arXiv:2603.09081v1 [physics.comp-ph] 10 Mar 2026

基于Puck失效理论的纤维增强复合材料层合板多相场模型

Pavan Kumar Asur Vijaya Kumar[a]、Rafael Fleischhacker[a]、Aamir Dean[b, c, *]、Heinz E Pettermann[a]

[a]维也纳工业大学轻量化设计与结构生物力学研究所，*Getreidemarkt 9*，*1060* 维也纳，奥地利。[b]结构分析研究所，莱布尼茨汉诺威大学，*Appelstr. 9A*，*30167* 汉诺威，德国[c]苏丹科技大学工程学院土木工程学院，*P.O. Box 72*，喀土穆，苏丹

摘要

本文提出了一种基于Puck失效理论的多相场模型，用于预测纤维增强复合材料（FRCs）层合板的失效。具体而言，本研究提出了一种二维多场模型，并结合网格叠加法，计算具有不同铺层方向的FRCs层合板中的面内损伤。该模型采用两个相互独立的相场变量，分别触发纤维主导失效和纤维间主导失效，从而揭示损伤之间的相互关系。此外，模型采用两个特征长度尺度和两个结构张量，以准确描述损伤模式。层合板中的每个铺层均使用单独的网格表示，并通过网格叠加法进行组合。本文采用四个基准算例来展示所提出模型的预测能力。具体而言，文中介绍了拉伸和压缩载荷下的试样测试、开孔拉伸、紧凑拉伸和双边缺口拉伸算例，并将结果与文献中的实验结果进行了比较。此外，交叉铺层层合板和各向同性层合板的结果表明，该模型能够在定性和定量上再现实验结果。

关键词： A. 多相场，B. 层合板，C. 相场法，D. 纤维增强复合材料，E. 断裂

1. 引言

近几十年来，层合复合材料（纤维增强复合材料）一直是工程应用中的热门选择。这得益于其独特的力学、热学和化学性能组合，更重要的是，能够根据设计者的需求调控其力学性能。典型例子包括波音787，其重量的50%和体积的80%由复合材料构成；以及宽体客机空客A350，其重量的53%为复合材料。层合复合材料已广泛应用于各种轻量化领域，例如航空航天、汽车、海洋、能源和体育等。

尽管纤维增强复合材料作出了诸多贡献，但由于其失效机制复杂，预测其断裂仍面临重大挑战 [1]。亟需采用数值方法预测复合材料中损伤的起始与扩展，以补充实验研究并促进损伤容限设计。对于给定载荷，层合板中的裂纹扩展及失效模式很大程度上取决于铺层顺序。面内载荷下可能出现的失效模式包括：1. 横向层内基体开裂；2. 纵向层内基体开裂；3. 层间开裂（分层）；4. 横向裂纹扩展，进而导致纤维拉伸或压缩失效；5. 分层扩展 [2, 3]。

*通讯作者电子邮箱地址： a.dean@isd.uni-hannover.de (Aamir Dean)

关于复合材料，尤其是纤维增强复合材料的文献以实验研究为主。本文重点介绍最相关的研究。更全面的综述请参见 [4] 及其参考文献。关于层合板开孔拉伸（OHT）的实验研究见 [5–8]。具体而言， [9]研究了开孔拉伸强度及其潜在失效模式。 [7, 8, 10–13] 考察了各种层合板铺层序列及铺层块，以研究铺层顺序、铺层块厚度以及尺寸效应等因素对层合板的影响。更多详情请参见 [8, 9]。

除开孔拉伸（OHT）外，紧凑拉伸（CT）构型也被广泛用于研究层合板。碳纤维/环氧树脂的紧凑拉伸试验结果见 [14–20], ，而碳纤维/碳层合板的研究见 [21], ，碳纤维/聚醚醚酮见 [22], ，硼/铝见 [23, 24]。这些研究还考察了拉伸和压缩载荷下的各种层合顺序。缺口拉伸试样得到了广泛研究，以探究其力学性能（包括断裂韧度），以及不同结构构型下缺口对各种层合板铺层序列的影响，相关研究见 [14, 23, 25–30], 等。

数值方法被用于对复合材料进行数学建模。相关文献中采用了各种模型来模拟纤维增强复合材料中的损伤扩展，例如内聚单元 [31], 、弥散裂纹模型 [32], 、扩展有限元法（XFEM） [33], 、近场动力学 [34, 35]。此外，还采用了有限元法与近场动力学相结合的方法 [36], ，以及离散格构模型 [37–39] 。关于复合材料计算建模的详细讨论，见 [3]；关于一般计算损伤的综述，见 [2] 。主流方法源于连续损伤力学（CDM），其中单向（UD）铺层在有限元法中被视为弥散（均质化）材料。针对铺层行为提出了各种本构模型，涵盖渐进退化模型 [40]至先进的连续损伤力学模型 [41–43]。[44–46] 将复合材料建模为各向异性弹性脆性连续体， [47]则采用剪切驱动非弹性模型。 [48–51]提出了用于描述刚度退化和不可恢复应变累积的模型。 [5, 6, 50, 52]提出了一种受微观力学启发的连续损伤力学模型，该模型纳入了由不可恢复应变累积、应变硬化、应变软化和塑性引起的非线性。

一般而言，相场（PF）方法被视为系统中的应变能与产生新表面所需能量 [53–56]之间的竞争。由于裂纹的弥散特性、非局部方法以及易于与不同材料模型相结合的特点，相场方法已成为一种颇具吸引力的断裂建模计算工具。因此，相场方法被用于研究脆性 [57–67], 动态断裂 [56, 58, 67–70], 热力耦合断裂[71–73], 和复合材料 [74–84] 等问题。在复合材料领域，相场方法主要局限于研究单铺层/单向纤维增强复合材料，偶尔也用于研究简单的层合板铺层序列，例如交叉铺层层合板，见 [74, 79, 85–87]。具体而言，研究人员在面内和面外设置下处理具有不同铺层序列的层合板，以研究层合板铺层序列的影响。因此，仅研究了厚度平面内（面外）的裂纹扩展，如 [87–94]所示。据作者所知，在相场方法领域，尚无文章考虑包含多于两层的层合板铺层序列，以研究层合板中的面内裂纹扩展。

许多基于各向异性能的相场模型 [88, 93]由于能量分解而无法模拟压缩载荷。此外，将这些方法扩展到研究具有不同铺层顺序的层合板并非易事。另外，这些模型往往需要调整长度尺度，以匹配力-位移曲线。这种做法直接源于 Oscar等人近期的论文 [95, 96], ，该论文指出，经典变分相场模型无法准确预测裂纹成核。此外，研究还指出，必须将整个失效起始面纳入相场模型的构建中，才能描述裂纹成核。换言之，除相场模型长度尺度的插值之外，裂纹成核还必须主要借助特设准则 ℓ 。对于纤维增强复合材料，必须在模型中纳入 Puck [40], 、Hashin [97], 等唯象准则，或基于物理的准则[4, 98–103] ，以描述裂纹成核。关于采用相场法研究纤维增强复合材料的更全面综述，请参见 [104]及其中的参考文献。

本文采用 Puck失效理论，探讨失效起始（强度）面的相关问题。此外，本文利用一种简单的二维模型和网格叠加技术，模拟不同铺层顺序层合板的面内损伤。由于采用了二维模型，本文未研究分层。该模型的其他优缺点将在下文

中详细说明。本文还在各个示例中，将数值结果与实验方法进行比较，并在适用时，通过裂纹扩展以及力-位移和层合板平均应力等定性评估进行分析。

本文的结构安排如下。第2 节介绍基于多相场模型的变分表述。第3 节简要介绍 Puck 失效理论，随后将其纳入变分框架。第4节介绍热力学一致性和驱动力的细节。第5 节介绍采用网格叠加技术处理层合板中 n 层铺层的一般有限元表述，并介绍网格叠加技术计算机实现的相关信息。第6节探讨四种具有不同层合板铺层序列的几何构型，以展示该模型的预测能力。具体而言，本文介绍以下示例，并将实验结果与数值方法进行比较。第6.1 节介绍试件测试。第6.2 节介绍开孔拉伸的相关结果。第6.3 节介绍紧凑拉伸的相关结果，最后第6.4 节介绍双边缺口拉伸的相关结果。最后，第7节给出结论。研究数据及代码见第8节。

2. 变分表述

本节提出一种用于纤维增强复合材料层合板断裂分析的多相场模型。单层尺度的损伤由 Puck失效准则启动，而层合板引起的位移耦合则用于确定层合板尺度的损伤。将分析限制在二维情形，考虑欧几里得空间中的任意物体 $\mathcal{B}$ 及其边界$\partial\mathcal{B}$。于是，对于每个位置向量 $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$，定义向量值位移为 $\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)$: $\mathcal{B} \times [0,t] \to \mathbb{R}^2$，其中伪时间为 $\tau \in [0,t]$。系统中的应变定义为位移场 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u}$ 的对称梯度，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\mathcal{B} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$。给定边界位移为 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$，施加于 $\partial\mathcal{B}_{\mathbf{u}}$；而$\bar{}$给定面力为 $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$，施加于 $\partial\mathcal{B}_{t}$。这里， $\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力张量，$\mathbf{n}$ 为面力边界处的单位外法向量。边界条件满足 $\partial\mathcal{B}_{\mathbf{u}} \cup \partial\mathcal{B}_t = \partial\mathcal{B}$和 $\partial\mathcal{B}_{\mathbf{u}} \cap \partial\mathcal{B}_t = \emptyset$。此外，令

Γ_f 和 Γ_m 分别表示纤维失效和基体失效的裂纹组，使得 Γ_f，$\Gamma_m \subset \mathbb{R}^1$，以及 $\Gamma_f \cup \Gamma_m = \Gamma$ 如图 1所示。

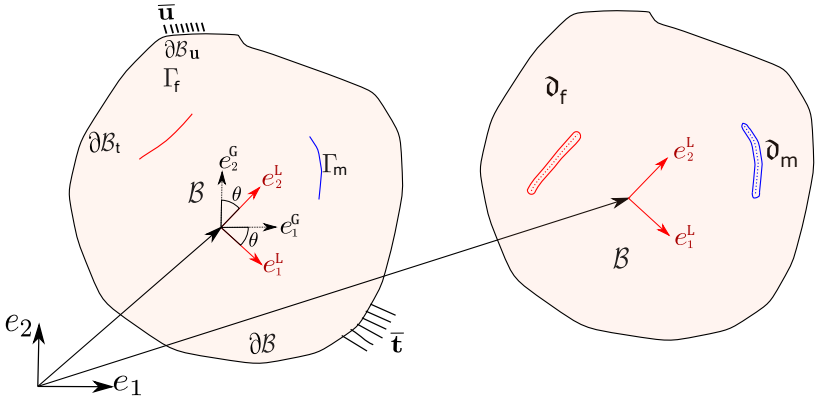


图1：所研究物体的几何描述。

Griffith 理论指出，裂纹的形成源于物体内储存应变能与形成新表面所需能量之间的竞争。纤维增强复合材料中的应变能可加性地分解为与纤维 Ψ_f 相关的能量和与纤维间/基体Ψ_m相关的能量。因此，形成新表面所需的能量（本文称为表面能）可分解为纤维表面能和纤维间表面能。

断裂相场方法使用弥散裂纹模型来近似尖锐、不连续的裂纹组 Γ，该模型由标量场 $\mathfrak{d}$ 表示： $\mathcal{B} \times [0,t] \to [0,1]$, 以及特征长度尺度

ℓ。这里，$\mathfrak{d}=0$ 表示完整材料，而 $\mathfrak{d}=1$ 表示完全断裂材料。由于存在两种不同的裂纹组 Γ_f 和 Γ_m，因此引入两个独立的相场 $\mathfrak{d}_f$ 和 $\mathfrak{d}_m$，分别表示纤维内和纤维间的弥散裂纹。

系统的总能量形式为

$$\Psi(\mathbf{u},\Gamma_f,\Gamma_m)=\int_{\mathcal{B}\setminus\Gamma_f}\Psi_f(\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\mathcal{B}\setminus\Gamma_m}\Psi_m(\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\Gamma_f}G_{C,f}\mathrm{d}S+\int_{\Gamma_m}G_{C,m}\mathrm{d}S-\Psi_{ext}(\mathbf{u}). \tag{1}$$

这里，$\Psi_i(\boldsymbol{\varepsilon})$ 表示未损伤时的应变能密度，而 $G_{C,i}$ 表示各个（$i=f,m$）对应的断裂能密度。这里，（f）表示纤维，（m）表示纤维间区域。此外，$\Psi_{ext}(\mathbf{u})$ 表示定义为如下形式的外加载荷

$$\Psi_{ext}(\mathbf{u}):=\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{f_v}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\partial\mathcal{B}_t}\bar{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{dS}. \tag{2}$$

在相场方法中，表面能可用弥散场近似表示为

$$\int_{\Gamma_i}G_{C,i}\,\mathrm{dS}\approx\int_{\mathcal{B}}\frac{G_{C,i}}{4c_w}\gamma_i(\mathfrak{d}_i,\nabla\mathfrak{d}_i)\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{3}$$

其中，各个（$i=f,m$）对应的 $\gamma_i(\mathfrak{d}_i,\nabla\mathfrak{d}_i)$ 为裂纹表面能密度函数，定义如下

$$\gamma_i(\mathfrak{d}_i,\nabla\mathfrak{d}_i)=\frac{\alpha(\mathfrak{d}_i)}{\ell_i}+\ell_i\left[\nabla\mathfrak{d}_i\cdot\mathcal{A}_i\cdot\nabla\mathfrak{d}_i\right].\qquad(i=f,m) \tag{4}$$

这里，$\alpha(\mathfrak{d}_i)$ 为几何裂纹函数，满足 $\alpha(0)=0$，且 $\alpha(1)=1$，其中 $\alpha:[0,1]\to[0,1]$。几何裂纹函数 $\alpha(\mathfrak{d}_i)$ 的选取与 AT2 模型一致，即 $\alpha(\mathfrak{d}_i)=\mathfrak{d}_i^2$。此外，$\ell_i$ 为特征长度尺度，$\mathcal{A}_i$ 为用于惩罚相场梯度的二阶结构张量。结构张量写为

$$\mathcal{A}_f=e_2\otimes e_2,\qquad\mathcal{A}_m=e_1\otimes e_1, \tag{5}$$

其中，e_1 为沿纤维取向的材料主方向，而 e_2 为与 e_1垂直的平面内横向取向。对于相对于全局X坐标偏转 θ 的纤维取向，材料方向表示为

$$e_1=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix},\quad\text{and}\quad e_2=\begin{bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}. \tag{6}$$

后续内容引入全局与局部铺层坐标系，以确保与 Puck失效准则保持一致；该准则基于局部铺层坐标中的三轴应力状态。全局量用 $(\cdot)^{\mathcal{G}}$表示，而局部（铺层）量用$(\cdot)^{\mathcal{L}}$表示。从局部坐标到全局坐标的变换通过变换矩阵 $\mathcal{R}$ 按照 [105–108] 所示进行，具体如下

$$\mathcal{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta^2 & \sin\theta^2 & 2\cos\theta\sin\theta\\ \sin\theta^2 & \cos\theta^2 & -2\cos\theta\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos\theta^2-\sin\theta^2\end{bmatrix} \tag{7}$$

局部铺层坐标系中的应变场变换可写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}} = \left(\mathcal{R}^{-1}\right)^{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{G}}, \tag{8}$$

