arXiv:2603.08952v1 [math.LO] 9 Mar 2026

泛型实数的维数

Yiping Miao*

摘要

本文研究可计算性理论中某些泛型集合的豪斯多夫测度。设 Γ为我们在其中取稠密开集的图灵理想。在对规范函数施加一些温和限制的条件下，Γ-Cohen泛型的集合具有正测度，当且仅当规范函数不被 Γ中的每个元素所支配。 Γ-Mathias泛型的集合与 Γ-Sacks泛型的集合具有正测度，当且仅当规范函数最终支配 Γ中的每个元素。这为集合中实数的行为与该集合的测度之间提供了某种比较。

目录

1 引言 **1**

2 完美树及其测度 4

2.1 完美树.4 2.2 一致树的测度.5 2.3 如何构造小维数的规范函数 5

3 Cohen 强迫 6

4 Mathias 强迫和 Sacks 强迫 11

4.1 Mathias 强迫.11 4.2 Sacks 强迫.14

5 讨论 15

1 引言

小性有两种正交的概念：零测集与贫乏集。一个集合是余贫乏的，如果它包含稠密开集的可数交；一个集合是贫乏的，如果它的补集是余贫乏的。一个典型元素若属于余零

*作者谨向 Theodore Slaman、Sean Cody 以及许多其他人（尤其是在新加坡暑期学校 2025 期间与作者交流的各位）致谢，感谢他们围绕本文展开的有益讨论并提出相关问题。

集（零集的补集），则是随机实数，而余贫乏集的一个典型元素是通用实数。

存在余瘦零集。例如，若实数 x 是 ω-泛型，则它属于每一个可算术定义的稠密开集。 ω-泛型的集合是余贫乏集，其豪斯多夫维数为 0。一个自然的问题是，我们能否刻画这个集合的“微小性”。此前已有研究通过刻画刘维尔数集合[5, 6]的规范剖面来研究刘维尔数。我们沿着同一研究思路考察 ω-泛型。

我们可以考虑一种更广义的测度概念，称为规范测度。函数$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是一个测度规范函数，当且仅当它是非递减、右连续的，且 $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$。它以某个 x为输入，并输出直径为 x的“f维”基本开集的测度。例如， $f(x) = \pi x^2/4$ 是一个测度规范函数，它以 x为输入，并输出直径为x的二维圆盘的测度，这就是平面上的经典测度概念。测度规范函数让我们能够更精细地根据直径控制测度。

由于本文研究的是康托空间 2^ω，我们只需考虑规范函数在 $\{2^{-k}$ 上的取值： $k \in \omega\}$，因此可以使用一个实数对规范函数进行编码。当我们讨论规范函数的复杂度时，指的是对该规范函数进行编码的实数的复杂度。

比较两个规范函数 g_0， g_1有多种方式。本文比较它们的字面值。

定义 1.1。 对于规范函数 g_0、 g_1，

1. 如果对于每个 x， g_0 支配 g_1，则有 $g_0(x) \geq g_1(x)$。

2. 如果存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $x \in (0, \delta)$，都有 $g_0(x) \geq g_1(x)$，则称 g_0 最终支配 g_1 （$g_0 \geq^* g_1$）。

对于每个完全集，都存在一个规范函数，使得该完全集具有正测度。由于存在一个由 ω-通用实数组成的完全集，因此存在一些规范函数，使得由 ω-通用实数组成的集合具有正测度。我们给出这类规范函数的刻画。

定理 3.3. $H^f(\mathcal{C}_\Gamma) > 0$ 当且仅当对每个测度规范函数 $g \in \Gamma$，$\hat{}f \not\leq^* g$。

这里我们以更一般的形式陈述它。 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是 ω-通用实数的集合，其中 Γ 是ˆ算术实数的集合。 f 是对 f 的轻微修改，后者最初见于 Olsen 和 Renfro[6]于 2006 年发表的论文。

上述定理表明，通用性的层决定了维数。

一个 ω-泛型（视为函数 $\omega \to \omega$）并非不被任何算术函数支配。我们可以看到，这一刻画与 ω-泛型的行为非常相似。本文的后半部分探讨了 Mathias 强迫和 Sacks 强迫。这两种强迫泛型的行为正好相反，因为 Mathias 强迫添加快速增长函数，而 Sacks 强迫添加缓慢增长函数。我们得到以下结果。

定理 4.1。 $H^f(\mathcal{M}_\Gamma) > 0$ 当且仅当对于每个规范函数 $g \in \Gamma$，$f \geq^* g$。

定理 4.2。 $H^f(S_\Gamma) > 0$ 当且仅当对于每个规范函数 $g \in \Gamma$,$f \geq^* g$。

这告诉我们，尽管 Γ-Mathias 泛型和 Γ-Sacks 泛型的行为截然不同，但从规范函数的角度来看，这两类泛型无法区分。我们在此提出一个自然（但含糊）的问题。

问题。 实数的行为与规范函数的行为之间，是否存在某种规律，使得它们具有正测度？

下一节将介绍一些关于测度规范函数和完美树的简单事实，我们会在证明中多次引用这些事实。

强迫

一个强迫概念 是一个偏序集 $\mathbb{P} = (P, \leq_P)$，其中 $\leq_P$是 P上的偏序。我们称每个 $t \in P$ 为条件，并称 t 扩展 s，若 $t \leq_P s$。我们定义以下概念，它是构造稠密集的一种方法。

