arXiv:2603.08876v1 [math.CO] 9 Mar 2026

几何边权下最大割的层级阈值结构

Nevena MarićUnion University 计算机学院，塞尔维亚贝尔格莱德 nmaric@raf.rs

摘要

我们研究完全图 K_n 上的一族加权最大割实例，其中边权按字典序几何递减：第 i 条边的权重为 r^{N-i}，其中 $N = \binom{n}{2}$。当 $r \geq 2$ 时，字典序最先的割是最优的；当 $r = 1$ 时，所有边的权重相等，平衡划分占优。本文研究中间情形 $1 < r < 2$。

几何加权使靠前的边具有支配性，并使 k-孤立割 $C_k = \{1, \ldots, k\} \mid \{k+1, \ldots, n\}$ 成为自然的最优候选。对于每个 n 和 $k \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$，我们定义阈值多项式 $P^{n,\,k}(r)$，其唯一根 $r_k(n) \in (1,\ 2)$ 决定 C_k 与 C_{k+1} 何时交换支配地位。我们证明，对于固定的 n，这些阈值关于 k 严格递减，并且 $r_k(n) \to 1$ 当 $n \to \infty$。作为主要结果，我们证明，对于 $r \in (r_k(n)\ r_{k-1}(n))$，割 C_k 在所有孤立割中实现最大权重，从而为孤立割族给出精确的“相图”。

我们猜想，当 $n \geq 7$时，孤立割在所有 2^{n-1} 割中全局最优；所有小规模 n 的反例均已得到完整刻画，而针对 $n \leq 100$ 的大量计算结果支持这一猜想。

关键词： 最大割、加权完全图、阈值多项式、层次结构、割多面体、参数优化

2020年数学主题分类： 主要分类 05C70；次要分类 90C27、05C22

1 引言

考虑一个边带权重的图。最大割问题（Max-Cut）是将顶点划分为两个集合，使它们之间的边的总权重最大化。虽然一般情况下该问题是 NP难的，但某些具有结构的实例有时可以得到显式解。

本文研究完全图 K_n 上的一个此类族。按字典序排列边

$$(1,2), (1,3), \ldots, (1,n), (2,3), \ldots, (n-1,n),$$

并赋予第 i 条边权重 r^{N-i}，其中 $N = \binom{n}{2}$ 和 $r > 1$。因此，权重沿字典序几何递减，其中 (1,2) 获得最大权重 r^{N-1}。例如，在研究局部搜索复杂度时也会出现相关的字典序成本函数 [1]。

几何加权偏向涉及小索引顶点的边，因此- 孤立割 C_k - 划分 $\{1, \ldots, k\} \mid \{k+1, \ldots, n\}$ - 是自然的最优候选方案。

极端情形很简单。当 $r \geq 2$ 时，(1,2) 的权重大于其余所有权重之和，因此 C_1 是最优的。当 $r = 1$ 时，所有边的权重相等，平衡割 $C_{\lfloor n/2 \rfloor}$ 胜出。主要问题在于中间情形 $1 < r < 2$ 会发生什么。

我们的首项贡献是在这一族中给出明确的阈值描述。对于每个 n 和每个$k \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$，我们定义一个阈值多项式 $P^{n,\,k}(r)$，其唯一根 $r_k(n) \in (1,\ 2)$标记了 C_k 和 C_{k+1} 交换支配关系时的参数值。这些阈值满足

$$r_1(n) > r_2(n) > \cdots > r_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}(n) > 1,$$

并且，当 $n \to \infty$时， $r_k(n) \to 1$ 。作为主要结果，我们证明，对于介于连续阈值之间的 r ，相应的割 C_k 在所有孤立割中权重最大，从而明确描述了最佳孤立割如何随 r变化。

孤立割是否在所有 2^{n-1} 割中全局最优，仍是一个开放问题。我们猜想这对 $n \geq 7$成立；对 $n \leq 21$ 的穷举以及对 $n \leq 100$的针对性验证支持这一猜想。界 $n \geq 7$ 是紧的：对于 $n \in \{4, 5, 6\}$ ，我们找到了由 $\{1, \ldots, k, n\}$形式的近孤立割构成的反例。

我们还将该族的精确最优值与标准的一般最大割界进行比较，并指出在这种结构化情形下，这些界仍远非紧确；参见第 6 节。

本文其余部分安排如下。 第 2 节设定记号，并推导全文所用割权重的闭式表达。第 3 节总结初步观察，并为主要结果提供动机。第 4 节定义阈值多项式，证明其唯一性和递归关系，从而得出孤立割中的阈值结构；本节还包含关于孤立族内最优性的主要结果。第 5 节讨论全局最优性猜想，包括对 $n \in \{4, 5, 6\}$ 的反例进行完整分类以及支持性计算。第 6 节将我们的发现与一般最大割界进行比较，并提出进一步的问题。启发式推导和更多计算细节分别见附录 A 和 B。

2 预备知识

令 K_n 为具有 n 个顶点 $[n] = \{1, \ldots, n\}$ 和 $N = \binom{n}{2}$ 条边的完全图。对每个 $S \subseteq [n]$ ，定义 K_n 的**割向量**$\delta(S)$为 $\delta(S)_{ij} = 1$ ，若 $|S \cap \{i, j\}| = 1$ 则取此值，否则为 0。每个割都对应 $[n]$ 的一个划分 $S \cup S^c$ ，取补后有 2^{n-1} 个不同的割。我们按字典序排列边：(1，2)，(1，3) ...，(1，n)，(2，3) ...，($n-1$，n)。具有 $i < j$ 的边 (i，j) 的字典序索引为

$$\mathrm{idx}(i, j) = (i - 1)n - \binom{i}{2} + (j - i). \tag{1}$$

每个割都对应一个 0-1 n-元组，其中位置 i 上的 1 表示顶点 i 属于该割。在两种互补表示中，我们选择包含顶点 1 的那一种。对于满足 $x_1 = 1$的 n元组 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，割向量为

$$\delta(\mathbf{x}) = (\mathbb{1}(x_1 \neq x_2), \mathbb{1}(x_1 \neq x_3), \ldots, \mathbb{1}(x_{n-1} \neq x_n)) \in \{0, 1\}^N, \tag{2}$$

其中，当 A 为真时，$\mathbf{1}(A) = 1$ ，否则为 0。这将记号 $\delta(S)$ 扩展到二进制字符串，其中$x_i = \mathbb{1}(i \in S)$。如果$\mathbf{x}$按字典序排列，那么相应的 $\delta(\mathbf{x})$ 则按逆字典序排列。这可由 [2], 推出，其中确立了 $\mathbf{1} - \delta(\mathbf{x})$ 的字典序。表 1 展示了 $n = 4$ 的所有割向量。

如果不会引起歧义，我们会将 0-1 向量与其对应的 0-1 字符串视为相同。我们用 1^i0^j 表示一个由 i 个 1 后接 j 个 0 组成的字符串；例如， 1^k0^{n-k} 表示由 k 个 1 后接 $n-k$ 个 0 组成的字符串。

顺序	$\mathbf{x}$	割向量 $\delta(\mathbf{x})$
1	1000	111000
2	1001	110011
3	1010	101101
4	1011	100110
5	1100	011110
6	1101	010101
7	1110	001011
8	1111	000000

表 1： $n=4$ 的割向量。对于所有 $2^{n-1}=8$ 割，二进制表示 $\mathbf{x}$ 及相应的割向量 $\delta(\mathbf{x})$ 如下所示。