而局部铺层坐标系中的应力场形式为

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{L}} = \mathcal{R} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{G}}. \tag{9}$$

因此，全局坐标系中的应力可写为

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{G}} = \mathbb{C}^{\mathcal{G}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{G}}. \tag{10}$$

此外，全局坐标系中的本构刚度矩阵 $\mathbb{C}^{\mathcal{L}}$ 可由局部坐标系中的矩阵推导得出：

$$\mathbb{C}^{\mathcal{G}} = \mathcal{R}^{-1} \cdot \mathbb{C}^{\mathcal{L}} \cdot \left(\mathcal{R}^{-1}\right)^{T}. \tag{11}$$

局部各向异性本构刚度矩阵可表示为纤维组分和纤维间组分的加性分解：

$$\mathbb{C}^{\mathcal{L}} = \mathbb{C}_f^{\mathcal{L}} + \mathbb{C}_m^{\mathcal{L}}, \tag{12}$$

其中，$\mathbb{C}_f^{\mathcal{L}}$ 和 $\mathbb{C}_m^{\mathcal{L}}$ 分别为纤维和纤维间组分的贡献，其具体形式为

$$\mathbb{C}_f^{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbb{C}_m^{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中，$C_{11} = \dfrac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$、$C_{12} = \dfrac{\nu_{12}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$、$C_{22} = \dfrac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$ 和 $C_{33} = G_{12}$。此外，E_{11}、E_{22}和g_{12}为杨氏模量，而 ν_{12}和 $\nu_{21} = \nu_{12}\dfrac{E_{11}}{E_{22}}$ 为泊松比。

据此，分别对应纤维相和纤维间相的应变能密度贡献为

$$\Psi_f(\mathbf{u}, \mathfrak{d}) = g(\mathfrak{d})\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}} \cdot \mathbb{C}_f^{\mathcal{L}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}}, \tag{14}$$

$$\Psi_m(\mathbf{u}, \mathfrak{d}) = g(\mathfrak{d})\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}} \cdot \mathbb{C}_m^{\mathcal{L}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}}. \tag{15}$$

由于纤维相和纤维间相发生损伤，应变能密度贡献根据退化函数 $g(\mathfrak{d})$ 按照 AT2模型进行退化。考虑式（14）、（15）中的应变能和式（4）中的表面能后，系统的总能量为

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathfrak{d}_f, \mathfrak{d}_m) = \int_{\mathcal{B}} g(\mathfrak{d})\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}} \cdot \mathbb{C}_f^{\mathcal{L}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}} \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}} g(\mathfrak{d})\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}} \cdot \mathbb{C}_m^{\mathcal{L}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{L}} \mathrm{d}\mathbf{x} - \Psi_{ext}(\mathbf{u}) \tag{16}$$

$$+ \int_{\mathcal{B}} \left[G_{C,f}\frac{\alpha(\mathfrak{d}_f)}{\ell_f} + \ell_f \left[\nabla\mathfrak{d}_f \cdot \mathcal{A}_f \cdot \nabla\mathfrak{d}_f\right] \right] \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}} \left[G_{C,m}\frac{\alpha(\mathfrak{d}_m)}{\ell_m} + \ell_m \left[\nabla\mathfrak{d}_m \cdot \mathcal{A}_m \cdot \nabla\mathfrak{d}_m\right] \right] \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{17}$$

此外，由于存在多种损伤机制，局部坐标系中的退化本构矩阵可表示为

$$\tilde{\mathbb{C}}^{\mathcal{L}} = g(\mathfrak{d})\mathbb{C}_f^{\mathcal{L}} + g(\mathfrak{d})\mathbb{C}_m^{\mathcal{L}}, \tag{18}$$

with

$$g(\mathfrak{d}) = \left\{ \begin{array}{c} g_f \\ g_m \\ \min\{g_f, g_m\} \end{array} \right\}. \tag{19}$$

其中 $g_f = (1-\mathfrak{d}_f)^2$, 和 $g_m = (1-\mathfrak{d}_m)^2$ 分别是符合标准 AT2公式的纤维和纤维间退化函数 [56]。因此，局部坐标系中的退化应力可表示为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathcal{L}} = g(\mathfrak{d})^T \boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{L}}; \qquad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathcal{G}} = \mathcal{R}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathcal{L}}. \tag{20}$$

损伤的起始取决于基于局部应力状态的 Puck失效理论，详见下一节。

3. Puck失效准则

Puck失效理论 [40] 将纤维损伤与纤维间损伤视为彼此独立。该理论将纤维失效分为两种模式，即: (i) 纤维拉伸失效；(ii) 纤维压缩失效；将纤维间失效分为三种模式，即：(iii) A模式（横向拉伸或横向拉伸-剪切失效）；(iv) B模式（横向压缩 +面内剪切）；(v) C模式（以横向压缩为主，剪切可忽略）。当与相应失效模式对应的能量暴露因子（记为 F_i）达到 1 时，即触发该失效模式。下文将介绍局部铺层坐标下二维情形的 Puck失效准则。此处，下标 1 表示主材料方向（纤维方向），而下标 2 和 3 分别表示垂直于纤维的方向，以及面内和板外方向。

在局部铺层坐标中， E_{11}、 E_{22}表示纵向模量，剪切模量记为E_{12}。同样，纤维方向上的纵向强度和横向拉伸强度分别记为 R_{11}^T、 R_{22}^T和 R_{12} 。此外，Puck失效理论区分拉伸失效和压缩失效。因此，压缩状态下对应的纵向强度分别用 R_{11}^C 和 R_{22}^C表示。主泊松比分别记为 ν_{12}和 ν_{23}，Puck基体倾角参数则用 P_{21}^+、 P_{21}^-、 P_{22}^+和 P_{22}^-表示，符号沿用通常记法。有关Puck失效理论的详细说明，请参见[40, 91, 104] 。

3.1. 纤维失效

拉伸状态下的纤维暴露因子 F_f^T 定义为主材料方向上的应力（$\sigma_{11}^{\mathcal{L}}$）与纤维强度之比，即

$$F_f^T = \frac{\sigma_{11}^{\mathcal{L}}}{R_{11}^T}, \quad \text{if} \quad \sigma_{11}^{\mathcal{L}} > 0. \tag{21}$$

同样，压缩状态下的纤维暴露因子为

$$F_f^C = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}^{\mathcal{L}}}{R_{11}^C}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\sigma_{12}^{\mathcal{L}}}{R_{12}}\right)^2} \quad \text{if} \quad \sigma_{11}^{\mathcal{L}} < 0. \tag{22}$$

这里 $\alpha \in [0,1]$ 是压缩纤维失效所受的剪切影响。

3.2. 基体失效

若应力 $\sigma_{22}^{\mathcal{L}} > 0$，A模式横向拉伸下纤维间失效的暴露因子可表示为

$$F_m^T = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{12}^{\mathcal{L}}}{R_{12}}\right)^2 + \left(1 - P_{21}^{+}\frac{R_{22}^T}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}{R_{22}^T}\right)^2} + \frac{P_{21}^{+}\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}{R_{12}}. \tag{23}$$

Puck准则中的B模式指纤维间主导的横向压缩。若局部应力状态满足 $\sigma_{22}^{\mathcal{L}} < 0$ 以及

$$\left[\left|\frac{\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}{\sigma_{12}^{\mathcal{L}}}\right| > 0\right] \&\& \left[\left|\frac{\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}{\sigma_{12}^{\mathcal{L}}}\right| < \left|\frac{R_{22}^a}{R_{12}^c}\right|\right], \tag{24}$$

其中 $R_{22}^a = \begin{matrix} R_{12} \\ \underline{2P_{21}^{-}} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \\ \sqrt{1 + 2P_{21}^{-}\dfrac{R_{22}^C}{R_{12}}} - 1 \end{matrix} \right\}$，且 $R_{12}^c = R_{12}\sqrt{\underline{1 + 2P_{22}^{-}}}$。此时压缩的暴露因子可表示为

$$F_m^C = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{12}^{\mathcal{L}}}{R_{12}}\right)^2 + \left(P_{21}^{-}\frac{\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}{R_{12}}\right)^2} + \frac{P_{21}^{-}\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}{R_{12}}. \tag{25}$$

类似地，若局部铺层坐标系中的应力

$$\left[\left|\frac{\sigma_{12}^{\mathcal{L}}}{\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}\right| > 0\right] \&\& \left[\left|\frac{\sigma_{12}^{\mathcal{L}}}{\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}\right| < \left|\frac{R_{12}^c}{R_{22}^a}\right|\right] \tag{26}$$

适用，则对应于面外横向压缩的C模式基体失效的压缩暴露因子可写为

$$F_m^C = \left(\frac{\sigma_{12}^{\mathcal{L}}}{2(1 + P_{22}^{-})R_{12}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}{R_{22}^C}\right)^2 \frac{R_{22}^C}{\sigma_{22}^{\mathcal{L}}}. \tag{27}$$

当满足Puck失效准则时（针对一种或多种失效模式），局部应力状态 $\boldsymbol{\sigma}_*^{\mathcal{L}}$ 对应的能量可分别针对纤维（$\Psi_{f,0}$）和纤维间（$\Psi_{m,0}$）计算如下

$$\Psi_{f,0} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sigma_{11}^{\mathcal{L}}\varepsilon_{11}^{\mathcal{L}} & \text{if } F_f^T, F_f^C \geq 1 \\ 0 & \text{if } F_f^T, F_f^C < 1 \end{cases}. \tag{28}$$

$$\Psi_{m,0} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{22}^{\mathcal{L}}\varepsilon_{22}^{\mathcal{L}} + 2\sigma_{12}^{\mathcal{L}}\boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{\mathcal{L}}\right) & \text{if } F_m^T, F_m^C \geq 1 \\ 0 & \text{if } F_m^T, F_m^C < 1 \end{cases}. \tag{29}$$

4. 热力学一致性与驱动力

用于确保变分表述一致性的热力学第二定律，可用三元组（$\mathbf{u}\ \mathfrak{d}_f, \mathfrak{d}_m$）表示为

$$\mathcal{D} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{d}_f}\dot{\mathfrak{d}}_f + \frac{\partial\Psi}{\partial\nabla\mathfrak{d}_f}\nabla\dot{\mathfrak{d}}_f\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{d}_m}\dot{\mathfrak{d}}_m + \frac{\partial\Psi}{\partial\nabla\mathfrak{d}_m}\nabla\dot{\mathfrak{d}}_m\right) \geq 0. \tag{30}$$

这称为克劳修斯-杜恒不等式。由于在全局坐标系中，应力可写为 $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbb{C}}^{\mathcal{G}} : \varepsilon^{\mathcal{G}}$，因此克劳修斯-杜恒不等式的形式为

$$\mathcal{D} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \dot{\varepsilon} - \mathcal{D}_f \dot{\mathfrak{d}}_f + \mathcal{D}_m \dot{\mathfrak{d}}_m \geq 0, \tag{31}$$

其中， $\mathcal{D}_f$和 $\mathcal{D}_m$ 分别为与纤维和纤维间相关的裂纹能量，其具体形式为

$$\mathcal{D}_f = 2(1-\mathfrak{d}_f)\Psi - G_{C,f} \left[\frac{\mathfrak{d}_f}{\ell_f} - \ell_f \nabla \mathfrak{d}_f \cdot \mathcal{A}_f \cdot \nabla \mathfrak{d}_f \right], \tag{32}$$

$$\mathcal{D}_m = g'(\mathfrak{d})\Psi - G_{C,m} \left[\frac{\mathfrak{d}_m}{\ell_m} - \ell_m \nabla \mathfrak{d}_m \cdot \mathcal{A}_m \cdot \nabla \mathfrak{d}_m \right]. \tag{33}$$

注意，由于 $\min(g_f, g_m)$， $g'(\mathfrak{d})\Psi$ 未定义。因此，先取最小值，再计算 $g'(\mathfrak{d})$。对于每个 $i = f, m$，表达式 $G_{C,i} \left[\dfrac{\mathfrak{d}_i}{\ell_i} - \ell_i \nabla \mathfrak{d}_i \cdot \mathcal{A}_i \cdot \nabla \mathfrak{d}_i \right]$ 表示能量裂纹阻力。此外， $g'(\mathfrak{d})\Psi$ 为裂纹驱动力。

式（31）的直接推论以及相场的有界性导出了一级最优性条件，也称为 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）条件，其具体形式如下：

$$\dot{\mathfrak{d}}_f \geq 0, -\mathcal{D}_f \leq 0, \mathcal{D}_f \dot{\mathfrak{d}}_f = 0, \tag{34}$$

$$\dot{\mathfrak{d}}_m \geq 0, -\mathcal{D}_m \leq 0, \mathcal{D}_m \dot{\mathfrak{d}}_m = 0. \tag{35}$$

为保证相场变量的不可逆性，基于 Puck 失效理论的驱动力形式为

$$\mathcal{H}_f = \max_{\tau \in [0,T]} \left\{ \zeta_f \left(\frac{\Psi_f - \Psi_{f,0}}{G_{C,f}} \right) \right\} \quad \text{if} \quad \Psi_{f,0} > 0, \text{and} \quad 0 \quad \text{otherwise}, \tag{36}$$

$$\mathcal{H}_m = \max_{\tau \in [0,T]} \left\{ \zeta_m \left(\frac{\Psi_m - \Psi_{m,0}}{G_{C,m}} \right) \right\} \quad \text{if} \quad \Psi_{m,0} > 0, \text{and} \quad 0 \quad \text{otherwise}. \tag{37}$$

此处， ζ_f 和 ζ_m 是用于表征纤维失效和纤维间失效扩展的无量纲驱动参数。

5. 有限元实现：紧凑型UEL

方程 17 的解可通过在每个离散时间步 $\tau \in [0, t]$求解总能量势相对于三元组 $(\mathbf{u}\ \mathfrak{d}_f,\ \mathfrak{d}_m)$，即确定 $(\mathbf{u}\ \mathfrak{d}_f,\ \mathfrak{d}_m)$的方法得到：

$$(\mathbf{u}^*, \mathfrak{d}_f^*, \mathfrak{d}_m^*) = \text{Arg } \min_{\mathcal{S}} \Psi(\mathbf{u}, \mathfrak{d}_f, \mathfrak{d}_m) \tag{38}$$

其中，对于所有$\mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$，都有 $\mathcal{S} = \{\dot{\mathfrak{d}_f}, \dot{\mathfrak{d}_m} \geq 0,$。对于任意容许试函数（$\delta\mathbf{u}\ \delta\mathfrak{d}_f,\ \delta\mathfrak{d}_m$） $\in$（$\mathfrak{A}_u,\ \mathfrak{A}_f,\ \mathfrak{A}_m$），总能量泛函的一阶变分导出以下多相场弱形式

$$\int_{\mathcal{B}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathcal{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{G}}(\delta\mathbf{u})\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{f_v} \cdot \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u}\,\mathrm{dS} = 0, \tag{39}$$

$$\int_{\mathcal{B}} G_{C,f}\left[\frac{\mathfrak{d}_f}{\ell_f}\delta\mathfrak{d}_f + \ell_f \nabla\mathfrak{d}_f \cdot \mathcal{A}_f \cdot \nabla\delta\mathfrak{d}_f\right]\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\mathcal{B}} \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathcal{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{G}}\delta\mathfrak{d}_f\right)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \tag{40}$$

$$\int_{\mathcal{B}} G_{C,m}\left[\frac{\mathfrak{d}_m}{\ell_m}\delta\mathfrak{d}_m + \ell_m \nabla\mathfrak{d}_m \cdot \mathcal{A}_m \cdot \nabla\delta\mathfrak{d}_m\right]\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\mathcal{B}} \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathcal{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{G}}\delta\mathfrak{d}_m\right)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \tag{41}$$

