma(g)} & L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}. \end{array} \tag{6.3}$$

由于该图表中的映射是 $J_b(F)$-等变的（对 $L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$和 $L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu}$上的平凡作用而言），我们看到 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 也自然带有一个 $J_b(F)$-作用。此外，映射 $L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu} \to L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$ 是概形态且有限呈示的，因此 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 可由一个局部有限呈示的概形表示（因为 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 具有这一性质）。事实证明，通过研究 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 以及 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$ 的纤维，可以理解 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 的几何。

命题 6.10。设 $\mu \in X_*(T)^+$ 且 $b \in B(G)$。$X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 和 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 均非空，当且仅当 $b \in B(G,\mu)$。若此条件成立，则它们的维数均为 $\langle\rho,\mu-\nu_b\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{def}_G(b)$。

证明。我们将援引 [He14]，中的结果，其中假设群 G 在局部函数域上温和分歧，且该域的特征不整除 $\pi_1(G_{\mathrm{der}})$ 的阶。不过，对我们的目的而言，这些假设可以去除。首先，对特征的限制保证环群和部分仿射旗簇是约化的。由于我们只关注拓扑性质，这一限制并不重要。假设 G/F 是温和的，仅在归约到伴随群时才会用到，见 [He14, §1.4]；我们可以改为援引引理 6.8 (4)。限制为局部函数域是因为 [Zhu17a, BS17] 中的 Witt 向量仿射旗簇当时尚未问世，但相关论证可以原样适用，参见 [He14, §6.3]。因此，典范仿射 Deligne–Lusztig 簇的非空性结论由 [He14, 定理 7.1] 得出。分裂模型的结论也随之成立，因为 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b) \to X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 是满射，这是满射映射的拉回。

典范版本的维数结论由 [He16，定理 2.29] 得出。特别地，由于 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b) \to X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 是有限呈示且满射的，我们有 $\dim(X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)) \geq \dim(X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu}(b)) = \langle\rho,\mu-\nu_b\rangle - \frac{1}{2}\,\mathrm{def}_G(b)$，因此只需证明这也是一个上界。为此，我们将使用图表（6.3）：要计算 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b) \to X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 的纤维，只需计算 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$ 的纤维。注意，根据定义，下方映射 $g \mapsto g^{-1}b\sigma(g)$ 将 $X^{\mathrm{can}}_{\mu_I'}(b)$ 映到$L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu_I'}$，对任意 $\mu_I' \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I$ 都成立。但由于卷积态射是分层半小的（[vdH24a，引理 5.6]，，其依据是 [MV07]），$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$ 在 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mu_I'}$ 中任意一点上的纤维维数至多为 $\langle\rho,\mu-\mu_I'\rangle$。因此，由于 $\dim(X^{\mathrm{can}}_{\mu_I'}(b)) \leq \langle\rho,\mu_I'-\nu_b\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{def}_G(b)$，$X^{\mathrm{can}}_{\mu_I'}(b)$ 在 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 中的原像维数至多为

$$\langle\rho,\mu_I'-\nu_b\rangle - \frac{1}{2}\,\mathrm{def}_G(b) + \langle\rho,\mu-\mu_I'\rangle = \langle\rho,\mu-\nu_b\rangle - \frac{1}{2}\,\mathrm{def}_G(b),$$

如所欲证。 □

回忆一下，$J_b(F)$作用于 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$和 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$，因而在两者的顶维不可约分支集合上诱导出一个作用。此外，回忆 MV-循环给出了 $\widehat{G}^I$ 和 $\widehat{G}$的不可约表示的典范基，见注 5.23。最后，对于元素 $b \in B(G)$，回忆其最佳整近似 $\lambda_b \in X_*(T)_{\Gamma_F}$，如 [ZZ20，引理 A.2 中所定义。（另见[HV18，引理 2.1]。）

定理 6.11。 设 $\mu \in X_*(T)^+$ 和 $b \in B(G, \mu)$。存在一个自然的集合交换图

$$\begin{array}{ccc} J_b(F)\backslash \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b) & \xrightarrow{\cong} & \bigsqcup_{\lambda \in X^*(\widehat{T}), \lambda_{\Gamma_F}=\lambda_b} \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I} J_b(F)\backslash \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b) & \xrightarrow{\cong} & \bigsqcup_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I} \bigsqcup_{\lambda_I \in X^*(\widehat{T})_I, (\lambda_I)_{\Gamma_F}=\lambda_b} \mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(\lambda_I), \end{array} \tag{6.4}$$

其中水平映射均为双射。此外，右侧水平箭头由以下方式给出：将最高权为 μ 的不可约 $\widehat{G}$ 表示分解为不可约 $\widehat{G}^I$ 表示，然后通过映射 $X_*(T) \to X_*(T)_I$ 比较权空间。

证明。 我们首先考虑典范情形。按照 [Nie22，引理 3 中的相同论证，2], 我们可以假设 G 是伴随的。利用引理 6。8，显然，定理的有效性在取积和进行全分歧限制标量下保持不变。在进行非分歧限制标量时，该有效性同样保持不变；这更为微妙，但可以类似于下文所述从典范仿射 Deligne–Lusztig 簇到分裂仿射 Deligne–Lusztig 簇的过程来处理。因此，由于 G被假设为本质非分歧，(6.4) 的下方双射可由非分歧群的情形推出，而该情形已在 [Nie22，定理 0 中得到证明，5] 或见 [ZZ20，定理 A]。下面需要构造上方和左侧箭头，并证明图表可交换。

回顾命题 6.10 的证明， $X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I}(b) = \bigsqcup_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I} X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b)$，且 $\dim(X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b)) = \langle \rho, \mu'_I - \nu_b \rangle - \frac{1}{2}\mathrm{def}_G(b)$；此外，在 $_X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b)$ 中任意一点在 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu_I}(b)$ 下的纤维 $\to X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I}(b)$ 维数至多为 $\langle \rho, \mu - \mu'_I \rangle$。此外，由 [FI25, 引理 5.1],，映射 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b) \to X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I}(b)$ 在每个 $X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b)$ 上都是局部平凡纤维化。因此，$X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b)$ 中任一最高维不可约分支，都唯一地来自某个 $X^{\mathrm{can}}_{\mu'}(b)$ 中的一个不可约分支，以及 $\varpi^{\mu'_I} \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I}$ 在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq \mu} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I}$ 下的纤维中的一个 $\langle \rho, \mu - \mu'_I \rangle$ 维不可约分支。这给出典范映射 $\operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b) \to \bigsqcup_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I} \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b)$，该映射是 $J_b(F)$-等变的，因而在 $J_b(F)$-轨道上诱导出一个映射。结合图表 (6.4) 中下方的双射，通过识别竖直映射的纤维即可得到上方的双射：众所周知，卷积态射的纤维中维数最大的不可约分支，为单表示张量积的权空间提供自然基；参见例如 [Hai03, 命题 3.1], , 或 [Zhu17b, 推论 5.1.5] ，其中给出的证明也适用于混合特征。（注意，由于我们处理的是 μ-有界对象，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 定义中有关连通分支的微妙之处在此并不起作用。）图表的交换性由构造立即可得。□

以下特殊情形对于志村簇的应用最为重要，我们将其记录于此，因为它能大大简化问题。

推论 6.12. 假设 $b \in B(G)$ 是甚特殊仿抛物子群， $\mu \in X_*(T)^+$ 是微小的，且 G 的中心 Z_G 是连通的。固定一个甚特殊仿抛物子群 $J_b(\mathcal{O}_F) \subseteq J_b(F)$。那么 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b)$ 和 $X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I}(b)$ 是等维的，维数为 $\langle \rho、 \mu - \nu_b \rangle$，并且存在一个自然的集合交换图

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu}(b) & \xrightarrow{\cong} & \bigsqcup_{\lambda \in X^*(\widehat{T}), \lambda_\Gamma=\lambda_b} \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\lambda) \times J_b(F)/J_b(\mathcal{O}_F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I} \operatorname{Irr} X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b) & \xrightarrow{\cong} & \bigsqcup_{\mu'_I \leq \mu_I \in X_*(T)^+_I} \bigsqcup_{\lambda_I \in X^*(\widehat{T})_I, (\lambda_I)_\Gamma=\lambda_b} \mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(\lambda_I) \times J_b(F)/J_b(\mathcal{O}_F). \end{array}$$

证明。 由引理 6.8， $X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I}(b)$ 对非常特殊的 b 的等维性可由非分歧群的同一断言推出，该断言在 [XZ17, §1.2] 中作了说明。（同样，关于沿非分歧延拓的标量限制的约化步骤较为微妙，但可以类似地处理

，如同下文从典范对象到分裂对象的过渡那样）。于是 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 的等维性可通过比较 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 中较小仿射 Deligne–Lusztig 簇的维数与映射 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b) \to X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b)$ 的纤维维数而得到。事实上，该映射在 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu'_I}(b)$ 中一点上的纤维是等维的，维数为 $\langle\rho,\ \mu_I-\mu'_I\rangle$，这由 [Hai06，定理 3.1] 得出（参见 [FI25，定理 5.3]，其证明在混合特征下亦成立）。所讨论的维数随后由命题 6.10 得出，因为亏格对非常特殊元素为零。

所需的交换图可由定理 6.11 得出，只要我们证明，Irr $X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b)$ 或 Irr $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 中任意元素在$J_b(F)$中的稳定子都是非常特殊的，因为所有非常特殊的抛物子群都彼此共轭，这是由于 G 本质非分歧且 Z_G 连通。（请注意，这对例如奇数维分歧酉群并不成立。）由于 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$是通过笛卡尔图表（6.3）定义的，其中$J_b(F)$在右侧作用平凡，因此 Irr $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 中某个元素的稳定子与其在 Irr $X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(b)$ 中像的稳定子一致，其中某个 $\mu'_I\leq\mu_I\in X_*(T)^+_I$。因此，只需考察典范仿射 Deligne–Lusztig 簇的稳定子。而 HZZ25 的定理 4.1.2、注 2.2 已证明这些稳定子是非常特殊的。（另参见非分歧情形下的 XZ17，定理 4.4.14]，其满足较弱的假设 XZ17，假设 4.4.1]。）□

6.3. 仿射 Deligne–Lusztig 簇与半无限轨道。为了在后文应用于 Tate 猜想，我们需要关于推论 6.12 中出现的不可约分支的更精细信息。在本小节中，我们固定 $\mu\in X_*(T)^+$ 和 $\tau\in X_*(T)$，并假设非常特殊元素 $[\varpi^\tau]$ 属于 $B(G,\mu)$。根据引理 6.2，我们不妨假设$\tau_{\Gamma_F}\in X_*(T)^+_{\Gamma_F}$是占优的。我们还选取某个 $\lambda_I\in\tau_I+(\sigma-\mathrm{id})X_*(T)_I$、一个提升 $\lambda\in X_*(T)$，以及某个 $\mathbf{b}\in\mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_\mu(\lambda)$。

引理 6.13. 假设 Z_G 是连通的。那么存在某个 $\nu_I\in X_*(T)^+_I$，使得 $\lambda_I+\nu_I-\sigma(\nu_I)$ 是占优的，并且 $\mathbf{b}$ 属于映射的像

$$\iota^{\mathrm{spl}}_{\mathbb{MV}}\colon \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I+\nu_I}\to \coprod_{\lambda\in X_*(T)\colon\ \lambda\mapsto\lambda_I\in X_*(T)_I}\mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_\mu(\lambda)$$

来自(5.11)。此外，在这些 ν_I中，存在一个最小的 $\nu^{\mathbf{b}}_I$，其含义是，对于任何其他满足上述条件的 ν_I，$\nu_I-\nu^{\mathbf{b}}_I$都是占优的。这样的 $\nu^{\mathbf{b}}_I$在加上 $X_*(Z_G)_I$中的元素后唯一。

证明。令 $\mu'_I\leq\mu_I$ 为 $X_*(T)^+_I$ 中满足 $\beta^{\mathbb{MV}}(\mathbf{b})$ 属于 $\mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(\lambda_I)$ 的唯一元素。只需找出某个最小的 $\nu^{\beta^{\mathbb{MV}}(\mathbf{b})_I}\in X_*(T)^+_I$，使得 $\lambda_I+\nu^{\beta^{\mathbb{MV}}(\mathbf{b})_I}-\sigma(\nu^{\beta^{\mathbb{MV}}(\mathbf{b})_I})$ 是占优的，并且 $\beta^{\mathbb{MV}}(\mathbf{b})$ 属于其像

$$\iota^{\mathrm{can}}_{\mathbb{MV}}\colon \mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu'_I|\lambda_I+\nu_I}\to\mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu'_I}(\lambda_I).$$

事实上，由笛卡尔图（5.11），同一元素 $\nu^{\mathbf{b}}_I=\nu_I^{\beta^{\mathbb{MV}}(\mathbf{b})}$ 也将满足引理所要求的性质。

首先假设 G 是伴随的，因此它分解为非分歧群的标量限制之积。显然，Satake 闭链和 Mirković–Vilonen 环的集合与取积相容，映射 $\iota^{\mathrm{can}}_{\mathbb{MV}}$也如此。回想一下，（典范）仿射格拉斯曼量在全分歧限制标量下保持不变 [HR20a，引理 3。2]，而在非分歧限制标量下，它们会变换为自身的乘积（基变换到谱 k之后），且与映射 $\iota^{\mathrm{can}}_{\mathbb{MV}}$相容。因此，我们归结为非分歧情形，此时 [XZ17，引理 4.4。3]适用。当 ν_I 为伴随时，这就给出了唯一的最小 G。

现在我们不再假设 G 是伴随的。考虑商 $G\to G_{\mathrm{ad}}$，并令 $T_{\mathrm{ad}}\subseteq G_{\mathrm{ad}}$ 为 $T\subseteq G$的像。于是很容易看出（例如利用 [vdH24a，引理 4.47]），$\nu_I\in X_*(T)^+_I$ 满足引理的条件（对于群 G），当且仅当 ν_I 在 $X_*(T_{\mathrm{ad}})^+_I$ 中的像满足引理的条件（对于群 G_{ad}）。在假设 Z_G 连通的情况下，映射 $X_*(T)^+_I\to X_*(T_{\mathrm{ad}})^+_I$ 是满射，因此我们可以提升在伴随情形中得到的元素。显然，该元素是极小的，并且在相差 $X_*(Z_G)_I$中的一个元素的意义下唯一。□

注 6.14. 令 $\mathbf{b}$ 和 $\nu_I^{\mathbf{b}}$ 如上，并令 $\tau_I^{\mathbf{b}} = \lambda_I + \nu_I^{\mathbf{b}} + \sigma(\nu_I^{\mathbf{b}})$。于是 $\tau_{\Gamma_F} = \lambda_{\Gamma_F} = \tau_{\mathbf{b}\Gamma_F}$，因此 $\varpi^{\tau_I^{\mathbf{b}}}$ 和 ϖ^{τ_I} 在 $B(G)$ 中确定同一个元素。特别地，如果 $[\varpi^{\tau_I}]$ 是基本的，那么 $\tau_I^{\mathbf{b}}$ 是中心的。

为了使用 [XZ17，§4], 我们将作出以下假设，这与 [XZ17中的假设 4.4 类似。1]。

假设 6.15。在本小节余下部分，我们假设 $k \neq \mathbb{F}_2$ 若 J_{ϖ^τ} 包含一个类型为 B_n 的单因子，C_n，F_4，且 $k \neq \mathbb{F}_2$，$\mathbb{F}_3$ 若其包含一个类型为 G_2 的因子。

注意，尽管典范仿射 Deligne–Lusztig 簇 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu}(b)$ 自然是 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 的子概形，但分裂版本 $X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b)$ 并非 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 的子概形。不过，存在自然映射

$$X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(b) \to X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(b) \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}.$$

对于 $\nu_I \in X_*(T)^+_I$，我们定义

$$Y^{\mathrm{can}}_{\nu_I}(\tau) := X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I}(\varpi^\tau) \cap \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$$

and

$$Y^{\mathrm{spl}}_{\nu_I}(\tau) := X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu}(\varpi^\tau) \times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}} \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I}.$$

或者，它们是使下图中的方块成为笛卡尔图表的概形：

$$\begin{array}{ccc}
Y^{\mathrm{spl}}_{\nu_I}(\tau) & \longrightarrow & \left(\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \widetilde{\times} (\bigsqcup_{\lambda\in X_*(T)^+:\ \lambda\mapsto\lambda_I\in X_*(T)_I} \mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\lambda})\right) \cap (\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y^{\mathrm{can}}_{\nu_I}(\tau) & \longrightarrow & (\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \widetilde{\times} \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\lambda_I}) \cap (\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}\times m} \\
\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} & \xrightarrow[\mathrm{id}\times\varpi^\tau\sigma]{} & \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \times \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\tau_I+\sigma(\nu_I)},
\end{array} \tag{6.5}$$

其中 $\lambda_I = \tau_I + \sigma(\nu_I) - \nu_I \in X_*(T)_I$。因此，对于任意映射到 λ_I 的 $\lambda \in X_*(T)$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu}(\lambda)$，都可以通过笛卡尔图定义 $Y_{\mathrm{spl},\mathbf{b}\nu_I}(\tau)$

$$\begin{array}{ccc}
Y^{\mathrm{spl},\mathbf{b}}_{\nu_I}(\tau) & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \widetilde{\times} (\mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\lambda} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu})^{\mathbf{b}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \times \mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\tau_I+\sigma(\nu_I)}.
\end{array}$$

对于任意 $\mathbf{b}_I \in \mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu_I}(\lambda_I)$，我们类似地定义 $Y_{\mathrm{can}\nu_I}{}_{,\ {}_I}\mathbf{b}(\tau)$。

Now, 对于 $\mathbf{a}' \in \mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)}$，通过笛卡尔图定义完美概形 $X^{\mathrm{can},\mu_I}{}_{\nu_I^{\mathbf{a}'}}(\tau)$

$$\begin{array}{ccc}
X^{\mathrm{can},\mathbf{a}'}_{\mu_I,\nu_I}(\tau) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^{\mathrm{can},\mathbf{a}'}_{\nu_I,\mu_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I} & \xrightarrow[\mathrm{id}\times\varpi^\tau\sigma]{} & \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I+\sigma(\nu_I)}.
\end{array}$$

类似地，对于一个 $\in \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\ \mu|\tau+\sigma(\nu_I)}$，我们可以通过以下方式定义 $X^{\mathrm{spl},\ \mu}{}_{\nu_I^{\mathbf{a}}}(\tau)$:

$$\begin{array}{ccc}
X^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\mu,\nu_I}(\tau) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\nu_I,\mu|\tau+\sigma(\nu_I)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I} & \xrightarrow[\mathrm{id}\times\varpi^\tau\sigma]{} & \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I+\sigma(\nu_I)}.
\end{array}$$

命题 *6.16*。假设 Z_G 是连通的，并且假设 *6.15* 成立。令 $a \in \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\tau_I+\sigma(\nu_I)}$ 和 $b = \iota^{\mathrm{spl}}_{\mathbb{MV}}(a)$，并令 $\nu_{\mathbf{b},I}$ 为由引理 *6.13* 得到的一个极小元素。则 $X^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\mu,\nu_I}(\tau)$ 具有唯一的不可约分支 $X^{\mathrm{spl}}_{\mu,\mathbf{b}}(\tau)$，其维数为 $\langle\rho,\mu-\tau\rangle$，而所有其他不可约分支的维数都严格更小。此外，概形 $X^{\mathrm{spl}}_{\mu,\mathbf{b}}(\tau)\times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}} {}_{\leq\nu_I}\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I}$ 非空且不可约（其维数必为 $\langle\rho,\mu-\tau\rangle$）。

类似的陈述对典范版本也成立。

证明。对于典范模型，该命题借助引理 6.8归结为非分歧群的情形，此时该结果已在 [XZ17的定理 4.4 中得到证明。5]（照例，涉及非分歧限制标量的约化步骤更为微妙，可类似于下文从分裂到典范模型的约化来处理。）为推出分裂情形，我们将需要如下引理。

引理 *6.17*。对任意 $\mu'_I \in X_*(T)^+_I$ 以及 $a' \in \mathbb{S}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu'_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)}$，$(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}\widetilde{\times}\,\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I})\times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}}\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I+\sigma(\nu_I)}$ 在自然映射 $X^{\mathrm{can}}_{\mu'_I,\nu_I}\to\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu'_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)}$ 下的原像是 $X^{\mathrm{can},\mathbf{a}'}_{\mu'_I,\nu_I}$ 中的一个开子概形，其维数为 $\langle\rho,\mu'_I-\tau_I\rangle$。

证明。所讨论的原像显然是一个开子概形。为证明维数结论，只需证明 $X^{\mathrm{can},\mathbf{a}'}_{\mu'_I,\nu_I}$ 中唯一的 $\langle\rho,\mu'_I-\tau_I\rangle$ 维不可约分支的泛点映射到 $(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}\widetilde{\times}\,\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I})\times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}}\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I+\sigma(\nu_I)}\subseteq\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu'_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)}$。但这可由 XZ17 定理 4.4.5] 的证明推出。事实上，唯一的不可约分支是 $Y^{\mathrm{can},\mathbf{b}'}_{\nu_I}\cap\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I}$ 的闭包，其中 $\mathbf{b}'=\iota^{\mathrm{can}}_{\mathbb{MV}}(\mathbf{a}')$；根据 XZ17 命题 4.4.7]，它是不可约的。此外，$Y^{\mathrm{can},\mathbf{b}'}_{\nu_I}\cap\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I}$ 的唯一泛点通过 XZ17 的 (4.4.6)]，映射到 $(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}\widetilde{\times}\,\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I})\times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}}\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I+\sigma(\nu_I)}\subseteq\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu'_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)}$，因为该图表中的水平箭头是完美光滑且满射的。□

对于分裂情形，考虑笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc}\coprod_{\mu'_I\leq\mu_I} Z_{\mu'_I} & \longrightarrow & \coprod_{\mu'_I\leq\mu_I}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}\widetilde{\times}\,\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I})\times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}}\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I+\sigma(\nu_I)}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}\times\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I+\sigma(\nu_I)}.\end{array}$$

由引理 6.17 以及命题的典范情形可知，每个$Z_{\mu'_I}$ 的不可约分支与 $\mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu'_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)}$ 一一对应。

另一方面，由 [FI25，引理 5.1]，卷积映射 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu}\to\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$ 到 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\mu'_I}$ 的限制是局部平凡纤维化，其维数为 $\leq\langle\rho,\mu-\mu'_I\rangle$. 此外，其纤维的$\langle\rho,\mu-\mu'_I\rangle$维不可约分支与引理 5.20中的映射的纤维典范地一一对应。这表明，$\langle\rho,\mu-\tau\rangle$维的不可约分支

$$\bigsqcup_{\mathbf{a}\in\mathbb{S}_{\nu_I,\mu_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)}} X^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\mu,\nu_I}=\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}\times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}\times\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I+\sigma(\nu_I)}}\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\tau+\sigma(\nu_I)}$$

与 $\mathbb{S}_{\nu_I,\mu_I|\tau_I+\sigma(\nu_I)}$自然一一对应，并且显然每个 $X^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\mu,\nu_I}$都恰好包含一个这样的分支。重复上述论证，但将所有的 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}$ 替换为 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I}$，也可由典范情形推出 $X^{\mathrm{spl}}_{\mu,\mathbf{b}}(\tau)\times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I}}\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I}$ 的非空性和不可约性。□

7. Motivic correspondences on moduli of local shtukas

在前几节定义了分裂仿射格拉斯曼尼亚和分裂仿射 Deligne–Lusztig 簇之后，我们转而研究局部 shtuka 模空间，并同样定义它们的分裂版本。随后，我们表述并证明本文的主要局部结果，即定理 7.13。在本节中，我们始终假设 G/F 是本质非分歧的，并使用记号 5。2，但我们

注意到，仅涉及典范模型的结果同样适用于一般的拟分裂情形 G（带有非常特殊抛物子群模型 $\mathcal{G}/\mathcal{O}_F$）。_在本节中，我们将把所有几何对象都视为定义在 Spec k 上。

7.1. **无界分裂局部 shtuka 的模空间**。回顾一下，我们在第μ3.2 节通过模空间解释定义了（有界）分裂局部 shtuka 的概念。与 [XZ17,§5], 类似，这个有界版本实际上可以利用定义 5.9扩展为无界版本（尽管志村簇与局部 shtuka 模空间之间的任何直接联系，包括分裂版本，都只涉及有界部分）。为此，第 5节中的群论方法至关重要。

回顾 [XZ17, §5.2] 中， $\mathcal{G}$ 的局部 shtuka 模空间定义为 Frobenius 扭曲共轭作用下的 étale 商（$LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} L^+\mathcal{G}$）$^{\text{ét}}$；我们称其为典范局部 shtuka 的模空间，并记为 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$。它有一个到 Hecke 叠 $\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$的自然映射。

定义 7.1。分裂局部 *shtuka* 模空间是纤维积

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} := \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \times_{\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}} \mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}},$$

其中 $\mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 定义见定义 5。9。特别地，存在自然映射 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ （从 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$拉回）。对于任意 $\mu \in X_*(T)^+$，存在自然的子概形

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\le\mu} := \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \times_{\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}} \mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\le\mu}.$$

更一般地，我们还需要 Hecke 叠和局部 shtuka 模空间的迭代版本，它们通过扭曲积定义。在这里，重要的是将它们与由分裂模型产生的扭曲积区分开来。

定义 7.2。令 $\mu_{\bullet,I} = (\mu_{1,I}, \ldots\ldots, \mu_{t,I})$ 为 $X_*(T)^+_I$ 中元素的一个元组。则迭代的（典范）局部 *shtuka* 栈为

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\mu_{\bullet,I}} := \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \times_{\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}} \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\mu_{\bullet,I}}.$$

类似地，对于定义5。12中的任意卷积 Hecke 叠，都存在一个局部 shtuka 栈：沿 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 取纤维积即可得到，并将使用与上述类似的记号表示。

这些对象也可以定义无界版本，但保留对界的跟踪会使后文的记号更加清晰。不过，重要的是，我们允许界为任意值，这与第 3.2 节形成对比。

还要回顾一下，这些迭代典范局部shtuka 的模空间允许一个部分弗罗贝尼乌斯态射

$$F^{\mathrm{can}}_{\mu_{\bullet,I}} : \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le(\mu_{1,I},\ldots,\mu_{t,I})} \cong \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le(\sigma(\mu_{t,I}),\mu_{1,I},\ldots,\mu_{t-1,I})}, \tag{7.1}$$

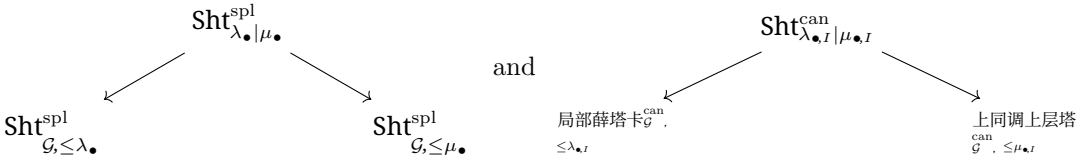
该态射由对 $L^+\mathcal{G}$ 上的 Frobenius 扭曲共轭作用取商诱导而来

$$LG\widetilde{\times}\ldots\widetilde{\times}LG \cong LG\widetilde{\times}\ldots\widetilde{\times}LG : (g_1,\ldots,g_{t-1},g_t) \mapsto (\sigma(g_t),g_1,\ldots,g_{t-1}).$$

7.2. 分裂局部 shtuka 模空间之间的对应。接下来，我们将介绍局部 shtuka 模空间之间的某些（几何）对应。在全文中，$\lambda_\bullet = (\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ 和 $\mu_\bullet = (\mu_1,\ldots,\mu_t)$ 表示 $X_*(T)^+$ 中元素组成的元组，类似地，$\lambda_{\bullet,I}$ 和 $\mu_{\bullet,I}$ 表示 $X_*(T)^+_I$ 中元素组成的元组。典范版本可仿照 [XZ17, Definition 5.2.8] 中的方式定义。然而，分裂版本更为微妙，不能直接通过基变换从典范版本得到。相反，我们将使用栈 $\mathfrak{B}(G)'$ 来定义它们，该栈定义为商预叠 $LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} LG$ 的 ´étale 层化（参见注 4.2）。特别地，存在自然映射

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\le\mu_\bullet} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\mu_{\bullet,I}} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} = (LG/\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} L^+\mathcal{G})^{\text{ét}} \to \mathfrak{B}(G)'.$$

定义 7.3. The*Hecke* 对应



定义为 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} := \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\lambda_\bullet} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}$ 以及 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\lambda_{\bullet,I}|\mu_{\bullet,I}} := \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\lambda_{\bullet,I}} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_{\bullet,I}}$。特别地，存在自然映射 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\lambda_{\bullet,I}|\mu_{\bullet,I}}$，它们是有限呈示、适当且满射的（因为每个 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_{\bullet,I}}$都具有这些性质）。

最后，复合映射

$$\mathrm{Comp}\colon \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_\bullet|\kappa_\bullet} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\kappa_\bullet}$$

定义为如下复合

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mu_\bullet|\kappa_\bullet} = \left(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\lambda_\bullet} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}\right) \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}} \left(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\kappa_\bullet}\right)$$

$$\cong \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\lambda_\bullet} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\kappa_\bullet} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\lambda_\bullet} \times_{\mathfrak{B}(G)'} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\kappa_\bullet}$$

这些复合映射也可以为典范版本定义，并且与自然映射 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\lambda_{\bullet,I}|\mu_{\bullet,I}}$相容。

此定义可以自然地推广，例如定义 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I,\mu|\lambda_I}$ 以及 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\nu_I,\mu_I|\lambda_I}$（比较定义 5.19）。

这些 Hecke 对应也有模空间解释。回顾 [XZ17，定义 5.1.1]典范迭代 Hecke 叠 $\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_{\bullet,I}}$ 表示如下函子：它将一个完美 k-代数R 映到群胚

$$\left\{\mathcal{E}_t \xrightarrow{\beta_t} \mathcal{E}_{t-1} \xrightarrow{\beta_{t-1}} \dots \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{E}_0\right\},$$

其中 $\mathcal{E}_i$是定义在 $D_R = \mathrm{Spec}\, W_{\mathcal{O}_F}(R)$ 上的 $\mathcal{G}$-丛，而 β_i是修改，即在 $D_R^* = \mathrm{Spec}\, W_{\mathcal{O}_F}(R) \otimes_{\mathcal{O}_F} F$ 上的同构，并且还受到 $\mu_{i,I}$的界定，具体含义见 [XZ17，定义 3.1.3]。此外，对于定义在 D_R上的 $\mathcal{G}$-扭子 $\mathcal{E}$，令 ${}^{\sigma}\mathcal{E} := (\sigma\otimes\mathrm{id})^*\mathcal{E}$ 为其沿自同构 $\sigma\otimes\mathrm{id}$ 的拉回，其中该自同构作用于 $W_{\mathcal{O}_F}(R) = W(R) \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_F$。迭代典范局部shtuka 的模空间表示如下函子：它将 R 映到类似的群胚

$$\left\{\mathcal{E}_t \xrightarrow{\beta_t} \mathcal{E}_{t-1} \xrightarrow{\beta_{t-1}} \dots \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\beta_1} {}^{\sigma}\mathcal{E}_t\right\}$$