定义 2.1。 k-孤立割 C_k 是与划分 $\{1,\dots,k\}\,|\{k+1,\dots,n\}$ 对应的割向量。用顶点指示变量表示，$C_k=\delta(1^k0^{n-k})$。

注 2.2。在所有按顶点归属关系以字典序排列的 2^{n-1} 割中， C_k 位于第 $1+\sum_{j=0}^{k-2}2^{n-2-j}$ 个位置。特别地， C_1 排在第一位， C_2 位于第 $1+2^{n-2}$ 个位置，而 C_3 位于第$1+2^{n-2}+2^{n-3}$ 个位置。

定义 2.3（权重函数）。给定参数 $r>1$，定义第 i 条边的几何权重 $w_i=r^{N-i}$，其中边按字典序排列。对于割向量 $\delta\in\{0,1\}^N$，定义

$$W^n(\delta;r)=\sum_{i=1}^{N}\delta_i\cdot r^{N-i}.$$

我们关注范围 $1<r<2$。

定义 2.4. 阈值 $r_k(n)$ 是 r 的取值，在该取值处， k-孤立割与 $(k+1)$-孤立割具有相等的权重： $W^n(C_k;\ r_k(n))\ =W^n(C_{k+1};\ r_k(n))$。

3 计算观察

在发展理论之前，我们给出激发主要结果的计算观察。对于 $n\le 21$，我们在 $r\in(1,2)$ 的网格上（网格间距 0.001）计算了割权重，并追踪了最大化者。这种基于网格的验证在数值上支持这些观察，但并不构成在连续统上的证明；详见第 5.1 节。

观察 3.1. 固定 $n\ge 7$。当 r 从 1^+ 增加到 2^- 时，最大化者在k-孤立割族内依次经过 $C_{\lfloor n/2\rfloor}$、$C_{\lfloor n/2\rfloor-1}$、……、 C_1。

表 2 展示了当 $n=7,\dots,12$ 时的观察 3.1。最右列列出了在相关的 r 范围内，使 k-孤立割 C_k 的权重达到最大值的 k 取值序列。箭头表示随着 r 从 1^+ 增加到 2^-，最大化孤立割发生变化的顺序。

表 2：当 r 在 (1,2) 中增加时， $n = 7$ 至 $n = 12$ 的最大化孤立割 C_k 的观测转移序列。

n	k 值
7	$3 \to 2 \to 1$
8	$4 \to 3 \to 2 \to 1$
9	$4 \to 3 \to 2 \to 1$
10	$5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$
11	$5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$
12	$6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$

这些转变发生在定义 2.4 中的阈值 $r_k(n)$ 处；第 4 节中的定理表明，在孤立族中，这些阈值是唯一且严格有序的。

第 4 节对这种行为给出了严格的阈值描述，并证明在相邻阈值之间，相应的割 C_k 在所有孤立割中最优。

对于 $n \le 6$，非孤立割可能在 $r = 1$ 附近的区间内达到最优；这些情况将在第 5 节讨论。穷举结果所暗示的更强全局最优性结论（针对 $n \le 21$，并通过对 $n \le 100$ 的额外验证），将在第 5 节作为猜想提出。

4 多项式刻画

计算观察表明，阈值起着根本性的作用。现在，我们将构建数学工具，以精确刻画这些阈值。

定义 4.1. 对于 $k \ge 1$，定义阈值多项式

$$P^{n,k}(r) = W^n(C_k; r) - W^n(C_{k+1}; r).$$

表 3： $k = 2$ 与 $k = 3$ 孤立割的割向量比较（$n = 7$）

k	$\mathbf{x}$	割向量 $C_k = \delta(\mathbf{x})$
2	1100000	01 11 1 1 1 111 1 00 00 00 0 0 0 0
3	1110000	00 11 1 1 0 111 1 11 11 00 0 0 0 0
		↑ ↑ ↑↑ ↑↑

箭头标出割向量不同的位置（对多项式方程有贡献）。

$P^{n,k}(r)$ 在 $(1, 2)$ 中的根对应于阈值 $r_k(n)$。我们从分析最简单的情形开始。

4.1 基本情形： $k = 1$

命题 4.2 （ $k = 1$ 的显式公式）。 对于 $n \ge 6$,

$$P^{n,1}(r) = r^{N-1} - (r^{N-n} + \ldots + r^{N-2n+3}).$$

证明。

$$\begin{aligned} W^n(C_1; r) &= W^n(1^{(n-1)}0^{(N-n+1)}; r) = r^{N-1} + \ldots + r^{N-n+1} \\ W^n(C_2; r) &= W^n(0\,1^{(n-2)}1^{(n-2)}0^{(N-2n+3)}; r) \\ &= r^{N-2} + \ldots + r^{N-n+1} + r^{N-n} + \ldots + r^{N-2n+3} \end{aligned}$$

对两个多项式作减法，即完成证明。 □

引理 4.3（指数分离）。在 $P^{n,\,k}(r)$ 中，所有正系数项的指数都大于所有负系数项的指数。具体而言，如果 a_k 是最小正指数，b_1 是最大负指数，那么 $a_k - b_1 = n - k \geq 1$。

证明。 $P^{n,k}$ 中的正项对应于边 $(i, k+1)$，其中 $i = 1, \ldots, k$；负项则对应于边 $(k+1, j)$，其中 $j = k+2, \ldots, n$。

最小正指数对应于边 $(k, k+1)$，最大负指数对应于边 $(k+1, k+2)$。根据 (1)，边 (i, j) 的指数为 $N - \mathrm{idx}(i, j)$。代入 $(i, j) = (k, k+1)$ 和 $(i, j) = (k+1, k+2)$：

$$a_k = N - 1 - \frac{(k-1)(2n-k)}{2},$$
$$b_1 = N - 1 - \frac{k(2n-k-1)}{2}.$$

Thus

$$a_k - b_1 = \frac{k(2n-k-1) - (k-1)(2n-k)}{2} = \frac{2n-2k}{2} = n - k \geq 1.$$ □

这种分离性质对于应用笛卡尔符号法则来证明根的唯一性至关重要。

定理 4.4 ($r_1(n)$的性质)。 *(a)* $P^{n,1}(r)$ 有一个唯一根 $r_1(n) \in (1,\ 2)$。

(b) $r_1(n)$ 关于 n严格递减。

(*c*) $\lim_{n\to\infty} r_1(n) = 1$.

证明。 (a) **存在性**。首先，在端点处计算 $P^{n,\,1}$（利用命题 4.2），以证明根的存在。

当 $r = 1$时:

$$P^{n,1}(1) = 1 - \sum_{i=0}^{n-3} 1 = 1 - (n-2) = 3 - n < 0, \quad \text{for } n \geq 4.$$

当 $r = 2$时:

$$P^{n,1}(2) = 2^{N-1} - \sum_{i=0}^{n-3} 2^{N-n-i} = 2^{N-2} + 2^{N-n} > 0.$$

根据介值定理（介值定理），$P^{n,\,1}$ 在(1, 2)内至少有一个根 .