其中三元组（$\mathbf{u}$ $\mathfrak{d}_f$， $\mathfrak{d}_m$）$\in$（$\mathfrak{B}_u$， $\mathfrak{B}_f$， $\mathfrak{B}_m$）。回顾标准布勃诺夫-伽辽金法，三元组（$\mathbf{u}$ $\mathfrak{d}_f$， $\mathfrak{d}_m$）的函数空间为

$$\mathbf{u} \in \mathfrak{B}_u := \{\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{B}) | \nabla\mathbf{u} = \bar{u} \text{ on } \partial\mathcal{B}_u\}, \tag{42}$$

$$\mathfrak{d}_f \in \mathfrak{B}_f := \{\mathfrak{d}_f \in H^1(\mathcal{B}) | \mathfrak{d}_f \in [0,1], \dot{\mathfrak{d}}_f \geq 0, \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}, \tag{43}$$

$$\mathfrak{d}_m \in \mathfrak{B}_m := \{\mathfrak{d}_m \in H^1(\mathcal{B}) | \mathfrak{d}_m \in [0,1], \dot{\mathfrak{d}}_m \geq 0, \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}, \tag{44}$$

而变分的函数空间（$\delta\mathbf{u}$ $\delta\mathfrak{d}_f$， $\delta\mathfrak{d}_m$）的形式为

$$\delta\mathbf{u} \in \mathfrak{A}_u := \{\delta\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{B}) | \nabla\delta\mathbf{u} = 0 \text{ on } \partial\mathcal{B}_u\}, \tag{45}$$

$$\delta\mathfrak{d}_f \in \mathfrak{A}_f := \{\delta\mathfrak{d}_f \in H^1(\mathcal{B}) | \nabla\delta\mathfrak{d}_f \geq 0, \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}, \tag{46}$$

$$\delta\mathfrak{d}_m \in \mathfrak{A}_m := \{\delta\mathfrak{d}_m \in H^1(\mathcal{B}) | \nabla\delta\mathfrak{d}_m \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}. \tag{47}$$

设函数空间 $\mathcal{B}$ 被离散为 n_e 个互不重叠的等参单元，使得 $\mathcal{B} \approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}^{(e)}$ 且满足单位分解。设 $\mathcal{B}^{(N_e)}$ 为与每个单元 $\mathcal{B}^{(e)}$ 相关联的节点。然后，我们可以构造一组共享相同节点集 $\mathcal{B}^{(N_e)}$ 的 i 个单元。即

$$\mathcal{B}_i^{(e)} = \mathcal{B}^{(e)} \quad \text{for} \quad \text{i=1,2,...,j} \tag{48}$$

其中， j 是层合板中的铺层数，每个铺层的纤维取向为 θ_i。具体而言，$\mathcal{B}^{(e)}$ 称为基础网格，而每个 $i = 1, 2, ...$， j 对应的 $\mathcal{B}_i^{(e)}$ 称为虚拟网格。虚拟网格还满足以下条件

$$\mathcal{B} \approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}^{(e)} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}_i^{(e)} \quad \text{for each} \quad \text{i=1,2,...,j} \tag{49}$$

其中，节点集 $\mathcal{B}^{(N_e)}$ 由所有单元集 $\mathcal{B}_i^{(e)}$ 共享。

图 2 将这种方法描述为网格叠加法。所有层共享节点，而每一层都包含一个唯一的单元集，且具有独特的纤维取向 θ_i。因此，所有层中的位移彼此耦合，而应力则彼此解耦，并取决于各层的纤维取向 θ_i 。因此，每层所产生的能量都是纤维取向的函数。

在此设定下，每一层$i = 1,2,...,j$的主场变量及其相应梯度可插值如下

$$\mathbf{u}^e = \sum_{k=1}^{n_e} \mathbf{N}_k^u \mathbf{u}_k^e, \quad \mathfrak{d}_f^e = \sum_{k=1}^{n_e} \mathbf{N}_k^{\mathfrak{d}} \mathfrak{d}_{f,k}^e, \quad \mathfrak{d}_m^e = \sum_{k=1}^{n_e} \mathbf{N}_k^{\mathfrak{d}} \mathfrak{d}_{m,k}^e, \tag{50}$$

$$\nabla\mathbf{u}^e = \sum_{k=1}^{n_e} \mathbf{B}_k^u \mathbf{u}_k^e, \quad \nabla\mathfrak{d}_f^e = \sum_{k=1}^{n_e} \mathbf{B}_k^{\mathfrak{d}} \mathfrak{d}_{f,k}^e, \quad \nabla\mathfrak{d}_m^e = \sum_{k=1}^{n_e} \mathbf{B}_k^{\mathfrak{d}} \mathfrak{d}_{m,k}^e, \tag{51}$$

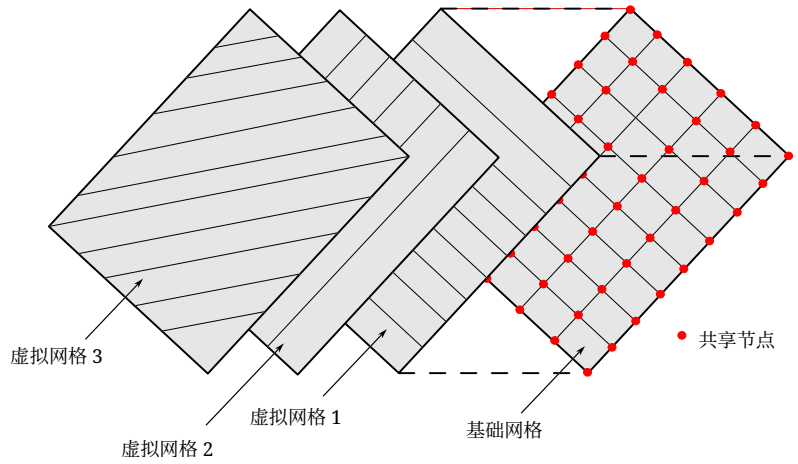


图 2：网格叠加法的几何描述。

其中，$\mathbf{N}_k^u$和$\mathbf{N}_k^{\mathfrak{d}}$ 分别为与节点 k 相关联的、对应于场变量$\mathbf{u}$以及双相场（$\mathfrak{d}_f, \mathfrak{d}_m$）的形函数。此外，$\mathbf{B}_k^u$和$\mathbf{B}_k^{\mathfrak{d}}$ 分别为节点 k 处对应于位移$\mathbf{u}$和双相场的形函数导数。三元组（$\mathbf{u}^e, \mathfrak{d}_f^e, \mathfrak{d}_m^e$）利用由节点层级积分点得到的形函数计算，从而导致层合板中位移与损伤之间的耦合。因此，可以确定各铺层的应力和应变，而各铺层内的损伤无法通过网格叠加法获得。此外，仍可计算各铺层中与Puck失效模式相关的暴露因子。

利用等参插值函数，每一层 $i = 1,2,...,j$ 的单元残差向量的离散形式为

$$\mathbf{R}^e_{\mathbf{u},i} = \int_{\mathcal{B}_i^{(e)}} (\mathbf{B}^u)^T \tilde{\sigma}^{\mathcal{G}} \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\mathcal{B}_i^{(e)}} (\mathbf{N}^u)^T \mathbf{f}_v \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial \mathbf{B}_i^{(e)}} (\mathbf{N}^u)^T \bar{\mathbf{t}} \mathrm{dS}, \tag{52}$$

$$\mathbf{R}^e_{f,i} = \int_{\mathcal{B}_i^{(e)}} -2(1-\mathfrak{d}_f)(\mathbf{N}^{\mathfrak{d}})^T \mathcal{H}_f + \frac{G_{C,f}}{\ell_f} \left[(\mathbf{N}^{\mathfrak{d}})^T \mathfrak{d}_f + \ell_f^2 (\mathbf{B}^{\mathfrak{d}})^T \mathcal{A}_f \nabla \mathfrak{d}_f \right] \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{53}$$

$$\mathbf{R}^e_{m,i} = \int_{\mathcal{B}_i^{(e)}} -2(1-\mathfrak{d}_m)(\mathbf{N}^{\mathfrak{d}})^T \mathcal{H}_m + \frac{G_{C,m}}{\ell_m} \left[(\mathbf{N}^{\mathfrak{d}})^T \mathfrak{d}_m + \ell_m^2 (\mathbf{B}^{\mathfrak{d}})^T \mathcal{A}_m \nabla \mathfrak{d}_m \right] \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{54}$$

如果位移和表面力施加在节点上，则外载荷将在层合板中的所有铺层之间分配。对于每一层 $i = 1, 2, ..j$ 在 $(n+1)$ 步的全局组装非线性系统，相应的牛顿-拉夫森迭代可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathfrak{d}_f \\ \mathfrak{d}_m \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathfrak{d}_f \\ \mathfrak{d}_m \end{bmatrix}_{n} - \begin{bmatrix} K^{\mathbf{uu}} & 0 & 0 \\ 0 & K^{ff} & 0 \\ 0 & 0 & K^{mm} \end{bmatrix}^{-1}_{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{R}_f \\ \mathbf{R}_m \end{bmatrix}_{n}, \tag{55}$$

其中，单元层级的特定单元刚度形式为

$$K_i^{\mathbf{uu}} := \frac{\partial \mathcal{R}^e_{\mathbf{u},i}}{\partial \mathbf{u}^e} = \int_{\mathcal{B}_i^e} (\mathbf{B}^u)^T \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{G}} \mathbf{B}^u \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{56}$$

$$K_i^{ff} := \frac{\partial \mathcal{R}^e_{f,i}}{\partial \mathfrak{d}_f^e} = \int_{\mathcal{B}_i^e} \left(2\mathcal{H}_f + \frac{G_{C,f}}{\ell_f} \right) (\mathbf{N}^{\mathfrak{d}})^T \mathbf{N}^{\mathfrak{d}} + G_{C,f} \ell_f (\mathbf{B}^{\mathfrak{d}})^T \mathcal{A}_f \mathbf{B}^{\mathfrak{d}} \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{57}$$

$$K_i^{mm} := \frac{\partial \mathcal{R}_{m,i}^e}{\partial \mathfrak{d}_m^e} = \int_{\mathcal{B}_i^e} \left(2\mathcal{H}_m + \frac{G_{C,m}}{\ell_m}\right) (\mathbf{N}^\mathfrak{d})^T \mathbf{N}^\mathfrak{d} + G_{C,m}\ell_m (\mathbf{B}^\mathfrak{d})^T \mathcal{A}_m \mathbf{B}^\mathfrak{d} \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{58}$$

上述方程组已在 Abaqus-UEL 中实现，以利用其内置的牛顿-拉夫森求解器、网格组装功能和自动时间步进方案。相应代码见数据可用性部分。

为此，当前模型旨在预测考虑各向异性刚度退化时的层合板响应。该模型未纳入塑性、应变硬化或软化行为，因此未考虑材料非线性。此外，该模型的二维特性带来了一定的局限性。假设各铺层之间的界面完美结合，因此当前模型未考虑分层。此外，如果预计面外应力会对层合板行为产生显著影响，则不建议使用该模型。此外，由于采用网格叠加法，模型无法捕捉铺层顺序的影响；而通过缩放载荷-位移曲线，可在一定程度上捕捉铺层厚度效应。

6. 数值算例

该公式在层合板裂纹扩展方面具有若干创新之处。使用当前模型能够很好地捕捉不同失效机制之间的相互联系。此外，通过与实验进行定性和定量比较，展示了所提出模型的预测能力。尽管网格叠加法通过排除分层简化了模型，但相较于三维模型，该方法提供了计算效率更高的替代方案。以下列出四种用于比较的结构：

1. 根据 Flatscher等人的试验，考虑不同铺层序列下承受单轴压缩和拉伸载荷的试样测试。 [109]具体而言，考虑铺层为$[(\theta/-\theta)_8]_s$且 $\theta = 45°$， $60°$， $75°$ 的层合板。将所得的横向压缩和拉伸应力状态与实验观测进行比较。

2. 将承受单轴拉伸载荷、铺层序列为 $[0_4^\circ/90_4^\circ]_s$和 $[45_4^\circ/-45_4^\circ]_s$的开孔拉伸与 [6]中的实验结果进行比较。比较结果涉及层合板中损伤机制的起始及其相互作用。

3. 将铺层序列为 $[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$和 $[0_4^\circ/90_4^\circ]_{2s}$ 的阻滞紧凑拉伸试样与 [110]中的实验结果进行定性和定量比较。

4. 最后，将由交叉铺层和各向同性层合板构成的三种不同铺层顺序的双缺口拉伸与 [30]的实验结果进行比较，以展示所提出模型的预测能力。该模型捕捉到了纤维主导失效与纤维间主导失效之间的相互作用。

6.1. 试样测试

测试	铺层顺序	L (毫米)	W (毫米)
T-45	$[(45°/-45°)_8]_s$	134	32
C-45	$[(45°/-45°)_8]_s$	56	32
C-60	$[(60°/-60°)_8]_s$	32	32
T-75，C-75	$[(75°/-75°)_8]_s$	20	32

表1：符合 [109]的试件测试中试样的长度、宽度和铺层序列。

本节讨论单轴压缩和拉伸加载下的试样测试结果。该测试考察了 [109] 报告的五种角铺层层合板的单轴加载。按照 [109]，将拉伸和压缩应力状态与实验结果进行比较。具体而言，考虑了 $[(\theta/-\theta)_8]_s$ 的铺层顺序，其中包括 $\theta = 45°$、 $60°$和 $75°$ 。本节中，压缩测试

E_{11} (兆帕)	E_{22} (兆帕)	ν_{12}	ν_{21}	G_{12} (兆帕)
146000	9000	0.02096	0.34	4270

表2：复合材料的弹性性能。

R_{11}^T (兆帕)	R_{22}^T (兆帕)	R_{11}^C (兆帕)	R_{22}^C (兆帕)	R_{12} (兆帕)
2100	82	1407	249	110

表3：复合材料的强度性能。

记作 C，而拉伸试验记作 T。例如， $C-45$ 展示了铺层顺序为 $[(45°/-45°)_8]_s$的层合板单轴压缩结果。层合板由单向 Cycom®977-2-35/40-12KHTS-134-300 铺层制成，是一种碳纤维环氧层合板。模拟所用的材料属性取自 [109]，列于表 2 和 3。此外，实验中拉伸和压缩采用了不同的断裂韧度 [109],，因此采用的数值如表 4所示。此外，纤维和纤维间相场特征长度尺度分别选为 $\ell_f = 2$ 毫米 和 $\ell_m = 1$毫米，。

图3a)给出了拉伸条件下双轴试样测试的几何描述，而压缩时载荷方向相反。具体而言，表1 给出了特定铺层顺序的几何尺寸，长度为 L，宽度为 W，与图3a)一致。每个铺层取为0.125 mm 厚，因此层合板的总厚度为4mm。