其中该修改满足相同的界。换言之，这分类了$\mathrm{Hck}_{\mathcal{G},\leq\mu_{\bullet,I}}$的一个点，连同一个同构$\mathcal{E}_0 \cong {}^{\sigma}\mathcal{E}_t$。回顾 [(R) Zhu25引理3.23] 可知， $\mathfrak{B}(G)'$ 分类了修改配对$(\mathcal{E},\beta)$，其中 $\mathcal{E}$ 是 D_R^* 上的一个 G-扭子，它在一个 ´平展覆盖$R \to R'$之后可以平凡化，并且 $\beta\colon \mathcal{E} \cong {}^{\sigma}\mathcal{E}$ 是一个同构。此外，由 [Zhu17a引理1.3] 的证明， D_R^* 上任意作为 D_R 上一个 $\mathcal{G}$-扭子之限制的G-扭子，都可以在 R的这样一个 ´平展覆盖之后平凡化。因此，对应$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\lambda_{\bullet,I}|\mu_{\bullet,I}}$ 参数化了交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{E}'_s & \xrightarrow{\beta'_s} & \mathcal{E}'_{s-1} & \xrightarrow{\beta'_{s-1}} & \dots & \xrightarrow{\beta'_2} & \mathcal{E}'_1 & \xrightarrow{\beta'_1} & {}^{\sigma}\mathcal{E}'_s \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\sigma(\beta)} \\ \mathcal{E}_t & \xrightarrow{\beta_t} & \mathcal{E}_{t-1} & \xrightarrow{\beta_{t-1}} & \dots & \xrightarrow{\beta_2} & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\beta_1} & {}^{\sigma}\mathcal{E}_t, \end{array} \tag{7.2}$$

其中，上行确定了 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\lambda_{\bullet,I}}$ 中的一个点，下行则确定了 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_{\bullet,I}}$ 中的一个点。若进一步要求修改 β 受限于 $\nu_I \in X_*(T)^+_I$，则得到一个闭子叠

$\mathrm{Sht}^{\nu_I,\text{可以}}_{\lambda_\bullet,I|\mu_\bullet,I} \subseteq \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\lambda_\bullet,I|\mu_\bullet,I}$。最后，我们在分裂情形下定义一个类似的闭子叠，作为以下纤维积

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sht}^{\nu_I,\ \mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\nu_I,\text{可以}}_{\lambda_{\bullet,I}|\mu_{\bullet,I}} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\lambda_{\bullet,I}|\mu_{\bullet,I}} \end{array}.$$

利用模空间解释（7.2），映射 Comp 由复合竖直箭头得到。因此，Comp 限制为态射

$$\mathrm{Comp}\colon \mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{can}}_{\lambda_{\bullet,I}|\mu_{\bullet,I}} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_{\bullet,I}}} \mathrm{Sht}^{\nu'_I,\mathrm{can}}_{\mu_{\bullet,I}|\kappa_{\bullet,I}} \to \mathrm{Sht}^{\nu_I+\nu'_I,\mathrm{can}}_{\lambda_{\bullet,I}|\kappa_{\bullet,I}},$$

因此，分裂版本也类似。

注7.4. 我们也可以定义无界局部 shtuka 的模空间之间的 Hecke 对应。至少当 $s = t = 1$时，我们将其记为 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\infty|\infty}$ 和 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\infty|\infty}$。它们也存在闭子叠 $\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{spl}}{}_{\infty|\infty}$ 和 $\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{can}}{}_{\infty|\infty}$，对应于 $\nu_I \in X_*(T)^+_I$。

例7.5. 局部 shtuka 的模叠可用于定义仿射 Deligne–Lusztig 簇。事实上，设 $\mu_I \in X_*(T)^+_I$ 和 $b \in B(G)$。回顾 Zhu25 命题 3.27]， $\mathcal{B}(G) = (LG/\mathrm{Ad}_\sigma LG)^{\text{ét}}$ 的底层集合与 $B(G)$ 一致，因此 b 给出 $\mathfrak{B}(G)$中的一个点。按照我们的约定改为 $\mathfrak{B}(G)'$，得到以下笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu^*_I}(b) & \longrightarrow & \{b^{-1}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I} & \longrightarrow & \mathfrak{B}(G)'. \end{array} \tag{7.3}$$

In 特别是，如果 $\tau_I \in X_*(Z_G)_I$ 是一个中心余特征，那么 Lang 定理表明

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I} \cong \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\backslash \operatorname{Spec}\overline{k}, \tag{7.4}$$

由此可见

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\tau_I|\mu_I} \cong \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\backslash X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu^*_I}(\varpi^{\tau^*}).$$

此外，这也限制到

$$\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{can}}_{\tau_I|\mu_I} \cong \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\backslash X^{\mathrm{can}}_{\mu^*_I,\nu^*_I}(\varpi^{\tau^*}).$$

分裂模型也有类似的结论：设 $\mu \in X_*(T)^+$ 和 $\tau \in X_*(Z_G)$。然后沿着 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$对上述对象作拉回，我们得到一个笛卡尔方

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu^*}(b) & \longrightarrow & \{b^{-1}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu} & \longrightarrow & \mathfrak{B}(G)', \end{array} \tag{7.5}$$

以及同构

$$\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\tau|\mu} \cong \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\backslash X^{\mathrm{spl}}_{\mu^*,\nu^*_I}(\varpi^{\tau^*}).$$

与 [XZ17，引理 5.2。12] 相同的论证表明如下结论。

引理 7.6。 映射 $\mathrm{Sht}^{\nu\ \mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$、$\leq\lambda_\bullet$ 和 $\mathrm{Sht}^{\nu\ \mathrm{spl}}_{\infty|\infty} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 均可由 *pfp* 完美适当概形表示。特别地，$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda_\bullet|\mu_\bullet} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$、$\leq\lambda_\bullet$ 和 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\infty|\infty} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 均可由归纳（完美适当）概形表示。典范版本也有类似结论。

更确切地说，至少在 $\lambda_\bullet = \lambda$ 和 $\mu_\bullet = \mu$ 是 1 元组时，$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\lambda|\mu} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}, \leq\lambda}$ 的纤维可与定义 6。9。 中的分裂仿射 Deligne–Lusztig 簇等同。

在 [XZ17，§5] 中确立的许多性质，对于典范局部 shtuka 的模空间也成立，我们将在下文中充分利用这些性质（事实上，由于我们不研究受限局部 shtuka，因此可以避开 [XZ17，§5.3]中出现的许多技术细节）。然而，对于分裂模型， [XZ17中的引理 5.2.14–5.2.16], 并无明显的对应结果，因此也没有 [XZ17中的引理 5.2.18]的对应结果。根据下文的命题 7.9 ，这不会造成任何问题。

注 7.7。 设 $\mu_I \in X_*(T)^+_I$ ，并设 $m \gg n > 0$ 为两个整数，使得 σ^{-1}-扭曲共轭作用 $L^+\mathcal{G}$ 在 $\mathrm{Gr}^{(n)}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I}$ 上经由 $L^m\mathcal{G}$因子化。于是，如同在 [XZ17，§5.3], 中一样，我们可以定义（m， n）-受限的 μ_I有界典范局部 shtuka 的栈如下：

$$\mathrm{Sht}^{(m,n),\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I} := (\mathrm{Gr}^{(n),\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I} / \mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} L^m\mathcal{G})^{\text{ét}}.$$

若 (m', n') 和 (m, n) 如上所述，且 $m' \geq m$ 和 $n' \geq n$，则我们得到自然的限制映射

$$\mathrm{Sht}^{(m',n'),\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I} \to \mathrm{Sht}^{(m,n),\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I}.$$

这些是仿射丛的复合（因为这对 $\mathrm{Gr}^{(n')}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I} \to \mathrm{Gr}^{(n)}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I}$ ，以及沿 $*/L^{m'}\mathcal{G} \to */L^m\mathcal{G}$ 的基变换。由于 $L^{m'}\mathcal{G} \to L^m\mathcal{G}$ 具有分裂幂零核，并且显然有 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \mu_I} \cong \lim\limits_{\longleftarrow m \gg n > 0} \mathrm{Sht}^{(m,n),\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I}$ ，我们看到 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I}$ 满足假设 A.3 （1）。

现在，设 $\lambda_I, \nu_I \in X_*(T)^+_I$ 是进一步的优势余特征。于是，我们希望映射 $\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{can}}_{\lambda_I|\mu_I} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\lambda_I}$ 满足假设 A.3 (2)。对于满足 $m \gg n$的 (m, n)，如 [XZ17, Definition 5.3.16] 中那样的相同（复杂）构造给出一个 pfp 代数栈 $\mathrm{Sht}^{\nu_I,(m,n),\mathrm{can}}_{\lambda_I|\mu_I} \to \mathrm{Sht}^{(m,n)}_{\mathcal{G}, \leq\lambda_I}$,。对于满足 $m' \gg n', m' \geq m$ 和 $n' \geq n$的第二个配对 (m', n')， [XZ17, 引理 5.3.17] 的类似结果给出一个笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sht}^{\nu_I,(m',n'),\mathrm{can}}_{\lambda_I|\mu_I} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{(m',n'),\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\lambda_I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\nu_I,(m,n),\mathrm{can}}_{\lambda_I|\mu_I} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{(m,n),\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\lambda_I} \end{array}.$$

这甚至对 $m' = n' = \infty$也成立，因此 $\mathrm{Sht}^{\nu_I, \text{可以}}_{\lambda_I|\mu_I} \cong$ 极限$\longleftarrow m \gg n > 0 \mathrm{Sht}^{\nu_I, (m,\ n), \text{可以}\lambda_I|\mu_I}$ ，由此我们看到 $\mathrm{Sht}^{\nu_I, \text{可以}\lambda_I|\mu_I} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\lambda_I}$ 确实满足假设 A.3 (2)。

由对称性，Sht^{ν_I}，分裂 $_{\lambda_I|\mu_I} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I}$ 也满足假设 A.3 (2)。我们注意到，从 Sht^{ν_I}，分裂 $_{\lambda_I|\mu_I} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I}$ 到 $\mathrm{Sht}^{(m,n)}_{\mathcal{G}, \leq\mu_I}$ 的下降栈，与上一段中的栈 Sht^{ν_I}，$(m,\ n)$，分裂 $_{\lambda_I|\mu_I}$ 并不一致。然而，得益于附录 A 中所解释的层论所提供的额外灵活性，这并不是问题。特别是，这使我们能够避免 XZ17 [，§5.3] 中出现的许多技术困难。上述讨论同样完全适用于迭代典范局部shtuka 的模空间，以及分裂局部 shtuka 模空间。

7.3. **局部 shtuka 模空间上的动机**。有了前面几个小节中的几何背景，我们现在来说明如何在局部 shtuka 模空间上定义适当的动机范畴。正如附录中所述，我们可以在任意（完美）预层栈上定义动机（A.1）。这将简化 [XZ17]的某些方面；尤其是，受限局部 shtuka 的概念将不再那么常用。

在第 5 节中，我们说明了如何在分裂仿射格拉斯曼尼亚和局部 Hecke 堆栈上定义分层泰特动机范畴，并为其赋予 t-结构。局部 shtuka 模空间的情形与此类似，但会出现额外的微妙之处。具体而言，固定一个由 $\mu_\bullet$ 中的元素构成的元组

$X_*(T)^+$，并考虑笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}^{(\infty),\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet} & \longrightarrow & \mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}, \end{array} \tag{7.6}$$

其中所有箭头都是 $L^+\mathcal{G}$-纤维化。这里，$\mathrm{Gr}^{(\infty)\ \mathrm{spl}}_{\mathcal{G}\ \leq\mu_\bullet}$ 是 Gr 上自然的 $L^+\mathcal{G}$-扭子 $^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$，$\leq\mu_\bullet$ 其定义方式与 (5.1) 相同。此外，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 上的 $L^+\mathcal{G}$- 作用使其成为 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 上的 ´étale 扭子，$\leq\mu_\bullet$ 对应于 σ^{-1}-扭曲共轭作用。特别地，关于此作用，我们有

$$\mathrm{DM}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}) \cong \mathrm{DM}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}^{(\infty),\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}).$$

由于分层 $\mathrm{Gr}^{(\infty)\ \mathrm{spl}}_{\mathcal{G}\ ,,\leq\mu_\bullet} = \bigsqcup_{\mu'_\bullet\leq\mu_\bullet\in(X_*(T)^+)^t} \mathrm{Gr}^{(\infty)\ \mathrm{spl}}_{\mathcal{G}\ \mu'_\bullet}$ 是 $L^+\mathcal{G}$-稳定的，因此定义下式是有意义的

$$\mathrm{DM}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}) \supseteq \mathrm{DTM}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}) := \mathrm{DTM}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}^{(\infty),\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}),$$

其中，相对于上述分层，动机是分层泰特的。此外，我们还可以为此范畴赋予一个 t-结构，其规范化方式如注5.7所述，其心为

$$\mathrm{MTM}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}) \cong \mathrm{MTM}_{L^+\mathcal{G}}(\mathrm{Gr}^{(\infty),\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu_\bullet}).$$

按构造，沿图表（7.6）中态射的 !-拉回保持 DTM，并且是 t-正合的。最后，图表（7.6）随 $\mu'_\bullet \leq \mu_\bullet \in (X_*(T)^+)^t$ 变化时，其间存在显然的过渡映射，沿其推前保持 DTM 与 MTM，从而我们也可以在局部 shtuka 模空间的无界版本上定义（混合）Tate 动机范畴。特别地，在情形 $t = 1$中，!-拉回给出一个自然函子

$$\mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}) \to \mathrm{MTM}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}). \tag{7.7}$$

同样，以上所述也适用于典范局部 shtuka 的模空间的情形。

最后，我们希望在局部 shtuka 模空间上定义一个动机范畴，其态射由（动机的）对应给出，推广 [XZ17，§5.4]。我们将仅对局部 shtuka 的无界非迭代模空间这样做。为简单起见，我们还将仅对可构造的混合泰特动机定义该范畴，而非整个动机范畴。回想任意完美预叠上的可构造动机范畴已在（A.13）中定义；我们将把交 $\mathrm{MTM}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}) \cap \mathrm{DM_c}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}) \subseteq \mathrm{DM}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$ 记为 $\mathrm{MTM_c}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$，典范版本亦类似。

根据注记 7.7，$\mathrm{Sht}^{\nu_I,\ \mathrm{spl}\ \infty|\infty}$ $\to$ $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} \times \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 和 $\mathrm{Sht}^{\nu_I,\ \text{可以}\ \infty|\infty}$ $\to$ $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \times \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$满足假设 A.3，因此本设定适用 §A.2 中的技巧。（严格来说，这些技巧仅适用于有界局部 shtuka 叠。不过，我们将考虑的所有动机都是可构造的，因此其支撑都包含在某个有界部分上，所以 §A.2 实际上适用。）

定义 7.8。 范畴 $\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$ 是一个（普通）范畴，其对象与 $\mathrm{MTM_c}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$ 的对象相同。对于 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2 \in \mathrm{MTM_c}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$，态射 $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ 的集合由以下滤余极限给出

$$\varinjlim_{\nu_I\in X_*(T)^+_I} \mathrm{Corr}_{\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\infty|\infty}}\left(\left(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}},\mathcal{F}_1\right),\left(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}},\mathcal{F}_2\right)\right),$$

其中过渡映射由对应的适当推前沿

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\infty|\infty} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} \\ \| & & \downarrow & & \| \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}^{\nu'_I,\mathrm{spl}}_{\infty|\infty} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}. \end{array}$$

尚需定义对应的复合，因此设 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \in \mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}})$，以及

$$f \in \mathrm{Corr}_{\mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I,\mathrm{spl}}}\left(\left(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}, \mathcal{F}_1\right), \left(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}, \mathcal{F}_2\right)\right) \quad \text{and} \quad f' \in \mathrm{Corr}_{\mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I',\mathrm{spl}}}\left(\left(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}, \mathcal{F}_2\right), \left(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}, \mathcal{F}_3\right)\right).$$

于是可以按照构造 A.7复合这些动机对应，从而得到一个支撑在

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} \leftarrow \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I,\mathrm{spl}} \times_{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}} \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I',\mathrm{spl}} \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}.$$

沿图表对这个对应作适当推前（依照构造 A.10 的定义）

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I,\mathrm{spl}} \times_{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}} \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I',\mathrm{spl}} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Comp}} & & \| \\
\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I+\nu_I',\mathrm{spl}} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}
\end{array}$$

便得到所需的复合 $f' \circ f \in \mathrm{Corr}_{\mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I+\nu_I',\mathrm{spl}}}\left(\left(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}, \mathcal{F}_1\right), \left(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}, \mathcal{F}_3\right)\right)$。

要证明这一定义良好（即与改变 $\nu_I \in X_*(T)_I^+$ 相容），只需应用引理 A.11，因为映射 Comp 与改变 ν_I 相容。同样，这个复合的结合律也由引理 A.11 得出，因为很容易看出下图可交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\mathrm{spl}} \times_{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}} \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\mathrm{spl}} \times_{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}} \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\mathrm{spl}} & \xrightarrow{\mathrm{Comp}\times \mathrm{id}} & \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\mathrm{spl}} \times_{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}} \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\mathrm{spl}} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times \mathrm{Comp}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Comp}} \\
\mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\mathrm{spl}} \times_{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}} \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\mathrm{spl}} & \xrightarrow[\mathrm{Comp}]{} & \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\mathrm{spl}}.
\end{array}$$

特别是，由于不使用受限局部 shtuka，我们避免了在验证 [XZ17，§5.4.2]中类似陈述时所用的许多技术细节。

同样，对于典范局部 shtuka 的情形，也有类似的构造，从而得到范畴 $\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$。此外，对应的适当推前给出一个自然函子 $\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}) \to \mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$。

命题 7.9。该函子

$$\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}) \to \mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$$

是全忠实的。

证明。令 $\nu_I \in X_*(T)_I^+$，并考虑图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I,\mathrm{spl}} & \xrightarrow{\widetilde{m}} & \mathrm{Sht}_{\infty|\infty}^{\nu_I,\mathrm{can}} \\
\downarrow{\scriptstyle p_1^{\mathrm{spl}}\times p_2^{\mathrm{spl}}} & & \downarrow{\scriptstyle p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}}} \\
\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} \times \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} & \xrightarrow[m\times m]{} & \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \times \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \\
\downarrow{\scriptstyle q_i^{\mathrm{spl}}} & & \downarrow{\scriptstyle q_i^{\mathrm{can}}} \\
\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}} & \xrightarrow[m]{} & \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}},
\end{array}$$

其中上方的方形是笛卡尔的。令 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2 \in \mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}})$；由于这些对象是可构造的，它们支撑于某个 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}$，$\leq_\mu$ 上。转而考虑受限局部 shtuka 后，我们可以假定上图中的栈是 pfp 代数栈。

上述图表是 pfp 代数栈。然后，我们计算

$$
\begin{aligned}
&(p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})_*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{can}}_{\infty|\infty}}(p_1^{\mathrm{can},*}m_*\mathcal{F}_1,p_2^{\mathrm{can},!}m_*\mathcal{F}_2)\\
&\cong (p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})_*(p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})^!\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}\times\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}}(q_1^{\mathrm{can},*}m_*\mathcal{F}_1,q_2^{\mathrm{can},!}m_*\mathcal{F}_2) && \text{(A.12)}\\
&\cong (p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})_*(p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})^!(\mathbb{D}(m_*\mathcal{F}_1)\boxtimes m_*\mathcal{F}_2) && \text{(A.8) and (A.9)}\\
&\cong (p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})_*(p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})^!(m_*\mathbb{D}(\mathcal{F}_1)\boxtimes m_*\mathcal{F}_2) && \text{(A.11)}\\
&\cong (p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})_*(p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})^!(m\times m)_*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}\times\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}}(q_1^{\mathrm{spl},*}\mathcal{F}_1,q_2^{\mathrm{spl},*}\mathcal{F}_2) && \text{(A.7)}\\
&\cong (p_1^{\mathrm{can}}\times p_2^{\mathrm{can}})_*\widetilde{m}_*(p_1^{\mathrm{spl}}\times p_1^{\mathrm{spl}})^!\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}\times\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}}(q_1^{\mathrm{spl},*}\mathcal{F}_1,q_2^{\mathrm{spl},*}\mathcal{F}_2)\\
&\cong (m\times m)_*(p_1^{\mathrm{spl}}\times p_2^{\mathrm{spl}})_*(p_1^{\mathrm{spl}}\times p_1^{\mathrm{spl}})^!\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}\times\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}}(q_1^{\mathrm{spl},*}\mathcal{F}_1,q_2^{\mathrm{spl},*}\mathcal{F}_2)\\
&\cong (m\times m)_*(p_1^{\mathrm{spl}}\times p_2^{\mathrm{spl}})_*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\infty|\infty}}(p_1^{\mathrm{spl},*}\mathcal{F}_!,p_2^{\mathrm{spl},!}\mathcal{F}_2).
\end{aligned}
$$

将这一系列等价的外侧项推前到谱 k，并取 $\mathrm{Hom}(\mathbb{1},-)$，便得到所需的对应群，从而推出该命题。□

由于 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\infty|\infty}=\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}\times_{\mathfrak{B}(G)'}\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$，且对 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}}$ 也同样成立，因此 $\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})$ 和 $\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$ 都可通过 h-下降视为 $\mathrm{DM}(\mathfrak{B}(G)')$ 的子范畴。显然，这与采用分裂模型还是典范模型无关，因此也解释了为何该函子应当是全忠实的。为避免长篇讨论 $\mathrm{DM}(\mathfrak{B}(G)')$，我们改为给出一个直接论证；未来的工作中，我们将详细研究 $\mathfrak{B}(G)$ 的动机方面。

我们以描述上述构造的范畴中某些特选对象之间的态射来结束本节。由命题 7.9，只需考虑典范版本。对于 $M\in\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Spec}\,k)$，记 $\delta^{\mathrm{can}}_{\mathbf{1}}(M)\in\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})$ 为从 $\mathrm{IC}_0(M)\in\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})$（如记号 5.16 所述）经映射 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}\to\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 拉回的对象。注意，$\delta^{\mathrm{can}}_{\mathbf{1}}(M)$ 是以类似方式定义的 $\delta^{\mathrm{spl}}_{\mathbf{1}}(M)\in\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$ 的推前。令

$$\mathcal{H}_{\mathcal{G}}:=C_c(\mathcal{G}(\mathcal{O})\backslash G(F)/\mathcal{G}(\mathcal{O}),\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$$

表示 G 上系数为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$的非常特殊的 Hecke 代数。接下来的命题可用与 [XZ17，命题 5.4 类似的方法证明。4]

命题 7.10。设 $M,N\in\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}$(谱 k)。则存在自然的群同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})}(\delta^{\mathrm{can}}_{\mathbf{1}}(M),\delta^{\mathrm{can}}_{\mathbf{1}}(N))\cong\mathcal{H}_{\mathcal{G}}\otimes\mathrm{Hom}_{\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Spec}\,\overline{k})}(M,N),$$

which 与复合相容。因此，存在一个典范环同构

$$\mathrm{End}_{\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})}(\delta^{\mathrm{can}}_{\mathbf{1}}(\mathbb{1}))\cong\mathcal{H}_{\mathcal{G}}.$$

7.4. 局部 shtuka 模空间之间的动机对应。经过上述所有准备，我们终于可以陈述并证明本文的局部定理。照例，我们将几何对象基变换到 $\mathrm{Spec}\,k$。此外，从现在起，我们将使用有理系数动机，并记 $\mathrm{DM}(-):=\mathrm{DM}(-,\mathbb{Q})$ 等。

$\widehat{\ }$考虑朗兹对偶群 G的 G，其定义在 $\mathbb{Q}$上。vdH24a 中的动机Satake等价 [vdH24a] 将 Hck 上的混合泰特动机描述为 $\overset{\mathrm{can}}{\mathcal{G}}$的表示 $\widehat{G}^I$，其内部于 $\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\,k)$。回顾一下，$\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ k):=\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ k,\mathbb{Q})$ 等价于 $\mathbb{Z}$-分次的$\overline{\ }\mathbb{Q}$-向量空间 [vdH24a，推论 2。$\overline{\ }$ 8]。因此，为了简化记号，我们记作

$$\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}:=\widehat{G}^I\rtimes\mathbb{G}_m,$$

其中作用如 [vdH24a，§9], 从而存在幺半群等价

$$\mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})\cong\mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(\mathbb{Q}\text{- Vect})=:\mathrm{Rep}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}).$$

由 [vdH24a，推论 9。6]。类似地，我们可以写成

$$\widehat{G}_{\mathrm{mot}} := \widehat{G} \rtimes \mathbb{G}_m,$$

这与 Deligne 对朗兰兹对偶群的修改 [Del07相一致，FG09]。于是命题 5.15 给出了一个等价

$$\mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}) \cong \mathrm{Rep}_{\widehat{G}_{\mathrm{mot}}}(\mathbb{Q}\text{- Vect}) =: \mathrm{Rep}(\widehat{G}_{\mathrm{mot}}),$$

但我们强调，左侧事先并不具有幺半结构。在上述等价下，MTM 中的可构造对象对应于有限维表示。

回忆具有一个自然的 Γ_k-作用，该作用与上述 $\mathbb{G}_m$-作用可交换（参见 [vdH24a，§9]）。这诱导出一个 $\mathbb{G}_m \times \Gamma_k$-作用于 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}} = \widehat{G}^I \rtimes \mathbb{G}_m$上的作用，使得诱导在子群 $\mathbb{G}_m$ 上的作用是平凡的。

定义 7.11。令 $x \in \mathbb{G}_m \times \Gamma_k$ 和 $V \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$。则 x-扭曲表示 xV定义为复合 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}} \xrightarrow{x^{-1}} \widehat{G}^I_{\mathrm{mot}} \to \mathrm{GL}(V)$，其中使用上述 $\mathbb{G}_m \times \Gamma_k$ 在 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$上的作用。

注记 7.12。(1) 在等价 $\mathrm{Rep}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) \cong \mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I}(\mathrm{MTM}(\text{谱 } k))$ 下，对表示进行扭曲不会改变 MTM(谱k) 中的底层对象。事实上，这是因为 $\mathbb{G}_m \times \Gamma_k$- 作用限制到 $\mathbb{G}_m \subseteq \widehat{G}^I$ 上时是平凡作用。

(2) $X_*(T)_I = X^*(\widehat{T}^I)$ 上的 Γ_k-作用由与 γ^{-1} 前复合给出。特别地，我们看到，对于 $\gamma \in \Gamma_k$ 和 $\mu \in X_*(T)^+_I$，有 $\gamma V_{\mathrm{can}\mu}(n) = V_{\mathrm{can}\gamma(\mu)}(n)$。此外，$\mathrm{Sat}(V^{\mathrm{can}}_{\gamma(\mu)}(n))$ 沿自同构 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 的拉回将支撑在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 上，并且我们看到

$$\gamma^* \mathrm{Sat}(\gamma V^{\mathrm{can}}_{\mu}(n)) = \mathrm{Sat}(V^{\mathrm{can}}_{\mu}(n)). \tag{7.8}$$

这纠正了 [XZ17中的 (3.4.5)] （但我们注意到，在 [XZ17中，引理 6.111], 采用了正确的版本）。关于分裂模型也有类似的讨论。

现在，考虑商栈 $\widehat{G}^I q^{-1}\sigma/\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$。若以 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}$ 表示有限维向量空间上表示所构成的全子范畴，则有函子

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}_{\mathrm{mot}}) \to \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) \to \mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(\widehat{G}^I q^{-1}\sigma).$$

我们将第二个函子的本质像记为

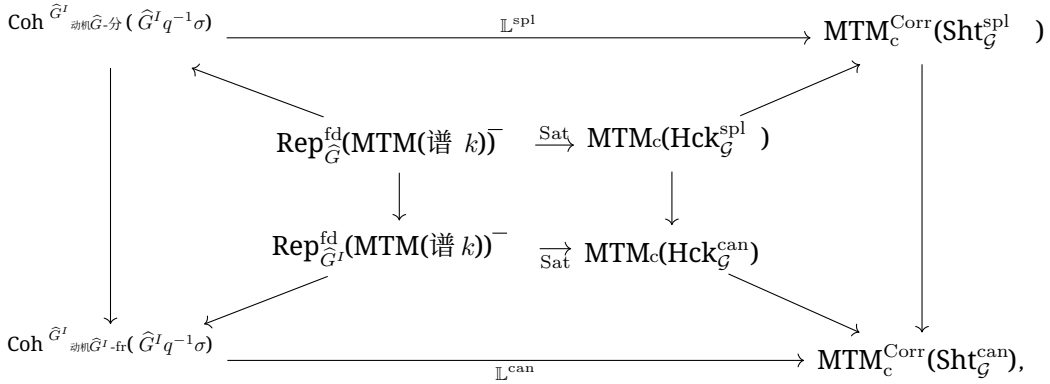
$$\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}_{\widehat{G}^I\text{-fr}}(\widehat{G}^I q^{-1}\sigma),$$

并将复合的本质像记为

$$\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}_{\widehat{G}\text{-fr}}(\widehat{G}^I q^{-1}\sigma);$$

这些是$\widehat{G}^I q^{-1}\sigma/\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$上的自由凝聚层，分别由$\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$ 和 $\widehat{G}_{\mathrm{mot}}$的表示生成。本节的主定理如下：

定理 7.13. 存在一个交换图



(7.9)

左侧的两个竖直箭头由限制表示得到，而右侧的竖直箭头则由（适当）推前得到。

注 7.14。 下方梯形（7.9）在一般情况下存在（在非常特殊层），无需假设 G 为本质非分歧。

本定理将在本小节中按照 [XZ17，§6] 的思路证明。回顾一下，函子 $\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}) \to \mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}})$ 和 $\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}) \to \mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}})$ 已在（7.7）中定义。特别地，这确定了对象层面上的 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}$ 和 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$，因此还需描述它们对态射的作用。

首先，我们明确 $\mathrm{Coh}_{\text{动机}}(\widehat{G}^I q^{-1}\sigma)$ 中的态射群 $\mathrm{Rep}(\widehat{G}^I)$，我们用 $\mathbf{J}(V) := (\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma} \otimes V)^{\widehat{G}^I}$ 表示沿 $\widehat{G}^I q^{-1}\sigma/\widehat{G}^I \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}/\widehat{G}^I$ 对 V 拉回后所得的整体截面空间。特别地，对于 $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$，我们可以写作 $\mathbf{J}(V)$，这里我们默认考虑沿 $\widehat{G}^I \to \widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$ 对 V 的限制；在这种情况下，$\mathbf{J}(V)$ 还带有一个额外的 $\mathbb{G}_m$-作用。若 $\mathbb{Q} \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$ 是平凡表示，我们也记作 $\mathbf{J} := \mathbf{J}(\mathbb{Q})$。