唯一性。我们应用笛卡尔符号法则（例如参见 [3]）。将 $P^{n,1}(r)$ 按幂次降序排列:

$$P^{n,1}(r) = r^{N-1} + 0 \cdot r^{N-2} + \cdots + 0 \cdot r^{N-n+1} - r^{N-n} - r^{N-n-1} - \cdots - r^{N-2n+3}.$$

非零系数序列为（$+1, -1, -1, \ldots, -1$）；根据引理 4.3，所有正系数项的指数都大于所有负系数项的指数，因此恰有一次变号。根据笛卡尔符号法则，$P^{n,1}$ 至多有一个正根；关于该技术近期在图多项式中的应用，参见 Brown 和 George [4]。

结合上文证明的存在性，$P^{n,\,1}$ 恰有一个正根，且该根位于 (1，2) 内。图 1 展示了 $n = 8$ 的这一情形。

(b) $r_1(n)$**在** n **中严格递减**。

对于 $n = 5$，6，7，单调性可通过直接计算验证： $r_1(5) = 1.249852$， $r_1(6) = 1.243347$， $r_1(7) = 1.229318$。

我们证明，对于所有 $n \geq 7$， $r_1(n+1) < r_1(n)$。注意

$$P^{n,1}(x) = \frac{x^{N-2n+3}}{x-1} f_n(x).$$

其中 $f_n(x) = x^{2n-3} - x^{2n-4} - x^{n-2} + 1$。

显然，当且仅当 $f_n(x) = 0$ 对于 $x \in (1,2)$ 成立时， $P^{n,1}(x) = 0$；并且根据 (a) 部分， $r_1(n)$ 表示 f_n 在 (1,2) 中的唯一根。

断言： $r_1(n)^{n-1} > 3$ 对于 $n \geq 7$。

令 $q_n = 3^{1/(n-1)}$。于是：

$$\begin{aligned} f_n(q_n) &= q_n^{2n-3} - q_n^{2n-4} - q_n^{n-2} + 1 \\ &= 3^{2-\frac{1}{n-1}} - 3^{2-\frac{2}{n-1}} - 3^{1-\frac{1}{n-1}} + 1 = \frac{9}{q_n} - \frac{9}{q_n^2} - \frac{3}{q_n} + 1 \\ &= -\frac{9}{q_n^2} + \frac{6}{q_n} + 1. \end{aligned}$$

我们需要 $f_n(q_n) < 0$，这等价于

$$q_n^2 + 6q_n - 9 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_n < -3 + 3\sqrt{2} \approx 1.2426.$$

由于 $3^{1/6} \approx 1.2009 < 1.2426$，这对 $n \geq 7$ 成立。（注： $3^{1/5} \approx 1.2457$。）

由于 $f_n(q_n) < 0$ 且 $f_n(r_1(n)) = 0$，因此我们有 $r_1(n) > q_n$，从而 $r_1(n)^{n-1} > 3$。

现在我们计算 $f_{n+1}(r_1(n))$。由于 $f_n(r_1(n)) = 0$，我们有 $r_1(n)^{2n-3} - r_1(n)^{2n-4} = r_1(n)^{n-2} - 1$。两边乘以 $r_1(n)^2$：

$$r_1(n)^{2n-1} - r_1(n)^{2n-2} = r_1(n)^n - r_1(n)^2.$$

因此：

$$\begin{aligned} f_{n+1}(r_1(n)) &= r_1(n)^{2n-1} - r_1(n)^{2n-2} - r_1(n)^{n-1} + 1 \\ &= (r_1(n)^n - r_1(n)^2) - r_1(n)^{n-1} + 1 \\ &= (r_1(n) - 1)(r_1(n)^{n-1} - r_1(n) - 1). \end{aligned}$$

对于 $n \geq 7$，我们有 $r_1(n)^{n-1} > 3 > r_1(n) + 1$ （因为 $r_1(n) < 2$）。因此：

$$f_{n+1}(r_1(n)) = (r_1(n) - 1) \underbrace{(r_1(n)^{n-1} - r_1(n) - 1)}_{>0} > 0.$$

由于 f_{n+1} 在 $f_{n+1}(r_1(n)) > 0$ 处连续，且 $f_{n+1}(2) > 0$，又因为对于 $n \geq 7$， $f_{n+1}(1) = 0$，并且 $f'_{n+1}(1) = 2 - n < 0$，因此当 $f_{n+1} < 0$ 略大于 1 时，介值定理给出 $r_1(n+1) \in (1, r_1(n))$。

(c) $\lim_{n\to\infty} r_1(n) = 1$。

在根处，$r_1(n)^{N-1} = \sum_{i=0}^{n-3} r_1(n)^{N-n-i} < (n-2)\cdot r_1(n)^{N-n}$，因此 $r_1(n)^{n-1} < n-2$，从而 $1 < r_1(n) < (n-2)^{1/(n-1)} \to 1$。由夹逼定理可得结论。

□

$r_1(n)$趋近于 1 的衰减趋势在图2中清晰可见。

在确立了 $k=1$ 的性质后，我们现在构建一种递归结构，将这些结果推广到所有 k。

$k \geq 2$ 的递归结构

比较不同完全图上的割向量时，我们写作 $\delta(\mathbf{x})_{K_m}$，表示该割向量是在 K_m 中计算的。我们用 $\|$ 表示二进制字符串的拼接。

引理 4.5 (割向量拼接)。 K_n 中 k-孤立割的割向量满足

$$\delta\left(\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{n-k}\right)_{K_n} = \underbrace{00\ldots0}_{k-1}\underbrace{11\ldots1}_{n-k} \,\|\, \delta\left(\underbrace{11\ldots1}_{k-1}\underbrace{00\ldots0}_{n-k}\right)_{K_{n-1}}.$$

证明。令$\mathbf{x} = (1,\ldots,1,0,\ldots,0)$，其中前面有 k 个 1，后面跟着 $n-k$ 个 0。割向量 $\delta(\mathbf{x})$ 有 $\binom{n}{2}$ 个分量，按字典序对应各条边。

前 $n-1$ 个分量对应边 $(1,2),(1,3)\ldots,(1,n)$。对于边 $(1,j)$:

$$\delta(\mathbf{x})_{1j} = \mathbb{1}(x_1 \neq x_j) = \mathbb{1}(1 \neq x_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \leq k, \\ 1 & \text{if } j > k. \end{cases}$$

因此，前 $n-1$ 个分量为 $00\ldots\underbrace{0\,11\ldots1}_{n-k}$。

剩余的 $\binom{n-1}{2}$ 个分量对应满足 $2 \leq i < j \leq n$ 的边 (i,j)。这些恰好是顶点为 $\{2,\ldots,n\}$ 的 K_{n-1} 中的边。对于这类边:

$$\delta(\mathbf{x})_{ij} = \mathbb{1}(x_i \neq x_j),$$

这仅取决于 $(x_2,\ldots,x_n) = 1,\ldots,1,0,\underbrace{\ldots,0}_{k-1}$。这恰好是 $\delta(\underbrace{11\ldots1}_{k-1}\,\underbrace{00\ldots0}_{n-k})_{K_{n-1}}$ □

定理 4.6 (递归公式)。对于所有 $k \geq 2$ 和 $n \geq k+1$,

$$P^{n,k}(r) = r^{N-k} + P^{n-1,k-1}(r),$$

其中 $N = \binom{n}{2}$。

证明。对 k 和 $k+1$使用引理 4.5:

$$W^n(C_k;r) = W^n\left(\underbrace{00\ldots0}_{k-1}\underbrace{11\ldots1}_{n-k} \,\|\, \delta\left(\underbrace{11\ldots1}_{k-1}\underbrace{00\ldots0}_{n-k}\right)_{K_{n-1}};\, r\right),$$

$$W^n(C_{k+1};r) = W^n\left(\underbrace{00\ldots00}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{n-k-1} \,\|\, \delta\left(\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{n-k-1}\right)_{K_{n-1}};\, r\right).$$