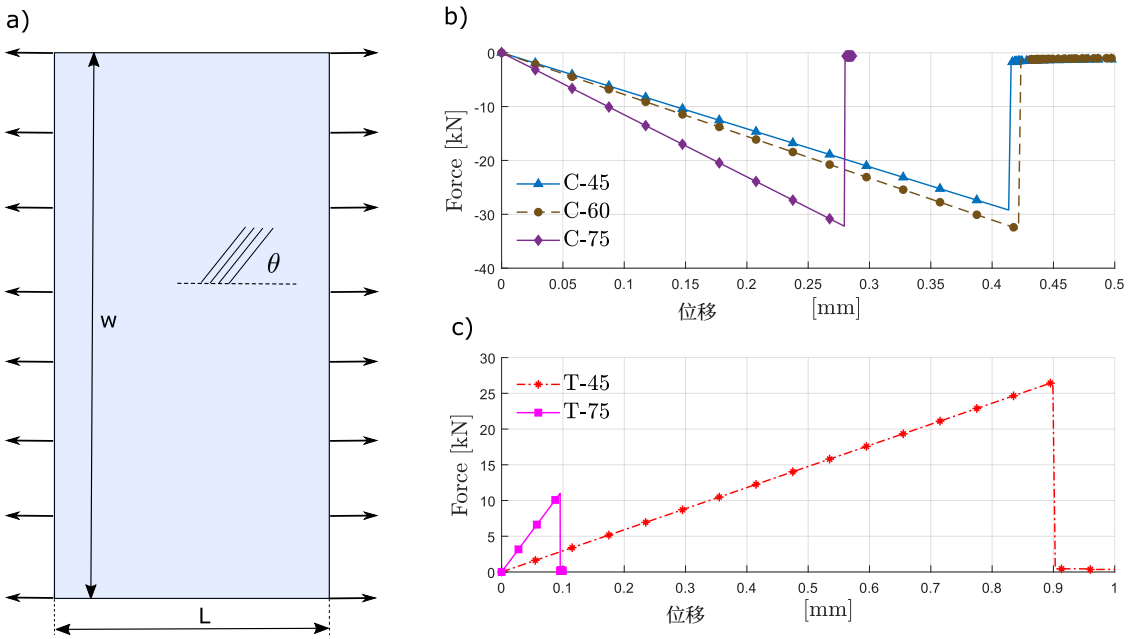


图3：a) 试件测试的几何描述以及尺寸和边界条件（拉伸），b) 压缩工况对应的力-位移曲线，以及c) 拉伸试验对应的力-位移曲线。

为了模拟裂纹起始与扩展，在试样中心附近的一小块区域（4个单元）内削弱层合板试样，将纤维和纤维间的断裂韧度均降低10%，与 [111–113]一致。因此，裂纹在该区域起始。

图 4a)、b) 和 c) 分别展示了 $C-75$、 $C-60$ 和 $C-45$ 中的损伤扩展，而图 4d) 和 e) 分别展示了 $T-75$ 和 $T-45$ 中的损伤扩展。每种情况均显示出沿.....的相互

$G^T_{C,f}\left(\frac{N}{mm}\right)$	$G^T_{C,m}\left(\frac{N}{mm}\right)$	$G^C_{C,f}\left(\frac{N}{mm}\right)$	$G^C_{C,m}\left(\frac{N}{mm}\right)$	ζ_f	ζ_m
89.8	0.2	78.3	0.8	1	1

表 4：多相场属性。

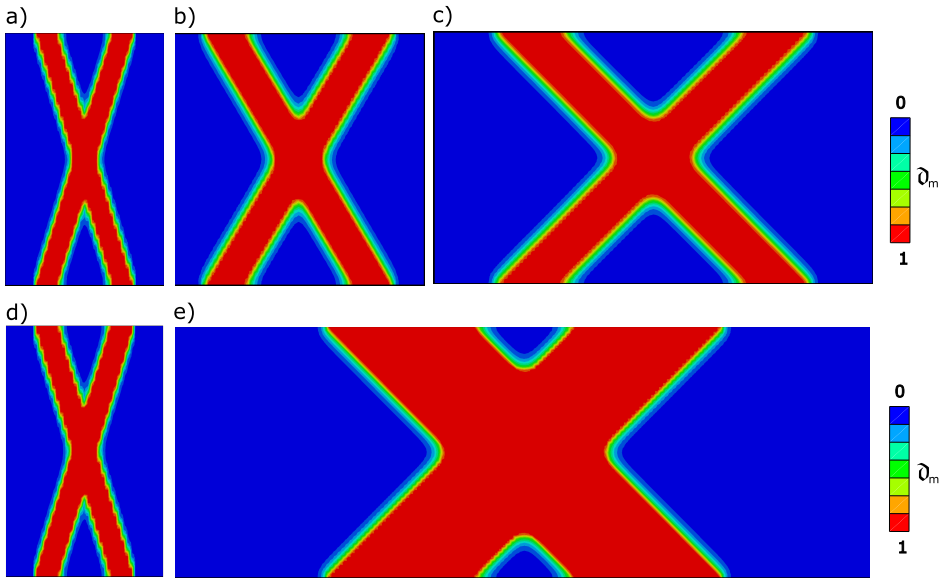


图 4：压缩工况下试样的基体裂纹模式：a）C-75、b）C-60 和 c）C-45；以及拉伸试验中的 d）T-75 和 e）T-45。

沿主材料方向发生纤维主导失效，且没有纤维损伤。此外，在所有情况下，Puck基体起裂后都会立即出现对称不稳定裂纹扩展。对于 $T-45$ 和 $C-45$，其损伤模式比其他试样宽得多，这可能归因于结构张量的影响，详见 [104]。压缩和拉伸情况下的力-位移曲线分别见图 3 b) 和 c)。由于不存在塑性，所有力-位移曲线在达到最大载荷极限前均呈线弹性行为，随后反力骤降，表明发生了不稳定裂纹扩展。此外，采用最大载荷以及宽度为 w、厚度为 t的名义横截面来计算层合板应力 $\bar{\sigma}_{xx}$，如 [109]所示：

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{F}{\mathrm{w}t}. \tag{59}$$

Case	当前实现（兆帕）	Flatscher [109]（兆帕）
C-45	-228.2	-203.1
C-60	-255.7	-198.4
C-75	-251.6	-229.3

表5：对比当前实现与 [109]中的实现所确定的名义应力 $\bar{\sigma}_{xx}$ 。

表 5 比较了当前模型与 [109] 中报告的实验研究所得的层合板应力。表 5的对比表明，当前实现始终高估了 [109] 中的预测，但总体而言结果吻合良好，尤其是在

当前模型中。由于所有试样测试中，Puck失效起始后立即发生裂纹扩展，因此最大载荷响应与长度尺度 ℓ_f 和 ℓ_m 无关。

6.2. 开孔拉伸

开孔拉伸已采用相场法在 [12, 74, 88, 89,94, 114]中于单铺层设定下进行了数值研究。开孔拉伸已在连续损伤力学框架下进行了数值研究，如[5, 6]。本节采用Flatscher等人报告的开孔拉伸结果 [6, 109]。

开孔拉伸的几何描述见图5。具体而言，对$[0^\circ_4/90^\circ_4]_s$和$[45^\circ_4/-45^\circ_4]_s$两种层合板铺层序列进行了研究。材料属性与第6.1 节相同，但相场特征长度尺度除外，其具体细节将在后文给出。

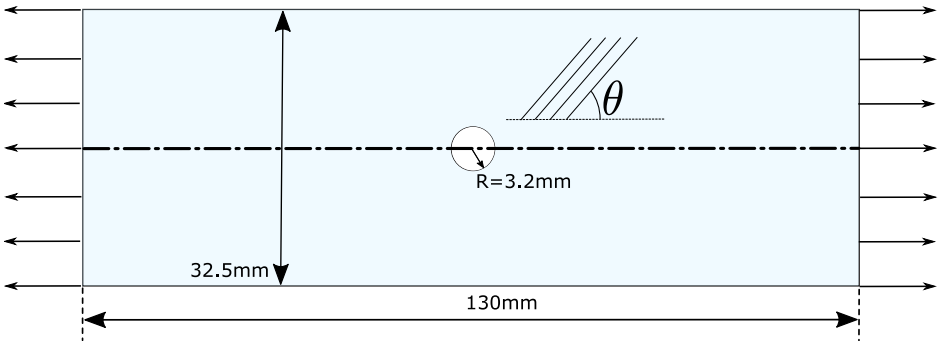


图5：几何　　描述开孔拉伸试验以及边界条件、纤维取向。所示
对称面（　　点划线）仅用于 $[0^\circ_4/90^\circ_4]_s$ 铺层。

6.2.1. 开孔拉伸- $[0^\circ_4/90^\circ_4]_s$

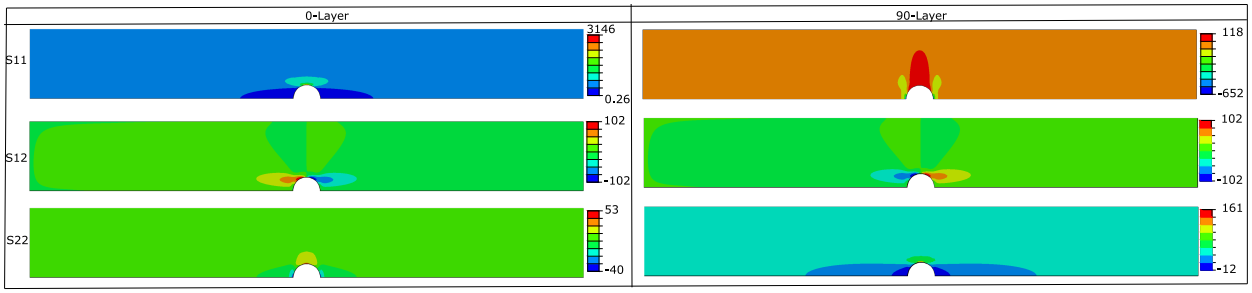


图 6：交叉铺层层合板各层的应力分布。

关于开孔拉伸的实验研究及以往数值方法 [5, 6, 115] 表明，由于纤维沿加载方向取向，试样呈现刚硬的载荷响应。此外，文献指出，纤维间对称损伤沿加载方向扩展，随后发生垂直于载荷方向的纤维损伤。因此，仅对试样的一半进行建模，并施加对称边界条件。计算域按每个铺层块 12907 个四节点四边形平面应力单元进行离散。图5 显示了本例采用的对称面。由于可能出现垂直裂纹，因此未利用垂直对称性。纤维和纤维间损伤的相场特征长度尺度分别取为 $\ell_f = 2$ 毫米和 $\ell_m = 1$ 毫米。损伤扩展的无量纲驱动参数设为 $\zeta_f = 30$ （纤维损伤）和 $\zeta_m = 0.01$ （基体损伤）。

图7 比较了当前模型与实验研究中的纤维间损伤主导的失效。此外，图6给出了单层中的应力分布。最初，应力

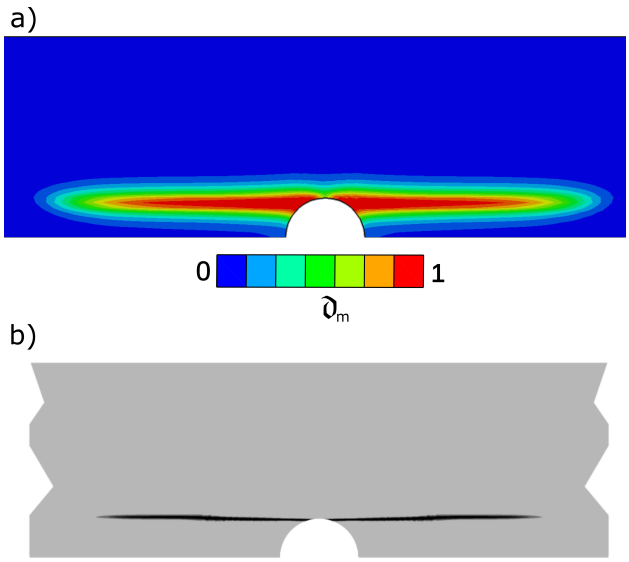


图 7：结果 纤维间损伤模式：a）当前实现，b）具有代表性的实验结果 a 中 [109]。

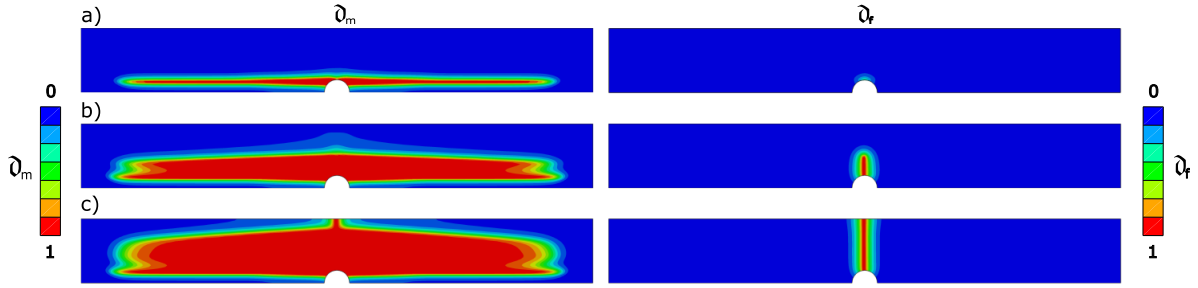


图 8：纤维间 相场（左）和纤维相场（右），对应右边界位移分别为：a）0。7056 毫米，b）0。7670 毫米 ， 以及 c）1 毫米。

在孔附近集中，导致孔附近区域出现以纤维间损伤为主的损伤。然而，以纤维间损伤为主的损伤开始在孔附近局部化，随后沿平行于加载方向扩展。以纤维间破坏为主的裂纹在图7a）中的位置与图7b）中的实验表现出极好的相关性。这种预测的损伤模式可解释为纵向劈裂，与实验测试相符，见 [6, 116]·

图 9 展示了力-位移曲线、Puck纤维、基体起始损伤和损伤。总体而言，力-位移行为起初呈线性。由于应变局部化，反力出现轻微下降，从而导致纤维间主导失效。如图 8a)左图所示，裂纹沿加载方向扩展。在此阶段，Puck纤维损伤开始出现，但尚未发生损伤局部化，如图 8a)右图所示。所得损伤模式与[5, 109]中报告的数值结果进行了比较。纤维损伤发生局部化后，纤维损伤沿垂直于加载方向扩展，如图 8b)右图所示。因此，纤维间主导失效在断裂纤维周围扩展，如图 8b)左图所示。此外，完整的纤维损伤会导致结构完全破坏，如图 8c)所示。所得稳定纤维损伤也可在图 9 中观察到，其表现为反力持续下降。

将当前实现的最大承载能力与实验结果进行比较

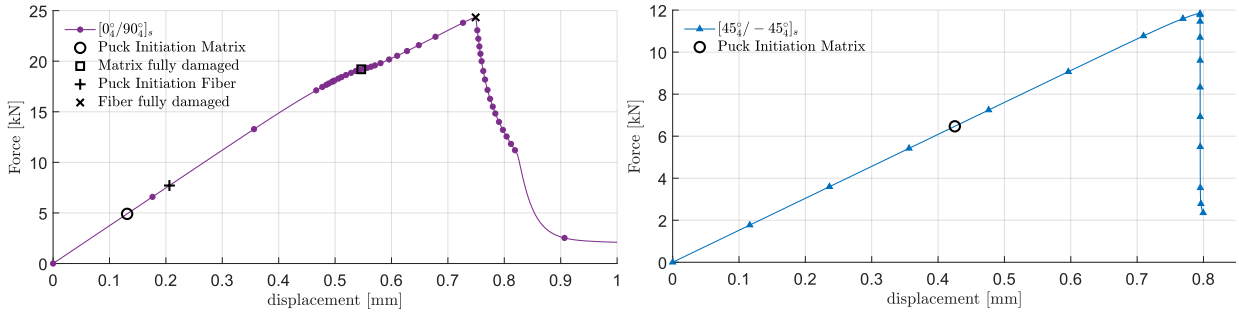


图9：铺层顺序为 a) $[0^\circ_4/90^\circ_4]_s$ 和 b) $[45^\circ_4/-45^\circ_4]_s$ 的开孔拉伸试验的力-位移曲线，以及 Puck损伤起始。