引理 7.15。 $\mathbb{G}_m$在$\mathbf{J}$上的作用是平凡的。

证明。回顾一下，$\widehat{G}^I \rtimes \mathbb{G}_m \subseteq V^I_{\widehat{G},\,\rho_{\mathrm{ad}}}$，其中$V^I_{\widehat{G},\,\rho_{\mathrm{ad}}}$是 Vinberg 幺半群的惯性不变量，定义见例如 [vdH24a，第 10 节1]。还要回顾在[vdH24a，第 10 节1]中定义的交换幺半群 $V^I_{\widehat{T}} \to (\widehat{T}^+ \mathrm{ad})^I$。特别地，自然的 $\mathbb{G}_m$-作用（由共轭给出）在 $V^I_{\widehat{T}}$上是平凡的，因此在其整体截面上也同样平凡。由 Chevalley 限制定理[vdH24a，命题 10.8]，即得该引理。□

接下来，对于任意 $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$，记 $\widetilde{V}$为其到 $\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I}{}_{\mathrm{mot}\widehat{G}^I\text{-fr}}(\widehat{G}^I q^{-1}\sigma)$的拉回。那么$\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(V)$与沿 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}} \to \mathrm{Hck}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}$的 $\mathrm{Sat}(V)$的 !-拉回一致。此外，对于 $V_1,\ V_2 \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(\widehat{G}^I q^{-1}\sigma)}(\widetilde{V_1},\widetilde{V_2}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma}}(\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma}\otimes V_1, \mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma}\otimes V_2)^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}\\ &\cong (\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma}\otimes V_1^*\otimes V_2)^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}} \cong \mathbf{J}(V_1^*\otimes V_2)^{\mathbb{G}_m}.\end{aligned}$$

现在，对于任意辅助的 $W \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$，若其有基 $\{e_i\}$和对偶基 $\{e_i^*\}$，则存在一个自然映射

$$\begin{aligned}&\Xi_W\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma W\otimes V_1\otimes W^*, V_2) \to (\mathcal{O}_{\widehat{G}q^{-1}\sigma}\otimes V_1^*\otimes V_2)^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}} \qquad (7.10)\\ &\mathbf{a}\mapsto \left(\Xi_W(\mathbf{a})\colon g\mapsto \sum_i \mathbf{a}(g\cdot e_i\otimes e_i^*) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V_1,V_2)\cong V_1^*\otimes V_2\right).\end{aligned}$$

那么， Ξ_W(a) 与基 $\{e_i\}$ 的选取无关，并且其取值于从 $\widehat{G}^I q^{-1}\sigma$ 到 $V_1^* \otimes V_2$ 的 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$-不变函数，因为假设这些态射是 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$-等变的。此外，根据描述 $\widehat{G}^I \cong \widehat{G}^I q^{-1}\sigma$ 的整体截面的彼得–外尔定理（该定理对非连通约化群也成立），映射族 $\{\Xi_W \mid W \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})\}$ 是联合满射的。特别地，为定义 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$，由于只需在态射上定义，我们可以定义如下复合

$$\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_W \colon \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma W \otimes V_1 \otimes W^*, V_2) \xrightarrow{\Xi_W} (\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma} \otimes V_1^* \otimes V_2)^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})}(\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_1}), \mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_2})),$$

并证明它沿着 $\{\Xi_W\}_W$ 的纤维保持常值（且与复合相容）。定义 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}$ 时也有类似的考虑，此时 V_1， $V_2 \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}_{\mathrm{mot}})$，我们希望定义复合

$$\mathscr{C}^{\mathrm{spl}}_W \colon \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma W \otimes V_1 \otimes W^*, V_2) \xrightarrow{\Xi_W} (\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma} \otimes V_1^* \otimes V_2)^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})}(\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}(\widetilde{V_1}), \mathbb{L}^{\mathrm{spl}}(\widetilde{V_2})).$$

不过，我们强调，辅助的 W 仍然是 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$ 的表示。

与 q^{-1} 相比，额外的 [XZ17，§6.2]确保映射Ξ_W 的目标由 $\widehat{G}^I q^{-1}\sigma$ 上的等变向量丛之间的态射 $\widehat{G}^I\sigma$而非组成。这一点很重要，因为我们的系数中没有固定的平方根，也没有将泰特扭曲平凡化。（出于同样的原因，球面朗朗兹参数栈中出现的是 $\widehat{G}^I q^{-1}\sigma$ [vdH24b，定义 21]。）不过，要构造函子 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}$ 和 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$，使用 $\sigma W \otimes W^*$比使用 $q^{-1}\sigma W \otimes W^*$更容易。事实证明，这两个表示同构，而且我们实际上可以构造一个不依赖于任何选择或 q平方根的显式同构。

引理 7.16. 设 W 是 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$的一个表示。那么， W 和 $q^{-1}W$ 存在一个自然的等变同构，并且该同构还与表示的张量积相容。

证明。 表示 $q^{-1}W$ 由下式给出：

$$\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}} \xrightarrow{\mathrm{Ad}_{\rho_{\mathrm{ad}}(q)}} \widehat{G}^I_{\mathrm{mot}} \to \mathrm{Aut}(W).$$

在等价 $\mathrm{Rep}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) \cong \mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\, k))$ 和 $\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\, \bar{k}) \cong \mathrm{gr}\text{-}\mathbb{Q}\text{-}\mathrm{Vect}$ 下，我们可以分解 $W = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} W_i(i)$，其中 W_i 位于次数 0。我们断言，保持这一分解并在 W_i 上诱导乘以 q^{-i} 的自同构$\varphi \in \mathrm{Aut}(W)$（作为向量空间）满足所需条件。显然，这与表示的张量积相容。

我们需要检查下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G}^I_{\mathrm{mot}} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(W) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}_{\rho_{\mathrm{ad}}(q)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\circ-\circ\varphi^{-1}} \\ \widehat{G}^I_{\mathrm{mot}} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(W). \end{array}$$

回顾 [vdH24a, §9] 可知， $\widehat{G}^I$ 及其 $\mathbb{G}_m$-作用由极大环面 $\widetilde{T}^I$ 及其极小 Levi 子群，以及它们上的 $\mathbb{G}_m$-作用决定。因此，只需证明当 G替换为环面或半单秩 1 的群时，上图可交换。

对于环面的情形， $\mathbb{G}_m$-作用是平凡的，因此用 q^{-1} 扭曲不会产生任何影响。而环面的任何作用都会保持分解 $W = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} W_i(i)$，所以经 φ 共轭也不会产生任何影响。

对于半单秩 1 的群，我们可以归约到 G 为伴随的情形。因此，我们要么有 $G = \mathrm{PGL}_2$ 和 $\widehat{G}^I = \widehat{G} = \mathrm{SL}_2$, ，要么有由分歧二次扩张定义的 $G = \mathrm{PU}_3$ ，在此情形下 $\widehat{G}^I = \mathrm{PGL}_2 \subseteq \widehat{G} = \mathrm{SL}_3$。于是我们可以假设 $\widehat{G}^I = \mathrm{SL}_2$, ，从而 $\widehat{G}^I \rtimes \mathbb{G}_m = \mathrm{GL}_2$。由于 GL_2 的每个表示都可以通过对 $\mathbb{G}_m$-作用进行扭曲并取直和项，由标准表示得到，因此我们可以假设 $W \in \mathrm{Rep}(\mathrm{GL}_2)$ 是标准表示，

作为 MTM(Spec k) 中的对象，它分解为 $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}(-1)$。在这种情况下，利用 $\mathrm{Ad}_{\rho_{\mathrm{ad}}(q)}$ 在 GL_2 上的作用为，可以直接检验 φ 给出所需的同构，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & qb \\ q^{-1}c & d \end{pmatrix},$$

参见 [CvdHS25，(6.12)]。 □

在定义映射 $\mathscr{C}_W^{\mathrm{can}}$ 之前，我们先说明如何构造支撑在局部 shtuka 模空间上的某些动机对应。对于一个表示 $V\in\mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$，我们将 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V}\subseteq\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 记为 $\mathrm{Sat}(V)$ 的支撑；这是 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 中舒伯特胞腔的有限闭合并。更一般地，如果 $V_\bullet=V_1\boxtimes\ldots\boxtimes V_t$ 对于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$，我们记

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet}:=\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_1}\widetilde{\times}\ldots\widetilde{\times}\,\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_t}\subseteq\mathrm{Gr}^{\mathrm{can},\widetilde{\times}t}_{\mathcal{G}}.$$

然后，我们可以通过取 $\mathcal{G}^{\mathrm{can}}$ 的商来定义 $\mathit{Hck}_{V_\bullet}$，并定义 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet}$ 如定义 7。2所示。对于分裂模型，我们将使用类似的记号。

对于 $V_1,\ldots\ldots,V_t,\ V_1',\ldots\ldots,V_s'\in\mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$，我们定义对应

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{V_\bullet|V'_\bullet}:=\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet}\times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}}\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V'_\bullet},$$

$$\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{V_\bullet|V'_\bullet}:=L^+\mathcal{G}\backslash\,\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{V_\bullet|V'_\bullet},$$

and

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{V_\bullet|V'_\bullet}\colon\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet}\times_{\mathfrak{B}(G)'}\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V'_\bullet}.$$

那么命题 5.18 (3) 给出同构

$$\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Hck}}\colon\ \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(V_\bullet,V'_\bullet)\cong\mathrm{Corr}_{\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{V_\bullet|V'_\bullet}}(\mathrm{Sat}(V_\bullet),\mathrm{Sat}(V'_\bullet)),$$

它们与复合可交换。这使我们能够在局部 shtuka 模空间上构造所谓的 Satake 对应。

引理 7.17。 设 $U_\bullet,V_\bullet,W_\bullet$ 是 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$ 中的对象元组。那么，对应的拉回诱导映射

$$\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}\colon\ \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(V_\bullet,W_\bullet)\to\mathrm{Corr}_{\mathrm{Sht}^{0,\mathrm{can}}_{V_\bullet|W_\bullet}}(\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_\bullet}),\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W_\bullet})).$$

此外，它们与复合相容，也就是说，图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(U_\bullet,V_\bullet)\otimes\mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(V_\bullet,W_\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Corr}_{\mathrm{Sht}^{0,\mathrm{can}}_{V_\bullet|W_\bullet}}(\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{U_\bullet}),\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_\bullet}))\otimes\mathrm{Corr}_{\mathrm{Sht}^{0,\mathrm{can}}_{V_\bullet|W_\bullet}}(\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_\bullet}),\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W_\bullet})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(U_\bullet,W_\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Corr}_{\mathrm{Sht}^{0,\mathrm{can}}_{V_\bullet|W_\bullet}}(\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{U_\bullet}),\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W_\bullet}))
\end{array}$$

可交换，其中右侧的垂直箭头由沿着……的对应的适当推前给出

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{U_\bullet|V_\bullet}\times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet}}\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{V_\bullet|W_\bullet}\to\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{U_\bullet|W_\bullet}.$$

证明。 映射 $\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}$由 $\mathscr{C}_{\mathrm{canHck}}$（构造 A.13）沿图表的原光滑拉回给出

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet} & \longleftarrow & \mathrm{Sht}^{0,\mathrm{can}}_{U_\bullet|V_\bullet} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},W_\bullet} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet} & \longleftarrow & \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{V_\bullet|W_\bullet} & \longrightarrow & \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},W_\bullet},
\end{array}\tag{7.11}$$

其中两个方块都是笛卡尔的。与复合的相容性由对应的原光滑拉回与对应的适当推前相容这一性质推出，见引理 A.15。 □

除了 Satake 对应外，我们还需要由部分弗罗贝尼乌斯诱导的对应。具体而言，设 $V_\bullet \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}((\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})^t)$ 且 $W \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$。那么存在自然态射

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet\otimes W} \to \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet\boxtimes W} \to \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet} \times \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},W},$$

其中两个映射都是 $L^+\mathcal{G}$-纤维化，特别是 pro-（完美光滑）。考虑下面的交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma W\boxtimes V_\bullet} & = & \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma W\boxtimes V_\bullet} & \xrightarrow{F^{-1}_{V_\bullet\boxtimes W}} & \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet\boxtimes W} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma W} \times \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet} & \xleftarrow[\sigma\times\mathrm{id}]{} & \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},W} \times \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet} & = & \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet} \times \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},W},
\end{array} \tag{7.12}$$

其中所有水平箭头都是同构，而竖直映射都是 pro-（完美光滑）的（特别地，方块是笛卡尔的）。利用（7.8），例 A.6 (2) 给出一个对应

$$\Gamma^*_{\sigma\times\mathrm{id}}\colon \left(\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma W} \times \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet}, \mathrm{Sat}(\sigma W)\boxtimes\mathrm{Sat}(V_\bullet)\right) \to \left(\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet} \times \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},W}, \mathrm{Sat}(V_\bullet)\boxtimes\mathrm{Sat}(W)\right).$$

沿着（7.12) 拉回此对应，便得到部分弗罗贝尼乌斯对应

$$\mathbb{D}\Gamma^{\mathrm{can}}_{F^{-1}_{V_\bullet\boxtimes W}}\colon \left(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma W\boxtimes V_\bullet}, \mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{\sigma W}\boxtimes\widetilde{V_\bullet})\right) \to \left(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},V_\bullet\boxtimes W}, \mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_\bullet}\boxtimes\widetilde{W})\right).$$

现在，设 $V_1, V_2, W \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$。利用引理 7.16，考虑映射

$$\mathscr{C}_{\text{可以}W}\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma W\otimes V_1\otimes W^*, V_2) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(\sigma W\otimes V_1\otimes W^*, V_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})}(\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_1})\ \mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_2})),$$

将一个 $\in \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(\sigma W\otimes V_1\otimes W^*, V_2)$ 映射为复合

$$\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_1}) \xrightarrow{\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}(\delta_{\sigma W}\otimes\mathrm{id}_{V_1})} \mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{\sigma W}^*\boxtimes(\widetilde{\sigma W}\otimes\widetilde{V_1})) \xrightarrow{\mathbb{D}\Gamma^{\mathrm{can}}_{F^{-1}_{(\sigma W\otimes V_1)\boxtimes W^*}}} \mathbb{L}^{\mathrm{can}}((\widetilde{\sigma W}\otimes\widetilde{V_1})\boxtimes\widetilde{W^*}) \xrightarrow{\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}(\mathbf{a})} \mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_2}),$$

其中 $\delta_{\sigma W}\colon \mathbb{Q}\to\sigma W^*\otimes\sigma W$ 是单位映射。

命题 7.18。 设 $V_1, V_2 \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$。对于 $W \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$，映射族 $\mathscr{C}_{\text{可以}W}$ 可按如下图表分解

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_W \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma W\otimes V_1\otimes W^*, V_2) & \xrightarrow{\coprod_W \mathscr{C}^{\mathrm{can}}_W} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})}(\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_1}), \mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V_2})). \\
& {\scriptstyle \coprod_W \Xi_W} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \mathbb{L}^{\mathrm{can}}} & \\
& (\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma}\otimes V_1^*\otimes V_2)^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}} &
\end{array}$$

证明。 设 $\mathbf{c} \in (\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma}\otimes V_1^*\otimes V_2)^{\widehat{G}^I{}_{\mathrm{mot}}}$，并固定某个 $W \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$ 和 $\mathbf{a} \in \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma W\otimes V_1\otimes W^*,\ V_2)$，使得 $\mathbf{c} = \Xi_W(\mathbf{a})$。

考虑 $\mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \in \mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ k))$，它对应于 $\widehat{G}^I$ 的右平移。在等价 $\mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ k)) \cong \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}})$ 下，这给出 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$ 在 $\mathcal{O}_{\widehat{G}^I}$ 上的作用。现在，对于任意 $U \in \mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ k))$，我们有余作用映射 $U \to \mathcal{O}_{\widehat{G}^I}\otimes U$。这给出一个 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$-等变映射

$$\mathrm{act}_U\colon U \to \mathcal{O}_{\widehat{G}^I}\otimes \underline{U}.$$

此处，$\underline{U}$ 在 $\widehat{G}^I \subseteq \widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$ 下具有平凡作用，但带有诱导的 $\mathbb{G}_m$-作用。等价地，它是 $\mathrm{Rep}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) \cong \mathrm{Rep}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ k))$ 中具有平凡 $\widehat{G}^I$-作用的对象。类似地，我们有一个等变映射

$$m_U\colon \underline{U^*}\otimes U \to \mathcal{O}_{\widehat{G}^I}.$$

这得到一个态射

$$\sigma W^*\otimes V_2\otimes W \xrightarrow{\mathrm{act}_{\sigma W^*}} \underline{W^*}\otimes\sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I}\otimes V_2\otimes W \xrightarrow{m_W} \sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I}\otimes V_2\otimes\mathcal{O}_{\widehat{G}^I}.$$

注意，Γ_k 在 $\mathbb{G}_m$ 上平凡作用，因此 $\sigma W^* = W^*$。更一般地，我们可以用 σ 对 $\mathrm{Rep}\,\widehat{G}^I(\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ \bar{k}))$ 中的表示进行扭曲，这不会改变 $\mathrm{MTM}(\mathrm{Spec}\ \bar{k})$ 中的底层对象。

现在，在 $\mathbf{a}'$ 对应于 $\mathbf{a}$ 的对应关系下

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma W \otimes V_1 \otimes W^*, V_2) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(V_1, \sigma W^* \otimes V_2 \otimes W).$$

考虑映射 $d_{q^{-1}\sigma}\colon \mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma} \to q^{-1}\sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I}$，它将 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$ 对 $\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma}$ 的（扭曲）共轭作用与对 $q^{-1}\sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I}$ 的对角作用相互交织，该映射由以下复合给出

$$d_{q^{-1}\sigma}\colon \mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma} \xrightarrow{q^{-1}\sigma} \mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma} \xrightarrow{\text{comultiplication}} q^{-1}\sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \xrightarrow{\text{antipode}\otimes\mathrm{id}} q^{-1}\sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I};$$

参见 [XZ17，引理 6.2 的证明。5]。这给出一个映射

$$(\mathcal{O}_{\widehat{G}^I q^{-1}\sigma} \otimes V_1^* \otimes V_2)^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}} \xrightarrow{d_{q^{-1}\sigma}} (q^{-1}\sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes V_1^* \otimes V_2)^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}} \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(V_1, \sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes V_2 \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I}),$$

在该映射下，$\mathbf{c}$ 的像记为 $d_{q^{-1}\sigma}(\mathbf{c}')$。

接下来，我们有两个交换图

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\mathbf{a}'} & \sigma W^* \otimes V_2 \otimes W \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle m_W \circ \mathrm{act}_{\sigma W^*}} \\ V_1 & \xrightarrow[d_{q^{-1}\sigma}(\mathbf{c}')]{} & \sigma\mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes V_2 \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I}, \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} V_2 \otimes W \otimes W^* & \xrightarrow{\mathrm{id}_{V_2}\otimes e_W} & V_2 \\ {\scriptstyle m_W \circ \mathrm{act}_{W^*}}\downarrow & & \| \\ V_2 \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{G}^I} & \xrightarrow[\mathrm{ev}_{(1,1)}]{} & V_2, \end{array}$$

其中 $e_W\colon\ W \otimes W^* \to \mathbb{Q}$ 是求值映射，而 $\mathrm{ev}^{(1,1)}$ 是在 $(1,1)$ 处的求值映射 $\in \widehat{G}^I \times \widehat{G}^I$。于是，根据 [XZ17，引理 6.23] 在我们设置下的类似结果，$\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_W(\mathbf{a})$ 可计算为

$$\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}(\mathrm{id}_{V_2} \otimes e_W) \circ \mathbb{D}^{\mathrm{can}}_{F^{-1}_{(V_2\otimes W)\boxtimes W^*}} \circ \mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}(\mathbf{a}'),$$

而根据 [XZ17，备注 6.24],，这又与下式一致

$$\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}(\mathrm{ev}_{(1,1)}) \circ \mathbb{D}\Gamma^{\mathrm{can}}_{F^{-1}_{(V_2\otimes\mathcal{O}_{\widehat{G}^I})\boxtimes\mathcal{O}_{\widehat{G}^I}}} \circ \mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}(d_{q^{-1}\sigma}(\mathbf{c}')).$$

由于这只取决于 $\mathbf{c}$，而不取决于 W 和 $\mathbf{a}$，故得证。 □

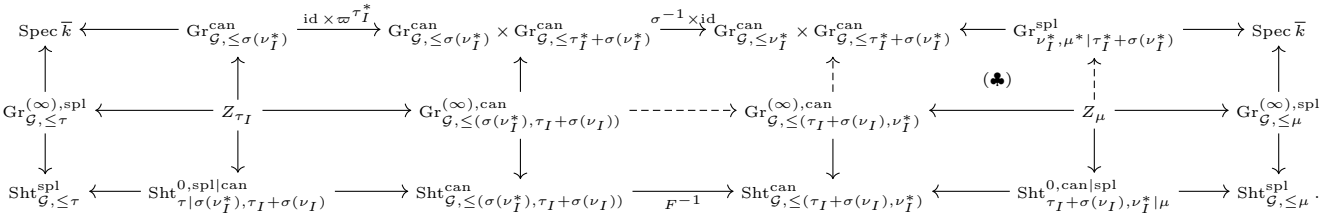
定理 7.13 的证明。图 (7.9) 在对象层面确定了 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ 和 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}$：对于 $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) \cong \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}_{\widehat{G}^I}(\mathrm{MTM}(\text{谱 } k))$，对象 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V})$ 必须与沿 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 对 $\mathrm{Sat}(V)$ 的拉回一致；对于 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}$ 和 $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}_{\mathrm{mot}}) \cong \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}_{\widehat{G}}(\mathrm{MTM}(\text{谱 } k))$，情形类似。接下来，我们在态射层面定义 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ 和 $\mathbb{L}^{\overline{\mathrm{spl}}}$，并检验其与复合的相容性；这将推出 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ 和 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}$ 在对象层面也定义良好。由于 (7.9) 的外侧竖直箭头是全忠实的，只需考虑 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$。然后，$\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ 已在命题 7.18 中构造。接着可按照 [XZ17，引理 6.27] 中的逐字方法检验 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ 确实是一个函子，即与复合相容。（尽管这是一项繁琐的检验，但由于不使用受限局部 shtuka 的模空间，情形略有简化。特别是，对 [XZ17，引理 5.323] 的引用可以替换为对 [XZ17，引理 5.218] 的引用。）

接下来只需证明（7.9）可交换。内方形的交换性由命题 5.15 得出，而最左侧梯形的交换性则由拉回的函子性得出。最右侧梯形可交换，因为根据引理 A.15，对应的原光滑拉回与适当推前可交换。根据构造，下方梯形在对象层面可交换。为证明它对态射也可交换，考虑一个 $\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$-等变映射 $V_1 \to V_2$。该映射拉回到 $\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I{}_{\mathrm{mot}}\widehat{G}^I\text{-fr}}(\widehat{G}^I q^{-1}\sigma)$ 后属于 $\Xi_{\mathbb{Q}}$ 的像，因此 $\mathscr{C}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{Sht}}(\delta_{\sigma\mathbb{Q}} \otimes \mathrm{id}_{V_1})$ 和 $\mathbb{D}\Gamma^{\mathrm{can}}_{F_{(\sigma\mathbb{Q}\otimes V_1)\otimes\mathbb{Q}}}$ 均为平凡的。于是，$\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ 将此态射映为一个从 Hecke 叠上的 Satake 对应拉回而来的对应；根据定义，这与函子 $\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}) \to \mathrm{MTM}^{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})$ 一致。最后，外方形根据构造可交换，而上方梯形的交换性则由下方梯形的交换性以及外侧竖直箭头的完全忠实性得出。□

7.5. **函子的例子**。 下面按照 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ （因此也使 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}$）在某些情形下的具体形式明确化，参见 [XZ17，§6。3]。设 $\tau \in X_*(Z_G)$ 为中心的， $\mu \in X_*(T)^+$ 为微小的，而$\nu_I \in X_*(T)^+_I$ 任意。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\tau|\mu} \cong \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\backslash X^{\mathrm{spl}}_{\mu^*,\nu_I^*}(\varpi^{\tau^*})$$

通过示例 7。5。我们将使用以下图表：



(7.13)

在这里，

- 我们用到了 $\mathrm{Gr}_{\mathrm{spl}\,\mathcal{G},\le\tau} \cong \mathrm{Gr}_{\mathrm{can}\mathcal{G},\le\tau_I}$ ，因为 τ 是中心的，因此 $\mathrm{Sht}_{\mathrm{spl}\,\mathcal{G},\le\tau} \cong \mathrm{Sht}_{\mathrm{can}\mathcal{G},\le\tau_I}$，
- Z_{τ_I} 定义为

$$Z_{\tau_I} := \{(g_1,g_2) \in \mathrm{Gr}^{(\infty),\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le(\sigma(\nu_I^*),\tau_I+\sigma(\nu_I))} \mid g_1g_2 \in \varpi^{\tau_I}L^+\mathcal{G}\} \cong \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\sigma(\nu_{I*})} \times L^+\mathcal{G},$$

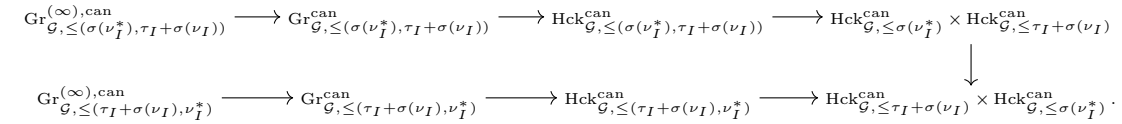
  使最左侧的四个方块成为笛卡尔方块（注意，所有涉及的垂直态射都是$L^+\mathcal{G}$-纤维化），

- Z_μ 定义为

$$Z_\mu := \{(g_1,g_2) \in \mathrm{Gr}^{(\infty),\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le(\tau_I+\sigma(\nu_I),\nu_I^*)} \mid g_1,g_2 \in L^+\mathcal{G}\varpi^\mu L^+\mathcal{G}\},$$

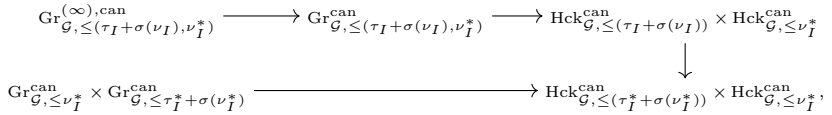
  使底部最右侧的两个方块成为笛卡尔方块，
- 映射 $\mathrm{Gr}^{(\infty),\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le(\sigma(\nu_I^*)\,\tau_I+\sigma(\nu_I))} \to \mathrm{Grcan}_{\mathcal{G},\le\sigma(\nu_I^*)} \times \mathrm{Grcan}_{\mathcal{G},\le\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}$ 是由 $(g_1,g_2) \mapsto (g_1,g_2^{-1})$ 诱导的。

注意，实际上并不存在映射 $\mathrm{Gr}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\le^{\mathrm{can}}_{\sigma}((\nu_I^*)\,\tau_I+\sigma(\nu_I))} \to \mathrm{Gr}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\le^{\mathrm{can}}_{(\tau_I+\sigma(\nu_I)\,\nu_I^*)}}$ 使（7.13）可交换。然而，考虑图表



然后，限制到 MTM 时，沿最左侧两个箭头的 !-拉回由[RS20，引理 3.2.12]，保证为全忠实，而沿其他箭头的 !-拉回则由命题 5.8 保证为等价。由于我们主要使用（7.13）来拉回对应，这只涉及从 $\mathrm{MTM}(\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le(\sigma(\nu_I^*)\,\tau_I+\sigma(\nu_I))})$ 拉回的 $\mathrm{MTM}(\mathrm{Gr}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\le^{\mathrm{can}}_{\sigma}((\nu_I^*)\,\tau_I+\sigma(\nu_I))})$ 中的对象，因此我们可以放心地假定虚线箭头 $\mathrm{Gr}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\le^{\mathrm{can}}_{\sigma}((\nu_I^*)\,\tau_I+\sigma(\nu_I))} \dashrightarrow \mathrm{Gr}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\le^{\mathrm{can}}_{(\tau_I+\sigma(\nu_I)\,\nu_I^*)}}$ 存在。事实上，这条虚线箭头像是一个同构，沿此箭头的 !-拉回（对我们关注的对象而言定义良好）与沿其他箭头的 !-拉回可交换。

同样，虚线箭头 $\mathrm{Gr}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\le^{\mathrm{can}}_{(\tau_I+\sigma(\nu_I)\,\nu_I^*)}} \dashrightarrow \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\nu_I^*} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}$ 实际上并不存在，但我们可以假设沿其存在一个 !-拉回，利用图表



其中，垂直箭头由 $g \mapsto g^{-1}$：$\mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq(\tau_I+\sigma(\nu_I))} \cong \mathrm{Hck}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq(\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*))}$诱导。再次强调，沿所有箭头的 !-拉回都会在 MTM 上诱导等价（最右侧上方的水平箭头可能例外；沿该箭头的 !-拉回仍是全忠实的）。此外，虚线箭头 $\mathrm{Gr}^{(\infty)}_{\mathcal{G},\leq(\tau_I+\sigma(\nu_I)\ \nu_I^*)} \dashrightarrow \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}$ 表现得像一个 $L^+\mathcal{G}$-扭子。

最后，我们可以类似地假定虚线箭头 $Z_\mu \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I^*,\mu^*|\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}$ 存在，并使方块（♣ 表现得如同它是笛卡尔的。由此，除右上角的方块外，所有方块都是笛卡尔的（或者至少表现得如同它们是笛卡尔的，以防这些箭头实际上并不存在）。这就完成了对图表（7.13）的解释。

接下来，我们有如下同构序列，其中利用了 μ 是微小的，从而$\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu}$是光滑的：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma V^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \otimes V^{\mathrm{spl}}_{\tau} \otimes V^{\mathrm{can},*}_{\nu_I}, V^{\mathrm{spl}}_{\mu}) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(V^{\mathrm{can}}_{\nu_I^*} \otimes V^{\mathrm{spl}}_{\mu^*}(\langle 2\rho,\mu\rangle), V^{\mathrm{can}}_{\tau_I^*} \otimes V^{\mathrm{can}}_{\sigma(\nu_I^*)}) \\
\cong\ &\mathrm{Corr}_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I^*,\mu^*|\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}}\left((\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*} \widetilde{\times} \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu^*}, \mathrm{IC}_{\nu_I^*}(\mathbb{Q})\widetilde{\boxtimes}\mathrm{IC}_{\mu^*}(\mathbb{Q})(\langle 2\rho,\mu\rangle)), (\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}, \mathrm{IC}_{\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}(\mathbb{Q}))\right) \\
\cong\ &\mathrm{Corr}_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I^*,\mu^*|\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}}\left((\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*}, \mathrm{IC}_{\nu_I^*}(\mathbb{Q})[\langle 2\rho,\mu\rangle](\langle 2\rho,\mu\rangle)), (\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}, \mathrm{IC}_{\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}(\mathbb{Q}))\right) \\
\cong\ &\mathrm{Corr}_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I^*,\mu^*|\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}}\left((\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}, \mathrm{IC}_{\nu_I^*}(\mathbb{Q}) \boxtimes \mathbb{D}(\mathrm{IC}_{\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}(\mathbb{Q}))), (\mathrm{Spec}\,\overline{k}, \mathbb{Q}[-\langle 2\rho,\mu\rangle](-\langle 2\rho,\mu\rangle))\right),
\end{aligned}$$

其中l ast同构由引理 A.9推出。我们将此复合记为a ↦Sat(a) ♯.