用上方表达式减去下方表达式，我们得到

$$r^{N-k} + W^{n-1}(C_{k-1}; r) - W^{n-1}(C_k; r),$$

递归关系可直接得出。 □

4.3 层次结构的性质

有了递归公式，我们现在可以确立阈值序列的关键性质：唯一性、单调性和收敛性。

定理 4.7 (唯一根)。 对于每个 $n \geq 6$ 和 $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$，多项式 $P^{n,\,k}(r)$ 在区间 (1,2)内有唯一根 $r_k(n)$ 。

证明。 我们利用递归结构，同时对所有 k 证明这一点。

步骤 1：显式展开。 通过反复应用递归 $P^{n,\,k}(r) = r^{N-k} + P^{n-1,\,k-1}(r)$，我们得到

$$P^{n,k}(r) = r^{\binom{n}{2}-k} + r^{\binom{n-1}{2}-(k-1)} + \cdots + r^{\binom{m+1}{2}-2} + P^{m,1}(r),$$

其中 $m = n - k + 1$。将 P^m 的基本情形公式代入，$_1(r)$：

$$P^{n,k}(r) = \underbrace{r^{\binom{n}{2}-k} + \cdots + r^{\binom{m+1}{2}-2} + r^{\binom{m}{2}-1}}_{\text{positive coefficients}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{m-3} r^{\binom{m}{2}-m-i}}_{\text{negative coefficients}}.$$

步骤 2：根的存在性。在 $r = 1$，所有项都等于 1，因此

$$P^{n,k}(1) = k - (m-2) = k - (n-k+1) + 2 = 2k - n + 1.$$

对于 $k \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$，我们有 $2k \leq n - 2$，因此 $P^{n,\,k}(1) \leq -1 < 0$。

在 $r = 2$ 处，根据引理 4.3，最小正指数满足 $a_k = b_1 + (n-k)$，因此仅最小正项就是 $2^{a_k} = 2^{n-k} \cdot 2^{b_1}$，而整个负和至多为 $(n-k-1) \cdot 2^{b_1} < 2^{n-k} \cdot 2^{b_1}$。于是 $P^{n,\,k}(2) > 0$。

根据介值定理，$P^{n,\,k}$ 在 (1，2) 中至少有一个根。

步骤 3：唯一性。根据步骤 1，$P^{n,k}$ 的所有非零系数均为 ± 1。由引理 4.3，$a_k > b_1$，因此按指数递减排列时，系数恰好发生一次变号。根据笛卡尔符号法则，$P^{n,k}(r)$ 至多有一个正根。结合存在性可知，$P^{n,k}$ 恰有一个正根，且该根位于 (1,2) 内。

□

命题 4.8。对于 $n \geq 6,\ 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$，以及 $r > 1$,

$$r \cdot P^{n,k+1}(r) - P^{n,k}(r) > 0.$$

证明。 根据递归 $P^{n,\,k}(r) = r^{N-k} + P^{n-1,\,k-1}(r)$（定理 4.6）：

$$\begin{aligned} r \cdot P^{n,k+1}(r) - P^{n,k}(r) &= r\Big(r^{N-k-1} + P^{n-1,k}(r)\Big) - \Big(r^{N-k} + P^{n-1,k-1}(r)\Big) \\ &= r \cdot P^{n-1,k}(r) - P^{n-1,k-1}(r). \end{aligned}$$

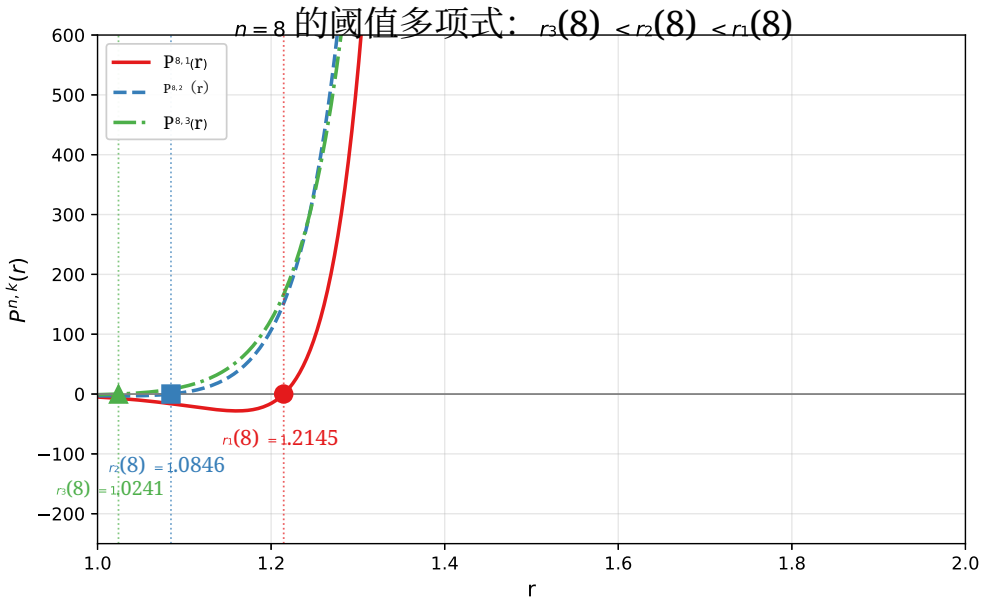


图 1：区间 (1，12) 上的阈值多项式 $P^{8,1}(r)$、$P^{8,2}(r)$ 和 $P^{8,3}(r)$。每个多项式在 (1，2) 中都有唯一根，且 $r_3(8) < r_2(8) < r_1(8)$，这说明了定理 4.9 中确立的单调性。

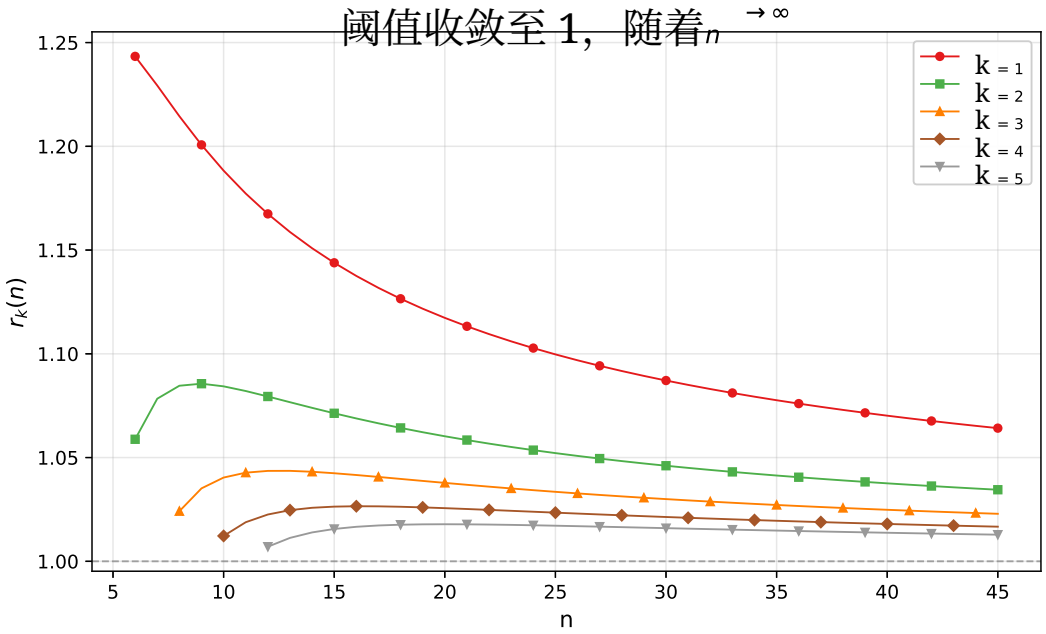


图2：固定 $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 时，阈值 $r_k(n)$ 随 n 变化的函数关系。所有阈值都在 $n \to \infty$ 时收敛到 1。注意，对于 $k \geq 2$，序列在 n 中并非单调。