以及文献中报告的数值研究结果 [6] 和 [115]。表6 给出了 $[0^\circ_4/90^\circ_4]_s$ 层合板峰值载荷的定量比较。实验中的失效载荷估计为25.2 千牛。如表6所示，数值结果高估了该峰值载荷，而当前实现与实验结果吻合良好。可以观察到，相场 ℓ_f 和ℓ_m 的特征长度变化不会影响峰值载荷，而无量纲驱动参数则有显著影响。

模型	峰值载荷（kN）
实验结果 [6]	25.2
Flatscher [6]	38.4
Broger [115]	39.2
当前实现	24.3

表6：当前实现、 [6, 115] 中的实现与实验结果 [6]所确定的峰值载荷对比。

6.2.2. 开孔拉伸- $[45^\circ_4/-45^\circ_4]_s$

层合板中的开孔拉伸 $[45^\circ_4/-45^\circ_4]_s$ 表现出裂纹屏蔽 [5], ，导致裂纹不对称扩展。因此，采用每铺层包含56068个四节点四边形平面应力单元的模型，对整个试样进行建模，并在开孔周围进行网格细化。问题的几何描述和边界条件如图5所示。还注意到，损伤局部化发生在非常小的区域内。因此，为了分辨相场梯度，选用较小的相场特征长度尺度，其中 $\ell_f = 0.2$ 毫米和 $\ell_m = 0.1$ 毫米。此外，无量纲驱动参数取为 $\zeta_f = 1$ 和 $\zeta_m = 0.005$。还需指出，纤维损伤对应的无量纲参数无关紧要，因为与 [5, 6, 115]中一样，未观察到纤维损伤。

图 10 展示了所提出的实现方案所呈现的损伤累积不同阶段，并与 [5, 109]的结果进行了比较。同时，图 11 给出了各层中的应力。最初，由于应力集中，损伤始于孔周围。随后损伤开始累积，并逐渐局部化，如图 10a) 所示。如图 10b) 所示，其中一个分支开始扩展，而另一个分支则没有，这归因于裂纹屏蔽。文献中也有类似现象，详情请参见 [5] 。

当前模型在预测裂纹扩展定性结果方面与实验研究高度吻合。层合顺序为 $[45^\circ_4/-45^\circ_4]_s$ 的开孔拉伸力-位移曲线见图9b)，同时还展示了 Puck 纤维间失效的起始情况。裂纹扩展大多平行于纤维方向，且后续不会对纤维造成损伤。因此，反力呈线性变化，直至达到最大失效载荷，随后发生不稳定的

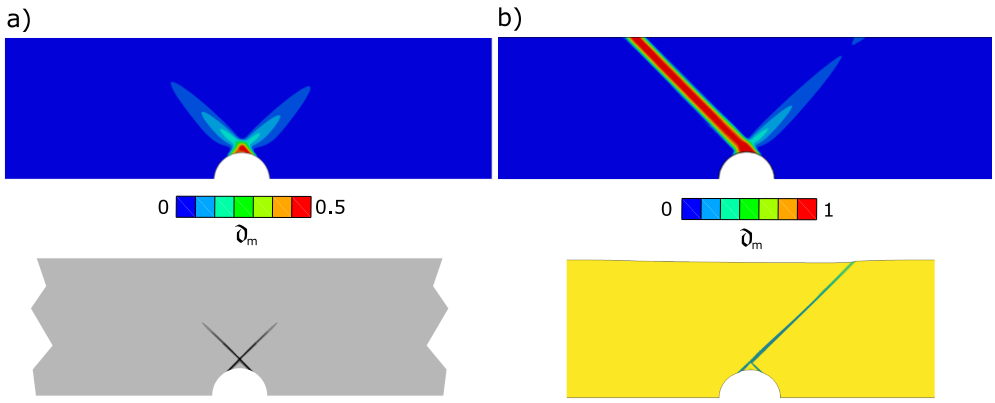


图10：将 a) 初始损伤与结果进行比较 [109]，并将 b) 完整损伤模式与结果进行比较 [5]。

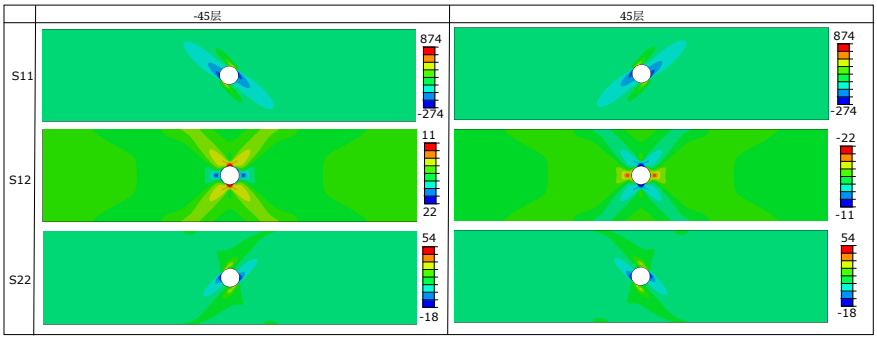


图11：铺层顺序为 $[45^\circ_4/-45^\circ_4]_s$ 的层合板各层的应力分布。

裂纹扩展（裂纹屏蔽），导致强制位移下降。先前的实验和数值结果指出，塑性会导致明显的非线性。由于该模型未考虑塑性，因此图9b)中未体现这些非线性。表7 将当前模型预测的峰值载荷与文献中的实验和数值观测结果进行了比较。可以看出，当前模型对峰值载荷的预测非常准确。

模型	峰值载荷（千牛）
实验结果 [6]	14.1
Flatscher [6]	10.7
Broger [115]	9.0
当前实现	11.8

表7：当前实现、 [6, 115] 中的实现与实验结果 [6]所确定的峰值载荷对比。

6.3. 紧凑拉伸

本节对应于 Li等人 [110]提出的扩展紧凑拉伸试验的紧凑拉伸结果。Li等人 [110] 采用阻塞式铺层序列和分散铺层序列，研究铺层顺序对层合复合材料断裂行为的影响。材料由 IM7/8552 碳纤维/环氧预浸料系统制成，名义铺层厚度为 0.125 mm。尽管两种铺层序列在每块层合板中包含相同数量的铺层，但对于分散铺层，每层的纤维取向都不同

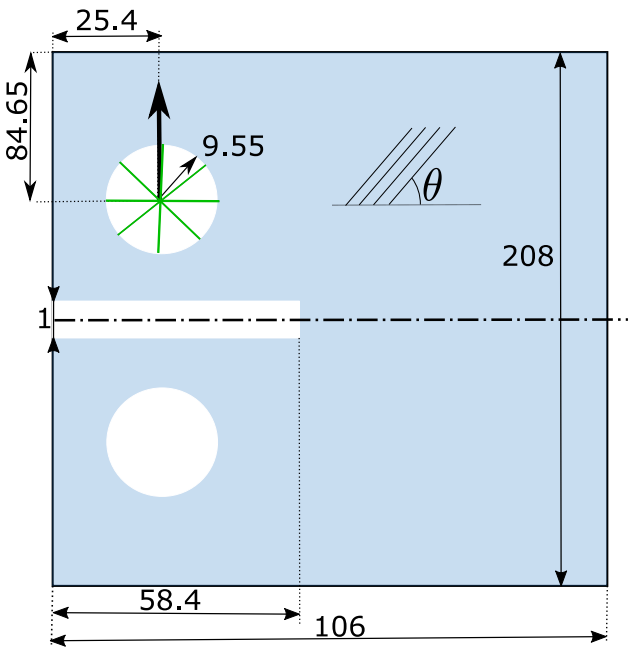


图12：接触拉伸试验的几何描述及边界条件。本次模拟采用对称面（点划线）。绿色线条表示表面与中心节点之间的刚性连接，位移施加于该节点。所有长度均以毫米为单位。

于相邻铺层。相比之下，阻塞式铺层序列通过将更多纤维取向相同的铺层叠放在一起，形成纤维取向相同的较厚板层，导致其断裂行为截然不同。有关详情，请参阅 [110] 。分散式铺层试样表现出明显的纤维失效，且以纤维间损伤为主的损伤程度较轻；纤维失效则以多个不稳定事件的形式发生。然而，阻塞式铺层试样更容易发生分层和基体损伤，导致其力-位移行为呈现显著的非线性响应。此外，准各向同性试样的断裂行为比交叉铺层试样更为复杂。网格叠加法无法捕捉铺层顺序的差异。因此，仅将阻塞式交叉铺层结果与所提出的模型进行比较。

图 12 a) 展示了所研究物体的几何描述和边界条件。为尽可能贴近实验，施加位移的方式使孔能够绕中心节点旋转而不发生变形。计算域按每层10620个四节点四边形平面应力单元进行离散。

将力与销钉张开位移（POD）的曲线与 [110]的测量结果进行定量比较，见图13a)；并与 $[0^\circ_2/90^\circ_2]_{2s}$ 铺层的测量结果进行比较，见图13b)。比较基于单个 $[0^\circ_4/90^\circ_4]_{2s}$ 数值算例。对于 $[0^\circ/90^\circ]$情况，相应地对反力进行缩放，以计入厚度增加的影响。此外，图13 展示了载荷-位移曲线上的取点位置，图15中的图片即取自这些位置，以便进行更好的定性比较。数值结果始终以紫色罗马数字标记，实验结果则以红色和黑色罗马数字标记。

图13 a）和 b）总体上显示，实验的力-位移行为得到了较好的吻合，尤其是在加载初期，因为实验和数值结果均显示力与位移之间呈线性关系，且两者的斜率非常相似。此外，数值结果始终高估反力，并且加载阶段长得多，曲线在此期间保持线性。这种差异可能是由铺层间严重的分层造成的，而这种分层

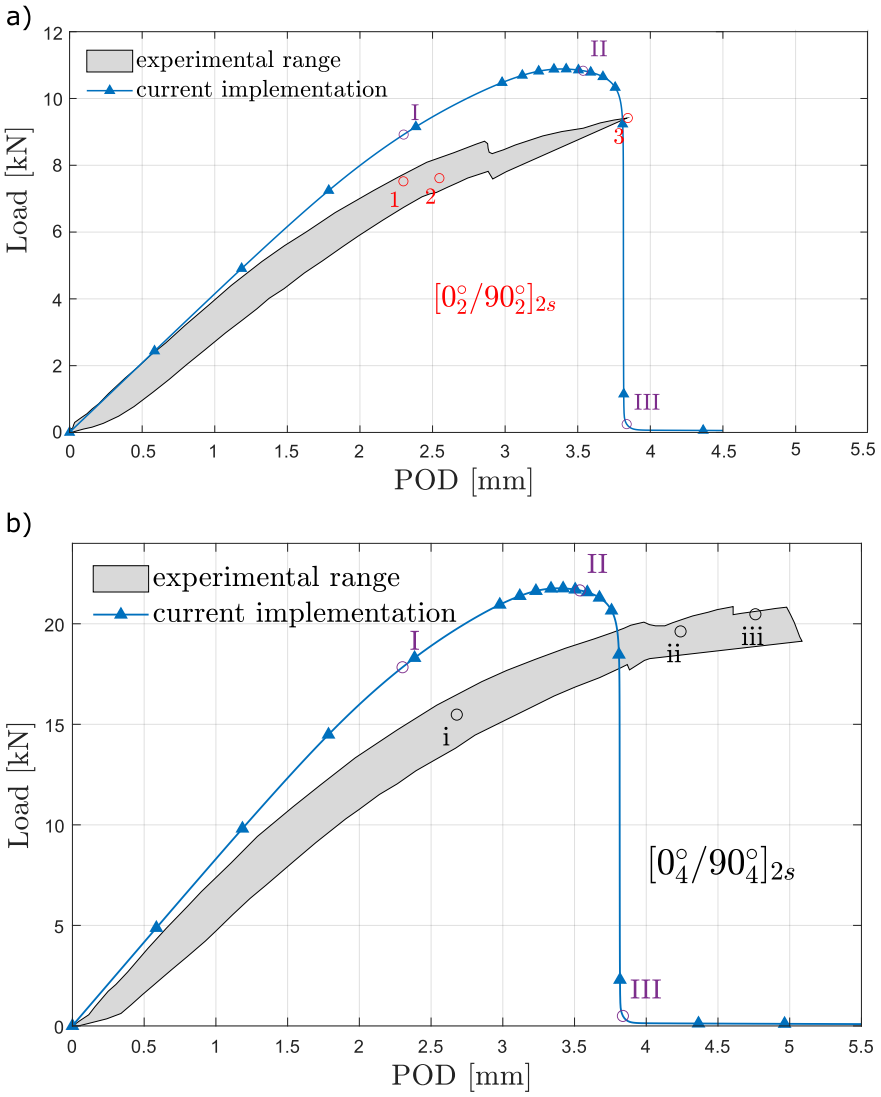


图 13：a) 与 $[0^\circ_2/90^\circ_2]_{2s}$对应的力-销钉张开位移（POD）曲线，以及 b) 与$[0^\circ_2/90^\circ_2]_{2s}$ 对应的力-销钉张开位移曲线。带有数字标记的标记表示图15 中图像的拍摄位置。