定义 1.2. 函数 Θ： $P \to P$ 是一个密度算子，当且仅当对所有 $t \in P$,$\Theta(t) \leq t$。

显然， $ran(\Theta)$ 是一个稠密集。 Θ 充当稠密集的斯科伦函数，因此我们可以（以某种复杂度）从一个条件得到它的扩张。

我们还需要以下定义，因为我们的证明适用于任何具有足够闭包性质的复杂度。

定义 1.3. 实数的集合 Γ 是一个图灵理想，当且仅当

1. *(downward closed)* $\forall x, y\ [(x \in \Gamma \ \wedge \ y \leq_T x) \to y \in \Gamma]$,
2. （对连接封闭） $\forall x, y \in \Gamma$（$x \oplus y \in \Gamma$）。

如果 Γ 是一个非空可数图灵理想，我们就简称它为可数理想。

递归实数集、算术实数集、超算术实数集等都是可数理想。每个可数理想都包含递归实数集。本文中，我们始终用符号 Γ 表示一个可数理想。

康托空间中的几何测度论

对于每个规范函数 f： $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 以及每个 $A \subseteq 2^\omega$，将 f-（外）测度定义为

$$H^f(A) = \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \sum_i f(2^{-|s_i|}) : \bigcup_i [s_i] \supseteq A \text{ and } \forall i (|s_i| \geq n) \right\}.$$

这是关于 f 的规范测度。关于 H^f 的标准性质，参见 [7]。

对于每一个非递减且满足 $\lim_{n\to\infty} x(n) = \infty$ 的 $x \in \omega^\omega$，我们按 x 定义规范函数 $f_x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为

$$f_x(r) = 2^{-x(n)}, n \text{ is the least such that } 2^{-n} \leq r.$$

容易看出，对于每一个规范函数 f，存在某个 $x \in \omega^\omega$，使得 $f_x \leq f \leq 2f_x$ 在 0 的某个邻域上成立，而我们只关心测度是零、有限正值还是无穷。此后，每当我们提及规范函数时，均指由某个 $x \in \omega^\omega$ 定义的规范函数；每当我们谈论规范函数的复杂性时，均指定义它的 $x \in \omega^\omega$ 的复杂性。

记号与约定

我们自然地将 2^ω 与 $\mathcal{P}(\omega)$ 等同。 $|A|$ 是 A 的基数。

这里 $[*]$ 有三种用法：对于元素 $s \in A^{<\omega}$， $[s] = \{x \in A^\omega : x \supset s\}$；对于树 $T \subseteq A^{<\omega}$，$[T]$ 是通过 T 的路径集；对于每一个 Mathias 条件 (s, A)， $[s, A]$ 是它在 Ellentuck拓扑中生成的基本开集。

2 完美树及其测度

这里列出一些关于测度规范函数和完美树的事实。

2.1 完美树

对于一棵树 $T \subseteq 2^{<\omega}$，我们定义 $height(T) = \sup\{|t| + 1 : t \in T\}$。

对于一棵完美 T，存在唯一的指标函数 $\sigma_T : 2^{<\omega} \to T$，满足

1. 对所有 $t \in 2^{<\omega}$， $\sigma_T(t)^\frown 0 \subseteq \sigma_T(t^\frown 0)$ $\sigma_T(t)^\frown 1 \subseteq \sigma_T(t^\frown 1)$,
2. 对所有 $t \in T$，存在某个 $s \in 2^{<\omega}$，使得 $\sigma_T(s) \supseteq t$。

它在 2^ω 和 $[T]$ 之间诱导出一个同胚。

我们可以考虑一种特殊类型的完美树，在这种树中，树总是在同一层分叉。

定义 2.1. 设 $T \subseteq 2^{<\omega}$ 是一棵完美树， $\sigma_T : 2^{<\omega} \to T$ 是其指标函数。若 T 满足以下条件，则称其为一致完美树（简称“一致树”）：

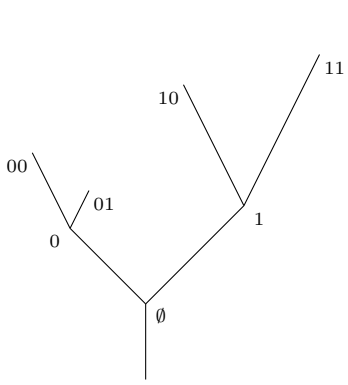
$$for\ every\ t_0, t_1 \in 2^{<\omega}\ with\ |t_0| = |t_1|,\ |\sigma_T(t_0)| = |\sigma_T(t_1)|.$$