应用此归约 $k - 1$ 次可得

$$r \cdot P^{n,k+1}(r) - P^{n,k}(r) = r \cdot P^{m,2}(r) - P^{m,1}(r),$$

其中 $m = n - k + 1 \geq 5$。直接计算可得

$$r \cdot P^{m,2}(r) - P^{m,1}(r) = \underbrace{(r^{M-m+1} + \cdots + r^{M-2m+3})}_{m-1 \text{ terms}} - \underbrace{(r^{M-2m+3} + \cdots + r^{M-3m+7})}_{m-3 \text{ terms}},$$

其中 $M = \binom{m}{2}$。最小正指数等于最大负指数；抵消后， $m-2$ 指数更大的正项占主导，超过 $m-4$ 剩余的负项。因此，当 $r > 1$ 时，该表达式为正。

□

不等式 $r \cdot P^{n,\,k+1}(r) > P^{n,\,k}(r)$ 表明，当 $P^{n,\,k}$ 消失时， $P^{n,\,k+1}$ 必为正，这正是证明单调性的关键观察。

定理 4.9 （单调性与收敛性）。对于 $n \geq 6$:

(a) 阈值序列严格递减： $r_{k+1}(n) < r_k(n)$ 对于 $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2$。

(b) 对所有 $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} r_k(n) = 1$。

证明。 (a) 在 $r = r_k(n)$ 处，由定义我们有 $P^{n,k}(r_k(n)) = 0$ 。因此：

$$r_k(n) \cdot P^{n,k+1}(r_k(n)) = r_k(n) \cdot P^{n,k+1}(r_k(n)) - P^{n,k}(r_k(n)) > 0$$

根据命题 4.8。由于 $r_k(n) > 1$，我们得出 $P^{n,k+1}(r_k(n)) > 0$。

根据定理 4.7， $P^{n,k+1}(r)$ 在 $(1, 2)$ 中有唯一根 $r_{k+1}(n)$。由于 $P^{n,k+1}(1) \leq 0$ （由定理 4.7 的证明）且 $P^{n,k+1}(r_k(n)) > 0$, 该根必须满足 $r_{k+1}(n) < r_k(n)$。

(b) 由 (a) 部分，对所有 $k \geq 2$，有 $1 < r_k(n) < r_1(n)$。由于根据定理 4.4(c)， $r_1(n) \to 1$ ，由夹逼定理可得 $r_k(n) \to 1$。 □

综合来看，定理 4.7 和定理 4.9 表明，这些阈值将 (1,2) 划分为若干区间，其中相继的孤立割是两两最优的。下一个结果将此提升为对所有孤立割同时最优。

为清晰地陈述结果，我们采用约定 $r_0(n) = 2$ （因此，区间 $(r_1(n)\ r_0(n))$ 对应于 C_1 最优的范围）。

定理 4.10 (主要结果：孤立割中的最优性)。 对于 $n \geq 6$、 $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 和$r \in (r_k(n)\ r_{k-1}(n))$, k-孤立割在所有 j-孤立割 $j = 1$、.....、 $\lfloor n/2 \rfloor$ 中取得最大权重。

证明。 回顾一下， $P^{n,\,j}(r) = W^n(C_j;\, r) - W^n(C_{j+1};\, r)$。根据定理 4.7， $P^{n,\,j}(r)$ 在 (1， 2) 中有唯一根$r_j(n)$, 且 $P^{n,\,j}(1) \leq 0$ 以及 $P^{n,\,j}(2) > 0$。因此：

- 对于 $r < r_j(n)$： $P^{n,\,j}(r) < 0$, 因此 $W^n(C_j;\, r) < W^n(C_{j+1};\, r)$
- 对于 $r > r_j(n)$： $P^{n,\,j}(r) > 0$, 因此 $W^n(C_j;\, r) > W^n(C_{j+1};\, r)$

Let $r \in (r_k(n)\ r_{k-1}(n))$。我们证明，对于所有 $j \neq$， $W^n(k\text{-孤立};\ r) > W^n(j\text{-孤立};\ r)$ k.

情形 1： $j < k$。根据定理 4.9， $r_j(n) > r_{j+1}(n) > \cdots > r_{k-1}(n) > r$。因此，对于所有$j < k$， $r < r_j(n)$，这意味着：

$$W^n(C_j; r) < W^n(C_{j+1}; r) < \cdots < W^n(C_{k-1}; r) < W^n(C_k; r)$$

情形 2： $j > k$。根据定理 4.9， $r > r_k(n) > r_{k+1}(n) > \cdots > r_{j-1}(n)$。因此，对于所有$i \geq k$, $r > r_i(n)$，这意味着：

$$W^n(C_k; r) > W^n(C_{k+1}; r) > \cdots > W^n(C_{j-1}; r) > W^n(C_j; r)$$

综合两种情况，对于所有 $j \neq k$， $W^n(C_k;\, r) > W^n(C_j;\, r)$。 □

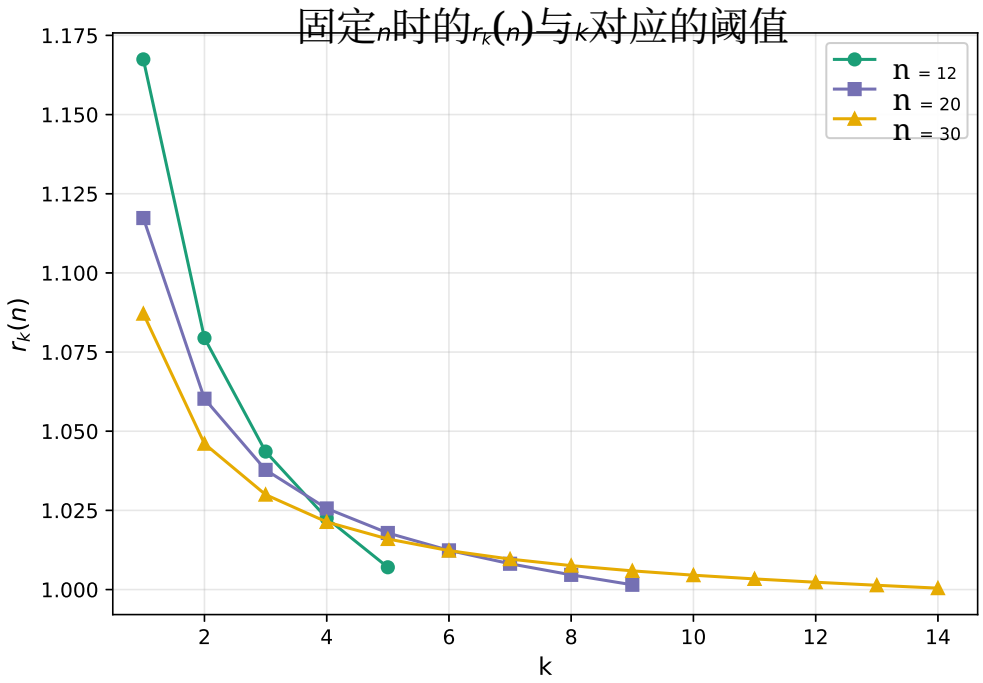
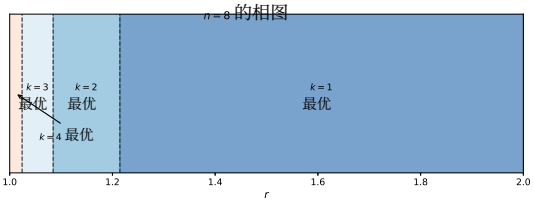


