arXiv:2603.08959v1 [math.CA] 9 Mar 2026

累积黎曼和、分布函数与普适不等式

让-克里斯托夫 潘[1, 2, *]

[1]CEA、DAM、DIF，F-91297 阿尔帕容，法国[2]巴黎-萨克雷大学、CEA、极端条件下物质实验室，F-91680布吕耶尔勒沙泰勒，法国

摘要

我们研究形如

$$T_n(g) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i), \qquad S_i = \sum_{j=1}^{i} a_j,$$

其中 $a_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$。如果 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个递减的可积函数，则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i) \le \int_0^1 g(x)\,dx,$$

由此可以得到一些经典不等式，例如取 $g(x) = 1 - x^k$ 时。尽管这是一个初等不等式，但可以从黎曼和、阿贝尔求和和概率积分变换的角度对其作出自然解释。本文旨在提出一种统一的视角，强调离散不等式是无分布连续恒等式的推论。除了这一具体例子，我们还为单调函数建立了一般的离散定理，并讨论其与主序理论和卡拉马塔不等式的联系。

1 引言

设 $a_1, \dots, a_n$ 为满足以下条件的正数

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1,$$

并定义累积和

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} a_j.$$

*jean-christophe.pain@cea.fr

那么我们有

$$0 = S_0 < S_1 < \cdots < S_n = 1.$$

涉及这一对 $(a_i,\ S_i)$ 的表达式自然地出现在许多与累积过程有关的情境中。本文研究以下形式的和

$$T_n(g) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i).$$

在第2节中，我们首先介绍主要的离散单调不等式，并给出一种黎曼和解释，由此自然引出一个连续界。在第3节中，我们通过经典多项式情形阐释该定理。随后，我们利用阿贝尔求和（见第4节）和概率积分变换（见第5节）给出其他表述，并着重说明它们与连续积分和分布函数之间的联系。第6节概述了该不等式与主序的联系；第7节则讨论不等式的严格性，阐明等式成立或不成立的条件。结论中提及了该不等式在概率和数值求积中的潜在应用。附录中，我们提供了递减函数的其他示例，包括指数函数、对数函数、倒数函数和三角函数，以展示该不等式的普适性。

2　Main 离散定理与黎曼和解释　　n

定理2.1　　（离散单调不等式）。 设 a_1，……， $a_n > 0$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，并定义　　e

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} a_j.$$

设 $g:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个递减的可积函数。则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i) \le \int_0^1 g(x)\,dx.$$

证明。 利用 $a_i = S_i - S_{i-1}$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i) = \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1}) g(S_i).$$

由于 g 是递减的，因此有

$$g(S_i) \le g(x), \qquad x \in [S_{i-1}, S_i],$$

由此可得

$$(S_i - S_{i-1}) g(S_i) \le \int_{S_{i-1}}^{S_i} g(x)\,dx.$$

对 i 求和可得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i) \le \sum_{i=1}^{n} \int_{S_{i-1}}^{S_i} g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

□

由于

$$a_i = S_i - S_{i-1},$$

我们可以改写为

$$T_n(g) = \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1}) g(S_i).$$

因此， $T_n(g)$ 是与该分割相关的右端点黎曼和

$$0 = S_0 < S_1 < \cdots < S_n = 1.$$

若 g 递减，则每个矩形都位于 g 的图像下方，并且

$$T_n(g) \leq \int_0^1 g(x)\, dx.$$

3 一个简单的多项式情形

对于以下情形，可以得到一个启发性示例

$$g(x) = 1 - x^k.$$

我们首先用累积和改写该和。由于

$$a_i = S_i - S_{i-1},$$

我们可以写成

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (1 - S_i^k) = \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1})(1 - S_i^k).$$

这恰好是对分割$0 = S_0 < S_1 < \cdots < S_n = 1$上的积分 $\int_0^1 (1 - x^k)\, dx$ 的右端点黎曼和。第二步是利用单调性对每一项进行估计。函数 $g(x) = 1 - x^k$ 在 $[0, 1]$上单调递减。因此，对任意 $x \in [S_{i-1}, S_i]$，我们可以写成

$$1 - S_i^k \leq 1 - x^k,$$

因此

$$(S_i - S_{i-1})(1 - S_i^k) \leq \int_{S_{i-1}}^{S_i} (1 - x^k)\, dx.$$

对 $i = 1$、.....、 n求和，得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (1 - S_i^k) \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{S_{i-1}}^{S_i} (1 - x^k)\, dx = \int_0^1 (1 - x^k)\, dx.$$

这个积分可以直接求出：

$$\int_0^1 (1 - x^k)\, dx = \int_0^1 1\, dx - \int_0^1 x^k\, dx = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