如果 T 是一致的，我们令 $\sigma_T(n) =$ 最大值$\{|\sigma_T(s)| : |s| = n\}$。

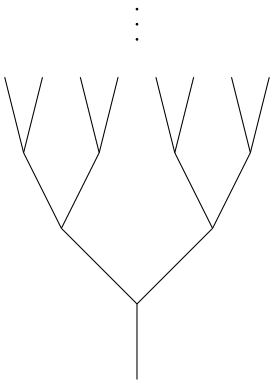
我们也需要它的有限段。以下定义也可以像定义一致树那样用一阶语言表述。

定义 2.2。 树 $T \subseteq 2^{<\omega}$ 是部分一致的，当且仅当存在一个一致树 S以及某个 $n \in \omega$，使得

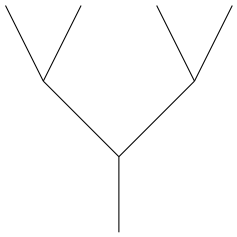
$$T = S \restriction n.$$



(a) 指标函数



(b) 一致树



(c) 部分 uniform

2.2 一致树的测度

我们提供了一种计算一致树测度的简便方法。证明是常规的，故略去。

命题 2.1. 对每个规范函数 f,

$$H^f(2^\omega) = \liminf_{n\to\infty} f(2^{-n}) \cdot 2^n.$$

命题 2.2. 对每个一致树 $T \subseteq 2^{<\omega}$ 和规范函数 f，将规范函数 g 定义如下

$$g(2^{-n}) = f(2^{-\sigma_T(n)}).$$

那么 $H^f([T]) = H^g(2^\omega)$。

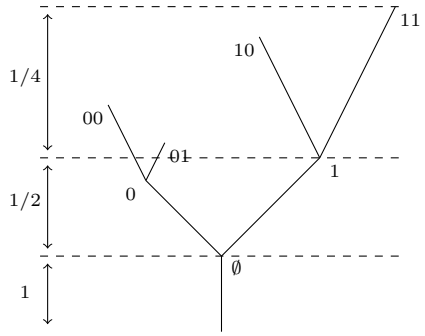
推论 2.2.1。 对于每个一致树 $T \subseteq 2^{<\omega}$ 和规范函数 f,

$$H^f([T]) = \liminf_{n\to\infty} f(2^{-n}) \cdot |\{s \in T : |s| = n\}|.$$

2.3 如何构造小维数的测度规范函数

我们希望定义一个规范函数 f_T，使得 $[T]$ 的 f_T 测度以一致的方式较大。我们将 f_T 定义为

$f_T(2^{-n}) = 2^{-m}$，其中 $m \in \omega$ 是满足条件的最小值，使得 $\max\{|\sigma_T(t)| : |t| = m\} \geq n$.



命题 2.3。 *1.* f_T 是一个规范函数。

2. 如果 $T, S \subseteq 2^{<\omega}$ 是完美树，且 $n \in \omega$ 满足条件

$$\forall t \in 2^{<\omega}(|t| \leq n \to (t \in T \leftrightarrow t \in S)),$$

那么对所有的 $k \leq n$, $f_T(2^{-k}) = f_S(2^{-k})$。

3. 对每个开覆盖 $\bigcup_i [t_i] \supseteq [T]$,

$$\sum_{i \in \omega} f_T(2^{-|t_i|}) \geq 1.$$

3 Cohen力迫

集合 Γ-Cohen 泛型的维数

令 $\mathbb{P}_{\mathcal{C}} = (2^{<\omega}, \supseteq)$ 为 Cohen力迫的偏序集。我们可以将 $2^{<\omega}$ 的子集视为 ω 的子集。

定义 3.1。 给定一个可数理想 Γ， $x \in 2^{\omega}$ 是 Γ-*Cohen* 泛型，当且仅当它与每个稠密集 $D \in \Gamma$相交。

令 Γ 为算术实数的集合， Γ-Cohen 泛型恰好是递归论中的 ω-泛型。

引理 3.1。 考虑 $\mathcal{C}_\Gamma$ 这一 Γ-*Cohen* 泛型的集合，对于每个测度规范函数 g， 若 $g(x)/x$ 单调递减，则以下条件等价:

1. $H^g(\mathcal{C}_\Gamma) > 0$,

2. 对每个测度规范函数 $f \in \Gamma$， $f \not\succeq^* g$。

我们不需要条件“$g(x)/x$ 单调递减”来证明蕴含关系 $1 \to 2$。

证明。如果存在某个 $f \in \Gamma$ 使得 $g \leq^* f$，要证明 $H^g(\mathcal{C}_\Gamma) = 0$，我们只需证明 $H^f(\mathcal{C}_\Gamma) = 0$。将 $2^{<\omega}$ 可计算地枚举为 $\{\sigma_n : n \in \omega\}$。对于每个 $l \in \omega$，我们可以将 $O_l = \{\sigma_{k_n} : n \in \omega\}$ 定义为

$k_n =$ 满足 $|\sigma_k| \geq l$、$\sigma_k \supseteq \sigma_n$ 和 $f(2^{-|\sigma_k|}) \leq 2^{-(l+n+1)}$ 的最小 k。然后

1. O_l 是可计算的且稠密，
2. $\sum_n f(2^{-|\sigma_{k_n}|}) \leq 2^{-l}$.

由于 O_l 是可计算的，$O_l \in \Gamma$。这证明了 $H^f(C_\Gamma) = 0$。

对于另一个方向，不失一般性，设 $g(1) = 1$。

观察。如果 $H^g(\mathcal{C}_\Gamma) > 0$，由于 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是 G_δ，存在一个闭集 $C \subseteq \mathcal{C}_\Gamma$，使得 $H^g(C) > 0$*([1, 4])*。由完美集性质，存在一棵完美树 T，使得 $[T] \subseteq C$ 且 $C \setminus [T]$ 是可数的，因此 $H^g([T]) > 0$。我们将构造这样一棵完美树。

我们将 $2^{<\omega}$ 的子集与其生成的开集等同起来。固定一个枚举 $\{O_n\}_{n>0}$，列出 Γ 中所有生成稠密开集的元素。若对于 $f \in \Gamma$ 中的每个规范函数都有 $g \not\leq^* f$，我们将定义一棵一致树 $T = \bigcup T_n$，使其满足以下性质：

1. 存在一个递增序列 $\{l_n\} \subseteq \omega$，使得 $T_n = T \restriction l_n$。
2. $g(2^{-n}) \cdot |\{s \in T :$ 对于每个 $n \in \omega$，都有 $|s| = n\}| \geq 1$。
3. 对于每个末端节点 $s \in T_n$，都有 $s \in O_n$。