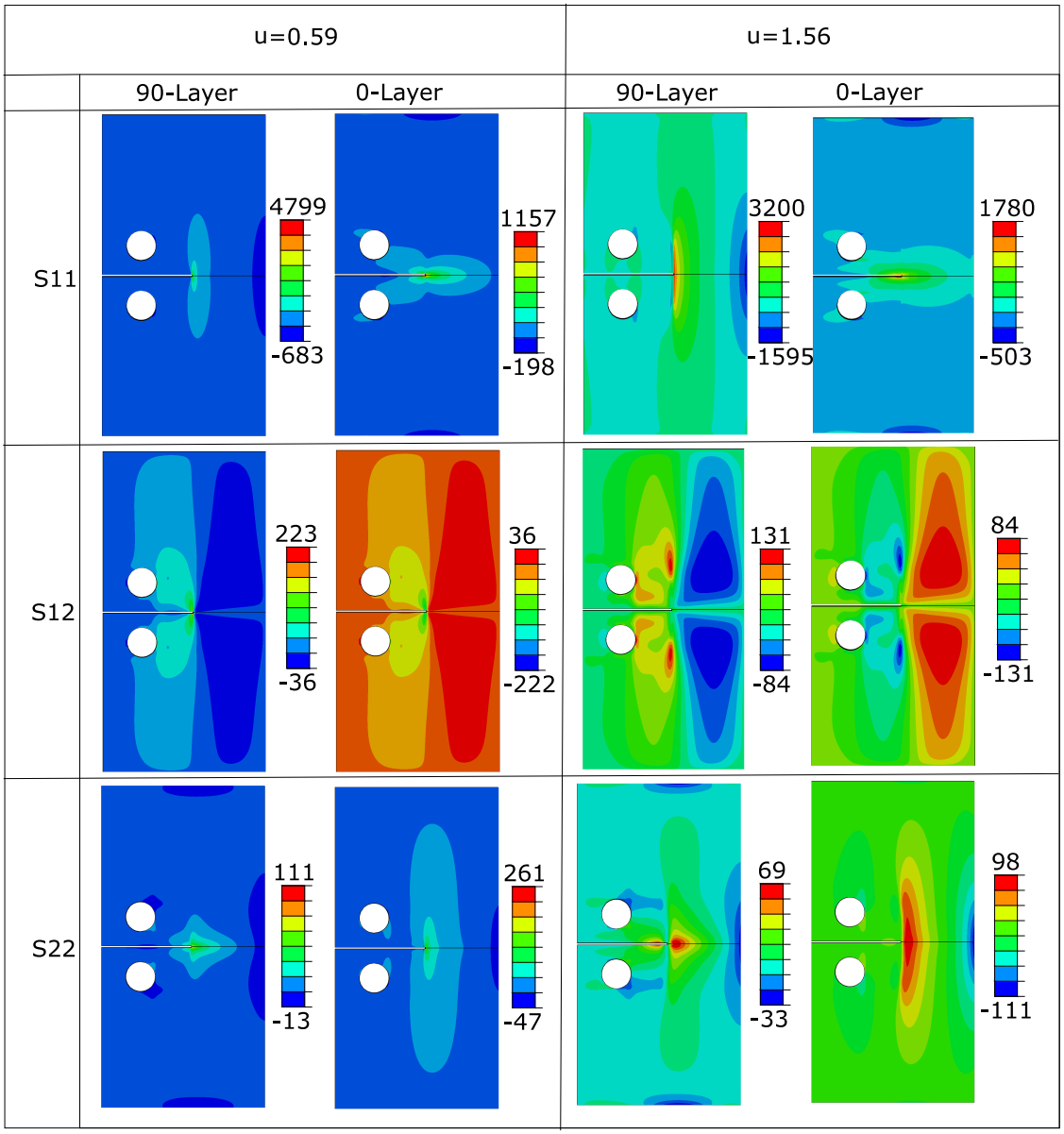


图14：$[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$ 各层在位置 I（$d = 0.59$）和 II（$d = 1.55$）处位移对应的应力分布。

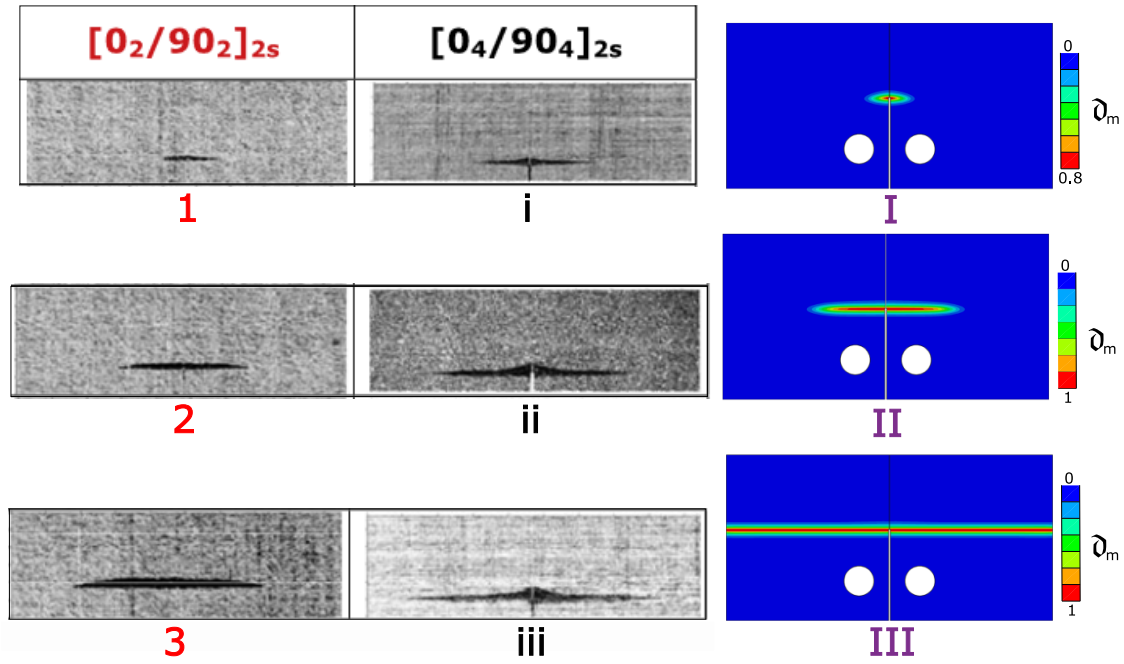


图 15：数值结果（紫色罗马数字标记）与实验结果（红色阿拉伯数字和黑色小号罗马数字标记）中的裂纹扩展对比。实验结果转载自 [110]，经 Elsevier 许可。

发生在实　　验中。尽管如此，当前模型总体上与实验结果吻合良好　　.

图13中的标记指出了图15所示损伤对应的加载阶段。初始图像 1、i 和 I 是在大致相同的位移阶段拍摄的，而第二组图像则有所不同。这是因为在 $[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$ 试样的实验中，图像 1 和 2 之间似乎发生了一次不稳定裂纹扩展事件，导致在相同位移下，其裂纹比数值结果中的更大。因此，图像 II 是在较晚的加载阶段、接近点 ii 时拍摄的。数值结果的最后一幅图像已显示完全失效，而$[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$ 试样并未达到完全失效，或者如$[0_4^\circ/90_4^\circ]_{2s}$ 样品那样，失效发生得更晚。后者因 0°块拔出而失效，而非基体开裂。这也解释了图15所预测的最终损伤模式为何存在差异。此处，扩展以纤维间破坏为主的裂纹所需的能量由分层和 0°块拔出耗散，因此基体裂纹比数值结果中的更短。图14展示了各层对应于损伤 I 和 II 的应力。

总之，所提出的模型在定性和定量预测方面均与实验结果高度吻合。

6.4. 双缺口拉伸

本节介绍不同层合板铺层序列的双边缺口拉伸结果。文献 [30] 展示了双边缺口拉伸试验中的渐进损伤实验结果以及铺层顺序的影响。该文献采用不同尺寸的试样，展示了E玻璃纤维/913玻璃环氧层合板的失效模式、强度和亚临界损伤演化。本节考虑三种宽度恒定为 $w = 20\text{mm}$ 的层合板铺层序列，以评估模型在纤维失效、纤维间失效相互作用、亚临界损伤和裂纹扩展方面的预测能力。

所研究对象的几何描述及边界条件如图所示：16 a)。图 16 a) 还标示了纤维取向的命名方式 θ。加载方向设为 $\theta = 90°$，而垂直于加载方向的方向设为

E_{11} (兆帕)	E_{22} (兆帕)	E_{12} (兆帕)	ν_{12}	ν_{21}	G_{12} (兆帕)
45600	16200	6000	0.099	0.4	6000

表 8：玻璃纤维-环氧树脂的弹性性能

R_{11}^T (兆帕)	R_{22}^T (兆帕)	R_{11}^C (兆帕)	R_{22}^C (兆帕)	R_{12} (兆帕)	$G_{C,f}^T \left(\frac{N}{mm}\right)$	$G_{C,m}^T \left(\frac{N}{mm}\right)$
1280	73.3	800	145	73	64	1.8

表 9：玻璃纤维-环氧树脂的强度性能

设为 $\theta = 0°$。根据 [30], , 考虑三种层合顺序，包括：a) $[0/90]_s$，b)$[45/90/-45]_s$（本文中，该顺序表示为 $[45/0/-45]_s$），以及 c) $[45/90/-45/0]_s$。

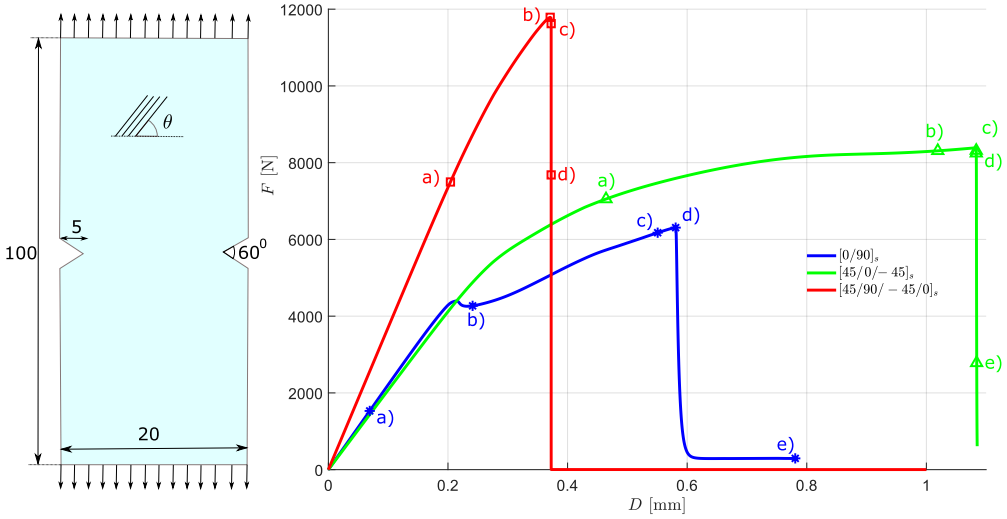


图 16：a）双缺口拉伸试样的几何描述及其边界条件和纤维取向；b）不同层合板铺层序列的力-位移曲线。

该材料由玻璃-环氧预浸料板组成，其近似材料性能见表8-9。每个铺层均采用 23716 个单元进行网格划分，并按照 [117]在缺口附近进行细化。每种铺层顺序均与实验结果进行比较[30] ，并根据实验结果展示多个时刻的情况。此外，还给出了每种铺层顺序的力-位移曲线，并如 [30] 所示，标出了各时段的损伤模式，以突出该模型分别模拟亚临界裂纹、纤维内裂纹扩展和纤维间裂纹扩展的能力。本节所示的所有层合顺序中，作者 [30] 均报告了大量分层，但数值建模中未考虑分层。

6.4.1. 交叉铺层层合板 $[0/90]_s$

图 17 从裂纹扩展的角度比较了交叉铺层层合板的数值结果和实验结果。图 16b) 展示了交叉铺层层合板的力-位移曲线。每组损伤对比均标出了最大反力的百分比，并将相应的裂纹形态与实验结果进行比较 [30]。图17a)、b)、c)、d)分别展示了最大载荷的 a) 26%、b) 67%、c) 98% 和 d) 100% 时的裂纹扩展对比。e) 展示了最终失败。

如图所示，缺口附近最初出现劈裂，发生于交叉铺层层合板中。 17a)。此时，如数值结果所示，已发生部分纤维间失效。此外，随着载荷增加，

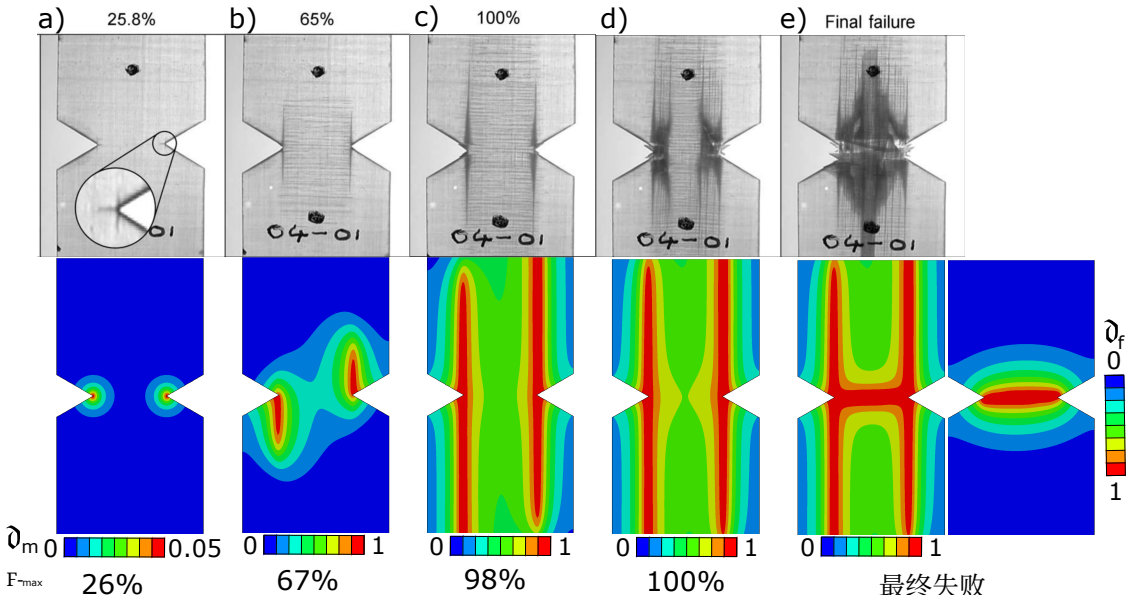


图17：层合板铺层序列$[0/90]_s$的裂纹扩展随最大载荷变化的实验与数值结果对比。实验结果引自 [30]

沿加载方向发生铺层劈裂，而单条横向裂纹则出现在垂直于加载方向的方向上。数值结果也可在图 17b) 中看到这一现象。劈裂裂纹不断扩展，而加载方向的垂直区域开始出现损伤 $\mathfrak{d}_m \approx 0.5$。由于交叉铺层中出现了以纤维间破坏为主的裂纹，图 16b) 中可见力-位移曲线略有下降。随着载荷进一步增加，劈裂裂纹不断扩展，导致缺口尖端附近出现纤维损伤，如图 16 c) 和 d) 所示。实验研究 [30] 表明，随着纤维失效增多，失效路径会沿试样宽度方向不规则地延伸，并伴随劈裂和分层。忽略分层后，图 16 d)、e) 展示了劈裂裂纹的扩展，随后发生纤维失效。随着纤维失效增多，纤维周围的基体也会发生损伤，如图 16 e) 所示。

基于单个铺层中的应力集中，可对单个铺层进行断裂预测。图A.21 给出了交叉铺层层合板各层的应力分布。

6.4.2. 层合板 $[45/0/-45]_s$

图18 基于最大载荷百分比，比较了有关裂纹扩展的实验与数值研究。图16b)给出了相应的力-位移关系。

随着施加载荷增加，位于 $45°$界面和 $-45°$ 层间的纤维间主导裂纹开始出现。在局部坐标系中，裂纹沿纤维方向取向，而如图$\pm 45°$ 18所示，在全局坐标系中，裂纹似乎开始扩展。在此阶段，数值结果表明，层合板中的损伤主要由 $\pm 45°$ 纤维间失效主导。

随着施加载荷增加，亚临界裂纹开始成核，形成更明显的裂纹形态，并呈现如图18b）所示的纤维间损伤主导的失效模式。数值结果还表明，在此阶段之后，纤维失效模式与纤维间失效模式的共同作用推动了损伤的发展。当达到最大反力载荷时，如图18c）所示，缺口尖端处的失效模式完全由纤维失效主导。由于纤维损伤急剧增加，力-位移曲线出现显著下降，导致如图16b）所示的完全失效。图18d）和 e）分别对裂纹扩展和最终失效模式进行了比较。