现在，我们可以把对应的原光滑拉回从下一行应用到中间行，即图表（7.13），以及从上一行应用到中间行，即图表（7.13）。于是：

- 令

$$\mathbb{D}((\Gamma_{\varpi^{\tau^*}})^\sharp)\colon (\mathrm{Spec}\,\overline{k}, \mathbb{Q}) \to (\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\sigma(\nu_I^*)} \times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\tau^*+\sigma(\nu_I^*)}, \mathrm{IC}_{\nu_I^*} \boxtimes \mathbb{D}(\mathrm{IC}_{\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}))$$

分别由例 A.6(3)、引理 A.9和例 A.6 (2)中的构造得到，并利用沿 $\varpi^{\tau^*}\colon \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\sigma(\nu_I^*)} \cong \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\tau^*+\sigma(\nu_I^*)}$的拉回将 $\mathrm{IC}_{\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}$ 与 $\mathrm{IC}_{\sigma(\nu_I^*)}$识别起来这一事实。于是， $\mathbb{D}((\Gamma_{\varpi^{\tau^*}})^\sharp)$的拉回与 $\mathscr{C}^{\mathrm{spl}}\,\mathrm{Sht}(\delta_{V^{\mathrm{can}}\sigma(\nu_I^*)} \otimes \mathrm{id}_{V^{\mathrm{spl}}\tau})$ 的拉回一致。

- $\mathbb{D}(F^{-1})$的拉回与 $\Gamma^*_{\sigma^{-1}\times\mathrm{id}}$的拉回一致。
- 对于 一个 $\in \mathrm{Hom}^{\widehat{G}^I{}_{\mathrm{mot}}}(q^{-1}\sigma V_{\mathrm{can}\nu_I} \otimes V_{\mathrm{spl}\tau} \otimes V_{\mathrm{can}_{\nu_I}\ *}, V_{\mathrm{spl}\mu})$， $\mathscr{C}_{\mathrm{spl}}\,\mathrm{Sht}(\mathbf{a})$ 的拉回与 $\mathrm{Sat}(\mathbf{a})^\sharp$ 的拉回一致。

因此，由 引理 A.14， $\mathscr{C}^{\mathrm{spl}}_{V^{\mathrm{can}\nu_I}}(\mathbf{a})$ 到中间行的拉回与拉回 o 相一致 f

$$\mathscr{C}^{\mathrm{Gr}}_{\nu_I}(\mathbf{a}) := \mathrm{Sat}(\mathbf{a})^\sharp \circ \Gamma^*_{\sigma\times\mathrm{id}} \circ \mathbb{D}((\Gamma_{\varpi^{\tau^*}})^\sharp). \tag{7.14}$$

现在我们将上述讨论特殊化为两种情形。第一种是借助 Satake 同构，将函子 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$与 Hecke 对应联系起来。

注记 7.19. 回顾对于一般的准分裂群，Satake 同构在 $\mathbb{Z}$-系数下，因而在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$，-系数下由动机 Satake等价在⁻[vdH24a，§10]中推出。然而，为了与 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$相容，必须修改这一 Satake 同构，现说明如下。回顾 σ 表示算术 Frobenius，而 φ表示几何Frobenius。

令 $R(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) = K_0(\mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}))[\frac{1}{p}]$ 为有限维$\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$-表示范畴的 Grothendieck环，并与 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$作张量积。根据 [vdH24a，引理 10。9],对表示取迹给出一个满射 $R(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) \to \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q\varphi]^{\widehat{G}^I}$，其中 $\widehat{G}^I$通过共轭作用于 $\widehat{G}^I q\varphi$。利用动机Satake等价和几何Frobenius的迹，Grothendieck-Lefschetz迹公式给出一个同构

$$\mathrm{Sat}^{\mathrm{cl}}\colon \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q\varphi]^{\widehat{G}^I} \cong \mathcal{H}_{\mathcal{G}},$$

[vdH24a，定理 10。11]。此外，来自$^{\mathrm{cl}}$ 的萨特克变换 CT [vdH24a，§10。2] 将 $\mathcal{H}_G$识别为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][X^*(\widehat{T}^I)^\varphi]$的一个子环；请注意，这个版本的萨特克变换不涉及模特征，因此不需要 q的平方根。

另一方面，取迹也给出一个满射 $R(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) \to \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q^{-1}\sigma]^{\widehat{G}^I}$。此外，切瓦莱限制同构的一个修正版（在 [vdH24a, 命题 10.8]中将几何Frobenius替换为算术 Frobenius）将 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q^{-1}\sigma]^{\widehat{G}^I}$识别为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][X^*(\widehat{T}^I)^\varphi]$的一个子环；由 [vdH24a, 定理 10.7] 可知，所得子环与通过将 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q\varphi]^{\widehat{G}^I}$嵌入其中得到的子环一致。此外，该子环还与萨特克变换 CT 的像$^{\mathrm{cl}}$一致，因此我们得到一个同构

$$\mathrm{Sat}^{\mathrm{cl}'}\colon \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q^{-1}\sigma]^{\widehat{G}^I} \cong \mathcal{H}_G.$$

尽管 $\mathrm{Sat}^{\mathrm{cl}}$ 和 $\mathrm{Sat}^{\mathrm{cl}'}$ 并不一致，但它们通过交换图相互关联

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q\varphi]^{\widehat{G}^I} & \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Sat}^{\mathrm{cl}}} & \mathcal{H}_G \xrightarrow{\mathrm{CT}^{\mathrm{cl}}} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][X^*(\widehat{T}^I)^\varphi] \\ R(\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}) & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{inv}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda\mapsto-\lambda} \\ & \searrow & \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q^{-1}\sigma]^{\widehat{G}^I} & \xrightarrow[\mathrm{Sat}^{\mathrm{cl}'}]{\cong} \mathcal{H}_G & \xrightarrow[\mathrm{CT}^{\mathrm{cl}}]{} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][X^*(\widehat{T}^I)^\varphi], \end{array}$$

其中，映射 $\mathrm{inv}\colon \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q\varphi]^{\widehat{G}^I} \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\widehat{G}^I q^{-1}\sigma]^{\widehat{G}^I}$由 $\widehat{G}^I$-等变同构$\widehat{G}^I q\varphi \cong \widehat{G}^I q^{-1}\sigma\colon g\cdot q\varphi \mapsto (q^{-1}\sigma)(g)\cdot q^{-1}\sigma$诱导。

让我们回到以下比较 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ 与 Hecke 对应的比较，并假设 $\nu_I = \sigma(\nu_I)$，以及 $\tau = \mu = 0$。于是，(7.13) 的上行可以识别为

$$\mathrm{Spec}\,\overline{k} \leftarrow \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I^*} \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*} \xrightarrow{\sigma^{-1}\times\mathrm{id}} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*} \xleftarrow{\Delta} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*} \to \mathrm{Spec}\,\overline{k}.$$

令 a 由余单位 $\mathrm{e}_{\nu_I}\colon V^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \otimes V^{\mathrm{can}}_{\nu_I} \to \mathbb{Q}$诱导，从而 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I^*} \xrightarrow{\mathbf{a}} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\leq\nu_I^*,\mu^*|\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}$。于是 $\mathscr{C}^{\mathrm{Gr}}_{\nu_I}$(a) 可以识别为 $\delta_{\mathrm{IC}_{\nu_I^*}} \circ \Gamma^*_{\sigma\times\mathrm{id}} \circ e_{\mathrm{IC}_{\nu_I^*}}$，其中 $\delta_{\mathrm{IC}_{\nu_I^*}}$和 $^{e_{\mathrm{IC}_{\nu_I^*}}}$是例 A.6 (4) 中的单位对应和余单位对应。根据命题 A.16，此对应支撑于 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\nu_I^*}(k)$ 上，而点 x 处的值恰好是几何Frobenius 在几何点 x上方的 $\mathrm{IC}_{\nu_I^*}$ 的茎上的迹。由注 7.19，我们得到：

定理 7.20. 函子 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$ 将结构层映到 $\delta_{\mathbf{1}}^{\mathrm{can}}(\mathbb{Q})$，并且在自同态环上诱导的映射与 *Satake* 同构一致

$$\mathrm{Sat}^{\mathrm{cl}'}\colon \mathbb{Q}[\widehat{G}^I q^{-1}\sigma]^{\widehat{G}^I} \cong \mathcal{H}_G \otimes \mathbb{Q}.$$

接下来，我们将 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}$ 与循环类映射进行比较。为此，我们再次假设 $\nu_I \in X_*(T)^+_I$ 与$\tau \in X_*(Z_G)$ 是任意的，并且 $\mu \in X_*(T)^+$ 是微小的。此外，我们将通过固定一个素数 $\ell \neq p$ 并使用 ℓ-进´平展上同调而非动机来简化情形；这对我们的应用已经足够。此外，利用一个固定的平方根 $\sqrt{q} \in \mathbb{Q}_\ell$，我们可以考虑半扭曲 $(\frac{1}{2})$。利用这一点，我们对 $\lambda_I \in X_*(T)^+_I$ 将相应的交叉复形定义为

$$\mathrm{IC}^{\text{ét}}_{\lambda_I} := \mathrm{im}\left({}^{\mathrm{p}}\mathrm{H}^0\left(\iota_{\lambda_I,!}\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\langle 2\rho,\lambda_I\rangle](\langle\rho,\lambda_I\rangle)\right) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{H}^0\left(\iota_{\lambda_I,*}\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\langle 2\rho,\lambda_I\rangle](\langle\rho,\lambda_I\rangle)\right)\right),$$

其中 $\iota_{\lambda_I}\colon \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\lambda_I} \hookrightarrow \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}$ 是包含映射，分裂版本也有类似记号。我们还将 $V^{\acute{}}\mathrm{et}_{\lambda_I}$ 表示为最高权为 λ_I 的简单 $\mathbb{Q}_\ell$-线性 $\widehat{G}^I$-表示，它在 ℓ-进几何Satake等价 [vdH24a, 定理 9.9] 下对应于 $\mathrm{IC}^{\text{ét}}_{\lambda_I}$。分裂版本也有类似记号。由于 $\mathrm{Sht}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\tau|\mu} \cong \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\backslash X_{\mu,\nu_I}(\varpi^\tau)$ 的维数为 $\leq\langle\rho,\nu\rangle$（由命题 6.10 可知），我们得到

$$\mathrm{Corr}^{\text{ét}}_Y(\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}(\widetilde{V^{\mathrm{spl}}_\tau}), \mathbb{L}^{\mathrm{spl}}(\widetilde{V^{\mathrm{spl}}_\mu})) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(X^{\mathrm{spl}}_{\mu,\nu_I}(\varpi^{\tau^*}))^{\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)}$$

由 [XZ17, §A.2.18] 得出。在进行 ℓ-进 étale 实现后应用 §7.4 的方法（另见 [XZ17, §6.2]），我们可以对任意 $\mathbf{a} \in \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I}(\sigma V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\nu_I} \otimes V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\tau} \otimes V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\nu_I{}^*}, V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\mu})$ 定义一个对应 $\mathscr{C}_{V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\nu_I}}(\mathbf{a}) \in \mathrm{Corr}^{\mathrm{\acute{e}t}}_{Y}(V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\tau}, V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\mu})$，因此可将其视为 $\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(X^{\mathrm{spl}}_{\mu},{}_{\nu_I}(\varpi^{\tau^*}))$ 中的一个元素。

另一方面，对应（7.14）（或者更准确地说，其 ℓ-进实化）可识别为 $X^{\mathrm{spl}}_{\mu},{}_{\nu_I}(\varpi^{\tau})$。于是（7.14）也可识别为 $\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(X^{\mathrm{spl}}_{\mu},{}_{\nu_I}(\varpi^{\tau^*}))$ 中的一个元素，而（7.14）之前的讨论表明，这与由 $\mathscr{C}_{V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\nu_I}}(\mathbf{a})$ 定义的元素一致。

命题 *7.21.* 设 $\mathbf{a} \in \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I}(\sigma V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\nu_I} \otimes V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\tau} \otimes V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\nu_I^*}, V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\mu})$ 是由 $\mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu_I^*,\mu^*|\sigma(\nu_I^*)+\tau^*}$ 中的一个元素通过命题 *5.18 (3)* 诱导得到的。设 $\mathbf{b} = \iota^{\mathrm{spl}}_{\mathbb{MV}}(\mathbf{a})$ 是通过命题 *5.24* 诱导得到的元素。则 $\mathscr{C}_{V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\nu_I}}(\mathbf{a}) \in \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(X^{\mathrm{spl}}_{\mu},{}_{\nu_I}(\varpi^{\tau^*}))$ 与 $X^{\mathrm{spl}},{}^{\mathbf{b}}_{\mu^*}(\tau^*) \subseteq X^{\mathrm{spl}}_{\mu^*,\nu_I^*}(\varpi^{\tau^*})$ 的基本类一致。

证明。回忆命题 6.16 指出，$X^{\mathrm{spl}},{}^{\mathbf{b}}_{\mu^*}(\tau^*)$ 是 $X^{\mathrm{spl}},{}^{\mathbf{a}}_{\mu^*},{}_{\nu_I^*}(\tau^*)$ 中维数为 $\langle \rho, \mu - \tau\rangle$ 的唯一不可约分支，其余所有不可约分支的维数都严格更小。注意，对应（7.14）（视为 $\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(X^{\mathrm{spl}}_{\mu^*},{}_{\nu_I^*}(\tau^*))$ 中的一个元素）显然属于……的像

$$\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(X^{\mathrm{spl},\mathbf{a}}_{\mu^*,\nu_I^*}(\tau^*)) \to \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(X^{\mathrm{spl}}_{\mu^*,\nu_I^*}(\tau^*)).$$

由于源是一维的，因此 $\mathscr{C}_{V^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\nu_I}}(\mathbf{a})$ 是 $X^{\mathrm{spl}},{}^{\mathbf{b}}_{\mu^*}(\tau^*)$ 的基本类的一个标量倍数。由于根据命题 6.16，$X^{\mathrm{spl}},{}^{\mathbf{b}}_{\mu^*}(\tau^*) \times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}},\le\nu_I^*} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I^*} \neq \varnothing$，我们可以通过限制到 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I^*} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\le\nu_I^*}$ 来计算上同调类。

设 $Z := \mathrm{Gr}_{\nu_I^*,\ \mu^*|\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)} \times_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}},\ \le\nu_I^*} \times_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\ \le\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\ \nu_I^*} \times \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\ \tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)}$。那么，将（7.13）顶行限制到 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\ \nu_I^*} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\ \le\nu_I^*}$ ag 后，所得结果与对角态射的交一致

$$\Delta\colon \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma(\nu_I^*)} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma(\nu_I^*)} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma(\nu_I^*)} \tag{7.15}$$

与对应

$$Z \xrightarrow{c_1\times c_2} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma(\nu_I^*)} \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma(\nu_I^*)} \tag{7.16}$$

$$c_1\colon Z \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\nu_I^*} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\sigma(\nu_I^*)} \qquad c_2\colon Z \to \mathrm{Gr}_{\tau_I^*+\sigma(\nu_I^*)} \xrightarrow{\varpi^{\tau_I}} \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\sigma(\nu_I^*)}.$$

因此，（7.14）的限制由 $\delta_{\mathbb{Q}_\ell} \circ u^\sharp$ 给出，其中 $\delta_{\mathbb{Q}_\ell}$ 定义于 [XZ17，例 A.2.3 (4)]，而 $u\colon c_1^*\mathbb{Q}_\ell[\langle 2\rho,\mu\rangle](\langle \rho, \mu\rangle) \to c_2^!\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 由 Z 的基本类给出。通过取光滑的反完美化，并利用弗罗benius 的微分为零，对应（7.15）与（7.16）彼此适当地光滑相交。因此，由 [XZ17，引理 A.2 得出结论。21]。□

8. Motivic Jacquet–Langlands transfers

在本节中，我们将定理 4.7 中关于志村簇特殊纤维之间奇异 Hecke 对应的构造，与定理 7.13 中关于局部 shtuka 模空间上的动机对应结合起来，以构造 Jacquet–Langlands 对应的动机实现。在本节中，我们始终假设 $p \neq 2$。

我们固定第 4 节中的设定，即固定两个整体的（在 p 处）PEL 数据 $(B, *, \mathcal{O}_B, V_i, (,)_i, \mathscr{L}_i, h_i)$，其中 $i = 1, 2$，并固定一个与配对 $(,)_i$ 及 $\mathcal{O}_B$-结构相容的同构 $V_1 \otimes \mathbb{A}_f \cong V_2 \otimes \mathbb{A}_f$。令 $(\mathbb{G}_i, \mathbb{X}_i)$ 为相应的志村数据，其霍奇共特征为 μ_i，反射域为 $\mathbb{E}_i$。于是我们有同构 $\mathbb{G}_{1,\mathbb{A}_f} \cong \mathbb{G}_{2,\mathbb{A}_f}$，它诱导对偶群之间的伽罗瓦等变同构，并假设 $\mu_{1|Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}} = \mu_{2|Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}}$。令 $\mathbb{E} := \mathbb{E}_1\mathbb{E}_2 \subseteq \mathbb{C}$，固定 $\mathbb{E}$ 上方的一个素位 $\mathfrak{p}$，并令 $E := \mathbb{E}_{\mathfrak{p}}$ 为相应的完备化，其剩余域为 $\mathbb{F}_q$。我们固定一个足够小的紧开子群 $K^p \subseteq \mathbb{G}_1(\mathbb{A}_f^p) \cong \mathbb{G}_2(\mathbb{A}_f^p)$，并假设与 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 对应的 $G := \mathbb{G}_{1,\mathbb{Q}_p} \cong \mathbb{G}_{2,\mathbb{Q}_p}$ 的整模型相同且非常特殊；记为 $\mathcal{G}$。最后，我们假设与上述 PEL 数据相关的分裂模型是平坦且绝对弱正规的，也就是说，两个数据均满足假设 2.12。

在上述情形下，我们有定义在 $\mathbb{E}_i$ 上（因而也定义在 $\mathbb{E}$ 上）的志村簇 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G}_i, \mathbb{X}_i)$，以及分别定义在 $\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$ 和 $\mathcal{O}_E$ 上的整模型 $\mathscr{S}_{\text{分裂}K^pK_p}(\mathbb{G}_i, \mathbb{X}_i)$ 和 $\mathscr{S}_{\text{典范}K^pK_p}(\mathbb{G}_i, \mathbb{X}_i)$。我们将它们的特殊纤维的完美化记为 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i, K}$ 和 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i, K}$；它们定义在 $\mathbb{F}_q$ 上。本节中，所有几何对象（局部 shtuka 模空间、_志村簇的特殊纤维）均视为定义在 $\mathbb{F}_q$ 上；我们将志村簇的结构映射记为 $\gamma_i^{\mathrm{spl}}\colon _\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i, K} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$ 和 $\gamma_i^{\mathrm{can}}\colon \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i, K} \to \mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$。

8.1. Jacquet–Langlands 对应的动机实现。我们首先在平凡系数情形下构造 Jacquet–Langlands 对应。注意，对于 $(\mathbb{G}_1, \mathbb{X}_1)$ 和 $(\mathbb{G}_2, \mathbb{X}_2)$，其（未导出的）与 p 互素的 Hecke 代数（在 K^p 层且取 $\mathbb{Q}$ 系数）可以被识别；我们将其记为 $\mathcal{H}_{K^p}$。下述定理验证了 Zhu20 猜想 4.60] 的更多情形；尽管我们只处理未导出层面，但也涵盖分歧情形，并为猜想中的几何 Jacquet–Langlands 对应提供动机增强。回顾定理 7.13 中的函子 $\mathbb{L}^{\mathrm{can}}$，以及公式 (3.1) 中的晶体周期映射 $\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can}}\colon \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i, K} \to \mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}, \leq \mu_i, I}$。

定理 8.1。设 $W_1, W_2 \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}_{\widehat{G}^I}(\text{MTM(谱 } \mathbb{F}_p))$，其拉回为 $\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2 \in \mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I}_{\text{动机的}}(\widehat{G}^I p^{-1}\sigma)$。则存在一个自然映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I}(\widehat{G}^I p^{-1}\sigma)}\left(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_q)}\left(\gamma_{1,!}^{\mathrm{can}}\,\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can},!}\,\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W}_1), \gamma_{2,!}^{\mathrm{can}}\,\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can},!}\,\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W}_2)\right)$$

取值于 $\mathcal{H}^p$-等变态射。此外，该映射与复合相容。

证明. 该映射将定义为复合

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}}(\widehat{G}^I p^{-1}\sigma)}\left(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{MTM}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Corr}}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}})}\left(\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W}_1), \mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W}_2)\right)\\
&\to \varinjlim_{\nu_I \in X_*(T)^+_I} \mathrm{Corr}_{\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2}}\left(\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can},!}\,\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W}_1), \mathrm{loc}_p^{\mathrm{can},!}\,\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W}_2)\right)\\
&\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_q)}\left(\gamma_{1,!}^{\mathrm{can}}\,\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can},!}\,\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W}_1), \gamma_{2,!}^{\mathrm{can}}\,\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can},!}\,\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W}_2)\right),
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1, K} \times \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_2, K}$ 是来自定理 4.7 的奇异 Hecke 对应。我们说明这些箭头各自如何定义。

第一个箭头源于定理 7.13（由于我们只需要图表的典范部分，因此即使不假设局部群本质非分歧，它依然存在，见注记 7.14）。第二个箭头由对应沿（4.1）的中间部分的原光滑拉回给出，如构造 A.13（利用推论 3.19）。对应的拉回与余极限中由适当推前给出的过渡映射相容，这一事实可由引理 A.15 得到。最后一个箭头将由对应的适当推前得出，并利用如下图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1, K} & \longleftarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_1|\mu_2} & \longrightarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_2, K}\\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_1^{\mathrm{can}}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2^{\mathrm{can}}}\\
\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_q & = & \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_q & = & \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_q,
\end{array}$$

只要这与改变 $\nu_I \in X_*(T)^+_I$ 时的过渡态射相容即可。但这立即由适当推前与复合的相容性得出，见引理 A.11。

这个映射与复合相容（固定第三个满足与（B、$*$、$\mathcal{O}_B$、V_i、（、）$_i$、$\mathscr{L}_i$、h_i）相同条件的整体整 PEL 数据时），因为上述每个箭头都满足这一点。事实上，对于第一个箭头，这是因为定理 7。13 给出了一个函子；对于另外两个箭头，则分别由引理 A.14 和引理 A.11 得出。□

注 8.2。(1) 一个有趣的特殊情形是 W_i 为记号 5.16中的表示 $V^{\mathrm{spl}}_{\mu_i}$，使得它们限制到 $\widehat{G}^I \subseteq \widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}$ 时与$\widehat{\ }$最高权为 μ_i的不可约 G-表示的限制一致。在这种情况下，对象

$\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can}\,!}\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{W_i})$ 应与 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i}$ 的邻近循环动机一致K。事实上，至少在 ℓ-进上同调层面上，这可由以下事实推出：$\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can}}$存在一个由定理3.14给出的原光滑形式去完美化提升；分歧 Satake 与邻近闭链的关系见 [Zhu15、Ric16、vdH24a], 以及 [Ber94]（它表明，$\mathscr{S}^{\mathrm{can}}_{K^pK_p}$ 的邻近循环与其形式完备化的邻近循环一致）。一旦得知 [Ber94] 的动机类比，同样的结论也将在动机层面成立。

(2) 如果 $G=\mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$ 是本质非分歧的，则也可以改用分裂模型构造类似的态射（更一般的构造见下一小节）。此外，这两个映射与沿 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K}\to\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K}$ 的适当推前相容。由于本质非分歧群的分裂模型是光滑的（在非常特殊层级下），对象 $\mathrm{loc}_p^{\mathrm{spl}\,!}(\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}(V_{\mathrm{spl}\mu_i}))$ 与平移的幺半单位 $\mathbb{Q}[\langle 2\rho,\mu_i\rangle]\in\mathrm{DM}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K})$ 一致。因此，邻近循环与适当推前及光滑拉回的相容性，在此情形下为 $\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can}\,!}\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(V^{\mathrm{spl}}_{\mu_i})$ 与 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K}$ 的邻近循环一致提供了另一种论证。

注 8.3。 假设 G 是本质非分歧的，从而由定理 8。1 诱导了球 Hecke 代数

$$\mathcal{H}_{\mathcal{G}}\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbf{J}\subseteq\mathrm{End}_{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I_{\mathrm{mot}}(\widehat{G}^I p^{-1}\sigma)}}(V^{\mathrm{spl}}_{\mu_1})$$

on $\gamma_{1}^{\mathrm{can}}V^{\mathrm{spl}}_{\mu_1}$。另一方面，$\mathbf{J}$ 也通过 Hecke 对应作用于同一对象，我们猜想这两种作用一致。

在非分歧情形下，对于 ℓ-进上同调，这一点已在 [Wu21] 中通过使用钻石和 Fargues–Scholze 局部 Langlands 对应得以证明 [FS21]。结合近期的动机精化 [Sch25], ，类似的方法或许也能证明上述猜想。为避免长篇讨论 p-进几何和 Berkovich 动机 [Sch24], ，我们将此留待未来研究。

然而，对于零维 Shimura 簇，这两种 **J**-作用可以按照 [XZ17，命题 7.3 中的方法证明。14], 这基本上由定理 7。20 推出。

最后，我们说明定理 8.1 的动机性质如何使我们能够构造高阶（有理化）Chow 群之间的 Jacquet–Langlands 转移。对于某个光滑簇 X 上的$\mathbb{F}_q$ 和 $m,\ n\in\mathbb{Z}$我们记

$$\mathrm{CH}^{m,n}(X)_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(X)}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}[m](n))$$

的（有理化）高阶 Chow 群 X [CD19，例 11.2。3]。

推论 8.4。 假设 G 是本质非分歧的，并且$\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu_i,K}$ 是完美适当的。那么对任意 n_1、$n_2\in\mathbb{Z}$，存在一个自然映射

$$\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I\text{动机的}}(\widehat{G}^I p^{-1}\sigma)}(V_{\mathrm{spl}\mu_1}(n_1)\ V_{\mathrm{spl}\mu_2}(n_2))}\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^p}(\mathrm{CH}^{\langle 2\rho,\mu_1\rangle,n_1}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1,K})_{\mathbb{Q}},$$
$\mathrm{CH}^{\langle 2\rho,\mu_2\rangle,n_2}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_2,K})_{\mathbb{Q}}$,与复合相容。

进一步应用 [CD19中的刚性实现，例 17.2.23], 该例计算光滑射影簇的晶体上同调。由此我们进一步推导出 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1,K}$ 与 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_2,K}$ 的晶体上同调之间的雅凯–朗兰兹转移。

证明。 我们的假设表明，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K}$ 是完美适当且完美光滑的。回顾注释8。2 可知

$$\gamma^{\mathrm{can}}_{i,!}\,\mathrm{loc}_p^{\mathrm{can},!}\,\mathbb{L}^{\mathrm{can}}(\widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu_i}})\cong\gamma^{\mathrm{spl}}_{i,!}\,\mathrm{loc}_p^{\mathrm{spl},!}\,\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}(\widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu_i}})\cong\gamma^{\mathrm{spl}}_{i,*}(\mathbb{Q}[\langle 2\rho,\mu_i\rangle]).$$

推论可通过应用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q)}(\mathbb{Q},\ -)$ 于定理 8-1.中的映射而得。 □

8.2. **非平凡局部系统的情形**。 接下来，我们考虑非平凡动机局部系统的情形。为此，我们还假设 PEL 数据 $(B,\ *,\ \mathcal{O}_B,\ V_i,\ (,\ )_i,\ \mathscr{L}_i,\ h_i)$ 满足G_i 本质非分歧且 $\mathcal{G}_i$ 非常特殊，从而相应的分裂模型是光滑的。

回忆一下，在 [Yu22], 中，Yu构造了不同志村簇的特殊纤维之上同调之间的几何Jacquet–Langlands转移，其系数取自与群$\mathbb{G}_1$、$\mathbb{Q}_\ell$ $\cong \mathbb{G}_2$、$\mathbb{Q}_\ell$ 的表示相关联的局部系统，对某个 $\ell \neq p$。为了从动机的角度推广这一结果，需要将这些局部系统提升为动机范畴中的对象，但还需要找到 $\mathbb{Q}$-向量空间，使 $\mathbb{G}_1$ 与 $\mathbb{G}_2$ 都在其上作用，从而这些表示在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上对所有 $\ell \neq p$成为同构。由于我们使用PEL型志村簇，这样一个表示由 V_1给出，它与 V_2具有相同的维数，正如V_1、$\mathbb{A}_f$ $\cong V_2$、$\mathbb{A}_f$。更一般地，设 U_1 为任意由 V_1 经直和、张量积、对偶和外积得到的 $\mathbb{Q}$-线性 $\mathbb{G}_1$-表示，并设 U_2表示由 V_2 经同样运算得到的表示。根据 [Anc15，定理ˆ8.6]„ 这些给出对象 $\mathscr{L}_{U_i}$ $\in$动机范畴$(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i}{}_{,K})$；不难验证，它们的 ℓ-进实现与 [Yu22，§6.2] 中在非分歧情形下构造的局部系统一致。（注意， [Anc15]考虑的是数域上志村簇的典范模型，但这些证明对一个域上阿贝尔簇的一般光滑拟射影模空间同样适用；特别是对光滑分裂模型。此外，所引文献处理的是相对周动机，但它们被典范地全忠实嵌入动机范畴 [CD19，§11.3.8]。）

定理 8.5。 令 $\nu_I \in X_*(T)^+_I$，并令 U_1、U_2 如上。则存在自然映射

$$\mathrm{Corr}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}((\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1,K},\mathbb{Q}),(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_2,K},\mathbb{Q})) \to \mathrm{Corr}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}((\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1,K},\mathscr{L}_{U_1}),(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_2,K},\mathscr{L}_{U_2})),$$

该映射与改变 ν_I 相容（使用对应的适当推前），并且与复合相容。

证明。 首先，我们假设 $U_i = V_i^\vee$ 是 V_i 的对偶。考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & \xleftarrow{\widetilde{p_1}} & \widetilde{A_1} & \dashrightarrow^{\alpha} & \widetilde{A_2} & \xrightarrow{\widetilde{p_2}} & A_2 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & & \searrow^{\widetilde{f}_1} \quad \swarrow_{\widetilde{f}_2} & & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\
\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1,K} & & \xleftarrow{p_1} & & \mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2} & \xrightarrow{p_2} & \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_2,K},
\end{array}$$

其中，$A_i \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i,K}$ 是万能阿贝尔簇（附加结构与证明无关），其拉回为 $\widetilde{A_i} \to \mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}{}_{\mu_1|\mu_2}$，而 α 是万能 p-准同源（源自定理 4.7 的证明）。注意，这些阿贝尔概形的相对维数为 $g = \text{维数}_{\mathbb{Q}}{}^{V_i}_2$。根据[DM91，推论 3.2]， $\mathscr{L}_{U_i}$ $\in$DM$(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i}{}_{,K})$ 被刻画为 $f_{i,*}\mathbb{Q}$ 的直和项，并且乘法 n 映射在 A_i 上通过乘以 n 起作用。由适当基变换，对于拉回 $p_i^*\mathscr{L}_{U_i} \in$ DM$(\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}{}_{\mu_1|\mu_2})$，同样的刻画成立；它是 $\widetilde{f}_{i,*}\mathbb{Q}$ 的直和项。

我们断言， p-准同源 α （由 $V_{1,\ \mathbb{A}_f} \cong V_{2,\ \mathbb{A}_f}$诱导）诱导出一个同构 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }f_{1,\ *}\mathbb{Q} \cong f_{2,\ *}\mathbb{Q}$，从而将直和项 $p_1^*\mathscr{L}_{U_1}$ 与 $P_2^*\mathscr{L}_{U_2}$识别起来。事实上，我们可以选取同态

$$\widetilde{A_1} \to \widetilde{A_2} \to \widetilde{A_1} \to \widetilde{A_2}$$

它们分别是 α 及其逆的 p-幂倍数，并且两个映射的复合是$\widetilde{\ }$ p 在 A_i上的某个幂次的乘法。根据上文，并且由于 p 在我们的$\widetilde{\ }$系数中可逆， p 的某个幂次的乘法在$f_{i,\ *}\mathbb{Q}$上诱导出一个同构，同时保持直和项 $p_i^*\mathscr{L}_{U_i}$不变。这立即推出该断言。

于是我们得到典范态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}(p_1^*\mathbb{Q},p_2^!\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}(\widetilde{f}_{2,*}\widetilde{f}_2{}^*p_1^*\mathbb{Q},\widetilde{f}_{2,*}\widetilde{f}_2{}^*p_2^!\mathbb{Q})$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}(\widetilde{f}_{1,*}\widetilde{f}_1{}^*p_1^*\mathbb{Q}, \widetilde{f}_{2,*}\widetilde{f}_2{}^!p_2^!\mathbb{Q}(-g)[-2g]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}(\widetilde{f}_{1,*}\widetilde{p}_1{}^*f_1^*\mathbb{Q}, \widetilde{f}_{2,*}\widetilde{p}_2{}^!f_2^!\mathbb{Q}(-g)[-2g])$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}(p_1^*f_{1,*}f_1^*\mathbb{Q}, p_2^!f_{2,*}f_2^!\mathbb{Q}(-g)[-2g]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}(p_1^*f_{1,*}\mathbb{Q}, p_2^!f_{2,*}\mathbb{Q})$$

$$\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}^{\nu_I,\mathrm{spl}}_{\mu_1|\mu_2}}(p_1^*\mathscr{L}_{U_1}, p_2^!\mathscr{L}_{U_2}),$$

其中最后一个映射是通过取适当的直和项得到的投影 .