于是 $[T] \subseteq C_\Gamma$，并且由推论 2.2.1 可得 $H^f([T]) \geq 1$。我们将通过递归定义 T_n，而下面的断言将确立这一过程中的一步。

断言 3.1.1. 对于每棵部分一致树 $S \subseteq 2^{<\omega}$，若对每个 $n \leq$ 都满足 $height(S)$，

$$g(2^{-n}) \cdot |\{s \in S : |s| = n\}| \geq 1,$$

并且对于每个稠密开集 $O \in \Gamma$，都存在一棵部分一致树 $S^* \supset S$，使得

1. 设 $l = height(S)$，$S^* \restriction l = S$。*2.* $g(2^{-n}) \cdot |\{s \in S^* : |s| = n\}| \geq 1$，对所有 $n \leq height(S^*)$，*3.* 对每个末端节点 $s \in S^*$，$s \in O$。

断言的证明。设 $K = |\{s \in S : |s| = l\}|$。将 $2^{<\omega}$ 可计算地枚举为 $\{\sigma_n : n \in \omega\}$，定义 $\Theta(t) = \sigma_n$，其中 n 是使得

1. $\sigma_n \supseteq t$，
2. $\sigma_n \in O$。

设 $k_{-1} = l$，对每个 $n \in \omega$，定义

$$P_n = \{t : t \supseteq s \text{ where } s \text{ is an end-node of } S \text{ and } |t| = |s| + n\},$$

$$k_n = \max\{k_{n-1} + 1, |\Theta(t)| : t \in P_n\}.$$

定义规范函数 f 为

$$f(2^{-c}) = K^{-1} \cdot 2^{-n}, \text{ where } n \text{ is the largest such that } k_n \leq c.$$

由于 $f \in \Gamma$，存在某个 $c > l$，使得 $g(2^{-c}) \geq f(2^{-c})$。令 n 为满足 $k_n \leq c$的最大值，则 $g(2^{-k_n}) \geq K^{-1} \cdot 2^{-n}$。令

$$S^* = \{\sigma \in 2^{<\omega} : \exists t \in P_n(\sigma, \Theta(t) \text{ comparable and } |\sigma| \leq k_n)\}.$$

我们知道

$$g(2^{-k_n}) \cdot |\{s \in S^* : |s| = k_n\}| \geq 1.$$

对于假设 $g(x)/x$ 递减且 $g(2^{-l}) \cdot |\{s \in S^* : |s| = l\}| \geq 1$ 我们知道

$$g(2^{-l+m}) \cdot |\{s \in S^* : |s| = l + m\}| \geq 1, \ \forall m \leq n.$$

从层 $l + n$ 到层 k_n，S^* 上没有分裂，因此

$$g(2^{-n}) \cdot |\{s \in S^* : |s| = n\}| \geq 1, \ \forall n \leq height(S^*).$$

□

令 $T_0 = \emptyset$，给定 T_n，令 $S = T_n$、$O = O_n$，并根据该断言定义 $T_{n+1} = S^*$。注意，$T = \bigcup T_n$ 是完美树，因为 $\lim_{x \to 0+} g(x) = 0$。证明至此完成。

□

解除限制

以下命题是 [6] 中的引理 2.2。由于我们现在在 2^ω 中工作，下面略述证明的一部分。

命题 3.2。*([6])* 如果 $g : \{2^{-n} : n \in \omega\} \to \{2^{-n} : n \in \omega\}$ 是一个规范函数，则将函数 $\hat{}g : \{2^{-n} : n \in \omega\} \to \{2^{-n} : n \in \omega\}$ 定义为

$$\hat{g}(x) = \inf_{0 < s \leq x} x \frac{g(s)}{s}$$

1. $\hat{}g$ 是一个规范函数。
2. 函数

$$x \mapsto \frac{\hat{g}(x)}{x}$$

在 0 的某个邻域内递减。

3. 我们有

$$H^{\hat{g}}(E) = H^g(E)$$

对每个 $E \subseteq 2^\omega$。

证明。 我们只证明 3 中的 $H^g(E) \leq H^{\hat{g}}(E)$ 方向。任取 $\delta > 0$，我们将证明 $H^g_\delta(E) + \delta \geq H^g_\delta(E)$。任取 E 的 δ 覆盖 $([\sigma_i])_i$，令 $r_i = 2^{-|\sigma_i|}$。由于 $\hat{g}(r_i) + \frac{\delta}{2^{i+1}} > \hat{g}(r_i)$，存在某个 $0 < s_i \leq r_i$ 使得 $r_i \frac{g(s_i)}{s_i} \leq \hat{g}(r_i) + \frac{\delta}{2^{i+1}}$。注意，$s_i, r_i \in \mathbb{D}$ 和 $[\sigma_i]$ 都可以划分为 $\{[\sigma_{ij}] : j \leq \frac{r_i}{s_i}\}$。于是我们有

$$\sum_i \hat{g}(r_i) + \delta \geq \sum_i r_i \frac{g(s_i)}{s_i} = \sum_i \sum_j g(2^{-[\sigma_{ij}]}) \geq H^g_\delta(E).$$

因此 $H^g_\delta(E) + \delta \geq H^g_\delta(E)$。令 $\delta \to 0+$，便得到所需结果。 □

注。 $g(x)/x$ 是递减的，当且仅当 $g = \hat{g}$。

定理 3.3。 $H^f(\mathcal{C}_\Gamma) > 0$ 当且仅当对于每个测度规范函数 $g \in \Gamma$，$\hat{g} \not\leq^* f$。