总之，所呈现的结果与实验结果在定性比较中高度吻合。具体而言，模型预测先发生纤维间主导失效，随后发生纤维主导失

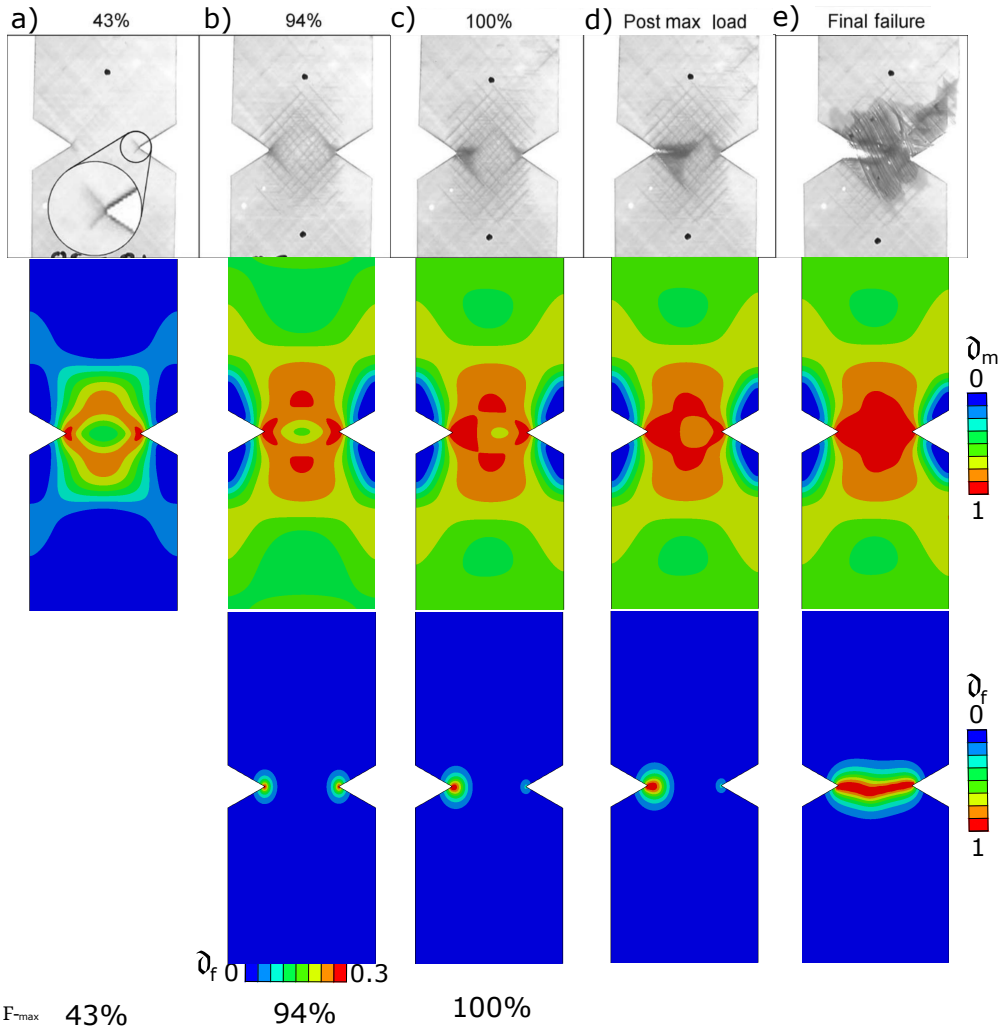


图18：层合板铺层序列 $[45/0/-45]_s$ 的实验结果与数值结果在最大载荷方面的对比。第二行展示纤维间损伤，第三行展示相应的纤维失效（如有）。实验结果复现自 [30]

主导失效　　。该模型还捕捉到了纤维主导与基体主导失效机制之间的竞争，如图 18 所示，与实验结果一致 [30]。

6.4.3. 准各向同性层合板 $[45/90/-45/0]_s$

本小节将铺层顺序为 $[45/90/-45/0]_s$ 的准各向同性层合板与实验结果进行比较。结果与铺层顺序为 $[45/0/-45]_s$的层合板相似。首先，层间主导裂纹沿着 $\pm 45°$ 铺层的纤维方向扩展，如图19a)所示。该亚临界裂纹进一步扩展，纤维间主导失效与纤维主导失效之间的竞争可见图19b)。此外，随着纤维主导失效加剧，裂纹演化很大程度上取决于纤维失效；损伤纤维周围出现纤维间主导失效，如图19c)和图19d)所示。此外，准各向同性铺层的力-位移曲线见图16b)。图20展示了位置a)处各层的应力分布。

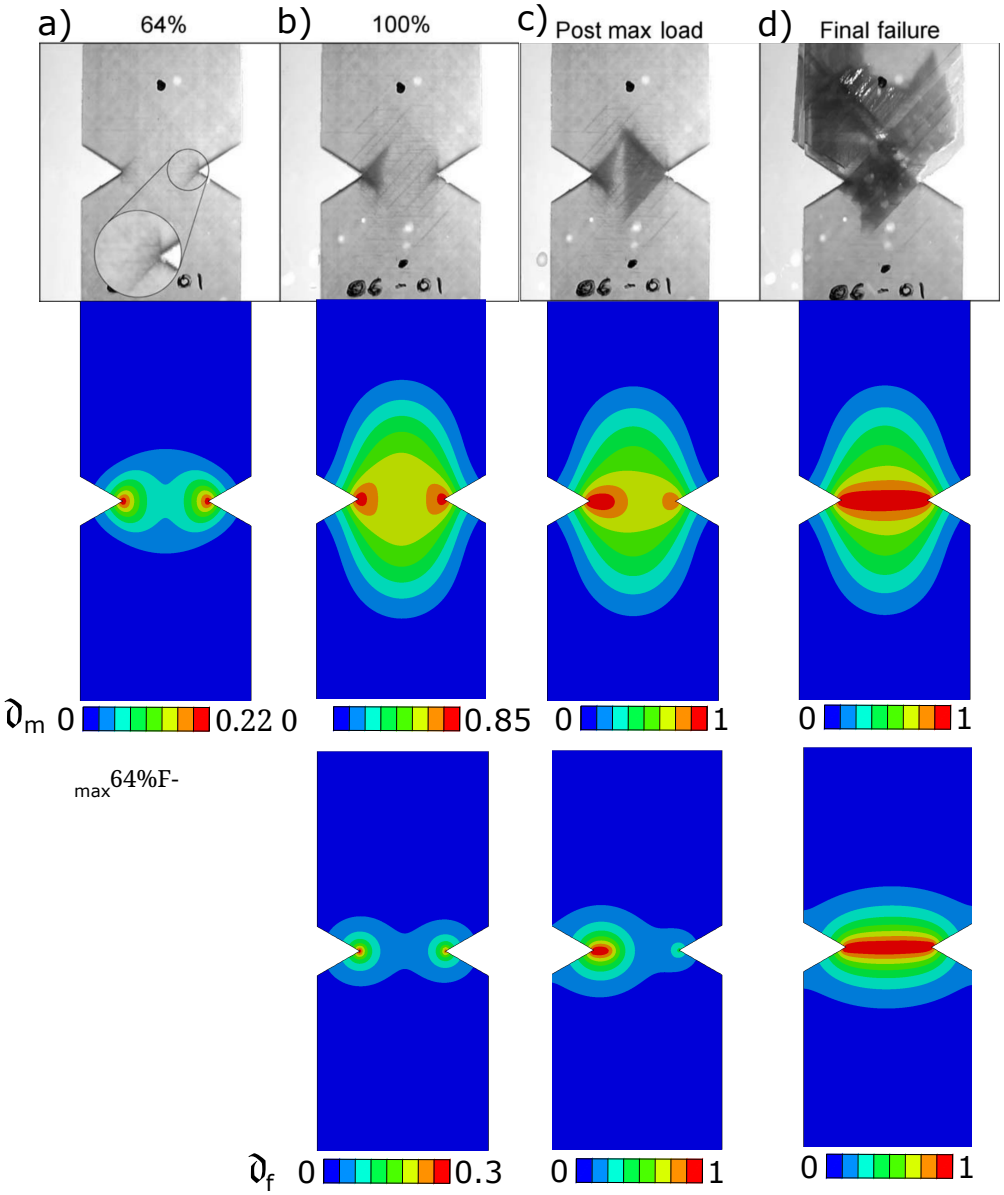


图19：层合板铺层序列 $[45/90/-45/0]_s$ 的实验结果与数值结果对比，以最大载荷为变量。第二行展示纤维间损伤，第三行展示相应的纤维失效（如有）。实验结果引自 [30]

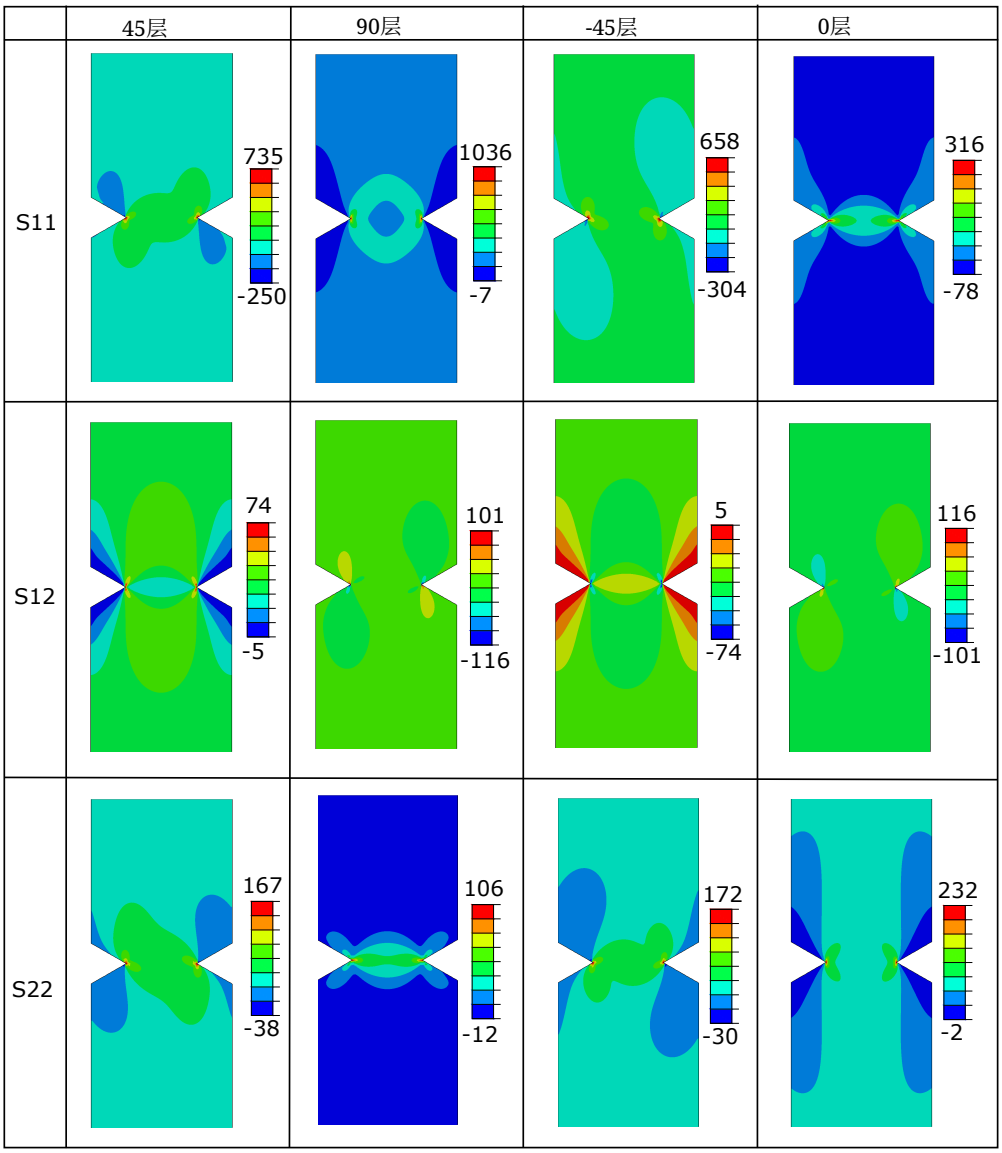


图20：层合板各层中的应力分布 $[45/90/-45/0]_s$ 对应于 $F_{max} = 64\%$ 对应图中裂纹扩展时的19a）。所有应力单位均为兆帕。

7. 结论

本文提出了一种能够处理各种层合板铺层序列的多相场铺层模型。该模型结合了 Puck失效理论，并采用两个独立的损伤变量，分别对纤维失效和纤维间失效进行建模。采用网格叠加技术构建具有不同铺层顺序的层合板。与实验结果的对比表明，该模型能够复现定性和定量实验结果。此外，通过交叉铺层和各向同性层合板展示了纤维损伤与纤维间损伤之间的相互作用。本文还探讨了层合板的压缩失效。

当前模型目前可用于对层合板断裂进行定性评估。相比之下，定量评估可通过校准所提出的无量纲数（称为无量纲驱动参数）来实现。最后，本研究汇集了许多层合板计算分析的基准算例。此外，还提供了代码及相应数据，以提高透明度，并使独立研究人员能够在当前模型的基础上开展进一步研究。

8. 数据可用性

本节提供代码和数据的链接，其中包括本文接受后文中所有示例所使用的代码和输入文件。

参考文献

[1] T. Q. B. 等，《相场模型、基础理论及其在复合材料层合板中的应用综述》，《工程断裂力学》248（2021）107705。doi:https://doi.org/10.1016/j. engfracmech.2021.107705。[2] R. Piska、K. Sivadas、K. Boyina、A. Vuppuluri、A. Chaurasia、C. Parimi、T. Rabczuk，《计算损伤模型的最新趋势：综述》，《理论与应用断裂力学》132（2024）104494。doi:https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104494。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016784422400243X[3] Z.-Q. Cheng、H. Liu、W. Tan，《复合材料的先进计算建模》，《工程断裂力学》305（2024）110120。doi:https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024. 110120。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794424002832[4] M. J. Laffan、S. T. Pinho、P. Robinson、A. J. McMillan，《复合材料层间穿透断裂韧性测试：综述》，Polymer Testing 31（3）（2012）481–489。doi:https://doi.org/10.1016/j. polymertesting.2012.01.002。[5] J. Kaul、H. Pettermann，《纤维增强聚合物铺层的本构模型——基于有效强度的隐式各向异性损伤演化与塑性》，Composites Part C: Open Access 4（2021）100097。doi:https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2020.100097。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666682020300979[6] T. Flatscher、M. Wolfahrt、G. Pinter、H. Pettermann，《开孔拉伸试验的模拟与实验——铺层内塑性、损伤及局部化评估》，《复合材料科学与技术》72（10）（2012）1090–1095，载于《复合材料变形与断裂的最新进展：实验与分析》。doi:https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.07.021。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353811002740[7] B. Green、M. Wisnom、S. Hallett，《带缺口复合材料拉伸强度尺度效应的实验研究》，《复合材料A辑：应用科学与制造》38（3）（2007）867–878。doi:https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2006.07.008。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X06002326