一般而言， U_i 可以通过取直和、张量积、对偶和外积（根据假设）从 $V_i^\vee$得到。这些情形也可以类似处理：分别将$\sim A_i$ 替换为不交并、积或对偶阿贝尔概形，或者将$f_{i,*}\mathbb{Q}$ 替换为不同的直和项。

最后，与改变 ν_I 的相容性成立，因为上述每个箭头都与适当推前相容。□

注 8.6。尽管前一个定理对 $\mathbb{G}_1$和 $\mathbb{G}_2$的表示施加了一些限制，但任意 $\mathbb{Q}$-线性表示 U 的 $\mathbb{G}_1$ 表示都是某个如下表示的直和项： U_1 如上所述 [Mil17，定理 4.14]。于是，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_1},_K$ 的系数为 $\mathscr{L}_U$ 的上同调，是系数为 $\mathscr{L}_{U_1}$的上同调的直和项，因此这一限制造成的损失并不大。

结合定理 8.5 与定理8.1（的证明），我们得到如下关于带有非平凡局部系统系数的志村簇的上同调的雅凯–朗兰兹转移。回顾记号 $V^{\mathrm{spl}}_{\mu_i}$中的表示 5.16。

推论 8.7。设 U_1、U_2 如上，且 $n \in \mathbb{Z}$。则存在自然映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I}_{\mathrm{mot}}(\widehat{G}^I p^{-1}\sigma)}\left(\widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu_1}}, \widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu_2}}(n)\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p)}\left(\gamma^{\mathrm{spl}}_{1,!}(\mathscr{L}_{U_1}[\langle 2\rho,\mu_1\rangle]), \gamma^{\mathrm{spl}}_{2,!}(\mathscr{L}_{U_2}[\langle 2\rho,\mu_2\rangle](n))\right),$$

其取值于 $\mathcal{H}^p$-等变态射中。此外，该映射与复合相容。

证明。注意到 $\mathbb{L}^{\mathrm{spl}}(V_{\mathrm{spl}\mu_i}) \in \mathrm{DM}(\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}})$ 到 $\mathbf{DM}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu_i},_K)$ 的拉回与 $\mathbb{Q}[\langle 2\rho,\mu_i\rangle]$一致。与定理 8.1 的证明相同，可得到一个态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I}_{\mathrm{mot}}\,\widehat{G}^I p^{-1}\sigma)}\left(\widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu_1}}, \widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu_2}}(n)\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p)}\left(\gamma^{\mathrm{spl}}_{1,!}(\mathbb{Q}[\langle 2\rho,\mu_1\rangle]), \gamma^{\mathrm{spl}}_{2,!}(\mathbb{Q}[\langle 2\rho,\mu_2\rangle](n))\right).$$

另一方面 ，定理 8.5 通过对应的适当推前诱导出一个态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p)}\left(\gamma^{\mathrm{spl}}_{1,!}(\mathbb{Q}), \gamma^{\mathrm{spl}}_{2,!}(\mathbb{Q}(n))\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p)}\left(\gamma^{\mathrm{spl}}_{1,!}(\mathscr{L}_{U_1}), \gamma^{\mathrm{spl}}_{2,!}(\mathscr{L}_{U_2}(n))\right).$$

复合这两个映射即可得到所需的映射；由于定理 8.1 和 8.5中的映射满足这些性质，因此该映射也满足所需的性质。□

9. On the Tate conjecture for splitting models of Shimura varieties

现在，我们可以着手研究 Shimura 簇分裂模型的（一般情形下的）泰特猜想。具体而言，我们将考察基本牛顿分层中的闭链，并证明在某种一般性假设下（且对 Shimura 簇的上同调有充分了解时），这些闭链生成所有泰特类。粗略地说，当其中一个 Shimura 簇是 Shimura 集合时，这些闭链源自奇异对应。在本节中，我们将使用 ℓ-进上同调而非动机，并固定一个辅助素数 ℓ，以及 $\mathbb{Q}_\ell$ 中的 q 平方根，以此确定一个半 Tate 扭曲。我们还将假设 $p \neq 2$。

9.1. **超越 PEL 型的分裂模型**。 上一节中，我们讨论了 PEL型 Shimura 簇，因为它们的模空间解释使我们得以构造奇异 Hecke 对应。本节将采用的方法大多基于群论，因此我们可以改为研究 Hodge 型 Shimura 簇（事实上，这些技术也应适用于阿贝尔型 Shimura 簇，但文献中只在霍奇型情形下记载了若干必要的基础结果）。我们将利用本小节，在比定义2.19.更一般的情形下定义并研究分裂模型。

设 $(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是一个 Hodge型 Shimura 数据，其反射域为 $\mathbb{E}$，Hodge余特征为 μ，Shimura簇为 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\mathbb{X})/\mathbb{E}$，对应充分小的紧开子群 $K\subseteq\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$。我们进一步假设 $G:=\mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$ 本质非分歧，并假设 $K=K^pK_p$ 中的 $K_p\subseteq G(\mathbb{Q}_p)$ 是一个非常特殊子群。最后，假设按照 [PR24，定义 4.5.1]，的意义，$(p,\mathbb{G},\mathbb{X},K)$ 具有整体Hodge型；1], 即，相应的仿抛物 $\mathcal{G}/\mathbb{Z}_p$ 是一个连通的 Bruhat–Tits 稳定子群概形。令 E 为 $\mathbb{E}$ 在位于 p 之上的素位 $\mathfrak{p}$ 处的完备化，其剩余域为 $k=k_{\mathfrak{p}}$。那么， [PR24，定理 4.5.2] 给出一个典范的（按照 [PR24，猜想 4.2.2] 的意义）整模型 $\mathscr{S}\mathrm{can}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})/\mathcal{O}_E$，它是 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 的整模型。我们还对该 Shimura 数据作如下假设：

假设 9.1. (1) $\mathscr{S}\mathrm{can}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 满足 [PR24, 猜想 4.9.2], 即，存在一个合适的光滑态射 $\mathscr{S}\mathrm{can}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to\mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathscr{M}\mathrm{can}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$，其相对维数为 $\dim\mathcal{G}$，其中$\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}},\preccurlyeq\mu$ 是来自 [SW20, AGLR22, GL 24] 的局部模型（特别地，其特殊纤维的完美化与 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$等同）。(2) 考虑晶体周期映射 loc_p: $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},K\to\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}$，它由 v-层层面上类似映射的约化（在 [Gle25, 定义 3.12]的意义下）得到，该映射来自如 [PR24, 猜想 4.2.2 (b)]中典范模型的定义。则对$m\geq n+1$，该映射与截断 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}},\leq\mu_I\to\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}\ (m,n)}_{\mathcal{G}\ \leq\mu_I}$, , 的复合是完美光滑的。(3) 若 $(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 不是 PEL型，我们假设三元组 $(\mathbb{G},\mathbb{X},K^pK_p)$ 在 [KZ25b, 定义 2.1.6], 的意义下是强可容许的，即我们另外有： G 中一个极大 $\breve{\mathbb{Q}}_p$-分裂环面的中心化子在 [KZ25a, 定义 2.4.3]的意义下是一个 R-光滑环面。注记 9.2. (1) [PR24, 猜想 4.9.2]在许多情形下是已知的，参见 [DvHKZ24b, 定理 4.3.6] 以及 [KPZ24, 定理 7.2.20]。它也由本文先前考虑的 PEL情形中的 (2.1) 推出。(2) （截断的）晶体周期映射的光滑性在某些假设下由 [Hof23a, 推论 2.57]已知。一般情形下的光滑性似乎为专家所知，参见 [Zhu25, 定理 6.3]。由于这一点尚未在文献中记载，我们在推论 3.19 中对与本文相关的 PEL型情形给出了证明。(3) 由[PR24], 的构造经约化得到的晶体周期映射与来自 [XZ17, SYZ21, Hof23a] 及第 3.2 节的构造一致，这一事实由 [DvHKZ24a, §5.3]中的讨论得出。(4) $(\mathbb{G},\mathbb{X},K^pK_p)$ 为强可容许的假设将在定理 9.6 中出现。环面为 R-光滑这一条件并非很强的限制，例子参见 [KZ25a, 命题 2.4.6]。

注 9.3。让我们回顾 [PR24, §4.5] 中 $\mathscr{S}\mathrm{can}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 的构造（该构造不需要假设 G 是本质非分歧的）。根据定义，存在志村数据 $(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 到 $\mathrm{GSp}(V,\psi)$ 的嵌入 $\hookrightarrow S^{\pm}$，其中 V 是一个带有完美交错配对 ψ 的 $\mathbb{Q}$-向量空间，而 $S^{\pm}$ 是 Siegel 双空间。于是存在 $\mathrm{GSp}(V_{\mathbb{Q}_p},\psi_{\mathbb{Q}_p})$ 的一个抛物型群概形 $\mathcal{H}$，使得闭嵌入 $G\to\mathrm{GSp}(V_{\mathbb{Q}_p},\psi_{\mathbb{Q}_p})$ 可延拓为膨胀浸入$\mathcal{G}\to\mathcal{H}$。令 $K_p^\flat=\mathcal{H}(\mathbb{Z}_p)$，并令 $K^{\flat p}\subseteq\mathrm{GSp}(\mathbb{A}_f^p)$ 满足存在闭浸入 $\mathrm{Sh}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})_E\to\mathrm{Sh}^{K^{\flat p}K_p^\flat}(\mathrm{GSp}(V,\Psi)\ S^{\pm})\otimes_{\mathbb{Q}}E$；由 [Kis10, 引理 2.1.2] 可知这样的对象存在。

现在， $\mathcal{H}$ 是 $V_{\mathbb{Q}_p}$中某个周期自对偶格链 $\Lambda_\bullet$的稳定子。这给出了 $\mathrm{Sh}^{K^{\flat p}K_p^\flat}(\mathrm{GSp}(V,\ \Psi)\ S^{\pm})$ 的模空间解释，它参数化了以下对象之间的 p-同源链：

极化阿贝尔簇。此外，这一模空间解释还导出了一个（典范）整模型 $\mathscr{S}_{\mathrm{can}}{}^{K^{\flat p}K_p^{\flat}}(\mathrm{GSp}(V,\ \Psi)\ S^{\pm})$，如§2所述。于是，$\mathscr{S}_{\mathrm{can}}{}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$ 定义为 $\mathrm{Sh}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$ 在 $\mathscr{S}_{\mathrm{can}}{}^{K^{\flat p}K_p^{\flat}}(\mathrm{GSp}(V,\ \Psi)\ S^{\pm})\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_E$ 中的（约化）概形闭包的正规化。照例，我们将其特殊纤维记为 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,\ K}$。

特别地，选择如上所述的霍奇嵌入，会为每个点 $x\in \mathrm{Sh}_{\mu,\ K}$附加一个带极化的阿贝尔簇 A_x。在 PEL 情形中，它们还带有额外结构，具体表现为端omorphism 和层结构。在 Hodge 型情形中，通常无法获得这些结构；但取而代之的是，可以为每个 $x\in \mathrm{Sh}_{\mu,\ K}$ 在 ℓ-进）上同调中附加各种“张量”。这在下文中只起次要作用，详情请参见 A_xPR24，§4.6]（另见 [Kis10、KP18]）。

回到 G 本质非分歧的情形，我们可以定义一个分裂局部模型$\mathscr{M}\mathrm{spl}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$。这是一个光滑的 $\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$-概形 $\mathscr{M}\mathrm{spl}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$，带有一个 $\mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}}$-作用，以及一个等变映射 $\mathscr{M}\mathrm{spl}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}\to\mathscr{M}\mathrm{can}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}\times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E}$谱 $\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$，该映射在谱$\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$的一般纤维上诱导同构，而其特殊纤维则与备注 5.13 中的映射 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}{}_{,\leq\mu}\to\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}{}_{,\leq\mu_I}$ 一致。事实上，由于局部模型在中心等源下保持不变，并且与乘积相容，我们可以归约到标量限制的情形。在该情形下，所需的局部模型已在 [Lev16，定义 5.4 中构造。2]（更准确地说，应取分裂格拉斯曼簇的闭子概形，该子概形由上述文献中定义，即由其一般纤维中的极小舒伯特胞腔的概形闭包定义。其特殊纤维具有正确描述这一事实，随后由 [Lev16，命题 5.4，4] 以及 [Lev16，（5.4.4.2）]得到。）

定义 9.4。$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G},\ \mathbb{X})$ 的分裂整模型由下列笛卡尔图定义：

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{S}^{\mathrm{spl}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathscr{S}^{\mathrm{can}}_{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X}) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}\backslash\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}.\end{array}$$

显然，这是一个可表的 $\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$-概形。此外，由于 $\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}{}_{,\preccurlyeq\mu}$ 光滑，映射$\mathscr{M}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}{}_{,\preccurlyeq\mu}\to\mathscr{M}\mathrm{can}_{\mathcal{G},\preccurlyeq\mu}$是适当的，且水平箭头均为光滑映射，因此 $\mathscr{S}\mathrm{spl}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})\to\mathscr{S}\mathrm{can}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是一个奇点消解。最后，我们将 $\mathscr{S}\mathrm{spl}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 和 $\mathscr{S}\mathrm{can}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 的几何特殊纤维的完美化分别记为 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{,K}$ 和 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K}$。

回顾一下，$\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,\ K}$ 具有一个牛顿分层，其中各分层定义为自然映射 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,\ K}(k)\to B(G)$ [PR24，注 4.2。1]。众所周知，其指标由 $B(G,\ \mu^*)$ 给出。

定义 9.5. $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{,K}$ 的牛顿分层定义为对 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K}$的牛顿分层进行拉回。特别地，它以 $B(G,\mu^*)$ 为指标，并且 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{,K}$中的非空牛顿分层与 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K}$ 中的非空牛顿分层恰好对应（这是由 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{,K}\to\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K}$ 的满射性所致）。

对应于 $B(G,\mu^*)$ 中唯一基本元素的基本牛顿分层记为 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{K,,\text{基本}}\to\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K,\mathrm{bas}}$。

根据 [KMPS22，定理 1.3，14], 基本Newton层 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K,\mathrm{bas}}$ 非空，因此 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{K,}$,bas 也具有相同性质。令 $x\in\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{K,}$,bas 中的一个点固定下来，并以相同方式记其在 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K,\mathrm{bas}}$ 中的像。为了理解 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{K,}$, bas 的几何（包括局部和整体），只需理解 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K,\mathrm{bas}}$的几何，以及映射 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{spl}}{}_{,\leq\mu}\to\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{can}}{}_{,\leq\mu_I}$（参见定理 6.11 的证明）。为使这一点更加明确，我们证明一个 `仿照 Rapoport–Zink [RZ96，定理 6.23]的一致化结果。

定理 9.6。令 $b \in B(G,\mu^*)$ 为唯一的基本元素。存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}(\mathbb{Q})\backslash X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu^*}(b) \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{I}(\mathbb{Q})\backslash X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I^*}(b) \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p & \xrightarrow[\cong]{} & \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} \end{array}$$

完美概形的范畴，且在素数异于p 的*Hecke*算子作用下等变。这里， $\mathbb{I}/\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个内形式，满足 $\mathbb{I} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p \cong \mathbb{G} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p$ 和 $\mathbb{I} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong J_b$，其中 J_b 是 σ-扭曲中心化子$b \in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ ，而 $\mathbb{I}$（$\mathbb{R}$）模中心紧。

注记9.7。假设($\mathbb{G}$、 $\mathbb{X}$、 K^pK_p)强可容许，是在应用[KZ25b定理2.2时7], 所需的条件；该定理用于证明正则模型的Rapoport–Zink一致化。对于PEL型情形，可以改用 [RZ96定理623], 中的Rapoport–Zink一致化，从而省去这一条件；该结果适用于朴素模型。下文应用定理9.6 时也有类似的注记。

证明。我们首先处理典范模型的情形；这一情形已在文献中得到广泛研究 [XZ17, HZZ25, PR24]。在此情形下，Pappas–Rapoport [PR24] 证明了沿一个同源类对 $\mathscr{S}\mathrm{can}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 作形式完备化，可由整局部志村簇实现一致化。回顾一下，这类整局部志村簇的约化特殊纤维与仿射 Deligne–Lusztig 簇一致 [Gle21, 命题 2.61], ，并且 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_K$ 中的一个同源类由那些点组成，其对应的阿贝尔簇彼此拟同源，且拟同源保持极化（至多相差一个标量）以及 ´étale 张量和晶体张量（如注 9.3 所述）。因此，只要我们知道 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_{K,\mathrm{bas}} \subseteq \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_K$ 由单个同源类构成，该定理便可由[PR24, 定理 4.10.6] 和 [GLX26, 推论 6.3], 推出。对于 [KP18], 中构造的整模型，这一点已由[HZZ25, 命题 5.2.12], 证明；其关键在于，基本 Newton 层中的任意同源类都包含一个可提升至一般纤维中特殊点的点。当 $(\mathbb{G},\mathbb{X},K^pK_p)$ 强可容许时，这一事实最近已推广至 [KZ25b, 定理 2.2.7]。利用这一事实，[HZZ25, 命题 5.2.12] 的证明可原样照搬，从而证明 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_{K,\mathrm{bas}} \subseteq \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_K$ 是单个同源类。这就得到了典范情形。

现在，同构 $\mathbb{I}(\mathbb{Q})\backslash X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I^*}(b) \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p \cong \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_{K,\mathrm{bas}}$是由映射 $X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I^*}(b) \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_{K,\mathrm{bas}}$诱导的：令 $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)$作用于 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_{K,\mathrm{bas}}$ [PR24、(4.10.6) 和 (4.10.7)]。此外，复合

$$X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I^*}(b) \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} \to L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I}$$

与映射 $g \mapsto (g^{-1}b\sigma(g))^{-1}$一致。特别地，我们得到如下含有笛卡尔方块的图表：

$$\begin{array}{ccccc} X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu^*}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} & \longrightarrow & L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq \mu} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I^*}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} & \longrightarrow & L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I}. \end{array}$$

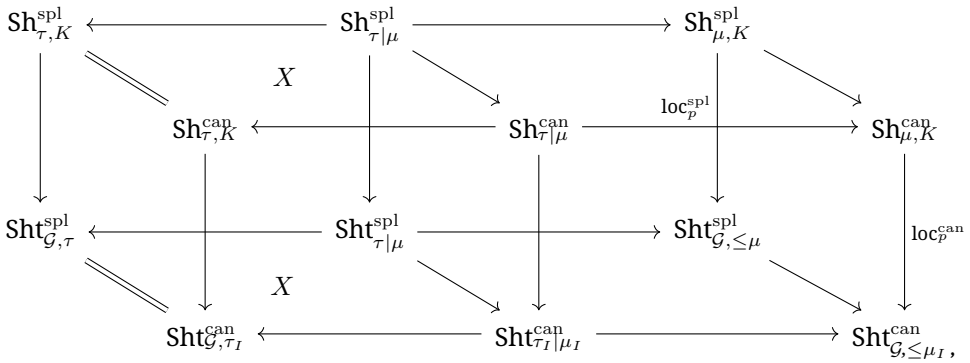
令 $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)$作用于志村簇，便得到如下图表，其中仍然含有笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{I}(\mathbb{Q})\backslash X^{\mathrm{spl}}_{\leq \mu^*}(b) \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p & \longrightarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} & \longrightarrow & L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq \mu} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{I}(\mathbb{Q})\backslash X^{\mathrm{can}}_{\leq \mu_I^*} \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p & \longrightarrow & \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} & \longrightarrow & L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq \mu_I}. \end{array}$$

但这样一来，左上方的水平箭头就是一个同构，因为它是一个同构的拉回，从而得到所需的图表。对素数异于 p 的 Hecke 算子的等变性成立，因为这些同构是由志村簇上的 $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)$-作用诱导的。□

按照 [XZ17，命题 7.3。5], 我们可以将这个 Rapoport–Zink一致化解释为志村簇（对应 $(\mathbb{G},\mathbb{X})$）与一个零维（弱）志村簇之间的奇异 Hecke 对应。下文中，我们假设 $\mathbb{G}$ 的中心 $Z_{\mathbb{G}}$ 连通，并且基本元素 $b\in B(G,\mu^*)$ 非常特殊。在这种情况下，由命题 6.5，存在某个 $\tau\in X_*(Z_G)$，使得 $b=p^{\tau^*}$；它满足 $\mu_{|Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}}=\tau_{|Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}}$。此外，命题 6.5 (4) 和 [XZ17，推论 2.1。6] 表明，存在 $\mathbb{G}$ 的一个内形式 $\mathbb{G}'$，它在有限位处平凡，且 $\mathbb{G}'_{\mathbb{R}}$ 模中心紧。考虑配对 $(\mathbb{G}',\mathbb{X}')=(\mathbb{G}',\{h\})$，其中 $h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}\to\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}\times\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}\to\mathbb{G}_{\mathbb{C}}$ 到 $\mathbb{R}$ 的下降；$x,y)\mapsto\tau(x)\cdot\tau(y)$，其中 $(-)$ 表示复共轭。这是 TX16，§2。2], 意义下的弱 Shimura 数据，其 Hodge余特征为τ。相应的复弱志村簇 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G}',\mathbb{X}')/\mathbb{C}$（层为 $K\subseteq\mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)\cong\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f^p)$）只是有限个离散点的并，由 $\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K$ 编号。令 $\mathbb{E}'$ 表示其反射域$\widetilde{\quad}$，并令 $\mathbb{E}:=\mathbb{E}\mathbb{E}'$ 表示它与 $(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 的反射域的复合域；令 E 为位于 $\mathfrak{p}$ 之上$\widetilde{\quad}$的某个素位处的完备化（$\mathfrak{p}$ 是 $\mathbb{E}$ 的素位，其完备化为 E），并令 k 为 E 的剩余域。于是由 TX16，§2。8],，$(\mathbb{G}',\mathbb{X}')$ 给出一个典范弱志村簇 $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{G}',\mathbb{X}')/\mathbb{E}'$（我们通常$\widetilde{\quad}$将其视为定义在 $\mathbb{E}$ 上），以及一个典范整模型 $\mathscr{S}\mathrm{can}_K(\mathbb{G}',\mathbb{X}')/\mathcal{O}_{\widetilde{E}}$。我们将 $\mathscr{S}\mathrm{can}_K(\mathbb{G}',\mathbb{X}')$ 的几何特殊纤维的完美化记为 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau,K}$。注意，由 (7.4)，$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\tau_I}$ 只是一个有限生成群的分类叠，因此存在一个自然的 pro-（完美光滑）映射 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau,K}\to\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\tau_I}$。此外，由于在这种情况下 $\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\tau_I}\cong\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\tau}$，定义 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\tau,K}:=\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau,K}$ 是有意义的，因此也存在一个 pro-（完美光滑）映射 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\tau,K}\to\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\tau}$，。

推论 9.8。假设 $Z_{\mathbb{G}}$ 是连通的，且基本元素 $b\in B(G,\mu^*)$ 非常特殊。那么存在一个交换图表



其中所有方块都是笛卡尔的，除非标有“X”。此外，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\tau|\mu}$ 和$\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau|\mu}$ 是 *ind-*$\widetilde{\quad}$*(完美概形)*，它们具有一种 k-结构，使得图表的上半部分定义在$\breve{k}$上。

证明。一旦构造出具有所需笛卡尔性质的图表，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\tau|\mu}$ 和 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau|\mu}$根据引理7.6，将是 ind-完美概形。此外，由于 b 被假定为非常特殊，因此 $\mathbb{G}'$ 以及定理9.6 中的群 $\mathbb{I}$ 都是 $\mathbb{G}$的内形式，并且在有限位处平凡。应用[XZ17，推论 2.1，6], 我们可以固定一个同构 $\mathbb{G}'\cong\mathbb{I}$，它与到 $\mathbb{G}$的内扭曲相容。

我们首先讨论图表在 $\mathrm{Spec}\,k$ 上存在的问题。设

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\tau|\mu}=\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q}_p)\overset{\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}{\times}X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu^*}(b)\times\mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p$$

and

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau|\mu}=\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q}_p)\overset{\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}{\times}X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I^*}(b)\times\mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p.$$

此外，不动点 $x\in\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\text{基}}$（及其在 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}$ 中的像）满足

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\tau|\mu}\times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu}}x\cong X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu^*}(b)\cong G(\mathbb{Q}_p)/\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$$

and

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\tau_I|\mu_I} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G},\leq\mu_I}} x \cong X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I^*}(b) \cong G(\mathbb{Q}_p)/\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$$

根据（7.3）和（7.5），由于 $b = p^{\tau^*}$ 具有 τ 中心性。因此，定理9.6 所给出的 Rapoport–Zink 一致化意味着

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\tau|\mu} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu}} \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K} \cong \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\tau|\mu} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu}} \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} \cong \mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\tau|\mu} \times_{\mathrm{Sht}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G},\leq\mu}} (\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu^*}(b) \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p)$$

$$\cong \mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q}_p) \overset{\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}{\times} X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu^*}(b) \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p = \mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\tau|\mu},$$

典范模型的情形也类似。这表明所需的图表存在，且右半部分的方块是笛卡尔的。左侧剩余的两个标记方块由 (7.3) 和 (7.5) 可知是笛卡尔的。

~剩下需要证明上半部分定义在谱 k上。只需对典范模型证明这一点；分裂模型的情形可通过拉回得到。在这种情况下，我们可以按照 [XZ17，命题 7.3。5]为方便读者，我们简要说明论证。

不动点 x 给出一个元组 $(A_x, \eta_x, s_{\text{ét},x}, s_{0,x})$，其中 A_x 是一个阿贝尔簇， η_x 是远离 p 的层结构，而 $s_{\text{ét},x}$ 和 $s_{0,x}$ 是关于 A_x 的 ´étale 张量和晶体张量（参见注 9.3）。它还对应于一个由映射 $\mathrm{loc}^{\mathrm{can}}_p$确定的（典范）局部shtuka $x^*\mathcal{E}$。另一方面，一个点 $y = (g_p, y_0, g^p) \in \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau|\mu}$ 给出对该局部shtuka的一个修改，其方式如下：

$$\mathcal{E}_y \xrightarrow{\beta_{y_0}} x^*\mathcal{E} \xrightarrow{g^p} x^*\mathcal{E},$$

进而诱导出对 A_x 的修改，即一个 p-幂准同源 $A_y \xrightarrow{\beta_y} A_x$。通过这一修改， $\eta_x g^p$ on A_x 上的层结构也诱导出 η_y on A_y 上的层结构，而 $y \in \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau|\mu}$ 在 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K}$ 中的像对应于元组 $(A_y, \eta_y, \beta_y^{-1}(s_{\text{ét},x})\ \beta_y^{-1}(s_{0,x}))$。

考虑 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau|\mu}$ 上由下式给出的 Frobenius 作用

$$(g_p, y_0, g^p) \mapsto (p^{\mathbb{N}_v(\tau^*)g_p, \sigma_v(y_0)}, g^p) \quad \text{for} \quad \mathbb{N}_v(\tau^*) := \sum_i^{[k_v:\mathbb{F}_p]} \sigma^i(\tau^*),$$

其中 σ_v 作用于 $X^{\mathrm{can}}_{\leq\mu_I^*}(b)$，如 [Rap05 (5.2)] 所述。这使得映射 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau|\mu} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau,K}$ σ_v 成为等变映射，其中目标上的作用由互反映射给出，如 [TX16 §2.8] 所述。与 [XZ17 命题 7.3.5] 中相同的论证随后表明，映射 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau|\mu} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K}$ 也是 σ_v-等变的，从而完成证明。□

作为 Rapoport–Zink一致化的另一个推论，我们可以描述基本Newton层的不可约分支。回顾一下，我们在 $\mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu^*}{}^{\mathrm{Tate}_p}$和 $\mathbb{MV}^{\mathrm{can}}_{\mu_I^*}{}^{\mathrm{Tate}_p}$ 中（6.2）定义了这些对象。

推论 9.9。 假设 $Z_{\mathbb{G}}$ 是连通的，并且 $B(G, \mu^*)$ 中的基本元素是非常特殊的。那么，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\text{基本}}$ 和 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}$ 都是维数为 $\langle\rho, \mu\rangle$的等维对象。此外，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)/K \times \mathbb{MV}^{\mathrm{spl},\mathrm{Tate}_p}_{\mu^*} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{*\} \sqcup \mathrm{Irr}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) & \xrightarrow[\cong]{} & \{*\} \sqcup \left(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)/K \times \mathbb{MV}^{\mathrm{can},\mathrm{Tate}_p}_{\mu_I^*}\right). \end{array}$$

证明。 Rapoport–Zink一致化，定理 9。6，以及推论 6。12 推出 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu K,,\mathrm{bas}}$ 和 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}$ 均为维数 $\langle\rho, \mu\rangle$的等维空间，并给出了不可约分支的描述（因为我们已在推论 9。8 的证明中看到，在我们的假设下 $\mathbb{I} \cong \mathbb{G}'$）。为了确认这一描述确实与所需的描述一致，我们还可以使用引理 6。4。