证明。 由引理 3.1 和命题 3.2 得出。 □

注。 在上述推论中，若将 $\hat{g}$ 替换为 g，结论并不成立。我们可以构造某个规范函数 g，使得对于每个 $f \in \Gamma$, $g \not\leq^* f$，但 $\hat{g}(x) \leq x$。

一些观察

一个自然的问题是边界行为：如果 $H^f(\mathcal{C}_\Gamma)$ 为正，它可能取什么值？结果表明，它不可能是 σ-有限的。这基本上沿用了 [6] 中的证明思路。

命题 3.4。 设 Υ 是一组测度规范函数，使得

1. 对每个 $h \in \Upsilon$ 以及每个 $n \in \omega$，存在 $k \in \Upsilon$ 使得 $n \cdot h \leq^* k$。

2. $id \in \Upsilon$。

如果 g 是一个规范函数，使得

1. 对每个 $h \in \Upsilon$，$g \not\leq^* h$，

2. $g(x)/x$ 单调递减，

则存在一个规范函数 f，使得

1. $f \succ g$，*2.* 对于每个 $h \in \Upsilon$、$f \not\leq^* h$，*3.* $f(x)/x$ 是单调递减的。

推论3.4.1。 如果 $H^g(\mathcal{C}_\Gamma) > 0$，那么 $H^g(\mathcal{C}_\Gamma)$ 必定是非 σ-有限的。

证明。 对于每个规范函数 g，若 $H^g(\mathcal{C}_\Gamma) > 0$，且 $H^g(\mathcal{C}_\Gamma)$ 是 σ-有限的，则 $\mathcal{C}_\Gamma = \bigcup_n A_n$，其中 $H^g(A_n) < \infty$ 对每个 n都成立。因此

$$H^{\hat{g}}(A_n) < \infty.$$

由命题 3.4 可知，存在某个规范函数 $f \succ \hat{g}$，使得对于每个测度规范函数 $h \in \Gamma$、$f \not\leq^* h$。于是

$$H^f(\mathcal{C}_\Gamma) \leq \sum_n H^f(A_n) = 0,$$

这与定理 3.3 矛盾。 □

根据贝西科维奇的一个定理[2], , 若 A 是解析的且具有上述性质，则 A 没有强维数。另请参见关于强维数的近期相关研究 [8]。

推论3.4.2。 $\mathcal{C}_\Gamma$ 不存在强维数。

随机实数力迫

另一个值得考虑的自然强迫是随机实数强迫，因为它是 Cohen力迫的对偶概念。

以下命题表明，随机实数在刻画方面不那么有趣，因为随机实数集合的勒贝格测度为 1。

命题3.5。 对于每个 $A \subseteq 2^\omega$，使得 $\mu(A) = 1$，以及每个规范函数 f,

$$H^f(A) = 0 \text{ if and only if } \liminf_{x\to 0+} f(x)/x = 0.$$

证明。 $\Leftarrow$: 若 $\liminf_{x\to 0+} f(x)/x = 0$，则存在一个严格递增序列$\{n_k\}_{k\in\omega} \subseteq \omega$，使得

$$\lim_{k\to\infty} f(2^{-n_k})/(2^{-n_k}) = 0.$$

取 $\{\sigma_l\}_{l\in\omega} \subseteq 2^{<\omega}$，使得 $A \subseteq \bigcup_l [\sigma_l]$、$\sum_l 2^{-|\sigma_l|} \leq 2$，且每个 $2^{-|\sigma_l|} = 2^{-n_k} \leq \varepsilon$ 对某个 k 都成立。于是

$$\sum_l f(2^{-|\sigma_l|}) \leq 2\varepsilon.$$

$\Rightarrow$: 如果 $\liminf_{x\to 0+} f(x)/x \geq \varepsilon > 0$，那么存在某个 $y \in (0, 1)$，使得对每个 $x \in (0, y)$，$f(x)/x \geq \varepsilon$。因此 $H^f(A) \geq \varepsilon \cdot \mu(A) > 0$。 □

4 Mathias 强迫与 Sacks 强迫

4.1 Mathias 强迫

Mathias 强迫添加的泛型表现为快速增长函数（在 ω^ω 中，如果 2^ω 这意味着该实数的 1 非常稀疏）。P. Cholak、D. Dzhafarov、J. Hirst 和 T. Slaman 在可计算性理论的背景下研究了 Mathias 强迫[3]。我们也将定义一种复杂度较低的 Mathias 强迫，但采用一种特定的方式，使其与几何测度论相对应。

令 $\mathbb{P}_\mathcal{M} = (P_\mathcal{M}, \leq_\mathcal{M})$ 为 Mathias 强迫对应的偏序集，即

$$P_\mathcal{M} = \{(s, A) \in 2^{<\omega} \times \mathcal{P}(\omega) : |A| = \aleph_0 \wedge |s| \leq \min A\}$$

$$(s, A) \leq_\mathcal{M} (t, B) \Leftrightarrow s \supseteq t \ \wedge \ A \subseteq B \ \wedge \ s - t \subseteq B.$$

对于每个 $(s, A) \in \mathbb{P}_M$ 令

$$[s, A] = \{x \in 2^\omega : s = x \restriction |s| \wedge x \subseteq s \cup A\}.$$