综合前面的步骤，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (1 - S_i^k) < \frac{k}{k+1}.$$

注 3.1. 若所有 $a_i > 0$ 与 $n > 1$ 均成立，则该不等式是严格的，因为对于严格递减函数，右端点黎曼和会严格低估积分，除非该分割与多项式的特定点重合。

例 3.1. 设 $n = 3$ and $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.5$。那么 $S_1 = 0.2$, $S_2 = 0.5$, $S_3 = 1$。对于$g(x) = 1 - x^2$，有

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(1 - S_i^2) = 0.2(1 - 0.04) + 0.3(1 - 0.25) + 0.5(1 - 1) = 0.192 + 0.225 + 0 = 0.417 < \frac{2}{3}.$$

其他类型递减函数的例子见附录 A。

4 阿贝尔求和

A另一个有用的表示可由离散分部积分得到。写成 g

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1}) g(S_i),$$

阿贝尔求和给出

$$T_n = g(1) + \sum_{i=1}^{n-1} S_i \big(g(S_i) - g(S_{i+1})\big).$$

在多项式情形下， $g(x) = 1 - x^k$ 这变为

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} S_i (S_{i+1}^k - S_i^k).$$

这种离散分部积分，或称阿贝尔求和，为该求和提供了另一种表示形式

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i)$$

即用累积和 S_i 以及 $g(S_i)$的连续差分来表示。它突显了求和中的每一项如何同时取决于累积权重 S_i 以及 g 在相邻点之间的变化。这种形式明确体现了 g 的单调性所起的作用：若 g 递减，则每一项 $S_i(g(S_i) - g(S_{i+1}))$均为非负数，从而直观地解释了为什么离散和不超过相应的积分。此外，这种表示有助于分析严格成立的条件，也有望推广到凸函数或分段函数。

5 连续表述与一般恒等式

设 f 是 $[0, 1]$ 上的概率密度，并定义

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

考虑

$$I = \int_0^1 f(x)[1 - F(x)^k]dx.$$

由于 $F'(x) = f(x)$，我们代入

$$u = F(x).$$

Then

$$du = f(x)dx$$

and

$$I = \int_0^1 (1 - u^k)du = \frac{k}{k+1}.$$

Thus

$$\int_0^1 f(x)[1 - F(x)^k]dx = \frac{k}{k+1}.$$

连续形式凸显了离散不等式与无分布积分恒等式之间的联系。通过将 $f(x)\,dx$ 解释为概率测度，并使用代换 $u = F(x)$，和 $\sum a_i g(S_i)$ 可视为积分 $\int_0^1 g(u)\,du$ 的离散近似。这一视角表明，上界与特定权重 a_i 无关，而仅源于 g 的单调性。它还提供了一种概率解释：该积分对应于 $g(U)$ 的期望值，其中 U 在 $[0,1]$ [1], 上均匀分布，而离散和通过累积和逼近这一期望。

命题 5.1。 设 f 为 $[0,1]$ 上的概率密度，其累积分布函数为F。对任意可积函数 g,

$$\int_0^1 f(x)g(F(x))dx = \int_0^1 g(u)du.$$

该恒等式由代换 $u = F(x)$ 得出。

6 与主序的联系

累积向量（S_1，……， S_n）具有一种自然的排序

$$0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_n = 1.$$

这类结构与主序理论密切相关，而主序理论在不等式理论中发挥着重要作用。设 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \ldots\ldots, y_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，并设 $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \cdots \geq x_{(n)}$ 和 $y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq \cdots \geq y_{(n)}$ 分别表示它们按降序排列的分量。若 x 被 y 主序（记作 $x \prec y$），则称

$$\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

直观而言，这意味着 x 的分量比分量属于 y 的分布更均匀。该领域的一项基本结果是卡拉马塔不等式：若 $x \prec y$ 且 g 是凸函数，则（参见参考文献 [3]）：

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} g(y_i).$$

尽管本文所考察的框架有所不同，但其基本理念相似：对累积量施加结构约束，可以得出与所涉及的具体系数 a_i 无关的界。

7 关于不等式严格性的讨论

离散单调不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i) \leq \int_0^1 g(x)\,dx$$

当所有权重 $a_i > 0$ 和 $n > 1$ 满足以下条件时，该不等式是严格的： g 在 $[0,1]$ 上严格递减。这是因为，对于严格递减函数，右端点黎曼和会低估积分；除非分割恰好落在函数斜率恒定的点上，或函数恰为与矩形精确匹配的线性区间。只有在特殊且高度对称的情况下才会取等号。例如：