$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu\,K},$,bas 中不可约分支在 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_{K,\mathrm{bas}}$ 中的像自动是不可约且闭的，但其维数可能小于 $\langle\rho,\mu\rangle$。因此，左侧的竖直映射将这样的不可约分支映到其在 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_{K,\mathrm{bas}}$ 中的像（若其维数为 $\langle\rho,\mu\rangle$），否则映到 $\{*\}$。类似地，右侧的竖直映射将 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\mathcal{G}},_{\leq\mu^*}\cap\mathcal{S}^{\mathrm{spl}}_{\lambda}$ 的不可约分支映到它们在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}},$ $_{\leq\mu_I}\cap\mathcal{S}^{\mathrm{can}}_{\lambda_I}$ 中的像（若其维数符合要求），否则映到 $\{*\}$。由此，图表的交换性可由推论 6.12 得出。□

9.2. **分裂模型上的循环**。回顾一下，我们固定了一个素数 $\ell\neq p$。我们也将 I 记作 $\mathbb{Q}_p$的惯性群。

在本节中，我们固定一个如上一节所述的 Hodge型志村数据（$\mathbb{G},\mathbb{X}$）；特别地，$G:=\mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$ 是本质非分歧的，并且对于某个充分小的 $K=K^pK_p\subseteq\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$（其中 $K_p\subseteq G(\mathbb{Q}_p)$ 非常特殊），我们有定义在 Spec k上的典范特殊纤维和分裂特殊纤维 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu},_K$ 及 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu},_K$。此外，假设 Z_G 是连通的。令 $\mathcal{H}_K:=C_c^\infty(K\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)/K,\mathbb{Q}_\ell)$为层 K处系数取在 $\mathbb{Q}_\ell$中的整体Hecke代数。类似地，我们将远离p处的Hecke 代数（分别地，在 p处的Hecke 代数）记作 $\mathcal{H}_{K^p}:=C_c^\infty(K^p\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p)/K^p,\mathbb{Q}_\ell)$（分别记作 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}=\mathcal{H}_{K_p}:=C_c(K_p\backslash G(\mathbb{Q}_p)/K_p,\mathbb{Q}_\ell)$）。令 φ_v 表示剩余域 $k=k_v$ 的几何Frobenius，其中 E。对于一个不可约 $\mathcal{H}_K$-模 π_f 和 $i\in\mathbb{Z}_{\geq0}$，我们记

$$W^{2i}(\pi_f,\overline{\mathbb{Q}}_\ell(i)):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}(\pi_f,\mathrm{H}_c^{2i}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(i))),$$

并令

$$T^i(\pi_f,\overline{\mathbb{Q}}_\ell):=\bigcup_{j\geq1}W^{2i}(\pi_f,\overline{\mathbb{Q}}_\ell(i))^{\varphi_v^j},$$

其为 π_f-等型分量中 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu}$ 之上同调的 *Tate*类空间K。回顾，至少当 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu}$，$K$ 为紧合时，Tate 猜想 [Tat65]预言它们来自余维数 i 的代数闭链。我们将在对 π_f 的某些一般性条件下证明这一点，这些条件定义如下。

由于我们现在使用 $\mathbb{Q}_{\ell'}$系数，我们将利用 p 的固定平方根，把 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的球面朗兰兹参数栈视为 $\widehat{G}^Ip^{-1}\sigma_p/\widehat{G}^I\cong\widehat{G}^I\sigma_p/\widehat{G}^I$。类似地，我们现在重新定义 $\overline{\mathbf{J}}:=\Gamma(\widehat{G}^I\sigma_p/\widehat{G}^I,\mathcal{O})$，它可与球 Hecke 代数 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$等同，依据[vdH24a，推论 10。12]。更一般地，对于一个 $\mathbb{Q}_{\ell'}$-线性 $\widehat{G}^I$-表示 V，我们重新定义

$$\mathbf{J}(V):=\Gamma(\widehat{G}^I\sigma_p/\widehat{G}^I,\widetilde{V})\cong(\mathcal{O}_{\widehat{G}^I}\otimes V)^{c_{\sigma_p}(\widehat{G}^I)}.$$

于是我们仍然有 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^{\widehat{G}^I}(\widehat{G}^I\sigma_p)}(V,W)\cong\mathbf{J}(V^*\otimes W)$。另请注意，利用固定的$p^{\frac{1}{2}}$，扭曲切瓦莱限制定理 [vdH24a，命题 10.8] 诱导一个同构$\mathbb{Q}_\ell[\widehat{G}^I\sigma_p]^{\widehat{G}^I}\cong\mathbb{Q}_\ell[\widehat{T}^I_{\sigma_p}]^{W_0}$，其中 $W_0=W^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$ 是 G 的相对魏尔群，且 $\widehat{T}^I_{\sigma_p}:=(\widehat{T}^I)^{\sigma_p}:=\widehat{T}^I/(\sigma_p-1)\widehat{T}^I$。注意，$\widehat{T}^I_{\sigma_p}$ 的中性连通分支可以典范地等同于极大分裂环面 $A\subseteq G$ 的对偶群。设 $\Phi(G,A)^\vee$ 为（相对于 $A\subseteq G$ 的）相对余根系，我们将其视为子集 $\Phi(G,A)^\vee\subseteq X^*(\widehat{T})^{\sigma_p}_I$。

注 9.10. 一般而言，约化群不动点的根数据有多种定义，参见 [Hai18, ALRR22]。然而，根据我们的假设，G是本质非分歧的，$\widehat{G}$ 的正根都属于 ALRR22, §4.1] 所采用记法中的 (i') 型等价类。因此，ALRR22, 命题 6.1] 中的不同根数据定义是一致的。更确切地说，$\widehat{G}^I$ 的根 $\mathfrak{R}^{(I)}$ 恰好是 $\widehat{G}$ 的根 $\mathfrak{R}$ 在商$X^*(\widehat{T})=X_*(T)\to X_*(T)_I=X^*(\widehat{T}^I)$ 下的像。注意，$X^*(\widehat{T}^I)$ 可能含有挠元，但这对我们而言并不构成问题。

命题 9.11。设 V 是一个有限维的 $\mathbb{Q}_{\ell'}$-线性 $\widehat{G}^I$-表示。那么(1) $\mathbf{J}(V)$ 是一个有限投射的 $\mathbf{J}$-模。

(2) 配对 $\mathbf{J}(V)\otimes_{\mathbf{J}}\mathbf{J}(V^*)$ 的行列式是 $\widehat{G}^I\sigma_p/\!\!/\widehat{G}^I \cong \widehat{T}^I_{\sigma_p}/\!\!/W_0$ 上由函数定义的除子

$$\prod_{\alpha\in\Phi(G,A)^\vee \mid \frac{\alpha}{2}\notin\Phi(G,A)^\vee} (e^\alpha-1)^{\zeta_\alpha} \prod_{\alpha\in\Phi(G,A)^\vee \mid \frac{\alpha}{2}\in\Phi(G,A)^\vee} (e^\alpha+1)^{\zeta_\alpha},$$

其中

$$\zeta_\alpha = \sum_{n\geq 0} \dim V_{|\widehat{G}^{\Gamma_F}}(n\alpha_\sigma),$$

且 $\alpha_\sigma \in \Phi(G,S)^\vee$ 是相对根系 (G,S) 的一个余根，使得其所有 σ-平移之和为 α。

证明。 (1) 由假设， Z_G 是连通的，因此导出子群 G_{der} G 是单连通的。此外，利用记号 5.2，伴随商 $G\to G_{\mathrm{ad}}\cong\prod_i \mathrm{Res}_{F_i/F} H_i$诱导出一个对偶态射 $\prod_i \widehat{H_i}^{e_i f_i}\to\widehat{G}$，该态射经由导出子群 $\widehat{G}_{\mathrm{der}}$分解。由于群 $\prod_i \widehat{H_i}^{e_i f_i}$ 也是单连通的（因为它是伴随群的对偶），我们得到一个同构 $\prod_i \widehat{H_i}^{e_i f_i}\to\widehat{G}_{\mathrm{der}}$，从而得到一个同构

$$\prod_i \widehat{H_i}^{f_i} \cong (\widehat{G}_{\mathrm{der}})^I$$

通过取惯性不变量。现在，中的两个对角态射

$$\begin{array}{ccc} (\widehat{G}_{\mathrm{der}})^I & \longrightarrow & (\widehat{G}^I)_{\mathrm{der}} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \widehat{G}^I & \end{array}$$

都是闭浸入。因此，自然映射 $(\widehat{G}_{\mathrm{der}})^I\to(\widehat{G}^I)_{\mathrm{der}}$ 也是闭浸入。我们断言它还是满射：事实上，由于 $\pi_0(\widehat{G}^I)=\pi_0(\widehat{T}^I)$ [ALRR22，命题 5.4（7）], 是阿贝尔的，$(\widehat{G}^I)_{\mathrm{der}}$ 与 $\widehat{G}^I$的单位连通分支的导出子群一致；这便得出所需结论。利用这一点，我们可以并且将记 $\widehat{G}^I_{\mathrm{der}}:=(\widehat{G}_{\mathrm{der}})^I\cong(\widehat{G}^I)_{\mathrm{der}}$。由此，我们证明了 $\widehat{G}^I$的导出子群是一个分裂连通单连通约化群。（注意，根据 [ALRR22，例 5.9（1）], 一般而言这一结论并不成立。）

现在，令 $\widehat{G}':=\widehat{G}^I_{\mathrm{der}}\times Z(\widehat{G}^I)$；$\sigma_p$对 $\widehat{G}^I$的作用唯一提升为对 σ_p的作用到 $\widehat{G}'$。[Ste68，9。16]。我们将 $\mathbf{J}_{\widehat{G}^I}=\mathbf{J}$记为 $\mathbf{J}_{\widehat{G}'}$的整体截面环，而 $G'\sigma_p/G'$。类似地，我们定义 $\mathbf{J}_{\widehat{G}^I}(V)$ 和 $\mathbf{J}_{\widehat{G}'}(V)$。考虑正合列

$$1\to\Delta\to\widehat{G}'\to\widehat{G}^I\to 1, \tag{9.1}$$

并令 Δ_{σ_p} 为 Δ 关于诱导的 σ_p作用的余不变量。令 T' 为 $\widehat{T}^I$ 在 $\widehat{G}'$中的原像，从而得到正合列

$$1\to X^*(\widehat{T}^I)\to X^*(\widehat{T}')\to X^*(\Delta)\to 1.$$

取 σ_p不变量后，我们得到一个序列

$$1\to X^*(\widehat{T}^I)^{\sigma_p}\to X^*(\widehat{T}')^{\sigma_p}\to X^*(\Delta)^{\sigma_p},$$

但它在右端不一定正合。令 $\Omega\subseteq X^*(\Delta)^{\sigma_p}$ 为$X^*(T')^{\sigma_p}$ 在 $X^*(\Delta)^{\sigma_p}$中的像，对应于 Δ_{σ_p} 的一个可对角化商 $D(\Omega)$，以及一个正合列

$$1\to D(\Omega)\to\widehat{T}'_{\sigma_p}\to\widehat{T}^I_{\sigma_p}\to 1.$$

于是，有限群 Δ 在 $\mathbf{J}_{\widehat{G}'}$ 上的作用可经由商 $\Delta\twoheadrightarrow\Delta_{\sigma_p}\twoheadrightarrow D(\Omega)$ 因子化。我们断言，自然映射 $\mathrm{Spec}\,\mathbf{J}_{\widehat{G}'}\to\mathrm{Spec}\,\mathbf{J}_{\widehat{G}^I}$ 是一个 $D(\Omega)$-扭子。

事实上，由于我们是在特征为零的域上工作，彼得–外尔定理表明

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\widehat{G}^I]^{c_{\sigma_p}(\widehat{G}^I)} \cong \bigoplus_{\mu\in X^*(\widehat{T}^I)^+} (V_\mu \otimes V_\mu^*)^{c_{\sigma_p}(\widehat{G}^I)} \cong \bigoplus_{X^*(\widehat{T}^I)^{+,\sigma_p}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell,$$

同样地

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\widehat{G}']^{c_{\sigma_p}(\widehat{G}')} \cong \bigoplus_{X^*(\widehat{T}')^{+,\sigma_p}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

由于 $D(\Omega)$ 在 $\mathbf{J}_{\widehat{G}'}$ 上自由作用，并通过比较上述基，我们看到谱 $\mathbf{J}_{\widehat{G}'} \to$谱 $\mathbf{J}_{\widehat{G}^I}$ 确实是一个 $D(\Omega)$-扭子。

现在，由于 $\mathbf{J}_{\widehat{G}'}$ 上的 Δ_{σ_p}-作用经由 $D(\Omega)$ 分解， [XZ19, (4.1.3)] 蕴含 $\mathbf{J}_{\widehat{G}'}(V)^{D(\Omega)} = \mathbf{J}_{\widehat{G}^I}(V)$。然后，与 [XZ19, 引理 4.1.3] 中相同的论证蕴含自然映射 $\mathbf{J}_{\widehat{G}^I}(V) \otimes_{\mathbf{J}_{\widehat{G}^I}} \mathbf{J}_{\widehat{G}'} \to \mathbf{J}_{\widehat{G}'}(V)$ 是一个同构。因此，由忠实平坦下降，我们归结为对 $\widehat{G}' = Z(\widehat{G}^I) \times \widehat{G}^I_{\mathrm{der}}$ 证明该命题，从而对 G^I_{der}证明。但我们在上文已经看到，这是一个连通、半单、单连通的约化群，因此 [XZ19, 定理 4.3.2] 适用。

（2）由（1）可知，只需计算配对$\mathbf{J}_{\widehat{G}'}(V) \otimes_{\mathbf{J}_{\widehat{G}'}} \mathbf{J}_{\widehat{G}'}(V^*)$的行列式。根据 [XZ19，命题（4.1.1）], 对乘积均相容。显然，对于可对角化群存在完美配对，因此只需考虑半单单连通群 $\widehat{G}^I_{\mathrm{der}}$；它与伴随商 G_{ad}的对偶群的惯性不变量一致。再次利用与乘积的相容性，可假设 $G = \mathrm{Res}_{F'/\mathbb{Q}_p} H$，其中 H/F' 是 F'上的伴随非分歧群。由于 H 的命题已在 [XZ19定理 6.12],中证明，剩下的就是处理标量限制。

令 F为 $F'/\mathbb{Q}_p$的最大非分歧子扩张，并设 $K := \mathrm{Res}_{F'/F} H$，于是 $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} K$。则存在弗罗贝尼乌斯等变同构 $\widehat{H}^{I_{F'}} \cong \widehat{K}^{I_F}$，并且 K 与 H 的相对根系相同（采用记号 5.2中的相容环面选择）。最后，沿非分歧扩张 K 从 G 到 $F/\mathbb{Q}_p$ 的过程可由 [XZ19引理 4.12]处理。

□

现在我们可以定义所需的一般性条件。我们分别将 σ_p 和 φ_p 记作算术与几何 p-Frobenius, 并令 $m > 0$ 为某个整数，使得 $\Gamma_{\mathbb{F}_p}$ 在 $\widehat{G}^I_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ 上的作用可经由 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p)$ 分解。–

定义 9.12。 令 $\gamma\sigma_p \in \widehat{G}^I\sigma_p /\!\!/ \widehat{G}^I$ 为一个元素，且令 $V \in \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell})$。–

（1） $\gamma\sigma_p$ 若 V-一般，则称其不属于命题 9。11 （2）中的除子。（2） $\gamma\sigma_p$ 若对每个优势余特征 $\lambda_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}} \in X_*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}})$，使得$V_{\widehat{G}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}}(\lambda_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}) \neq 0$且不经由 $\widehat{Z_G}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$ 分解，都有 $\lambda_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}((\gamma\varphi_p)^{mn}) \neq 1$，则称其为强 V-一般的；对所有 $n > 1$ 均成立。

回顾一下，假设 Z_G 是连通的，因此它是一个环面，并且 Z_G 有定义。还要注意，任意正则半单元都是相对于任意 $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(\widehat{G}^I_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell})$的 V-一般元。 —

设 V_{μ^*} 为 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-线性单 G-表示，其最高权为 μ^*，并记其对 $\widehat{G}^I$ 的限制为。同样，我们可以像（$V_{\text{泰特}_{\mu^*}}{}^p$）中那样定义6.1。类似地，$V_{\mu^*_I}$表示最高权为 $\widehat{G}^I$的单 μ^*_I-表示，并且我们再次在（$V_{\text{泰特}_{\mu^*_I}}{}^p$）中定义了6.1。下面的引理说明了强一般性条件的意义。

引理 9.13。设 $\gamma\varphi_p \in \widehat{T}^I \rtimes$ 伽罗瓦群$(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p) \subseteq \widehat{G}^I \rtimes$ 伽罗瓦群$(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p)$，使得其在 $\widehat{Z_G}^I \rtimes$伽罗瓦群$(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p)$ 中的像具有有限阶。那么我们有

$$V_{\mu^*}^{\mathrm{Tate}_p} \subseteq \bigcup_{j\geq 1} V_{\mu^*}^{r_{\mu^*}((\gamma\varphi_p)^{j_m})}. \tag{9.2}$$

此外，若 γ 是强一般的，则这个包含映射是同构。

证明。 由引理 6。4 (并且由于相应的 τ_I 由注记 6。14) 是中心的， $V_{\mu^*}^{\mathrm{Tate}_p}$作为向量空间分解为

$$V_{\mu^*}^{\mathrm{Tate}_p} = \bigoplus_{\lambda_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}} \in X^*(\widehat{Z_G}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}) = X^*(\widehat{Z_G})_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}} V_{\mu^*|\widehat{G}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}}(\lambda_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}).$$

根据 $\gamma\varphi_p$ 在 $\widehat{Z_G}^I \rtimes$伽罗瓦群$(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p)$ 中的像有限这一假设可知，$r_{\mu^*}((\gamma\varphi_p)^{jm})$ 在每个直和项上都平凡作用，由此得到包含映射 (9.2)。另一方面，若 $\lambda_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}} \in X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}})$ 不经由 $\widehat{Z_G}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$ 分解，且 $\gamma\varphi_p$ 是强一般的，则对 $j>1$，$(V_{\mu^*|\widehat{G}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}}(\lambda_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}))^{r_{\mu}^*((\gamma\varphi_p)^{j_m})} = 0$。这表明，当 $\gamma\varphi_p$ 是强一般的时，(9.2) 是同构。

□

让我们回顾一些特别值得关注、且曾受到 [Kot92a、SS13]等关注的志村簇。

定义 9.14. 设 F 是一个 CM域，其全实子域为 F_1，并且 F/F_1 在 p 上方的所有素位处均不分歧。设 D 是 F 上的中心可除代数，维数为 n^2，带有一个对合 $*$，其在 F 上的限制为复共轭。设 $b \in D^\times$ 满足 $b^* = b$，且 $(v,w) \mapsto vbw^*$ 是 $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上的正配对；由 [Kot92b, 引理 2.8] 可知此配对存在。定义一个对合 $\sharp\colon D^{\mathrm{op}} \cong D^{\mathrm{op}}\colon v \mapsto bv^*b^{-1}$，取 $\beta \in F$ 使得 $\beta^\sharp = -\beta$，并考虑内积 $\langle v,w\rangle = \mathrm{tr}_{D^{\mathrm{op}}}(vb^{-1}\beta w^\sharp)$。

那么，元组 $(B,*,V,(,)\ h) = (D^{\mathrm{op}},\sharp,D^{\mathrm{op}},\langle\rangle,h_0)$，其中 D^{op} 通过左乘作用于自身，而 $h_0\colon \mathbb{C} \to D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathrm{End}_{D^{\mathrm{op}}\otimes_{\mathbb{Q}} R}(D^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ 是任意一个 *-同态，使得 $(v,w) \mapsto \langle v, h_0(i)w\rangle$ 为正定，即为一个全局有理 PEL 数据（按照记号 2.1 的含义）。按照 [SS13], ，由此得到的志村簇（自动为真）称为紧酉群志村簇。

按照 [SS13], 上述志村数据中出现在一个分裂位处的局部群是本质非分歧的。因此，我们的方法适用于这些志村簇。

最后，我们证明本文的主定理。

定理 *9.15*。设 $(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是一个 *Hodge*型 *Shimura* 数据，满足假设 *9.1*，且 $G := \mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$ 本质非分歧。我们固定 G 的非常特殊抛物子群模型 $\mathcal{G}/\mathbb{Z}_p$。假设 G 的中心 Z_G 连通，且 $V_{\mu^*}^{\mathrm{Tate}_p} \neq 0$。令 $\mathbb{G}'$ 表示 $\mathbb{G}$ 的唯一内形式，它在有限位处平凡，并且在阿基米德位处模中心紧（由命题 *6.5 (4)* 和 [*XZ17*，推论 *2.1*.6] 可知其存在）。则有以下结论：

(1) 基本牛顿分层 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{spl}}{}_{K,,\mathrm{bas}}$ 和 $\mathrm{Sh}_{\mu}^{\mathrm{can}}{}_{,K,\mathrm{bas}}$ 等维，维数为 $\langle\rho,\mu\rangle$。此外，存在一个典范的 $\mathcal{H}_{K,\mathbb{Q}_\ell}$-等变图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) & \xrightarrow{\cong} & C(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V_{\mu^*}^{\mathrm{Tate}_p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) & \xrightarrow[\cong]{} & C(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V_{\mu_I^*}^{\mathrm{Tate}_p}, \end{array}$$

其中 $C(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 表示函数空间 $\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K \to \mathbb{Q}_\ell$。

(2) 设 π_f 是一个不可约 $\mathcal{H}_{K,\mathbb{Q}_\ell}$-模，并且

$$\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}})[\pi_f] := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{K,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}}(\pi_f, \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}})) \otimes \pi_f$$

其 π_f-等型分量。如果该分量的 *Satake*参数 $\pi_{f,p}$ 的 π_f 在 p 处V_{μ^*}按照定义9.12的意义是一般的，那么循环类映射的限制

$$\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}})[\pi_f] \subseteq \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) \xrightarrow{\mathrm{cl}} \mathrm{H}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu\rangle))$$

是单射。

(3) 假设 $\mathrm{Sh}^{K^pK_p}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是一个紧酉群志村簇，并令 π_f^p 为一个不可约的 $\mathcal{H}_{K^p,\mathbb{Q}_\ell}$-模。那么循环类映射 cl的 π_f^p -等型分量满射到

$$\sum_{\pi_p} T^{\langle\rho,\mu\rangle}(\pi_p\pi_f^p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \pi_p\pi_f^p$$

如果 π_p 的 *Satake*参数都强 V_{μ^*}-一般，其中 π_p 遍历那些不可约表示，使得局部 *Hecke* 代数 $\mathcal{H}_G$ 的表示满足 $\pi_p\pi_f^p$ 出现在$C(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K, \mathbb{Q}_\ell)$中。

注 9.16。 一旦注 8.3 中的猜想得到证明，上述第 (3) 部分中的和便可以替换为单个不可约的 $\mathcal{H}_{K,\mathbb{Q}_\ell}$-模 π_f。

证明。 (1) 由命题 6.5，条件 $V_{\mu^*}^{\mathrm{Tate}_p} \neq 0$ 等价于基本元素 $b \in B(G, \mu^*)$ 是非常特殊的。维数结论以及 Borel–Moore 同调的计算随即由推论 9.9 得出。

(2) 由推论 6.12 和推论 9.9，我们得到典范分解

$$X^{\mathrm{spl}}_{\leq\mu^*}(b) = \bigcup_{\mathbf{b}\in\mathbb{MV}^{\mathrm{spl},\mathrm{Tate}_p}_{\mu^*}} X^{\mathbf{b},\mathrm{spl}}_{\leq\mu^*}(b)$$

and

$$\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}} = \bigcup_{\mathbf{b}\in\mathbb{MV}^{\mathrm{spl},\mathrm{Tate}_p}_{\mu^*}} \mathrm{Sh}^{\mathbf{b},\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}.$$

如 [XZ17，§A.2。18],存在循环类映射

$$\mathrm{cl}(\mathbf{b})\colon \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathbf{b},\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) \cong C(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{H}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sh}_{\mu,K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu\rangle))$$

and

$$\mathrm{cl} := \bigoplus_{\mathbf{b}\in\mathbb{MV}^{\mathrm{spl},\mathrm{Tate}_p}} \mathrm{cl}(\mathbf{b}) : \bigoplus_{\mathbf{b}\in\mathbb{MV}^{\mathrm{spl},\mathrm{Tate}_p}} \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathbf{b},\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) \to \mathrm{H}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Sh}_{\mu,K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu\rangle)).$$

设 $\tau^* \in X_*(Z_G) \subseteq X_*(T)$，使得 p^{τ^*} 表示基本元素（非常特殊） $b \in B(G, \mu^*)$，命题6.5。于是，我们可以将定理 8。1 的证明应用于推论 9。8中的奇异 Hecke 对应，从而得到一个映射

$$\mathrm{JL}_{\tau_I,\mu}\colon \mathrm{H}^0_c(\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau,K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\mathbf{J}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}}(\widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_I}}, \widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu}}) \to \mathrm{H}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}_{c}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu\rangle)).$$

现在，对于 $\mathbf{b} \in \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{,\mu^*}{}^{\mathrm{Tate}_p}$，令 $\lambda \in X_*(T)$ 为满足 $\mathbf{b} \in \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu^*}(\lambda^*)$ 的唯一元素。于是由引理 6.13，存在一个最小的 $\nu_{\mathbf{b},I} \in X_*(T)^+_I$，使得 $\lambda_I + \nu_{\mathbf{b},I} - \sigma(\nu_{\mathbf{b},I}) \in X_*(T)^+_I$，且 $\mathbf{b}$ 属于命题 5.24 中映射 $\iota^{\mathrm{spl}}_{\mathbb{MV}}\colon \mathbb{S}^{\mathrm{spl}}_{\nu^*_{\mathbf{b}},I,\mu^*|\lambda^*_I+\nu^*_I} \to \coprod_{\lambda\in X_*(T)\colon \lambda\mapsto\lambda_I\in X_*(T)_I} \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{\mu^*}(\lambda^*)$ 的像。令 $\tau_{\mathbf{b},I} := \lambda_I + \nu_{\mathbf{b},I} - \sigma(\nu_{\mathbf{b},I})$，由注 6.14 可知它是中心的。于是 $\mathbf{a} := (\iota^{\mathrm{spl}}_{\mathbb{MV}})^{-1}(\mathbf{b})$ 给出 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{spl}}_{\nu^*_{\mathbf{b},I},\mu^*|\tau^*_{\mathbf{b},I}+\sigma(\nu^*_{\mathbf{b},I})}$ 的一个不可约分支，从而得到一个元素

$$\mathbf{a}_{\mathrm{in}} \in \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}}(V^{\mathrm{can}}_{\nu^*_{\mathbf{b},I}} \otimes V^{\mathrm{spl}}_{\mu^*}, V^{\mathrm{can}}_{\tau^*_{\mathbf{b},I}} \otimes V^{\mathrm{can}}_{\sigma(\nu^*_{\mathbf{b},I})}) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}}(V^{\mathrm{can}}_{\sigma(\nu_{\mathbf{b},I})} \otimes V^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b},I}} \otimes V^{\mathrm{can}}_{\nu^*_{\mathbf{b},I}}, V^{\mathrm{spl}}_{\mu})$$

根据命题 5.18 (3)。由 (7.10)，这给出了 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}}(\widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b},I}}}, V^{\mathrm{spl}}_{\mu})$ 中的一个元素。这个元素可代入映射 $\mathrm{JL}_{\tau_{\mathbf{b},I},\mu}$，而图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^0_c(\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b}},K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\quad\cong\quad} & \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathbf{b},\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}}) \\ & {\scriptstyle \mathrm{JL}_{\tau_{\mathbf{b},I},\mu}(\mathbf{a}_{\mathrm{in}})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{cl}(\mathbf{b})} & \\ & \mathrm{H}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}_c(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu\rangle)) & \end{array}$$

由命题7.21可交换；此处 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b}},K}$ 是与 $\mathbb{G}'$ 以及$\tau_{\mathbf{b},I}$的某个提升 $\tau_{\mathbf{b}}$ 相关联的弱 Shimura 簇的特殊纤维。

另一方面，我们有一个映射 $\mathrm{cl}'(\mathbf{b})\colon \mathrm{H}^{\langle 2\rho\ \mu\rangle}_c(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K}, \mathbb{Q}_\ell(\langle\rho,\mu\rangle))^{\frown} \to \mathrm{H}^0_c(\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b}},K}, \mathbb{Q}_\ell)$，它与循环类映射对偶 [XZ17，§A.2.18]；此处我们关键地使用了 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu\ K,}$的光滑性。此外，与上一段类似，我们有映射

$$\mathrm{JL}_{\mu,\tau_{\mathbf{b},I}}\colon \mathrm{H}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}_c(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\mu\rangle)) \otimes_{\mathbf{J}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}}(\widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu}}, \widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b},I}}}) \to \mathrm{H}^0_c(\mathrm{Sh}^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b}},K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

and

$$\mathbf{a}_{\mathrm{out}} \in \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}}(V^{\mathrm{can}}_{\tau^*_{\mathbf{b},I}} \otimes V^{\mathrm{can}}_{\sigma(\nu^*_{\mathbf{b},I})}, V^{\mathrm{can}}_{\nu^*_{\mathbf{b},I}} \otimes V^{\mathrm{spl}}_{\mu^*}) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{G}^I_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}}(V^{\mathrm{can}}_{\sigma(\nu^*_{\mathbf{b},I})} \otimes V^{\mathrm{spl}}_{\mu} \otimes V^{\mathrm{can}}_{\nu_{\mathbf{b},I}}, V^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b},I}}),$$

并且映射 $\mathrm{cl}'(\mathbf{b})$ 与 $\mathrm{JL}_{\mu,\tau_{\mathbf{b},I}}(\mathbf{a}_{\mathrm{out}})$ 一致。因此，若 $\{\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_r\}$ 是 $\mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{,\mu^*}{}^{\mathrm{Tate}_p}$ 的元素，则来自基本Newton层的循环类的交矩阵具有 (i,j)-元

$$\mathrm{JL}_{\mu,\tau_{\mathbf{b}_j,I}}(\mathbf{a}_{j,\mathrm{out}}) \circ \mathrm{JL}_{\tau_{\mathbf{b}_i},I,\mu}(\mathbf{a}_{i,\mathrm{in}}). \tag{9.3}$$

对于 i 和 j，考虑由下式诱导的态射 $V^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b}_i}.\ I} \to V_{\text{可以}\tau_{\mathbf{b}_j}\ I}$

$$\Xi_{V^{\mathrm{can}}_{\nu^*_{\mathbf{b}_j,I}}}(\mathbf{a}_{j,\mathrm{out}}) \circ \Xi_{V^{\mathrm{can}}_{\nu^*_{\mathbf{b}_i,I}}}(\mathbf{a}_{i,\mathrm{in}})\colon \widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b}_i,I}}} \to \widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu}} \to \widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b}_j,I}}},$$