我们称 $x \in 2^\omega$ 与某个 $D \subseteq P_\mathcal{M}$ 相交，若存在某个 $(s, A) \in D$ 使得 $x \in [s, A]$。
我们将只考虑具有某种复杂度（复杂度 Γ）的 Mathias 泛型。

我们将每个 Mathias 条件 (s, A) 与一个编码它的实数 2^ω 对应起来；如果密度函数 $\Theta : P_\mathcal{M} \to P_\mathcal{M}$ 可以扩展为从 2^ω 到 2^ω 的连续函数，并且实数 y 以某种标准方式编码了这个连续函数，就称 Θ 由实数 y 编码。

定义 4.1. 给定一个可数理想 Γ,

1. $D \in \mathcal{D}_\Gamma$ 如果
$$\exists x \in \Gamma(x \ codes \ \Theta \ \wedge \ D = ran(\Theta \restriction \Gamma)).$$
2. $x \in 2^\omega$ 是 Γ-*Mathias* 泛型的，如果 x 与每个 $D \in \mathcal{D}_\Gamma$都有交集。

定理 4.1. $H^f(\mathcal{M}_\Gamma) > 0$ 当且仅当对于每个规范函数 $g \in \Gamma$，$f \geq^* g$。

证明. $\Rightarrow$: 如果存在某个 $g \in \Gamma$ 使得 $f \not\geq^* g$，我们想要找到某个编码 Θ 的 x，使得
$$\Theta : (s, A) \mapsto (s, B),$$
其中 $H^f([s, B]) = 0$ 和 $x \leq_T g$。

由于 $[s, B]$ 是一致树，根据推论 2.2.1，我们知道在树的第 n 层，只需监控该层的分支数以及值 $g(2^{-n})$。策略是：在 g 降到某个值以下之前不进行分裂，然后再分裂。

我们描述这样一种算法：假设 $B \upharpoonright n$ 已定义，且 $l := |\{k < n : B(k) = 1\}|$。

$$B(n) = 1 \text{ if } A(n) = 1 \text{ and } g(2^{-(n+1)}) \cdot 2^l < 2^{-l},$$

否则 $B(n) = 0$。

由于 $f \not\geq^* g$，存在无穷多个 $n \in \omega$ 使得 $f(2^{-n}) < g(2^{-n})$。若 $\lim_{n\to\infty} g(2^{-n}) \cdot 2^{|\{k<n:B(k)=1\}|} = 0$，那么

$$\liminf_{n\to\infty} f(2^{-n}) \cdot 2^{|\{k<n:B(k)=1\}|} = 0.$$

因此 $H^f([(s,\ B)]) = 0$，由推论 2.2.1 可知。 $H^f(\mathcal{M}_\Gamma) \leq H^f([ran(\Theta \upharpoonright \Gamma)]) = 0$，因为$\Gamma$是可数的。

$\Leftarrow$: 如果对每个 $g \in \Gamma,\ f \geq^* g$，我们构造一棵完美树 S，使得 $[S] \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$且 $H^f([S]) > 0$。思路仍然是逐个满足稠密集，同时不让测度下降；但这次我们需要在某个 Mathias 条件内进行分裂，并确保为了满足下一个稠密集而进行的分裂也不会降低测度。我们从条件 $(0,\ \omega)$ 开始，并需要下面的断言来确保归纳法的第一步能够成立。

断言 4.1.1. 若对每个 $g \in \Gamma$, $f \geq^* g$，都存在一个规范函数 h 使得

1. $h(x) \geq x$ 对每个 $x = 2^{-n}$都成立。

2. 对每个 $g \in \Gamma$, $h \geq^* g$都成立。

3. 对每个 A, $H^h(A) > 0$ 成立，当且仅当 $H^f(A) > 0$成立。

断言的证明。 由于 $f(x) \geq^* x$，存在某个 $N \in \omega$，使得对所有$n \geq N$,

$$f(2^{-n}) \geq 2^{-n}.$$

令 $s = \inf\{f(2^{-n})/2^{-n} : n \in \omega\}$，则 $s > 0$，且对所有 $n \in \omega$

$$\frac{f(2^{-n})}{s} \geq 2^{-n}.$$

对于每个 A, $H^{f/s}(A) > 0$，当且仅当 $H^f(A) > 0$。令 $h = f/s$。 □

现在我们可以用 h 代替 f。我们还需要一些定义。

定义 4.2。 1. 对于 $a \in \omega$，有限的 *(a-)M-*集 F 是 P_M的一个有限子集，满足对于每个 $(s, A),\ (t, B) \in F$, $|s| = |t| = a$和 s, t 不可比较。

2. 给定 $a < b$ 和有限 *a-M-*集 F，有限 *b-M-*集 F^*， F^* 扩张 F，如果

$$\{s : |s| = b \wedge \exists (t, B) \in F\ (s \supseteq t \wedge s - t \in B)\} = \{s : \exists A\ (s, A) \in F^*\}.$$

3. 对于每个有限 *M*-集 F，令树 T_F 为

$$T_F = \{t \in 2^{<\omega} : \exists (s, A) \in F \ (t \subseteq s \vee (s \subseteq t \ \wedge \ t - s \in A))\}.$$

请看下图。



(a) T_F (b) 延拓

回顾命题 2.3，对于每棵完美树 T，存在一个规范函数f_T ，使得

对于每个开覆盖 $\bigcup_i [\sigma_i] \supseteq [T]$,

$$\sum_{i \in \omega} f_T(2^{-|\sigma_i|}) \geq 1.$$

我们将证明以下一步引理。

断言 4.1.2. 设 h 满足我们的假设。对于每个满足$h \geq f_{T_F}$ 条件的有限 *M*-集 $F \in \Gamma$，以及每个编码密度算子 Θ的 $x \in \Gamma$，都存在一个扩张 F 的有限 *M*-集$F^* \in \Gamma$，使得