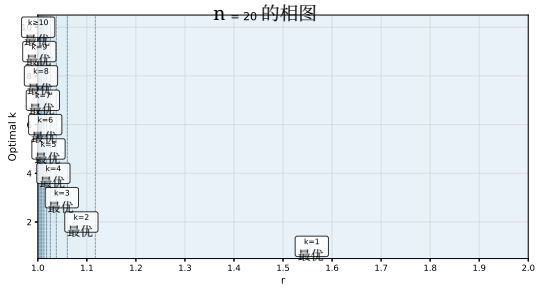
图3：阈值 $r_k(n)$ 随 k 变化的情况，其中 $n \in \{12, 20, 30\}$ 固定。对于每个 n，序列 $r_1(n) > r_2(n) > \cdots > r_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}(n)$ 严格递减，正如定理 4.9 所证明的那样。

注记 4.11。 在边界 $r = r_k(n)$ 处，割 C_k 和 C_{k+1} 的权重相等。注意，对于所有 $r \geq r_1(n)$，包括边 (1,2) 单独占主导的平凡范围 $r \geq 2$ ， C_1仍是最优的。

该定理为仅限于孤立割的优化问题提供了完整解：对于每个 $r \in (1, 2)$，通过确定 r 所在的阈值区间，可以明确识别出最优孤立割。



(a) $n = 8$ 的相图。竖直虚线表示阈值 $r_3(8) \approx 1.0241$、$r_2(8) \approx 1.0846$ 和 $r_1(8) \approx 1.2145$。



(b) $n = 20$ 的相图

图4：在每个区域（$r_k(n)$ $r_{k-1}(n)$）中， k-孤立割在所有孤立割中达到最大权重。

4.4 标度律

上述结果是严格的；本小节是启发式的，仅用于阐明阈值的渐近行为。

阈值可用以下近似表示。

通过比较项数和平均指数，平衡 $P^{n,k}(r)$ 中的正项与负项，可得

$$r_k(n) - 1 \approx \frac{\ln\left(\frac{n-k-1}{k}\right)}{\Delta(n,k)} \qquad \text{as } n \to \infty, \tag{3}$$

其中 $\Delta(n,k) = \frac{(k+2)(n-k)}{2} \quad \frac{}{} \frac{(k+1)(4-k)}{6}$。对于固定的 k，这预示着其衰减阶为 $\ln n$，比任何幂律都慢。推导过程及数值比较见附录 A。

上述结果表明，孤立割彼此之间占主导地位。接下来自然要问的是，它们是否也在所有 割中占主导地位。

5 全局最优性：猜想与计算证据

我们猜想，定理 4.10 中建立的相图可扩展到所有割：在孤立割中胜出的 k-孤立割也在全局范围内胜出。

猜想 5.1（全局最优性）。对于 $n \geq 7$ 和 $r \in (r_k(n),\ r_{k-1}(n))$，$k$-孤立割 C_k在所有 2^{n-1} 割中达到最大权重。

该猜想已通过对 $n \leq 21$ 的所有 2^{n-1} 割进行穷举，以及对 $n \leq 100$进行近孤立验证而得到验证。对于穷举，我们在 (1.001，1.999) 上使用了网格间距为 0.001 的均匀网格（1998 个评估点）；对于每一对 $(n,\ r)$，我们确认当 $n \geq 7$时，最大权重由一个孤立割达到。

界 $n \geq 7$ 是紧的。对于 $n \in \{4,5,6\}$，穷举搜索揭示了非孤立割在全局上最优的区间。在每种情况下，这些都是近孤立割，其形式为 $S_k^* = \{1,\ldots,k,n\}$——即包含顶点 n 而非连续块的划分。表 4 总结了这些结果。

表 4：通过穷举得出的 $n = 4$、5、6 的全局最优割。在区间边界，相邻割的权重相等。

n	区间	最优割	Type
4	(1，1。324)	$S_1^* = \{1,4\}$	近孤立
	(1.324, 2)	$C_1 = \{1\}$	孤立
5	(1，1。22)	$C_2 = \{1,2\}$	孤立
	(1.22, 1.28)	$S_1^* = \{1,5\}$	近孤立
	(1.28, 2)	$C_1 = \{1\}$	孤立
6	(1，1。04)	$C_3 = \{1,2,3\}$	孤立
	(1.04, 1.06)	$S_2^* = \{1,2,6\}$	近孤立
	(1.06, 1.24)	$C_2 = \{1,2\}$	孤立
	(1.24，2)	$C_1 = \{1\}$	孤立

图5展示了这些结果。对于 $n = 4$，孤立割 C_2 永远不会是全局最优的——在其理论最优区域内，始终被 S_1^* 支配。对于 $n = 5$ 和 $n = 6$，近孤立割会侵入阈值 $r_k(n)$ 周围的区间，此时相邻孤立割的最优性发生交替。随着 n 增大，侵入区间逐渐缩小；对于 $n \geq 7$，这些区间则完全消失。

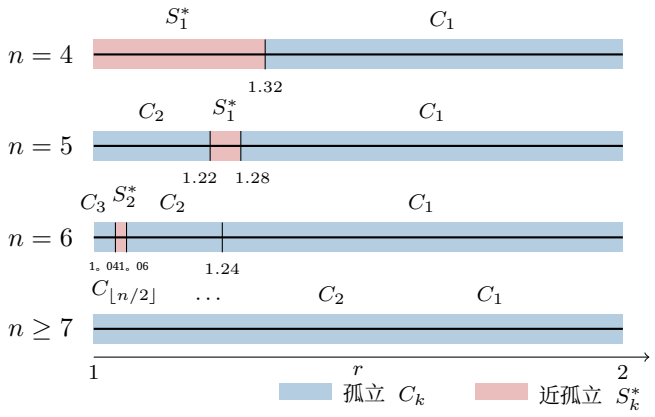


图5：通过穷举确定的全局最优割随 r 的变化。对于 $n \leq 6$，近孤立割 $S_k^* = \{1, \ldots, k, n\}$ 在某些区间（红色区域）内是最优的。对于 $n \geq 7$，孤立割在整个 (1,2) 区间内都是全局最优的（猜想 5.1）。

对于 $n = 4$，比较 $C_2 = \{1, 2\}$ 和 $S_1^* = \{1, 4\}$ 可得一个简单的恒等式。直接计算可得

$$W^4(S_1^*; r) - W^4(C_2; r) = r^5 - r^3 - r^2 + 1 = (r - 1)^2(r + 1)(r^2 + r + 1),$$

对于所有 $r > 1$，它都严格为正。因此，C_2 从不是最优的——在整个 (1,2) 区间内，它都不如 S_1^*。对于 $n \geq 5$，类似的差值 $W^n(S_1^*; r) - W^n(C_2; r)$ 不再以 $(r - 1)^2$ 为因子，因此 C_2 在区间的一部分范围内可能优于 S_1^*。孤立割获胜的区域随着 n 增大而扩大，到 $n = 7$ 时覆盖整个 (1,2) 区间。