其中，$\Xi_{_}$ 的定义方式与（7.10）类似。这诱导出向量丛 γ 上的一个自同态$\bigoplus_{\mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{,\mu^*}{}^{\mathrm{Tate}_p}} \widetilde{V_{\tau_{\mathbf{b}_i}\ I}}$可以. 在 $\widehat{G}^I\sigma/\widehat{G}$上。为了确定交矩阵（9.3）的行列式何时可逆，我们可以考虑由自同态 γ得到的矩阵，因为 Jacquet–Langlands 映射 JL 与复合相容。

γ的行列式可视为 $\widehat{G}^I\sigma_p/\widehat{G}^I$的整体截面，即视为 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\widehat{G}^I}$中的一个元素。为计算它，考虑短正合列

$$1 \to \Delta \to \widehat{G}' := \widehat{G}^I_{\mathrm{der}} \times Z(\widehat{G}^I) \to \widehat{G}^I \to 1$$

如（9.1）中所示，σ_p作用于其上。于是，[XZ19, (4.1.3)] 给出一个同构 $\Gamma(\widehat{G}^I\sigma_p/\widehat{G}^I, \mathcal{O}_{\widehat{G}^I\sigma_p/\widehat{G}^I}) \cong \Gamma(\widehat{G}'\sigma_p/\widehat{G}', \mathcal{O}_{\widehat{G}'\sigma_p/\widehat{G}'})^{\Delta_{\sigma_p}}$，其中 Δ_{σ_p} 表示 Δ的 σ_p-余不变量。因此，只需计算$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$作为 $G'\sigma_p/G'$的整体截面的行列式，即作为 $\mathbf{J}' := \mathbf{J}_{\widehat{G}'}$中的一个元素。

现在，$\tau_I \in X_*(T)_I \cong X^*(\widehat{T}^I)$在 $X^*(Z(\widehat{G})^I)$上的限制是 $V_{\mathrm{spl}\mu}$ 的中心特征标（更确地说，是 $V_{\mathrm{spl}\mu}$ 作为 $\widehat{G}^I$-表示的每个直和项的中心特征标）。$\lambda_I = \tau_{\mathbf{b}_i,I} + \sigma(\nu_{\mathbf{b}_i,I}) - \nu_{\mathbf{b}_i,I} \in X^*(\widehat{T}^I)$在 $Z(\widehat{G})^I \subseteq \widehat{T}^I$上的限制于是与 τ_I一致；沿 $\widehat{G}' = \widehat{G}^I_{\mathrm{der}} \times Z(\widehat{G})^I \to Z(\widehat{G})^I$限制，我们也可以将其视为 $\widehat{G}'$的一个特征。由此得到向量丛的同构 $\widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_I}} \cong \widetilde{V^{\mathrm{can}}_{I\ \tau_{\mathbf{b}_i}}}$：$f \mapsto fe^{\nu_{\mathbf{b}_i,I}|Z(\widehat{G})^I}$，其中这些向量丛定义在 $\widehat{G}'\sigma_p/\widehat{G}'$上；处理 $\widehat{G}'\sigma_p/\widehat{G}'$上的情形时，我们可以将上文所有的$\tau_{\mathbf{b},I}$替换为 τ_I。此外，集合 $\left\{\widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_I}} \xrightarrow{\cong} \widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_{\mathbf{b}_i,I}\ \mathrm{a}\ i\ \mathrm{in}}}, \widetilde{V^{\mathrm{spl}}_{\mu}} \;\middle|\; i \in \mathbb{MV}^{\mathrm{spl}}_{,\mu^*}{}^{\mathrm{Tate}_p}\right\}$

由 [XZ19，定理4.3可知构成$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}'}(\widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_I}}, \widetilde{V_{\mathrm{spl}\mu}})$的一组基。2], 对偶地，我们得到$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}'}(V_{\mathrm{spl}\mu}, \widetilde{V^{\mathrm{can}}_{\tau_I}})$的一组基。

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$行列式 $\mathcal{D}$ （作为 $G'\sigma_p/G'$上的一个整体截面）因此可以认作该配对的行列式

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}'}(\widetilde{V_{\tau_I}^{\mathrm{can}}}, \widetilde{V_{\mu}^{\mathrm{spl}}}) \otimes_{\mathbf{J}'} \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}'}(\widetilde{V_{\mu}^{\mathrm{spl}}}, \widetilde{V_{\tau_I}^{\mathrm{can}}}) \to \mathbf{J}',$$

而后者又可识别为

$$\mathbf{J}'(V_{\mu}^{\mathrm{spl}} \otimes V_{\tau_I}^{\mathrm{can},*}) \otimes_{\mathbf{J}'} \mathbf{J}'(V_{\tau_I}^{\mathrm{can}} \otimes V_{\mu}^{\mathrm{spl},*}) \to \mathbf{J}'.$$

由于循环类映射 $\mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K,\mathrm{bas}})[\pi_f] \to \mathrm{H}_c^{\langle 2\rho\ \mu\rangle}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{spl}}_{\mu,K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\langle\rho,\overline{\mu}\rangle))$ 是单射，只要 $\pi_{f,p}$ 的 Satake 参数不属于由 $\mathcal{D}$确定的除子，定理的第（2）部分便可由命题 9.11. 推得。

(3) 设 π_f^p 是一个不可约的 $\mathcal{H}_{K^p}$-模，π_p 是一个不可约的 $\mathcal{H}_{K_p}$-模。令 $m_{\mathbb{G}'}(\pi_p\pi_f^p)$ 表示 $\pi_p\pi_f^p$ 在 $C(\mathbb{G}'(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)/K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中的重数。

现在，$W(\pi_p\pi_f^p) := \bigoplus_{i=0}^{\langle 2\rho,\ \mu\rangle} W^{2i}(\overline{\pi}_p\pi_f^p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(i))$ 具有 $\Gamma_{\mathbb{E}}$ 的作用，其在 $\Gamma_{E^{\mathrm{Gal}}}$ 上的限制可通过 Γ_k 分解（因为 $\mathscr{S}_{\text{分裂}\,K}(\mathbb{G},\mathbb{X})$ 是 $\mathcal{O}_{E^{\mathrm{Gal}}}$ 上的适当光滑映射）。另一方面，我们有一个通过复合得到的 Γ_k 在 V_{μ^*} 上的表示

$$\Gamma_k \to \widehat{G}^I \rtimes \Gamma_k \to \mathrm{GL}(V_{\mu^*}).$$

这里，映射 $\Gamma_k \to \widehat{G}^I \rtimes \Gamma_k$ 是附属于 [Zhu15, vdH24b] 中所述意义下的球面朗兹参数，在 Satake 同构 [vdH24a定理 10 下11]（基变换到 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$之后；特别地，这取决于 $q^{\frac{1}{2}}$的选择）。此外，表示 $\widehat{G}^I \rtimes \Gamma_k \to \mathrm{GL}(V_\mu^*)$ 是 [vdH24b定义 5 中的表示2], ，即，它在 $\widehat{G}^I \subseteq \widehat{G}^I \rtimes \Gamma_k$ 上的限制与最高权为 μ^*的不可约表示沿 $\widehat{G}^I \subseteq \widehat{G}$ 的限制一致，而 Γ_k作用固定这个最高权空间。

于是，结合 [SS13定理 91] 与 [XZ17定理 2.21], 可知，在 φ_v-表示的格罗滕迪克群中，有

$$m_{\mathbb{G}'}(\pi_p\pi_f^p)[V_{\mu^*}] = [W(\pi_p\pi_f^p)]. \tag{9.4}$$

事实上，注意到 [XZ17，§2。2] 不需要任何非分歧假设。此外，[SS13] 使用与 π_p 由 Harris–Taylor 构造的 [HT01]相关联的朗兹参数。但众所周知，这与 Fargues–Scholze 局部 Langlands 对应 [FS21，定理 IX.7。4], 相一致，而后者又与我们通过 [vdH24b，推论 4。5]所作的构造相容。

最后，定理的第 (3) 部分可由（9.4）通过对两边应用$\bigcup_{j\geq 1}(-)^{\varphi_v^j}$ 得到，并使用引理9。13。
□

Appendix A. Complements on étale motives

在本附录中，我们回顾并汇集有关 ´étale 动机的必要背景知识；这是正文大部分内容中使用的层论。更多细节请参见 [vdH24a，§2]，我们会着重说明其中尚未讨论的部分。为便于读者理解，且鉴于这些内容大概都是众所周知的，我们将从简介绍，并聚焦于正文所需的应用，而不在尽可能一般的情形下发展六函子形式体系。在整个附录中，k 表示一个特征为 p的有限域，或其代数闭包。此外，Λ表示任意一个（离散）$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-代数。

A.1. **动机六函子形式体系回顾。** 本文关注的动机理论是 ´étale 动机理论，它由 [CD16] 通过 h-拓扑构造（并在 ∞-范畴的层面上由 [Rob14、Kha16、Pre23]进行了提升）；特别是，该理论满足 h-下降。如 [RS21 定理 210]（另见 [vdH24a 命题 22]）所述，该理论在完美化函子下不变，因此下降为一个函子

$$\mathrm{DM}(-) := \mathrm{DM}(-,\Lambda)\colon (\mathrm{Sch}_k^{\mathrm{pfp}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{St}}_\Lambda\colon (f\colon X\to Y) \mapsto (f^!\colon \mathrm{DM}(Y)\to\mathrm{DM}(X)),$$

它配备了完整的六函子形式体系。这里，$\mathrm{Sch}_k^{\mathrm{pfp}}$ 是完美概形构成的范畴，这些概形在 k 上完美有限表现（即局部上是 k上有限表示概形的完美化），而 $\mathrm{Pr}_\Lambda^{\mathrm{St}}$ 是由稳定可呈示的 Λ-线性 ∞-范畴及保余极限的 Λ-线性函子构成的 ∞-范畴。

按照 [RS20中的定义 2.2 应用 Kan延拓。1]（固定一个足够大的正则基数 κ，并且仅考虑仿射 k-概形，这些概形是 κSch 中仿射概形的-滤余极限$_k^{\mathrm{pfp}}$），便可将其延拓为一个函子

$$\mathrm{DM}(-) := \mathrm{DM}(-,\Lambda)\colon (\mathrm{PreStk}_k^{\mathrm{perf}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}_\Lambda^{\mathrm{St}}\colon (f\colon X \to Y) \mapsto (f^!\colon \mathrm{DM}(Y) \to \mathrm{DM}(X)), \tag{A.1}$$

其中 $\mathrm{PreStk}_k^{\mathrm{perf}} = \mathrm{Fun}((\mathrm{AffSch}_k^{\mathrm{perf}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{An})$ 是 k 上完美预叠的范畴，即以 k 上完美仿射概形范畴为底的预层，其取值于 anima（即 ∞-群胚）。更准确地说，这意味着对于完美预叠 X，我们有

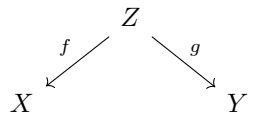
$$\mathrm{DM}(X) \cong \varprojlim_{T \to X} \mathrm{DM}(T), \tag{A.2}$$

where T 在配备到 X 的映射的完美仿射概形范畴中取值，and

$$\mathrm{DM}(T) \cong \varinjlim_{T \to T'} \mathrm{DM}(T'), \tag{A.3}$$

其中 T' 遍历在 $\mathrm{Spec}\ k$上有限呈示的完美仿射概形；参见 [RS20，注 2.2.2 (i)]。然而，尽管 $f^!$ 对预叠的所有态射 f 均存在，这种经 Kan延拓的形式体系并不对所有态射 f都具备六函子。

在 [vdH24a，§22] 中解释了 f^*、f_*和 $f_!$ 为何存在于归纳概形的态射上（在 f^*的情形下，要求这些态射为概形态），以及素光滑群作用下概形态射的商上。更一般地，[RS20，命题 2.33] 证明了对于一般的归纳代数栈态射（局部有限型），存在一个左伴随$f_!$，它是 $f^!$ 的左伴随。本文还需要代数栈的可表态射所对应的 *-函子。为构造这些函子，回忆一下，对于一个范畴 $\mathcal{C}$，存在 ∞-对应范畴 $\mathrm{Corr}(\mathcal{C})$，其对象与$\mathcal{C}$相同，而其中的态射 $X \to Y$ 是如下图表



(A.4)

在 $\mathcal{C}$ 中；关于精确定义，以及该范畴上的对称幺半结构，我们参见 [GR17，第 7], [章、2], HM24，第 §2]，节，或 [Zhu25，第 §8.1] 节。我们还注意到，这个范畴不同于我们将在 §A.2 中回顾的动机的（或上同调的）对应。要求映射 $f\colon\ Z \to Y$ 属于 E 中的一类态射，我们得到一个全子范畴 $\mathrm{Corr}(\mathcal{C})_E \subseteq \mathrm{Corr}(\mathcal{C})$。于是，动机六函子形式主义 $\mathrm{DM} : (\mathrm{Sch}_k^{\mathrm{pfp}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}_\Lambda^{\mathrm{St}}$ 可以组织成一个松对称幺半函子

$$\mathrm{DM}\colon \mathrm{Corr}(\mathrm{Sch}_k^{\mathrm{pfp}}) \to \mathrm{Pr}_\Lambda^{\mathrm{St}},$$

将如 (A.4) 中那样的对应发送到函子 $f_* g^!$。（注意，这不同于通常的约定，通常约定会是 $f_! g^*$，但这与 [Zhu25，§10。4]中的形式体系一致。此外，松幺半性要求 $\boxtimes$ 与 !-拉回和 *-前推相容；根据我们的假设，由 [JY21，命题 2.3.5 和 2.1，这一条件成立。20]。）令 $\mathrm{AlgStk}^{\mathrm{pfp}}$ 为完美有限表示的完美代数栈所成的范畴，令 Repr 为这类栈中可由概形表示的态射类。（为简单起见，也为避免处理代数空间的一般态射之间的 *-函子，我们假设所有代数栈的对角态射均可由概形表示。这对所有商栈以及本文中出现的所有代数栈都成立。）那么 [Zhu25，命题 845] 给出了一个延拓

$$\mathrm{DM}\colon \mathrm{Corr}(\mathrm{AlgStk}^{\mathrm{pfp}})_{\mathrm{Repr}} \to \mathrm{Pr}_\Lambda^{\mathrm{St}},$$

它与此前构造的函子 DM 一致。所得的 $(-)_*$ 和 $(-)^!$ 显然与余极限可交换，而与 [RS20，命题 2.33] 中的论证相同的方法表明，它们与极限可交换。因此，对于可表态射，我们得到左伴随 $(-)^*$ ，而对一般情形，则得到 $(-)_!$ 。

此外，对于代数栈 X，范畴 $\mathrm{DM}(X)$ 具有对称幺半结构，使得 *-拉回函子是对称幺半的；我们将幺半单位记为 $\mathbb{1}_X$，或简记为 $\mathbb{1}$。事实上，由于我们假设 X 的对角态射 Δ_X 可由概形表示，该函子由 $-\otimes-:=\Delta^*(-\boxtimes-)$ 给出，其中外积 $\boxtimes$ 由 DM 的松对称幺半结构给出。此张量积在每个变量上都与余极限可交换，因此 $\mathrm{DM}(X)$ 是闭对称幺半的。内 Hom 记为

$$\underline{\mathrm{Hom}}_X(-,-)\colon \mathrm{DM}(X)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{DM}(X)\to\mathrm{DM}(X).$$

我们也记录代数栈上动机的各种 K¨unneth 公式。

命题 A.1. 设 $f_i\colon X_i\to Y_i$，其中 $i=1$、2 是有限呈示代数栈之间的可表态射，并考虑交换图表

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longleftarrow & X_1\times_k X_2 & \longrightarrow & X_2\\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_2}\\ Y_1 & \longleftarrow & Y_1\times_k Y_2 & \longrightarrow & Y_2. \end{array}$$

于是函子之间存在自然同构

$$f_1^*(-)\boxtimes f_2^*(-)\cong f^*(-\boxtimes-), \tag{A.5}$$
$$f_{1,!}(-)\boxtimes f_{2,!}(-)\cong f_!(-\boxtimes-), \tag{A.6}$$
$$f_{1,*}(-)\boxtimes f_{2,*}(-)\cong f_*(-\boxtimes-), \tag{A.7}$$
$$f_1^!(-)\boxtimes f_2^!(-)\cong f^!(-\boxtimes-), \tag{A.8}$$

and

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{X_1}(-,-)\boxtimes\underline{\mathrm{Hom}}_{X_2}(-,-)\cong\underline{\mathrm{Hom}}_{X_1\times_k X_2}(-\boxtimes-,-\boxtimes-). \tag{A.9}$$

证明。固定光滑图册 $v_i\colon V_i\to Y_i$，并设 $u_i\colon U_i:=V_i\times_{Y_i}X_i\to X_i$。我们还有光滑图册 $V:=V_1\times_k V_2\to Y_1\times_k Y_2$ 和 $U:=U_1\times_k U_2\to X_1\times_k X_2$。于是函子$f^*$、$f_*$、$f_!$、$f^!$与拉回到光滑图册相容。当 X_i、Y_i为概形时，该命题已在 [JY21，定理 1.2 中得到证明。2]一般而言，可以利用六函子形式体系的形式性质，以同样方式构造这些映射。为了验证这些映射是同构，我们可以将其拉回到光滑图册；该拉回是保守的，并且与映射的构造相容，从而将问题归结为概形的情形。□

类似地，将问题归结为概形的情形，并结合 [CD19，定理 2.4.50 (5)], ，可得如下结论。

命题 A.2. 设 $f\colon X\to Y$ 是 *pfp* 代数栈之间的可表态射，并设$M,N\in\mathrm{DM}(Y)$ 和 $L\in\mathrm{DM}(X)$。那么存在自然同构

$$(f_!L)\otimes M\cong f_!(L\otimes f^*M), \tag{A.10}$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_Y(f_!L,M)\cong f_*\underline{\mathrm{Hom}}_X(L,f^!M), \tag{A.11}$$

and

$$f^!\underline{\mathrm{Hom}}_Y(M,N)\cong\underline{\mathrm{Hom}}_X(f^*M,f^!N). \tag{A.12}$$

回顾一下（在我们对底概形 k的假设下），对于任意 pfp 概形 X，$\mathrm{DM}(X)$ 中紧对象的范畴与 $\mathrm{DM}_c(X)$ 的范畴相同；后者由可构造对象组成（即由完美光滑 X-概形的动机的泰特扭曲生成的厚稳定子范畴）[CD16，定理 5.2。4]。尽管紧致性是纯粹的范畴论概念，并且对于 pfp 代数栈 X，无法通过拉回到光滑图册来检验 $\mathrm{DM}(X)$ 中的紧致性，但我们可以定义 $\mathrm{DM}(X)$ 的一个子范畴，它满足下降性质以及某些有限性性质。

也就是说，由于 ´pfp 概形上的 étale 动机所对应的六个函子保可构造对象[CD16，推论 6.2，14],我们得到一个六函子形式体系

$$\mathrm{DM_c}(-) := \mathrm{DM_c}(-,\Lambda)\colon (\mathrm{Sch}_k^{\mathrm{pfp}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_{\infty,\Lambda}^{\mathrm{perf}}\colon X \mapsto \mathrm{DM_c}(X),$$

取值于小型幂等完备稳定 Λ-线性 ∞-范畴，且态射为正合函子。通过应用与 DM 相同的 Kan 延拓过程，我们可以将 DMc 延拓为一个函子

$$\mathrm{DM_c}(-) := \mathrm{DM_c}(-,\Lambda)\colon (\mathrm{PreStk}_k^{\mathrm{perf}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_{\infty,\Lambda}^{\mathrm{perf}}\colon X \mapsto \mathrm{DM_c}(X). \tag{A.13}$$

这就为任意完美预叠 X给出了一个全子范畴 DMc(X) ⊆DM(X)，称为可构造动机范畴（但一般而言，它并不等同于紧对象范畴）。此外，(A.2) 和 (A.3) 对 DMc仍然成立，但我们必须在 $\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{perf}}$ 中取余极限，而不是在 $\mathrm{Pr}_\Lambda^{\mathrm{St}}$中取（对于极限而言，两者没有区别）。特别地，对于 pfp 代数栈 X，动机 M ∈DM(X) 可构造，当且仅当其 !-拉回到某个（等价地，任意）光滑图册上可构造。若 X 是沿闭浸入取这些 pfp 代数栈 X_i 的余极限，则有

$$\mathrm{DM}(X) \cong \varinjlim_i \mathrm{DM}(X_i),$$

其中过渡映射由推前给出，且 M ∈DM(X) 当且仅当它属于 DMc(X_i) ⊆DM(X_i) → DM(X) 对某个 X_i 而言的本质像时才是可构造的。

A.2. **关于动机对应的回顾**。 接下来，我们回顾动机对应的形式体系。大部分证明都很容易，将遵循 [XZ17，§A.2], 但我们将采用略有不同的设置。具体而言，我们不再只处理代数栈，而是允许一类几何对象，其中还将纳入第 7 节中的局部 shtuka 模叠。

假设 A.3。 每当我们处理动机对应时，都将假设如下设置： c_X： $C \to X$ 和 c_Y： $C \to Y$ 是预层栈之间的态射，满足

(1) $X = \lim_{\longleftarrow i\geq 0} X_i$，其中每个 X_i 都是 Spec k 上的代数栈，且过渡态射 $X_{i+1} \to X_i$ 要么是仿射丛，要么是沿一个态射的基变换

$$*/H \to */H',$$

其中 $H \to H'$ 是具有分裂幺幂核的代数 k-群之间的满射。对 Y也要求满足相同条件。(2) 存在一个映射 $c_{X,\,0}$： $C_0 \to X_0$，它可由概形表示，使得 $C_0 \times_{X_0} X \cong C$，且诱导映射 $C \cong C_0 \times_{X_0} X \to X$与 c_X一致。对 c_Y也要求满足相同条件。

特别地，我们得到一个表示 $C = \lim_{\longleftarrow i} C_0 \times_{X_0} X$，它满足条件 (1)。我们还得到一个由$c_{Y,\,0}$诱导的类似表示，但要强调的是，我们不要求这两个表示一致。

在上述假设下，我们可以如下计算 C， X， Y上的动机。

引理 A.4. 设 c_X： $C \to X$ 如假设 A.3所述。那么存在一个等价

$$\mathrm{DM}(C) \cong \varinjlim_i \mathrm{DM}(C_i),$$

其中过渡态射由 *!*-拉回给出，且是全忠实的。特别地，$\mathrm{DM}(C)$是一个闭对称幺半范畴。对于 X，也有类似的等价，并且与沿 c_X 的（非幺半）*!*-拉回相容。

证明。 由于映射 $C_j \to C_i$ 或由仿射丛给出，或由沿着 $*/H \to */H'$，其中 $H \twoheadrightarrow H'$ 具有分裂幺幂核，过渡态射由 !-拉回给出，根据同伦不变性，它们确实是全忠实的。为了计算 DM(C)，我们可以假设所有过渡映射 $C_{i+1} \to C_i$ 都是仿射丛。事实上，在另一种情况下， C_{i+1} 将具有 C_i/U的形式，其中 U 是某个平凡作用的分裂幺幂群概形，因此 !-拉回 DM(C_i) →DM(C_{i+1}) 是一个等价，在下文中我们可以放心地忽略它。注意，在余极限 lim⟶i DM(C_i) 中，由 !-拉回给出的过渡映射可以用 *-拉回替换，因为

根据纯性。由于这些 *-拉回是对称幺半的，序列余极限具有对称幺半结构。它甚至是闭的，因为张量积在两个变量中都与余极限可交换。另一方面，取右伴随后，余极限甚至可以计算为 $\lim\limits_{\longleftarrow i}\mathrm{DM}(C_i)$，其中过渡映射由 *-前推给出。

现在，选取一个仿射光滑图册 $V_0 \to C_0$；拉回至 C_i 后得到一个仿射光滑图册 $V_i := V_0 \times_{C_0} C_i \to C_i$；我们还设 $V := V_0 \times_{C_0} C$，它仍然是仿射的。在这种情况下，我们确实有 $\mathrm{DM}(V) \cong \lim\limits_{\longleftarrow} \mathrm{DM}(V_i)$，其过渡态射由 *-前推给出。事实上，这由 (A.3) 得出，因为任意映射 $V \to T'$，其中 T' 是一个完美仿射概形且完美地属于有限型，都将 $\check{}$ 经过某个 V_i。对 $V_i \to C_i$ 的切赫神经应用同样的论证，并利用在下降等价[RS20, Example 2.2.19] 中，由基变换可知，沿 *-前推的极限与沿 !-拉回的极限可交换，从而得到 $\mathrm{DM}(C) \cong \lim\limits_{\longrightarrow i}\mathrm{DM}(C_i)$。

最后的断言显然成立。 □

因此，我们可以定义

$$c_X^*\colon \mathrm{DM}(X) \to \mathrm{DM}(C)$$

逐项利用这个余极限来定义，因为由纯性，*-拉回 $\mathrm{DM}(X_i) \to \mathrm{DM}(C_i)$ 与过渡映射（由 !-拉回给出）可交换。类似地，我们可以利用这个余极限定义 $c_{X,*}$，$c_{X,!}\colon \mathrm{DM}(C) \to \mathrm{DM}(X)$，并得到伴随 $(c_X^*, c_{X,*})$ 和 $(c_{X,!}, c_X^!)$。

现在我们来定义动机对应。这一概念由来已久，最早可追溯至 [SGA77] 中关于ℓ-进上同调的讨论；例如，动机对应已在 [Cis21，定义3.4.2中得到研究。1]。

定义A.5。设 $(c_X, c_Y)\colon C \to X \times Y$满足假设 A.3，并设 $M \in \mathrm{DM}(X)$ 和$N \in \mathrm{DM}(Y)$。从支撑在 (X, M) 到 (Y, N) 且支撑于 C的动机对应是一个态射

$$\alpha\colon c_X^* M \to c_Y^! N$$

在 $\mathrm{DM}(C)$ 中。我们有时也将 α 写作：$(X, M) \to (Y, N)$，并用 $\mathrm{Corr}_C(M, N)$ 表示支撑在 C 上、从 (X, M) 到 (Y, N) 的对应的同构类集合（关于动机对应之间的自然同构概念）。

特别地，尽管 $\mathrm{Corr}_C(M, N)$ 具有 anima 的结构，但就本文而言，只需考虑其底层集合。

根据引理 A.4，$\mathrm{DM}(C)$ 具有内 Hom。由于任意预层栈都具有对偶化动机ω，我们可以定义 Verdier 对偶函子

$$\mathbb{D} := \underline{\mathrm{Hom}}_C(-, \omega_C)\colon \mathrm{DM}(C)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{DM}(C).$$

限制在可构造对象 M上时，Verdier 对偶会交换 *-拉回与 !-拉回，以及 *-推前与 !-推前。此外，$\mathbb{D}$ 在可构造对象上诱导一个对合。这两项结论都可以在某个 C_i的光滑图册上经拉回后验证，此时它们可由 [CD16，推论 6.3，15] 以及 [CD19，定理 2.4.50 (5)]得出。

例 A.6. 以下是一些动机对应的例子，沿用假设 A.3 的记号。

(1) 对任意 $M \in$动机范畴(C)，存在推前对应

$$(\Gamma_{c_Y})_!\colon M \to c_Y^! c_{Y,!} M \in \mathrm{Corr}_C(M, c_{Y,!}M),$$

它源于伴随 $(c_{Y,!}, c_Y^!)$。

(2) 对任意 $N \in$动机范畴(C)，存在拉回对应

$$\Gamma_{c_Y}^*\colon c_Y^* N \to c_Y^* N \in \mathrm{Corr}_C(N, c_Y^* N),$$

由恒等态射给出。

(3) 设 $M \in \mathrm{DM}_{\mathrm{c}}(X)$，且 $N \in \mathrm{DM}_{\mathrm{c}}(Y)$。那么对于任意对应 $\alpha \in \mathrm{Corr}_C(X, Y)$，都存在一个自然的对偶对应 $\mathbb{D}(\alpha) \in \mathrm{Corr}_C(\mathbb{D}(N)\ \mathbb{D}(M))$。

(4) 现在假设 X 是一个有限呈示概形，并令 $M \in \mathrm{DM}(X)$。那么单位映射 $\mathbb{1} \to \Delta^!(M \boxtimes \mathbb{D}(M))$ 诱导一个对应

$$\delta_M \in \mathrm{Corr}_X\left((\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{1}), (X \times X, M \boxtimes \mathbb{D}(M))\right).$$

对偶地，余单位 $M \otimes \mathbb{D}(M) \to \omega_X$ 诱导一个对应

$$e_M \in \mathrm{Corr}_X\left((X \times X, M \boxtimes \mathbb{D}(M)), (\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{1})\right).$$

构造 A.7. 动机对应可以复合。事实上，设 $(C, c_X, c_Y, \alpha) \in \mathrm{Corr}_C(M, N)$ 与 $(D, d_Y, d_Z, \beta) \in \mathrm{Corr}_D(N, L)$ 为对应，其中 $M \in$动机范畴(X)、$N \in$动机范畴(Y) 与 $L \in$动机范畴(Z)。于是我们定义一个对应

$$\beta \circ \alpha \in \mathrm{Corr}_{C \times_Y D}(M, L)$$

通过如下复合

$$p^* c_X^* M \xrightarrow{p^*\alpha} p^* c_Y^! N \to q^! d_Y^* N \xrightarrow{q^!\beta} q^! d_Z^! L,$$

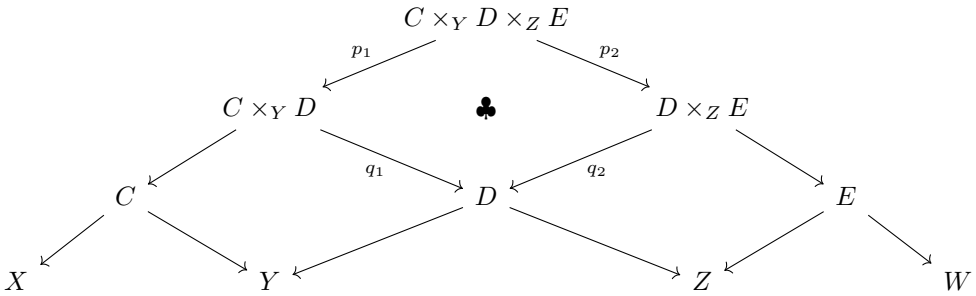
其中 $p\colon\ C \times_Y D \to C$ 与 $q\colon\ C \times_Y D \to D$ 为投影映射，而中间的态射伴随于基变换同构。更精确地说，我们可以限制到某个 Y_i，考虑诱导的代数栈 C_i 与 D_i，以及 $C_i \times_{Y_i} D_i$。由于它们都是 pfp 代数栈，根据六函子形式体系，我们确实得到所需的基变换同构。

另见 [Cis21，定义 3.4.2。6] 那里给出了另一种但等价的表述。

下面的引理很容易证明，但我们仍给出证明，以说明为什么不要求 C 在假设 A.3 中的两个表示彼此一致。类似的论证也适用于下面的构造（这里不再详细给出），这将简化正文中与受限局部 shtuka 的模空间相关的讨论。

引理 A.8. 构造 A.7 中定义的对应的复合是结合的.