1. $h \geq f_{T_{F^*}}$。*2.* 对于每个（s， A） $\in F^*$，存在（t， B） $\in ran$（Θ），使得（s， A） $\leq_M$（t， B）。

断言的证明。 我们构造有限 M-集 $\{H_n$ 的一个序列： $n \in \omega\}$。设 F 是一个有限 a-M-集。

$$H_n = \{\Theta(s, A) : \exists (t, B) \in F(s = t \cup B \restriction (0, |t| + n) \wedge \ A = B - s)\}.$$

因此 $H_0 = F$。设 $f_n := f_{T_{H_n}}$, $f(x) := \max f_n(x)$。我们需要检查两件事。

1. $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$,
2. $f \in \Gamma$。

对于每个 $n \in \omega$， T_{H_n} 和 T_F 在前 $a+n$ 层上一致。根据命题 2.3 中的 2.， $\forall k < a+n$， $f_n(2^{-k}) = f_0(2^{-k})$。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在某个 $K \in \omega$，使得 $f_0(2^{-K}) \leq \varepsilon$，因此对于每个 $n > K$， $f_n(2^{-K}) \leq \varepsilon$，都存在某个 $L \geq K$，使得对于每个 $n \leq k$， $f_n(2^{-L}) \leq \varepsilon$，因此对于每个 n， $f_n(2^{-L}) \leq \varepsilon$。我们证明了

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0.$$

$f \in \Gamma$ 的证明是通过设计某种算法得到的，这里省略。

因此， $f \in \Gamma$ 是一个规范函数，根据假设 $h \geq^* f$。存在某个 $J > 0$，使得对于每个 $n \geq J$， $h(2^{-n}) \geq f(2^{-n})$。由于对于每个 $n < J$， $f_J(2^{-n}) = f_0(2^{-n})$， h 支配 f_J。令 $F^* = H_J$， F^* 满足上述条件。 □

固定对 Γ 中将密度算子编码为 $\{x_n : n \in \omega\}$ 的元素进行枚举。从 $F_0 = \{(0, \omega)\}$ 开始；如果 F_n 有定义，令 $x = x_n$，我们通过应用上述断言得到 $F_{n+1} = F^*$。令 $T = \{s \in 2^{<\omega} : \exists n \exists (t, B) \in F_n (s \subseteq t)\}$。

断言 4.1.3. $H^h([T]) > 0$.

该断言的证明。由于 $[T]$ 是一个紧集，对于每个 $\{s_i : i \in \omega\}$ 使得 $[T] \subseteq \bigcup_i [s_i]$，都存在它的一个有限子集也覆盖 $[T]$。对于这样的有限集 $\{s_i : i < N\}$，令 $m = \min\{k : \exists (s, A) \in F_k \forall i < N (|s_i| < |s|)\}$，那么 $\{s_i : i < N\}$ 也覆盖 T_{F_m}。由于 h 支配 $f_{T_{F_m}}$， $\sum_{i<N} h(2^{-|s_i|}) \geq 1$。 □

□

4.2 Sacks 强迫

现在我们考虑 Sacks 强迫，即以完美树进行的强迫。若将 (s, A) 看作一棵茎为 s 的完美树，并在其后可能延伸若干个 0，且在标记为 A 的位置分叉，那么 Sacks 强迫与 Mathias 强迫非常相似。这里我们只概述证明，并指出它与 Mathias 强迫的不同之处。

令 $\mathbb{P}_{\mathcal{S}} = (P_{\mathcal{S}}, \leq_{\mathcal{S}})$ 为 Sacks 强迫的偏序集，其中

$$P_{\mathcal{S}} = \{T \subseteq 2^{<\omega} : T \text{ is a perfect tree}\},$$

$$T \leq_{\mathcal{S}} R \longleftrightarrow T \subseteq R.$$

我们称 $x \in 2^\omega$ 满足某个 $D \subseteq P_{\mathcal{S}}$，如果存在某个 $T \in D$ 使得 $x \in [T]$。

我们将一棵树与编码它的 2^ω 中的一个实数对应起来；若密度函数 $\Theta: P_{\mathcal{S}} \to P_{\mathcal{S}}$ 可以扩展为从 2^ω 到 2^ω 的连续函数，且实数 y 以某种标准方式编码这个连续函数，则称密度函数 $\Theta: P_{\mathcal{S}} \to P_{\mathcal{S}}$ 由实数 y 编码。

定义 4.3. 给定一个可数理想 Γ，

1. $D \in \mathcal{D}_\Gamma$ 如果
$$\exists x \in \Gamma (x \text{ codes } \Theta \wedge D = ran(\Theta \restriction \Gamma)).$$
2. $x \in 2^\omega$ 是 Γ-*Sacks*泛型，当且仅当 x 与每个 $D \in \mathcal{D}_\Gamma$ 相交。令 S_Γ 为 Γ-*Sacks*泛型的集合。