5.1 计算验证

我们采用两种验证策略来支持猜想 5.1：对$n \leq 21$ 进行穷举，并针对 $n \leq 100$进行重点近孤立验证。对于任何$n \geq 7$，均未发现违反情形。完整的阈值表、方法细节和数值注意事项见附录B。

6 结论

我们研究了 K_n 上的最大割问题，其中边权为几何边权 $w_i = r^{N-i}$。对于$r \in (1, 2)$，我们证明孤立割 C_k 在彼此之间均为最优，且在阈值 $r_1(n) > r_2(n) > \cdots > 1$处发生转变。我们猜想这一结论可推广为对 $n \geq 7$的全局最优性，计算结果支持该猜想，范围达到 $n = 100$。该界是紧的：对于 $n \leq 6$，近孤立割$S_k^* = \{1, \ldots, k, n\}$ 可能胜出。

仍有若干问题有待解决。能否证明全局最优性，或许可以先证明近孤立割是唯一的竞争者？能否在给出显式误差界的情况下证明标度律（3）？其他权重族是否也会出现类似的阈值结构？

为将我们的结果置于相应背景中，我们将最优割与加权最大割的一般下界进行比较。令 $\mu(G)$ 表示最大割值，$w(G)$表示边的总权重，M表示一个最大权匹配（一组两两不相邻且总权重最大的边）。已知最强的界包括：Poljak–Turzík [5]，$\mu(G) \geq \frac{w(G)}{2} + \frac{w(T_{\min})}{4}$ 其中 $T_{\min}$ 是一棵最小生成树；以及Gutin–Yeo [6]，$\mu(G) \geq \frac{w(G)+w(M)}{2}$。对于我们的几何权重，Gutin–Yeo界最为紧致；表5将其与若干参数值下的最优孤立割进行了比较。

表5：Gutin–Yeo界与最优 k-孤立割。

n	r	k	最优值	GY界	Gap
8	1.05	3	35.88	33.20	7.5%
8	1.10	2	89.33	76.86	14.0%
8	1.50	1	1.60×10^5	1.14×10^5	29.1%
10	1.20	1	1.47×10^4	1.07×10^4	27.1%

即使是目前已知最强的一般性界，也比真实最优值低 7–31%。这一差距说明，对所有加权图都成立的界无法捕捉特定权重族所具有的精细结构，也说明本文所提出的精确刻画为何具有价值。更广泛地说，本研究表明，即使在完全图上，结构化的权重函数也能引发丰富的组合行为。

缩放律推导

我们推导出阈值的启发式近似式 (3)。回顾一下，$P^{n,\,k}(r) = W^n(C_k;\, r) - W^n(C_{k+1};\, r)$ 可以写成

$$P^{n,k}(r) = \sum_{i=1}^{k} r^{a_i} - \sum_{j=1}^{n-k-1} r^{b_j},$$

其中，正项由指数为 $a_1 > \cdots > a_k$ 的 k 个单项式组成，负项由指数为 $b_1 > \cdots > b_{n-k-1}$ 的 $n-k-1$ 个单项式组成，并且所有正指数都大于所有负指数（$a_k > b_1$）。

例 A.1. 对于 $n = 7$ 和 $k = 2$：$P^{7,\,2}(r) = r^{19} + r^{14} - (r^9 + r^8 + r^7 + r^6)$。

指数的显式公式由 (1) 得出：

$$a_i = \tbinom{n-i+1}{2} - (k - i + 1), \quad i = 1, \ldots, k,$$
$$\{b_j\} = \left\{ \tbinom{m}{2} - 2m + 3,\ \tbinom{m}{2} - 2m + 4,\ \ldots,\ \tbinom{m}{2} - m \right\},$$

其中 $m = n - k + 1$。负指数构成长度为 $n - k - 1$ 的等差数列 .

平均启发式

在阈值 $r = r_k(n)$ 处，我们有 $\sum_{i=1}^{k} r^{a_i} = \sum_{j=1}^{n-k-1} r^{b_j}$。左侧包含少量高指数项，而右侧包含大量低指数项。将每个求和近似为项数乘以 r 平均指数的幂：

$$k \cdot r^{\bar{a}} \approx (n - k - 1) \cdot r^{\bar{b}},$$

其中 $\bar{a} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$ 和 $\bar{b} = \frac{1}{n-k-1}\sum_{j=1}^{n-k-1} b_j$。令 $\Delta = \bar{a} - \bar{b}$ 表示平均指数间隙，我们得到 $k \cdot r^{\Delta} \approx n - k - 1$。取对数，并利用当 r 接近 1 时 $\ln(r) \approx r - 1$，可得

$$r_k(n) - 1 \approx \frac{\ln\left(\frac{n-k-1}{k}\right)}{\Delta(n,k)}. \tag{4}$$

由于负指数从 $\binom{m}{2} - 2m + 3$ 到 $\binom{m}{2} - m$ 构成等差数列（其中 $m = n - k + 1$），其平均值为 $\bar{b} = \frac{(n-k)(n-k-2)}{2}$。正指数的平均值为 $\bar{a} = \frac{\binom{n}{2} - \frac{(k-1)2}{2}}{n} - \frac{(k+1)(4-k)}{6k}$。合并可得：

命题A.2。平均指数间隙为

$$\Delta(n,k) = \frac{(k+2)(n-k)}{2} - \frac{(k+1)(4-k)}{6}.$$

例A.3。对于 $n = 7$, $k = 2$：$\Delta(7,2) = \frac{4\cdot 5}{2} - \frac{3\cdot 2}{6} = 10 - 1 = 9$。直接计算得到 $\bar{a} = \frac{19+14}{2} = 16.5$ 和 $\bar{b} = \frac{9+8+7+6}{4} = 7.5$，因此 $\Delta = 9$，正如预测的那样。

对于固定的 k 和较大的 n，主项为 $\Delta(n,\ k) \approx \frac{(k+2)}{2}\frac{n}{}$，因此

$$r_k(n) - 1 \approx \frac{2\ln(n/k)}{(k+2)n} \qquad \text{as } n \to \infty.$$

与计算值比较

表6将实际阈值与公式 (4) 的预测值进行了比较。对于 $k \geq 2$，该公式的准确率达到 1–8%；而对于 $k = 1$，则存在系统性低估，低估幅度为 $\sim$10%。这一误差反映出，单个正指数无法进行有意义的“平均”。

n	k	$r_k(n) - 1$（实际值）	预测值	误差
10	1	0.1883	0.1664	−11.6%
10	2	0.0843	0.0835	−1.0%
10	3	0.0404	0.0412	+2.0%
15	1	0.1439	0.1282	−10.9%
15	2	0.0713	0.0717	+0.5%
15	3	0.0424	0.0443	+4.4%
20	1	0.1173	0.1051	−10.4%
20	2	0.0603	0.0611	+1.5%
20	3	0.0378	0.0400	+5.9%
30	2	0.0461	0.0473	+2.7%
30	3	0.0300	0.0323	+7.8%
30	4	0.0214	0.0235	+10.0%