证明。 考虑图表



其中各方块均为笛卡尔方块。设 $\alpha \in \mathrm{Corr}_C(X, Y)$、$\beta \in \mathrm{Corr}_D(Y, Z)$ 和 $\gamma \in \mathrm{Corr}_E(Z, W)$ 为动机对应。等式 $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha) \in \mathrm{Corr}^{C \times_Y D \times_Z E}(X, W)$ 可按通常方式通过基变换态射构造；唯一稍微微妙的点涉及标记为“♣”的方块。在那里，只需构造一个自然变换 $p_1^* \circ q_1^! \to p_2^! \circ q_2^*$。考虑 D_0，以及假设 A.3 中的 $(C \times_Y D)_0$ 和 $(D \times_Z E)_0$，并令 $(C \times_Y D \times_Z E)_0$ 为显然的纤维积。我们将 $(p_1)_0, (p_2)_0, (q_1)_0, (q_2)_0$ 记作这些代数栈之间的显然映射。于是可以构造函子的自然变换 $(p_1)_0^* (q_1)_0^! \to (p_2^!)_0 (q_2)_0^*$，因为所有对象都是通常的（完美）代数栈。由于相关函子依据纯性与光滑 !-拉回可交换，我们可以像引理 A.4 中那样，通过取余极限得出结论。□

这里还有另一种构造动机对应的方法。

引理 A.9。 设$(c_X, c_Y)\colon C \to X \times_k Y$如假设 A.3 所述，并设 $M \in$动机范畴(X)和$N \in$ 动机范畴$_c(Y)$。那么存在一个自然的双射

$$\mathrm{Corr}_C\left((X, M), (Y, N)\right) \cong \mathrm{Corr}_C\left((X \times_k Y, M \otimes \mathbb{D}(N)), (\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{1})\right)$$

$$\alpha \leftrightarrow \alpha^\sharp$$

证明。 该双射将 α 映到以下复合

$$(c_X \times c_Y)^*(M \boxtimes \mathbb{D}(N)) \cong c_X^* M \otimes c_Y^* \mathbb{D}(N) \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}} c_Y^! M \otimes \mathbb{D}(c_Y^! N) \to \omega_C.$$

□

构造 A.10。 考虑一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{c_X} & C & \xrightarrow{c_Y} & Y \\ {\scriptstyle f_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} \\ X' & \xleftarrow[d_X]{} & D & \xrightarrow[d_Y]{} & Y', \end{array} \tag{A.14}$$

其中 $(c_X,\ c_Y):\ C \to X \times_k Y$和 $(d_X,\ d_Y):\ D \to X' \times_k Y'$满足假设 A.3，且自然映射 $C \to X \times_{X'} D$ 由完美适当概形可表。那么对于 $M \in$ 动机范畴(X)、 $N \in$ 动机范畴(Y) 以及 $\alpha \in \mathrm{Corr}_C(M,\ N)$，我们可以将推前对应 $f_!\alpha \in \mathrm{Corr}_D(f_{X,\ !}M,\ f_{Y,\ !}N)$定义为以下复合

$$d_X^* f_{X,!} M \to f_! c_X^* M \xrightarrow{f_!\alpha} f_! c_Y^! N \to d_Y^! f_{Y,!} N,$$

其中第一个和最后一个箭头通过自然伴随构造（参见 [XZ17，(A.1.3) 和 (A.1.4)]）。

引理 A.11。 动机对应的推前与图表的垂直复合和水平复合均相容 (A.14)。

证明。该 引理 [XZ17，引理 A.28] 以及 [XZ17，引理 A.210] 的证明可推广到我们的情形。 □

接下来，我们引入对应的原光滑拉回，在此我们将稍微偏离 [XZ17，A.211]。

引理 A.12。设

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{f'} & C \\ {\scriptstyle c'_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_X} \\ X' & \xrightarrow[f]{} & X \end{array}$$

是完美预叠的一个笛卡尔图，其中 $c_X:\ C \cong$ 极限$_{\longleftarrow i} C_i \to X \cong$ 极限$_{\longleftarrow i} X_i$ 且 c'_X 满足假设 A.3，并且 $f \cong$ 极限$_{\longleftarrow i} f_i$ 是完全光滑的概形态射 $f_i:\ X'_i \to X_i$的极限。于是，相对纯性诱导出函子的自然等价

$$(f')^! c_X^* \cong (c'_X)^* f^!. \tag{A.15}$$

例如， f 可以是原代数群下的一个扭子，例如仿抛物群概形的正环群。

证明。 回顾引理 A.4， DM(X) $\cong$ 极限$_{\longrightarrow i}$ DM(X_i) 等等。对于每个 i，令 f'_i: $C'_i \to C_i$ 为 f_i的基变换；于是相对纯性给出一个等价

$$(f'_i)^! c_X^* \cong (c'_X)^* f_i^!.$$

通过取余极限即可得到该引理。 □

构造 A.13。 考虑一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{d_X} & D & \xrightarrow{d_Y} & Y' \\ {\scriptstyle f_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} \\ X & \xleftarrow[c_X]{} & C & \xrightarrow[c_Y]{} & Y, \end{array} \tag{A.16}$$

其中 $(c_X, c_Y):\ C \to X \times_k Y$与 $(d_X, d_Y):\ D \to X' \times_k Y'$满足假设 A.3，左方框是笛卡尔的，且 f_X 是如引理 A.12 中所述的完美光滑概形态射的极限。

设 $M \in$动机范畴(X)、 $N \in$动机范畴(Y) 与 $\alpha \in \mathrm{Corr}_C(M,N)$。然后我们将*pro*-光滑拉回对应 $f^!\alpha \in \mathrm{Corr}_D(f'^!_X M, f'^!_Y N)$定义为该复合

$$d_X^* f_X'^! M \xrightarrow{(A.15)} f^! c_X^* M \xrightarrow{f^!\alpha} f^! c_Y^! N \cong d_Y^! f_Y'^! N \in \mathrm{Corr}_D(f_X'^! M, f_Y'^! N).$$

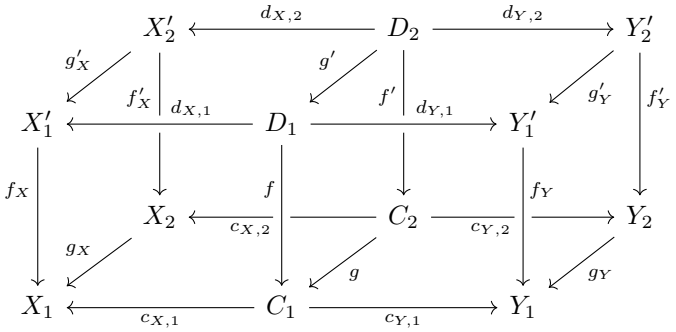
同样，这一构造满足自然的相容性。

引理 A.14. 动机对应的拉回与图表的垂直复合和水平复合均相容 (A.16)。

证明。 这可分别由 [XZ17，引理 A.2。14] 以及 [XZ17，引理 A.2。15] 证明。 □

我们还需要动机对应的适当推前与原光滑拉回之间的以下相容性。

引理 A.15. 考虑如下图表



其中，水平矩形如构造 $A.13$，垂直矩形如构造 $A.10$，顶点为 D_2、D_1、C_2、C_1 的方形是笛卡尔的，且映射 f_X、f_X'、f、f' 还可由完美适当概形表示。设 $M \in$动机范畴(X_1') 和 $N \in$动机范畴(Y_1')，并设$\alpha \in \mathrm{Corr}_{D_1}(M,N)$ 是一个动机对应。那么存在一个自然的对应交换图

$$\begin{array}{ccc} (X_2, g_X^! f_{X,!} M) & \xrightarrow{g^! f_!(\alpha)} & (Y_2, g_X^! f_{X,!} N) \\ \downarrow & & \uparrow \\ (X_2, f'_{X,!}(g'_X)^! M) & \xrightarrow[f'_!(g')^!(\alpha)]{} & (Y_2, f'_{X,!}(g'_X)^! N), \end{array}$$

其中，基变换态射 $g'^{\sharp}_X f_{X,!} M \to f'_{X,!}(g'_X)^! M$和 $f'^{\sharp}_X (g'_X)^! N \to g_X^! f_{X,!} N$是构造 $A.10$ 中使用的那些态射。

证明。 通常的论证将问题归结为代数栈的情形，此时结论可由六函子形式体系的通常性质推出，参见 [XZ17，引理 A.2。17]。 □

最后，回顾如下形式的Grothendieck–Lefschetz迹公式。

命题 A.16. 设 $X/\mathbb{F}_q$ 为有限型概形， $\mathcal{F} \in$动机范畴$(X,\mathbb{Q})$ 为局部可构造动机（在 [Cis21，定义 3.3.1。12]的意义下），并考虑它们到 $\mathbb{F}_q$ 的拉回，记为 $(X,\mathcal{F})$。则动机对应

$$\delta_{\overline{\mathcal{F}}} \circ (\Gamma_{\sigma_q}^*)^\sharp \in \mathrm{Corr}_{\overline{X}}\left((\overline{X}\times\overline{X}, \overline{\mathcal{F}} \boxtimes \mathbb{D}(\sigma_q^* \overline{\mathcal{F}})), (\overline{X}\times\overline{X}, \overline{\mathcal{F}} \boxtimes \mathbb{D}(\overline{\mathcal{F}}))\right)$$

支撑在 $X(\mathbb{F}_q) \subset X$ 上，且在点 $x \in X(\mathbb{F}_q)$ （其几何点为 x）处的取值由几何 q-弗罗*benius* 在茎 $\mathcal{F}_x$ 上的迹给出。

证明。 这是对 [Cis21，定理 3.4.2 的重述。25]事实上，根据 [Cis21，例 3.4.2，12], 文中记作 Tr 的对象被视为 X 上弗罗benius 不动点轨迹上的一个 0-循环，这恰好就是 $X(\mathbb{F}_q)$。 □

References

[AGLR22] Johannes Ansch¨utz、Ian Gleason、Jo˜ao Louren˛co 和 Timo Richarz。关于局部模型的 p-进理论。 *arXiv preprint arXiv:2201.01234*，2022。即将发表于 *Annals of Mathematics*。[ALRR22] Pramod N Achar、Jo˜ao Louren˛co、Timo Richarz 和 Simon Riche。约化群概形在保针化自同构下的不动点。 *arXiv preprint arXiv:2212.10182*，2022。[Anc15] Giuseppe Ancona。阿贝尔动机的分解。 , (-): – . .[Ber94] Vladimir G. Berkovich。形式概形的消失循环。 *Invent. Math.* 115 3 539 571, 1994 doi: , ( ): – . .[BH20] 10.1007/BF01231772
Oliver B¨ultel 和 Mohammad Hadi Hedayatzadeh。(G,μ)-Windows 与 (G,μ)-显示的变形。 *arXiv preprint arXiv:2011.09163*，2020。[BH23] St´ephane Bijakowski 和 Valentin Hernandez。PEL型志村簇的Pappas-Rapoport模型的几何。 *J. Inst. Math. Jussieu*，22(5):2403–2445，2023。 doi:10.1017/S1474748022000019。[BH25a] Sebastian Bartling 和 Manuel Hoff。幂零显示的模空间。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(3):论文编号 rnaf005，26，2025。 doi:10.1093/imrn/rnaf005。[BH25b] St´ephane Bijakowski 和 Valentin Hernandez。关于 (AR) 情形下 Pappas–Rapoport模型的几何。 *Pacific J. Math.*，334(1):107–142，2025。 doi:10.2140/pjm.2025.334.107。[Bor79] Armand Borel。自守 L-函数。载于 *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*，第 XXXIII 卷，丛书 *Proc. Sympos. Pure Math.*，第 27–61 页。美国数学会，普罗维登斯，RI，1979。[BS17] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。Witt向量仿射格拉斯曼空间的射影性。 *Invent. Math.*, 209 2 329 423, 2017 doi:10.1007/s00222-016-0710-4 ( ): – . .[CD16] Denis-Charles Cisinski 和 Fr´ed´eric D´eglise。 ´Etale 动机。 *Compos. Math.*，152(3):556–666，2016。[CD19] Denis-Charles Cisinski 和 Fr´ed´eric D´eglise。 *Triangulated categories of mixed motives*。施普林格数学专著。施普林格，Cham，2019。 doi:10.1007/978-3-030-33242-6。[Cis21] Denis-Charles Cisinski。交理论中的上同调方法。载于 *Homotopy theory and arithmetic geometry—motivic and Diophantine aspects* 2292 *Lecture Notes in Math.* 49 ，第 卷，丛书，第 – 105 页。施普林格，Cham，2021。 doi:10.1007/978-3-030-78977-0_3.[CvdHS25] Robert Cass 、 Thibaud van den Hove 和 Jakob Scholbach。整动机的几何 Satake 等价。 *Compos. Math.*，161(11):2755–2851，2025。 doi:10.1112/S0010437X25102480。[Del07] Pierre Deligne。致 Serre 的信。 2007 https://publications.ias.edu/sites/default/files/ 。URL: 。[DM91] 2007%20Serre_0.pdf
Christopher Deninger 和 Jacob Murre。阿贝尔概形的动机分解与傅里叶变换。 *J. Reine Angew. Math.*，422:201–219，1991。[DvHKZ24a] Patrick Daniels、Pol van Hoften、Dongryul Kim 和 Mingjia Zhang。伊古萨代数栈与志村簇的上同调。 *arXiv preprint arXiv:2408.01348*，2024。[DvHKZ24b] Patrick Daniels、Pol van Hoften、Dongryul Kim 和 Mingjia Zhang。关于 Pappas 和 Rapoport 的一个猜想。 *arXiv preprint arXiv:2403.19771*，2024。[FG09] Edward Frenkel 和 Benedict Gross。射影直线上的刚性不规则联络。 *Ann. of Math. (2)* 170 3 1469 1512, 2009 doi:10.4007/annals.2009.170.1469 , ( ): – . .[FI25] Maria Fox 和 Naoki Imai。GU(2 $n-2$ *Peking* ,) 的 Shimura簇的超奇异轨迹。 , . .[FS21] Laurent Fargues 和 Peter Scholze。局部朗兰兹对应的几何化。 *arXiv preprint arXiv:2102.13459* 2021 *Astérisque* ，。即将发表于 。[GL24] Ian Gleason 和 Jo˜ao Lourenco。局部模型的管状邻域。 , ( ): – . .[Gle21] Ian Gleason。p 进 shtuka 模空间与局部志村簇的几何连通分支。 *arXiv preprint arXiv:2107.03579*，2021。即将发表于 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*[Gle25] Ian Gleason。Scholze的钻石范畴的特化映射。 *Duke Math. J.* 173 4 723 743, 2024 doi:10.1215/00127094-2023-0028 *Math. Ann.* 391 2 1611 1679, , ( ): – . 2025 doi:10.1007/s00208-024-02952-3 .[GLX26] Ian Gleason 、 Dong Gyu Lim 和 Yujie Xu。仿射 Deligne–Lusztig 簇的连通分支。 *Invent. Math.*，243(2):805–861，2026。 doi:10.1007/s00222-025-01386-1 .[GR17] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。 *A study in derived algebraic geometry. Vol. I. Correspondences and duality* 221 *Mathematical Surveys and Monographs* ，丛书 卷 。美国数学会，普罗维登斯，RI，2017。 doi:10.1090/surv/221.1。[Gro65] A. Grothendieck。 ´El´éments de géométrie algébrique。IV。 ´Etude locale des sch´émas et des morphismes de sch´emas。II。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, ( ): . URL: 24 231, 1965 http://www.numdam.org/ item?id=PMIHES_1965__24__231_0 .[Hai03] Thomas J. Haines。Hecke 环与表示环的结构常数。 *Int. Math. Res. Not.*, (39):2103–2119，2003。 doi:10.1155/S1073792803131285。

[Hai06] Thomas J. Haines. 卷积态射的等维性及其在饱和问题中的应用。 *Adv. Math.*, 207(1):297–327, 2006. doi:10.1016/j.aim.2005.11.014. [Hai18] Thomas J. Haines. 带自同构的根系的对偶及其在非分裂群中的应用。 *Represent. Theory*, 22:1–26, 2018. doi:10.1090/ert/512.[Ham22] Linus Hamann. 几何艾森斯坦级数、交织算子与 Shin 平均公式。*arXiv preprint arXiv:2209.08175*, 2022.[He14] Xuhua He. 仿射 Deligne-Lusztig 簇的几何与同调性质。 *Ann. of Math. (2)*,

179 1 367 404, 2014 doi:10.4007/annals.2014.179.1.6 ( ): – . . [He16] Xuhua He. Hecke 代数与 p-adic 群。载于 *Current developments in mathematics 2015*, 第 73–135 页。Int. Press, Somerville, MA, 2016.[Hel10] David Helm. 朝向酉志村簇的几何 Jacquet-Langlands 对应。*Duke Math. J.*, 155(3):483–518, 2010. doi:10.1215/00127094-2010-061. [HLR86] G. Harder, R. P. Langlands, and M. Rapoport. Hilbert-Blumenthal簇上的代数循环。*J. Reine Angew. Math.*, 366:53–120, 1986. doi:10.1515/crll.1986.366.53. [HM24] Claudius Heyer and Lucas Mann.

6 *arXiv preprint* -函子形式体系 *arXiv:2410.13038* 2024 与光滑表示。 , .[Hof23a] Manuel Hoff. 关于仿抛物 (G, μ)-display。 *arXiv preprint arXiv:2311.00127*, 2023. [Hof23b] Manuel Hoff. *On parahoric $\mathcal{G}$ μ -displays and the EKOR stratification for Shimura varieties of Hodge type* 2023 (,) . 博士论文, 杜伊斯堡-埃森大学, .[Hof25] Manuel Hoff. 带仿抛物型层结构的 Siegel 模簇上的 EKOR 分层。 *Épijournal Géom. Algébrique*, 9:Art. 5, 36, 2025.[HR20a] Thomas J. Haines and Timo Richarz. 扭曲仿射格拉斯曼量中舒伯特簇的光滑性。*Duke Math. J.*, 169(17):3223–3260, 2020. doi:10.1215/00127094-2020-0025. [HR20b] Thomas J. Haines and Timo Richarz. Weil 限制群局部模型的测试函数猜想。 *Compos. Math.*, 156(7):1348–1404, 2020. doi:10.1112/s0010437x20007162. [HT01] Michael Harris and Richard Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, *Annals of Mathematics Studies* 第 151 卷。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2001。附有 Vladimir G. Berkovich 的附录。[HTX17] David Helm, Yichao Tian, and Liang Xiao. 某些酉志村簇模 p 上的泰特循环。*Algebra Number Theory*, 11(10):2213–2288, 2017. doi:10.2140/ant.2017.11.2213. [HV18] Paul Hamacher and Eva Viehmann. 极小仿射 Deligne-Lusztig 簇的不可约分支。*Algebra Number Theory*, 12(7):1611–1634, 2018. doi:10.2140/ant.2018.12.1611. [HZZ25] Xuhua He, Rong Zhou, and Yihang Zhu. 仿射 Deligne–Lusztig 簇不可约分支的稳定子。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 27(6):2387–2441, 2025. doi:10.4171/jems/1414. [Jan90] Uwe Jannsen. *Mixed motives and algebraic K-theory*, *Lecture Notes in Mathematics* 第 1400 卷。施普林格出版社, 柏林, 1990。附有 S. Bloch 和 C. Schoen 的附录。 doi:10.1007/BFb0085080. [JY21] Fangzhou Jin and Enlin Yang. 动机的 K¨unneth 公式与迹的可加性。 *Adv. Math.*, 376 107446, 83, 2021 doi:10.1016/j.aim.2020.107446 :论文编号 . . [Kha16] Adeel Khan. *Motivic homotopy theory in derived algebraic geometry*. 博士论文, 杜伊斯堡-埃森大学, 2016.[Kis10] Mark Kisin. 阿贝尔型志村簇的整模型。 *J. Amer. Math. Soc.*,

23 4 967 1012, ( ): – . . [2010 doi:10.1090/S0894-0347-10-00667-3 KMPS22] Mark Kisin, Keerthi Madapusi Pera, and Sug Woo Shin. 志村簇的 Honda–Tate 理论。 *Duke Math. J.* 171 7 1559 1614, 2022 doi:10.1215/00127094-2021-0063 , ( ): – . . [Kot 85] Robert E. Kottwitz. 带附加结构的等晶体。 *Compositio Math.*, 56(2):201–220, 1985. URL: http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__56_2_201_0. [Kot92a] Robert E. Kottwitz. 与某些简单志村簇相关的 λ *Invent.* -adic 表示。 , *Math.* 108 3 653 665, 1992 doi:10.1007/BF02100620 ( ): – . . [Kot92b] Robert E. Kottwitz. 有限域上某些志村簇的点。 *J. Amer. Math. Soc.*, 5(2):373– 444, 1992. doi:10.2307/2152772. [Kot97] Robert E. Kottwitz. 带附加结构的等晶体 II。 *Compositio Math.*, 109(3):255–339, 1997. doi:10.1023/A:1000102604688.[KP18] M. Kisin and G. Pappas. 带仿抛物型层结构的志村簇的整模型。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 128:121–218, 2018. doi:10.1007/s10240-018-0100-0.[KPZ24] Mark Kisin, Georgios Pappas, and Rong Zhou. 带仿抛物型层结构的志村簇的整模型 II。 *arXiv preprint arXiv:2409.03689*, 2024.[KZ25a] Mark Kisin and Rong Zhou. 与阿贝尔簇相关的 Frobenius 共轭类关于 ℓ 的独立性。 *Annals of Mathematics*, 202(3):1077–1156, 2025. [KZ25b] Mark Kisin and Rong Zhou. 与半稳定阿贝尔簇相关的强相容系统。 *arXiv preprint arXiv:2505.02165*, 2025.[Lan80] R. P. Langlands.

L *Proceedings of the International* -函数与自守表示。 *Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)* 165 175 1980 , 第 – 页。芬兰科学院, 赫尔辛基, 。

[Lan18] Kai-Wen Lan. PEL 型志村簇分裂模型的紧化。 *Trans. Amer. Math.* , ( ): – . . [Lau13] *Soc.* 370 4 2463 2515, 2018 doi:10.1090/tran/7088 Eike Lau. 截断显示函子的光滑性。 *J. Amer. Math. Soc.*, 26(1):129–165, 2013. doi:10.1090/S0894-0347-2012-00744-9.[Lev16] Brandon Levin. Weil 限制群的局部模型。 *Compos. Math.*, 152(12):2563–2601, 2016. doi:10.1112/S0010437X1600765X.[Mes72] William Messing. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, *Lecture Notes in Mathematics*第 264 卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1972。[Mil17] J. S. Milne. *Algebraic groups*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*第 170 卷。剑桥大学出版社，剑桥， 2017 doi:10. 。域上有限型群概形 1017/9781316711736 理论。. [MM74] B. Mazur and William Messing. *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, *Lecture Notes in Mathematics*第 370 卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1974。[MV07] I. Mirkovi´c and K. Vilonen. 几何朗兰兹对偶与交换环上的代数群表示。 *Ann. of Math. (2)*, 166(1):95–143, 2007. doi:10.4007/annals.2007.166.95. [Nie22] Sian Nie. 仿射 Deligne-Lusztig 簇的不可约分支。 *Camb. J. Math.*, 10 510, 2022 2 433( ): – .[Pap00] Georgios Pappas. PEL 志村簇的算术模空间。 *J. Algebraic Geom.*, 9 3 577( ): –605, 2000. [Pap23] Georgios Pappas. 关于志村簇的整模型。 *Math. Ann.*, 385 3 4 2037 2097, 2023 doi: (-): – . .[PR05] G. 10.1007/s00208-022-02387-8 Pappas and M. Rapoport. 分歧情形下的局部模型 II：分裂模型。 *Duke Math. J.*, 127 2 193 250, 2005 doi:10.1215/S0012-7094-04-12721-6 ( ): – . . [PR24] Georgios Pappas and Michael Rapoport. *p*-adic shtuka 与整体及局部志村簇理论。 *Camb. J. Math.*, 12(1):1–164, 2024. [PR 26] Georgios Pappas and Michael Rapoport. 整局部志村簇。 *J. Inst. Math. Jussieu*, 25 1 375 443, 2026 doi:10.1017/S1474748025101345 ( ): – . . [Pre23] Benedikt Preis. *Motivic nearby cycles functors, local monodromy and universal local acyclicity*. 博士论文，雷根斯堡大学，2023。[Rap05] Michael Rapoport. 志村簇模 p 约化的指南。第 298 号，第 271–318 页。2005。自守形式 I。[Ric13] Timo Richarz. 扭曲仿射旗簇中的舒伯特簇与局部模型。 *J. Algebra*, 375:121– 147, 2013. doi:10.1016/j.jalgebra.2012.11.013. [Ric16] Timo Richarz. 仿射格拉斯曼量与几何 Satake 等价。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (12):3717–3767, 2016. doi:10.1093/imrn/rnv226.[Rob14] Marco Robalo. *Théorie homotopique motivique des espaces noncommutatifs*. 博士论文，蒙彼利埃第二大学，2014.[RS20] Timo Richarz and Jakob Scholbach. shtuka 模空间层的交 motive *Forum Math. Sigma* 8 8, 99, 2020 doi:10.1017/fms.2019.32 , :论文编号 e . .[RS 21] Timo Richarz and Jakob Scholbach. Witt 向量仿射旗簇上的泰特动机。 *Selecta Math.* , ( ):论文编号 . . [RZ *(N.S.)* 27 3 44, 34, 2021 doi:10.1007/s00029-021-00665-y 96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups* 141 *Annals of Mathematics* , [卷。普林斯顿大学 *Studies* 1996 doi:10.1515/9781400882601 出版社，普林斯顿，新泽西州，。. .17] Sch ´Peter Scholze. *arXiv preprint arXiv:1709.07343*钻石的 étale 上同调。 *Astérisque*, 2017。即将发表于[Sch24] Peter Scholze. Berkovich 动机。 *arXiv preprint arXiv:2412.03382*, 2024 *Journal of the* . 即将发表于[Sch25] *AMS* Peter Scholze. 局部朗兰兹对应的动机几何化。 *arXiv preprint* *arXiv:2501.07944* 2025 *J. Reine Angew. Math.* , . 即将发表于[SGA 77] *Cohomologie l-adique et fonctions L*, *Lecture Notes in Mathematics*第 589 卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1977。1965–1966 年布瓦-马里代数几何研讨会（SGA 5），Luc Illusie 编。[SS13] Peter Scholze and Sug Woo Shin. 分歧分裂位处紧致酉群志村簇的上同调。 *J. Amer. Math. Soc.*, 26(1):261–294, 2013. doi:10.1090/S0894-0347-2012-00752-8. [Ste68] Robert Steinberg. *Endomorphisms of linear algebraic groups* 80 *Memoirs of the American* , [第 号。 *Mathematical Society* 1968 普罗维登斯：美国数学会，.20] SW *Berkeley lectures on p-adic geometry* 207 *Annals of* Peter Scholze and *Mathematics Studies* 2020 Jared Weinstein. [, 21] 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，。 *Duke Math. J.*SYZ doi:10.1215/00127094-2021-0047Xu Shen, Chia-Fu Yu, and Chao Zhang. 带仿抛物型层结构的志村簇的 EKOR 分层。[, 170(14):3111–3236, 2021. 25] . *FSZForum Math. Sigma*Xu Shen and Yuqiang Zheng. 志村簇分裂模型上带附加结构的 doi:10.1017/fms.2025.10091-zips。, 13:论文编号 e142, 2025. .

[Tat65] 约翰·T·泰特。代数闭链与泽塔函数的极点。载于 *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*，页码 – 。Harper & Row，纽约，。93 110 1965

[Tat94] 约翰·泰特。关于 l-进上同调中的代数闭链的猜想。载于 *Motives (Seattle, WA, 1991)*，第 55 卷，*Proc. Sympos. Pure Math.* 第 1 部分，页码 71–83。美国数学会，普罗维登斯，RI，1994 年。doi:10.1090/pspum/055.1/1265523。[TX16] Yichao Tian 和 Liang Xiao。四元数志村簇的 Goren-Oort分层。*Compos. Math.* 152 10 2134 2220, 2016 doi:10.1112/S0010437X16007326。。[TX19] Yichao Tian 和 Liang Xiao。模 p 的某些四元数志村簇上的泰特循环。*Duke Math. J.* 168 9 1551 1639, 2019 doi:10.1215/00127094-2018-0068。[vdH24a] Thibaud van den Hove。分歧群的整动机 Satake 等价。*arXiv preprint arXiv:2404.15694* 2024。[vdH24b] Thibaud van den Hove。球面朗兹参数栈。*arXiv preprint arXiv:2409.09522*，2024 年。[Wu21] Zhiyou Wu。$S = T$ 用于志村簇和 p-进 Shtuka 模空间。*arXiv preprint arXiv:2110.10350* 2021。[XZ17] Liang Xiao 和 Xinwen Zhu。通过几何Satake研究志村簇上的闭链。*arXiv preprint arXiv:1707.05700* 2017。[XZ19] Liang Xiao 和 Xinwen Zhu。群上向量值扭曲共轭不变函数。载于 *Representations of reductive groups*，*Proc. Sympos. Pure Math.* 第 101 卷，页码 361–425。美国数学会，普罗维登斯，RI，2019 年。附有 Stephen Donkin 的附录。doi:10.1090/pspum/101/14。[Yu22] Jize Yu。高权自守形式的几何Jacquet-Langlands转移。*Trans. Amer. Math. Soc.* 375 10 6843 6873, 2022 doi:10.1090/tran/8611。。[Zhu15] Xinwen Zhu。分歧群的几何 Satake 对应。*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 48 2 409 451, 2015 doi:10.24033/asens.2248。附有 T. Richarz 和 X. Zhu 的附录。。[Zhu17a] Xinwen Zhu。混合特征下的仿射格拉斯曼量与几何Satake。*Ann. of Math. (2)* 185 2 403 492, 2017 doi:10.4007/annals.2017.185.2.2。。[Zhu17b] Xinwen Zhu。仿射格拉斯曼量与几何Satake等价导论。载于 *Geometry of moduli spaces and representation theory* 24 *IAS/Park City Math. Ser.* 59 154，第 卷，，页码 – 。美国数学会，普罗维登斯，RI，2017 年。[Zhu20] Xinwen Zhu。朗兹参数栈上的凝聚层。*arXiv preprint arXiv:2008.02998*，2020 年。[Zhu25] Xinwen Zhu。驯顺范畴局部朗兰兹对应。*arXiv preprint arXiv:2504.07482*，2025 年。[Zin01] Thomas Zink。p-可除群的 Dieudonné 理论。载于 *Class field theory—its centenary and prospect (Tokyo, 1998)*，第 卷，页码 – 。日本数学会，东京，2001 年。*Adv. Stud. Pure Math.* 30 139 160 doi:10.2969/aspm/03010139。[ZZ20] Rong Zhou 和 Yihang Zhu。扭曲轨道积分与仿射 Deligne-Lusztig 簇的不可约分支。*Camb. J. Math.*，8(1):149–241，2020 年。doi:10.4310/CJM.2020.v8.n1.a3。

Max Planck Insitut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
Email address: vandenhove@mpim-bonn.mpg.de