- 如果所有 $a_i = 1/n$ （均匀权重）且 $S_i = i/n$，并且 g 是线性的，那么黎曼和恰好等于积分：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g\Big(\frac{i}{n}\Big) = \int_0^1 g(x)\,dx, \quad g(x) = mx + b.$$

- 更一般地，如果分割点 (S_i) 与这样的点重合，使得 g 在每个子区间上的积分恰好等于求和所用的矩形面积，则可能取等号。这通常要求 g 具有与累积和相匹配的分段线性区间。

因此，对于严格递减的非线性函数，例如 $g(x) = 1 - x^k$, $g(x) = e^{-\lambda x}$, $g(x) = \ln(2 - x)$, $g(x) = 1/(1 + x)$ 或 $g(x) = \cos(\pi x/2)$，当所有 $a_i > 0$ 都满足 $n > 1$ 时，等号永远不会成立（见附录）。这进一步说明，在大多数实际情形中，该不等式确实是严格的。

8 结论

我们已经证明，形如

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i) \tag{1}$$

其中 $a_i > 0$、$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 和 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个递减的可积函数，可以自然地解释为由概率积分变换得到的一个简单连续恒等式的黎曼近似。离散单调不等式及其连续对应形式有若干有趣的应用。设 X 是在 $[0,1],$ 上均匀分布的随机变量，且 g 是一个递减函数。那么主定理意味着

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g(S_i) \leq \int_0^1 g(x)\,dx = \mathbb{E}[g(X)],$$

其中，$\mathbb{E}[g(X)]$ 表示 $g(X)$ 的期望值。这为累积和的递减函数的期望提供了一个自然上界；当根据离散数据近似计算期望时，这在概率和统计学中可能很有用。公式（1）中的离散和可以解释为积分 $\int_0^1 g(x)\,dx$ 的右端点黎曼和近似，g 的单调性确保该和为积分提供一个有保证的上界。因此，当只能使用非均匀分割或加权和时，该不等式可用于数值分析，以获得递减函数积分的安全估计。累积向量（S_1，……，S_n）自然地排列了（a_i）的部分和。这一观点阐明了诸如 $k/(k+1)$ 等常数的来源，并提示了其与概率结构的进一步联系。尽管我们的设定涉及递减函数，但 g 的单调性质与累积和相结合，可以产生独立于特定系数 a_i 的界。这将该不等式与经典结果联系起来，并为理解离散与连续不等式提供了更广阔的背景。它也可能有助于研究近似凸函数 $[2,4]$。

参考文献

[1] W. Feller，《概率论及其应用导论》，第1卷，第3版，John Wiley & Sons，纽约，1968年。

[2] J.W.Green，近似凸函数，《杜克数学杂志》 19，499–504（1952）。[3] G. H. Hardy，J. E. Littlewood，G. Pólya，《不等式》，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，1952年。[4] D. H. Hyers 和 S. M. Ulam，近似凸函数，《美国数学会会刊》3，821–828（1952）。[5] C.P. Niculescu，重新审视 Hardy–Littlewood–Pólya主序不等式，《数学分析及其应用杂志》501，文章编号 125211（2021）。

A 附录：其他函数的不等式

在本附录中，我们讨论四种额外情形：指数函数、对数函数、倒数函数和三角函数。

例 A.1（指数情形）。 考虑递减的指数函数

$$g(x) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0.$$

根据主定理，我们有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\lambda S_i} \leq \int_0^1 e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

这表明，离散不等式对非多项式函数同样成立。例 A.2（对数递减情形）。 考虑递减的对数函数 on

$$g(x) = \ln(2 - x), \quad x \in [0, 1].$$

那么积分为

$$\int_0^1 \ln(2 - x)\, dx = [(2 - x)\ln(2 - x) - (2 - x)]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

因此，主定理给出

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(2 - S_i) \leq 2\ln 2 - 1.$$

例 A.3（倒数递减情形）。 考虑递减的倒数函数

$$g(x) = \frac{1}{1 + x}, \quad x \in [0, 1].$$

积分为

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x}\, dx = \ln 2.$$

因此，主定理给出离散不等式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + S_i} \leq \ln 2.$$

这表明，该定理适用于在 $x = -1$ 处有简单极点、且在 $[0, 1]$ 上仍递减的函数。

例 A.4（三角递减情形）。 考虑递减的三角函数

$$g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad x \in [0, 1].$$

积分为

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi}.$$

因此，主定理给出

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\left(\frac{\pi S_i}{2}\right) \leq \frac{2}{\pi}.$$

这说明该不等式适用于非代数函数。

这些例子表明，该定理适用于任意单调递减函数，而不仅限于多项式或指数函数。