表6：实际阈值与标度律预测（4）的比较。

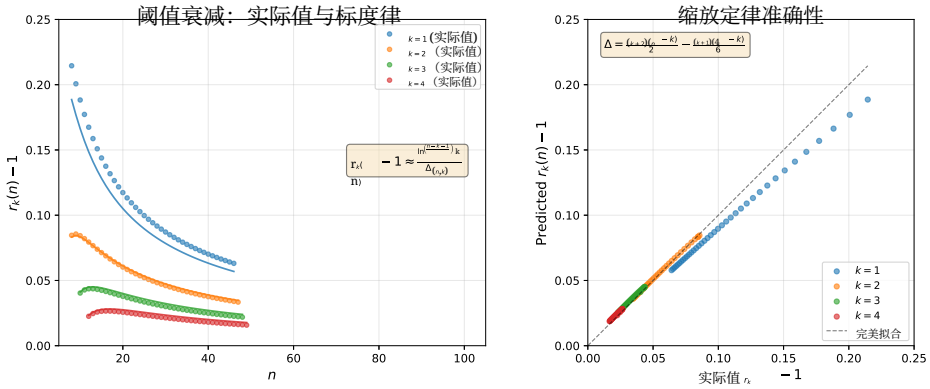


图6：标度律的验证。左图：数量 $r_k(n) - 1$ 关于 n 的函数，对于 $k = 1$，2，3，4。点表示计算值；曲线表示预测值 (4)。右图：比较预测值与实际值的奇偶图。

B 计算细节

阈值表

表7列出了 $n = 6$ 至 20 以及所有有效 k 对应的计算阈值 $r_k(n)$。这些数值使用 R 中的 uniroot 函数计算，精确到小数点后六位，容差为 10^{-12}。

表7： $6 \le n \le 20$的阈值 $r_k(n)$。条目“–”表示 $k > \lfloor n/2 \rfloor - 1$。

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
6	1.243347	1.058812	–	–	–	–	–	–
7	1.229318	1.078366	–	–	–	–	–	–
8	1.214506	1.084615	1.024141	–	–	–	–	–
9	1.200695	1.085595	1.035149	–	–	–	–	–
10	1.188280	1.084320	1.040361	1.012226	–	–	–	–
11	1.177240	1.082068	1.042719	1.018839	–	–	–	–
12	1.167434	1.079426	1.043572	1.022554	1.007037	–	–	–
13	1.158700	1.076677	1.043595	1.024651	1.011279	–	–	–
14	1.150889	1.073959	1.043150	1.025794	1.013920	1.004417	–	–
15	1.143869	1.071340	1.042441	1.026351	1.015585	1.007290	–	–
16	1.137530	1.068850	1.041587	1.026538	1.016632	1.009206	1.002953	–
17	1.131778	1.066499	1.040660	1.026488	1.017272	1.010504	1.004984	–
18	1.126535	1.064288	1.039702	1.026284	1.017638	1.011386	1.006409	1.002071
19	1.121736	1.062212	1.038741	1.025980	1.017816	1.011983	1.007424	1.003558
20	1.117326	1.060264	1.037794	1.025612	1.017863	1.012377	1.008152	1.004643

若干规律显而易见。当 n固定时，阈值随 k递减： $r_1(n) > r_2(n) > \cdots$（定理 4.9）。当 $k = 1$固定时，阈值随 n单调递减，但对于 $k \ge 2$，阈值关于 n并非单调；例如， $r_2(9) > r_2(8)$。当 $n \to \infty$时，所有阈值均收敛到1（定理 4.9）。

表 8 展示了 $n = 50$ 的所有阈值。

表 8： $n = 50$的所有阈值 $r_k(n)$。

k	$r_k(n)$	k	$r_k(n)$	k	$r_k(n)$	k	$r_k(n)$
1	1.059214	7	1.007883	13	1.003032	19	1.001136
2	1.031923	8	1.006577	14	1.002619	20	1.000908
3	1.021270	9	1.005558	15	1.002257	21	1.000694
4	1.015563	10	1.004741	16	1.001934	22	1.000488
5	1.012020	11	1.004071	17	1.001644	23	1.000290
6	1.009616	12	1.003510	18	1.001380	24	1.000096

验证方法

对较小的 n 进行穷举。 对于 $n \le 21$，我们穷举了所有2^{n-1} 不同的割，并在 (1.001,1.999) 上的均匀网格上计算了它们的权重，网格间距为$\Delta r = 0.001$ （1998 个评估点）。对于每一对 (n, r)，我们验证了最大权重由一个 k-孤立割取得。对于 $n \ge 7$，猜想成立； $n \in \{4, 5, 6\}$ 的反例已在第 5 节中得到完整刻画。请注意，当 k 较大时（例如 $r_{23}(50) - r_{24}(50) \approx 2 \times 10^{-4}$），均匀网格的间距会大于相邻阈值之间的间距；在这些区域，近孤立验证提供了主要依据。

较大 n 的近孤立验证。对于 $n > 21$，穷举变得不可行。然而，第 5 节中的分析指出，近孤立割 $S_k^* = \{1, \dots, k, n\}$ 是唯一能够对 $n \le 6$ 达到全局最优性的非孤立割。因此，我们进行了针对性验证：对于从 7 到 100 的每个 n ，我们计算了所有阈值 $r_k(n)$，并验证在每个阈值区间内均匀分布的 20 个点上，每个近孤立割 $S_j^*(j = 1$、.....、$n - 2)$都不如最优孤立割（$r_k(n)$ $r_{k-1}(n)$）。

数值注意事项。有两个技术问题需要谨慎处理：

- 对于较大的 k，阈值 $r_k(n)$ 可能极其接近 1；例如， $r_{24}(50) - 1 \approx 10^{-4}$。因此，求根算法必须在区间 $(1 + 10^{-9},$ 2) 内搜索，而不是从 $r = 1.001$ 开始。
- 对于较大的 n，直接计算权重会导致数值溢出（例如， r^{N-1} 与 $N = \binom{100}{2}$ =4950）。设 $W = \sum_i r^{e_i}$ 为一条割的权重，其中 e_i 为其交叉边的指数。权重的计算方式为

$$\log W = \max_i (e_i \log r) + \log \sum_i \exp((e_i - \max_j e_j) \log r),$$

并且比较在对数空间中进行。

结果。 对于从7到100的任意 n ，均未发现违反情况。结合对 $n \le 21$的穷尽验证，这为猜想 5.1提供了有力的计算证据。

代码可用性。 所有验证代码均可在此处获取：
https://github.com/nevmaric/lexicut。

致谢

作者是　　感谢 Tatjana Davidović 和 Dragan Urošević 提供了富有见地的讨论。

参考文献

[1] Dominik Scheder 和 Johannes Tantow。“具有字典序成本函数的 PLS 完全问题：Max-k-SAT 与阿贝尔置换轨道最小化”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2510.157*（2025 年）。[2] Nevena Marić。“通12过概率方法对 CUT(n) 多面体进行顶点枚举的显式公式”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2506.21787*（2025 年）。[3] Bruce Anderson、Jeffrey Jackson 和 Meera Sitharam。“重新审视笛卡尔符号法则”。载于：《美国数学月刊》105.5（1998 年），第 447–451 页。[4] Jason I. Brown 和 Ian C. George。“关于次数多项式的根”。载于：《澳大拉西亚组合数学杂志》92.2（2025 年），第 164–183 页。[5] Svatopluk Poljak 和 Daniel Turzík。“针对某些子图优化问题的多项式时间启发式算法及其保证的最坏情况界”。载于：《离散数学》58.1（1986 年），第 99–104 页。[6] Gregory Gutin 和 Anders Yeo。“最大加权割的下界”。载于：《*SIAM* 离散数学杂志》37.2（2023 年），第 1142–1161 页。