定理 4.2。 $H^f(S_\Gamma) > 0$ 当且仅当对每个规范函数 $g \in \Gamma$，$f \geq^* g$。

证明。 $\Rightarrow$：假设存在某个规范函数 $g \in \Gamma$，使得 $f \not\geq^* g$。给定每一棵完美树 T，我们可以相对于 g 可计算地找到一棵完美树 $S \subseteq T$，使得

$$H^g([S]) = 0.$$

该算法与 Mathias 强迫中的算法基本相同。在 Mathias 强迫中，我们使用条件 (s, A)，并且只需指定分裂的层。在这里，给定一棵完美树，我们总是沿着最左路径前进，直到到达某一层 n，使得值 $g(2^{-n})$ 降到 2^{-2k} 以下，然后我们允许该层之上的第 k 次分裂（即每条分支允许分裂一次），接着在这两个分裂上分别沿着最左路径前进，直到 $g(2^{-n})$ 降到 $2^{-2(k+1)}$ 以下，并再次允许分裂。

该构造给出 $\lim_{n\to\infty} g(2^{-n}) \cdot |\{s \in S : |s| = n\}| = 0$，并且对无穷多个 n 有 $f(2^{-n}) < g(2^{-n})$，因此

$$\liminf_{n\to\infty} f(2^{-n}) \cdot |\{s \in S : |s| = n\}| = 0.$$

所以 $H^f([S]) = 0$。

该算法给出了一个连续函数 $\Theta : 2^\omega \to 2^\omega$，它由 Γ 中的一个实数编码，并充当密度算子。$S_\Gamma \subseteq \bigcup_{S \in ran(\Theta \restriction \Gamma)} [S]$，而且 $ran(\Theta \restriction \Gamma)$ 是可数的，因此

$$H^f(S_\Gamma) \leq \sum_{S \in ran(\Theta \restriction \Gamma)} H^f([S]) = 0.$$

$\Leftarrow$：这个方向与 Mathias 强迫完全平行。对于每个 $a \in \omega$，我们将一个有限的 a-S 集 F 定义为 P_S 的有限子集，使得对于每个T_0，$T_1 \in P_S$，T_0 的茎与 T_1 的茎不可比较，且二者长度均为 $\geq a$。在 Mathias 强迫中，我们有一步引理：给定任意有限 S 集 F，我们可以将其扩展为一个有限 S 集 F^*，使其满足下一个稠密集，同时树的 h-测度仍然很大。 □

5 讨论

我们正试图找出强迫与其测度规范函数刻画之间的对应关系。我们已经看到，这种刻画与支配关系有关。泛型实数本身也存在支配模式。

我们考虑的强迫在 2^ω 中给出泛型实数。当我们说支配关系时，我们将每一个 $x \in 2^\omega$（其中 $x^{-1}(\{1\})$ 为无穷）视为 $\pi \in \omega^\omega$，定义为 $\pi(0)$ =第一个 1 之前 0 的个数，$\pi(n)$ =第 n 个 1 与第 $n+1$ 个 1 之间 0 的个数。

定义 5.1。对于 $x, y \in \omega^\omega$,

1. *x dominates y ($x \geq y$) if for every $n \in \omega$, $x(n) \geq y(n)$.*

2. x 最终支配 y ($x \geq^* y$)，如果存在某个 $N \in \omega$，使得对于每个 $n \geq N$，$x(n) \geq y(n)$。

本节中的所有命题都只是简单的稠密性论证，因此我们省略此处的证明。

命题 5.1. 对于每个 $x \in \mathcal{C}_\Gamma$ 和每个 $y \in \Gamma$，$x \not\leq^* y$。

从上述命题和定理 3.3 可见，使 $\mathcal{C}_\Gamma$ 的测度为正的测度规范函数，其表现类似于 Γ-科恩实数本身。我们接下来考察 Mathias 强迫和 Sacks 强迫。

命题 5.2. 对于每个 $x \in \mathcal{M}_\Gamma$ 和每个 $y \in \Gamma$，$x \geq^* y$。

命题 5.3. 对于每个 $x \in \mathcal{S}_\Gamma$，都存在某个 $y \in \Gamma$，使得 $x \leq y$。

由定理 4.1 和定理 4.2 可见，使 $\mathcal{M}_\Gamma$ 和 $\mathcal{S}_\Gamma$ 的测度为正的测度规范函数，其表现与 Γ-马蒂亚斯实数相同；但就支配关系而言，Γ-萨克斯实数的表现恰好相反。如果某个集合满足一些闭包性质，且其中的实数表现相似，我们尚不清楚是否仍有可能找到一种通用方法，将该集合的规范剖面与集合中实数的表现联系起来。

参考文献

[1] A.S. Besicovitch. 关于无限测度集合存在有限测度子集的问题. 数学研究（会议录）, 55:339–344, 1952.[2] A.S. Besicovitch. 关于无限线性测度集合的切线定义. 载于剑桥哲学学会数学会议录, 第52卷, 第20–29页. 剑桥大学出版社, 1956.[3] Peter A Cholak, Damir D Dzhafarov, Jeffry L Hirst, and Theodore A Slaman. 可计算马蒂亚斯强迫的泛型. 纯粹与应用逻辑年刊, 165(9):1418–1428, 2014.[4] R.O. Davies. 解析集中的有限测度子集. 数学研究（会议录）, 55:488–489, 1952.[5] Lars Olsen. 刘维尔数集合的精确豪斯多夫维数.数学手稿, 116(2):157–172, 2005.[6] Lars Olsen and Dave L Renfro. 刘维尔数集合的精确豪斯多夫维数（II）. 数学手稿, 119:217–224, 2006.[7] Claude Ambrose Rogers. 豪斯多夫测度. 剑桥大学出版社, 1998.[8] Theodore A Slaman. 将博雷尔猜想从测度推广到维数. 2024.