[8] S. R. Hallett、B. G. Green、W.-G. Jiang、K. H. Cheung、M. R. Wisnom，《开孔拉伸试验：复合材料虚拟测试的挑战》，International Journal of Fracture 158（2）（2009）169–181。doi:10.1007/s10704-009-9333-8。URL https://doi.org/10.1007/s10704-009-9333-8[9] T. Chuaqui、M. Nielsen、J. Colton、R. Butler、A. Rhead，《铺层角与阻塞对复合材料层合板开孔拉伸强度的影响：设计与认证视角》，Composites Part B: Engineering 207（2021）108582。doi:https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108582。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836820336283[10] P. Camanho、P. Maimí、C. Dávila，《利用连续损伤力学预测带缺口层合板的尺寸效应》，《复合材料科学与技术》67（13）（2007）2715–2727。doi:https:// doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.02.005。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353807000796[11] M. R. Wisnom、S. R. Hallett，《分层对准各向同性层合板开孔拉伸试验中强度、失效机制和孔尺寸效应的作用》，《复合材料A辑：应用科学与制造》40（4）（2009）335–342。doi:https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2008. 12.013。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X08003266[12] S. Hallett、B. Green、W. Jiang、M. Wisnom，《带缺口复合材料损伤机制的实验与数值研究》，《复合材料A辑：应用科学与制造》40（5）（2009）613–624。doi:https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2009.02.021。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X09000499[13] M. Wisnom、S. Hallett、C. Soutis，《带缺口复合材料的尺度效应》，Journal of Composite Materials 44（2）（2010）195–210。doi:10.1177/0021998309339865。URL https://doi.org/10.1177/0021998309339865[14] C. Harris、D. Morris，《采用紧凑拉伸、三点弯曲和中心裂纹拉伸试样对厚层合复合材料断裂行为的比较》，载于《断裂力学：第十七卷》，ASTM International，1986年。arXiv:https://asmedigitalcollection.asme.org/astm-ebooks/book/chapter-pdf/7396209/10_1520_stp17392s.pdf，doi:10.1520/STP17392S。URL https://doi.org/10.1520/STP17392S[15] J. H. Underwood、M. Kortschot，《碳/环氧层合板的缺口尖端损伤与层间穿透断裂韧性测量》，载于《会议论文集》，1994年。URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:135863567[16] J. H. Underwood、M. T. Kortschot、W. R. Lloyd、H. L. Eidinoff、D. A. Wilson、N. Ashbaugh，《碳/环氧层合板层间穿透断裂韧性测试方法及实验室间测试结果》，ASTM 特别技术出版物 1256（1995）486–508。[17] S. Pinho、P. Robinson、L. Iannucci，《层合复合材料拉伸与压缩纤维失效模式的断裂韧度》，《复合材料科学与技术》66（13）（2006）2069–2079。doi: https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2005.12.023。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026635380600011X[18] M. Laffan、S. Pinho、P. Robinson、L. Iannucci，《与纤维增强塑料中 I 型纤维拉伸失效相关的原位铺层断裂韧性测量。第一部分：数据归约》，《复合材料科学与技术》70（4）（2010）606–613。doi:https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.12.016。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353809004515

[19] M. Laffan，S. Pinho，P. Robinson，L. Iannucci，与纤维增强塑料中 I 型纤维拉伸失效相关的原位铺层断裂韧性测量。第二部分：尺寸和铺层效应，《复合材料科学与技术》70 (4) (2010) 614–621。doi:https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.12. 011。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353809004369[20] M. Laffan，S. Pinho，P. Robinson，A. McMillan，层间穿透断裂韧性：碳纤维增强塑料中 0°铺层的临界缺口尖端半径，《复合材料科学与技术》72 (1) (2011) 97–102。doi:https: //doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.10.006。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353811003630[21] K. G. 达西奥斯，V. 科斯托普洛斯，M. 斯廷，碳/碳复合材料断裂中的本征参数，《复合材料科学与技术》65 (6) (2005) 883–897。doi:https://doi.org/10.1016/ j.compscitech.2004.10.021。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353804002945[22] R. 雷伯，J. 德哈恩，J. 迈耶，M. 佩蒂梅尔梅特，E. 温特马特尔，纬编碳纤维增强 PEEK 的层内断裂，载于：J. Williams，A. Pavan（编），《聚合物、复合材料与胶黏剂的断裂》，《欧洲结构完整性学会》第27卷，Elsevier，2000年，第123–133页。doi:https://doi.org/10.1016/S1566-1369(00)80013-8。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1566136900800138[23] K. M. 普雷沃，铺层顺序对硼铝断裂韧性的影响，《复合材料杂志》12 (1) (1978) 40–52。doi:10.1177/002199837801200103。URL https://doi.org/10.1177/002199837801200103[24] C. 孙，K. 普雷沃，硼铝复合材料的断裂韧性，《复合材料杂志》11 (2) (1977) 164–175。doi:10.1177/002199837701100204。URL https://doi.org/10.1177/002199837701100204[25] D. Morris，H. 哈恩，石墨/环氧复合材料的抗断裂能力表征，ASTM International，1977年。[26] Y. 尤，D. Morris，H. 布林森，石墨/环氧复合材料断裂行为的分析与实验相关性研究，《测试与评价杂志》7 (2) (1979) 117–125。doi:10.1520/JTE11211J。URL https://doi.org/10.1520/JTE11211J[27] J. 安德伍德，I. 伯奇，S. 班迪奥帕迪亚伊，缺口几何形状和水分对碳纤维/环氧树脂及碳/双马来酰亚胺层合板断裂强度的影响，载于：《复合材料：疲劳与断裂》（第三卷），ASTM International，1991年。[28] C. 波伊，Jr，J. 索瓦，不同比例 0°和±45°铺层的硼/铝层合板断裂韧性，美国国家航空航天局，（1980）36。[29] M. E. 托伊加尔，M. 托帕尔勒，B. 乌尤尔甘，碳纤维/环氧树脂复合材料断裂韧性研究，《增强塑料与复合材料杂志》25 (18) (2006) 1887–1895。doi:10.1177/ 0731684406069916。URL https://doi.org/10.1177/0731684406069916[30] S. R. Hallett，M. R. Wisnom，缺口拉伸试验中渐进损伤及铺层影响的实验研究，《复合材料杂志》40 (2) (2006) 119–141。doi:10.1177/ 0021998305053504。URL https://doi.org/10.1177/0021998305053504

[31] S. Pinho，L. Iannucci，P. Robinson，显式有限元代码中脱粘单元的公式构建与实现，《复合材料A辑：应用科学与制造》37 (5) (2006) 778–789。doi:https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2005.06.007。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X05002691[32] S. Pinho，L. Iannucci，P. Robinson，基于物理的层合纤维增强复合材料失效模型与准则，重点关注纤维扭折。第二部分：有限元实现，《复合材料A辑：应用科学与制造》37 (5) (2006) 766–777。doi:https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2005.06.008。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X05002708[33] N. Moës，T. Belytschko，采用扩展有限元法进行黏聚裂纹扩展，《工程断裂力学》69 (7) (2002) 813–833。doi:https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00128-X。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001379440100128X[34] F. Bobaru，S. A. Silling，纳米纤维网络和碳纳米管增强复合材料的三维近场动力学模型，《AIP会议论文集》712 (1) (2004) 1565–1570。doi:10.1063/1.1766752。URL https://doi.org/10.1063/1.1766752[35]J. Xu，A. Askari，O. Weckner，S. Silling，复合材料层合板冲击损伤的近场动力学分析，《航空航天工程杂志》21 (3) (2008) 187–194。doi: 10.1061/(ASCE)0893-1321(2008)21:3(187)。URL https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290893-1321%282008%2921%3A3% 28187%29[36] E. Oterkus，E. Madenci，O. Weckner，S. Silling，P. Bogert，A. Tessler，采用有限元与近场动力学相结合的分析方法预测带中心槽口的加筋复合材料曲面板的失效，《复合材料结构》94 (3) (2012) 839–850。doi:https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011. 07.019。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822311002741[37] D. Boyina，T. Kirubakaran，A. Banerjee，R. Velmurugan，采用非均质弹簧网络研究机织复合材料的混合模式层间贯穿断裂，《材料力学》91 (2015) 64–75。doi:https: //doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.07.013。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663615001672[38] A. Mayya，A. Banerjee，R. Rajesh，采用随机弹簧网络模型研究孔隙率和基体行为对哈弗斯骨压缩断裂的作用，《生物医学材料力学行为杂志》83 (2018) 108–119。doi:https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.04.013。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S175161611830496X[39] M. Braun，I. Iváñez，M. Ariza，采用二维晶格模型对单向复合材料渐进损伤进行数值研究，《工程断裂力学》249 (2021) 107767。doi:https: //doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107767。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794421002125[40] A. Puck，H. Schürmann，采用基于物理的现象学模型对纤维增强塑料层合板进行失效分析，《复合材料科学与技术》62 (12) (2002) 1633 – 1662。doi:https: //doi.org/10.1016/S0266-3538(01)00208-1。URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353801002081[41] O. Allix，L. Daudeville，P. Ladevèze，分层与损伤力学，《复合材料与多材料中的损伤力学及损伤机制》（1989）143–157。[42] P. Ladeveze，论一种损伤力学方法，《复合材料与多材料中的损伤力学及损伤机制》

(1989) 119–141.

[43] P. LADEVÈZE, 《层合复合材料的损伤细观模型》，载于：《材料行为模型手册》，Elsevier，2001年，第1004–1014页。[44]A. Matzenmiller、J. Lubliner、R. Taylor, 《纤维复合材料各向异性损伤本构模型》，《材料力学》20 (2) (1995) 125–152。doi:https://doi.org/10.1016/0167-6636(94)00053-0。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167663694000530[45] I. Lapczyk、J. A. Hurtado, 《纤维增强材料的渐进损伤建模》，《复合材料A辑：应用科学与制造》38 (11) (2007) 2333–2341，compTest 2006。doi:https: //doi.org/10.1016/j.compositesa.2007.01.017。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X07000218[46] P. Maimí、P. Camanho、J. Mayugo、C. Dávila, 《复合材料层合板的连续损伤模型：第一部分——本构模型》，《材料力学》39 (10) (2007) 897–908。doi:https://doi.org/ 10.1016/j.mechmat.2007.03.005。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663607000543[47] W. Van Paepegem、I. De Baere、J. Degrieck, 《玻璃纤维增强复合材料非线性剪切应力–应变响应的建模。第二部分：模型开发与有限元模拟》，《复合材料科学与技术》66 (10) (2006) 1465–1478。doi:https://doi.org/10.1016/j. compscitech.2005.04.018。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026635380500117X[48] E. J. Barbero、P. Lonetti, 《纤维增强层合板的非弹性损伤模型》，《复合材料杂志》36 (8) (2002) 941–962。[49] C. Schuecker、H. Pettermann, 《基于铺层失效机制的纤维增强层合板连续损伤模型》，《复合材料结构》76 (1) (2006) 162–173，第十五届国际复合材料会议。doi:https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.06.023。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822306002625[50] C. Schuecker、H. Pettermann, 《铺层损伤本构建模、有限元实现及层合结构分析》，《计算机与结构》86 (9) (2008) 908–918，复合材料。doi:https: //doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.04.021。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794907001666[51] C. Schuecker、H. E. Pettermann, 《纤维增强层合板：基于失效机制的渐进损伤建模》，《计算工程方法档案》15 (2) (2008) 163–184。doi:10.1007/s11831-008-9016-z。URL https://doi.org/10.1007/s11831-008-9016-z [52] H. T Flatscher、C. Schuecker, 《用于刚度退化和塑性应变累积的铺层本构模型：其在第三次世界范围失效分析评估（A部分）中的应用》，《复合材料杂志》47 (20-21) (2013) 2575–2593。doi:10.1177/0021998313484075。[53] A. A. Griffith, 《固体中的断裂与流动现象》，《伦敦皇家学会哲学汇刊》221 (1921) 163–198。[54] G. F. 等, 《重新审视作为能量最小化问题的脆性断裂》，《固体力学与物理学报》46 (8) (1998) 1319–1342。doi:https://doi.org/10.1016/S0022-5096(98) 00034-9。[55] B. Bourdin、G. Francfort、J.-J. Marigo, 《重新审视脆性断裂的数值实验》，《固体力学与物理学报》48 (4) (2000) 797–826。doi:https://doi.org/10.1016/ S0022-5096(99)00028-9。

[56]B. Bourdin、C. J. Larsen、C. L. Richardson，基于裂纹正则化的动态断裂时间离散模型，《International Journal of Fracture》168 (2) (2011) 133–143。doi:10.1007/ s10704-010-9562-x。[57] C. Miehe、F. Welschinger、M. Hofacker，断裂的热力学一致相场模型：变分原理与多场有限元实现，《工程数值方法国际期刊》83 (10) (2010) 1273–1311。
arXiv:https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10. 1002/nme.2861,
doi:https://doi.org/10.1002/nme.2861。URL
https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2861[58] A. Schlüter、A. Willenbücher、C. Kuhn、R. Müller，动态脆性断裂的相场近似，《计算力学》54 (5) (2014) 1141–1161。
doi:10.1007/s00466-014-1045-x。URL https://doi.org/10.1007/s00466-014-1045-x[59] M. A. Msekh、J. M. Sargado、M. Jamshidian、P. M. Areias、T. Rabczuk，脆性断裂相场模型的 Abaqus 实现，《计算材料科学》96 (2015) 472–484，聚合物复合材料特刊。
doi:https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.05.071。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927025614004133[60] C. Miehe、M. Hofacker、F. Welschinger，率无关裂纹扩展的相场模型：基于算子分裂的稳健算法实现，《计算机在应用力学与工程中的方法》199 (45) (2010) 2765–2778。
doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.04.011。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510001283[61] A. Mesgarnejad、B. Bourdin、M. Khonsari，断裂变分方法的验证模拟，《计算机在应用力学与工程中的方法》290 (2015) 420–437。doi:https: //doi.org/10.1016/j.cma.2014.10.052。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578251400423X[62] F. Freddi、F. Iurlano，内聚断裂变分弥散方法的数值分析，《固体力学与物理学报》98 (2017) 156–171。
doi:https://doi.org/10.1016/j.jmps. 2016.09.003。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509616304860[63] M. Paggi、J. Reinoso，重新审视裂纹撞击界面问题：脆性断裂相场方法与界面内聚区模型相互作用的建模框架，《计算机在应用力学与工程中的方法》321 (2017) 145–172。doi:https: //doi.org/10.1016/j.cma.2017.04.004。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516317066[64] J.-Y. Wu，损伤力学与准脆性破坏的统一相场理论，《固体力学与物理学报》103 (2017) 72–99。
doi:https://doi.org/10.1016/j.jmps. 2017.03.015。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509616308341[65] T. Nguyen、J. Yvonnet、Q.-Z. Zhu、M. Bornert、C. Chateau，显微断层成像获得的真实微结构中界面损伤与裂纹扩展相互作用的计算建模相场法，《计算机在应用力学与工程中的方法》312 (2016) 567–595，断裂相场方法专辑。
doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.10.007。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782515003266[66] S. Conti、M. Focardi、F. Iurlano，内聚断裂模型的相场近似，《亨利·庞加莱研究所年鉴 C辑，非线性分析》33 (4) (2016) 1033–1067。doi:https://doi.org/ 10.1016/j.anihpc.2015.02.001。URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0294144915000360

[67] M. J. Borden、C. V. Verhoosel、M. A. Scott、T. J. Hughes、C. M. Landis，动态脆性断裂的相场描述，《计算机在应用力学与工程中的方法》217-220 (2012) 77–95。doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.01.008。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782512000199[68] D. H. Doan、T. Q. Bui、T. Van Do、N. D. Duc，动态裂纹扩展的率相关混合相场模型，《应用物理学杂志》122 (11) (2017) 115102。arXiv:https://pubs.aip. org/aip/jap/article-pdf/doi/10.1063/1.4990073/13334518/115102_1_online.pdf，doi:10. 1063/1.4990073。URL https://doi.org/10.1063/1.4990073[69] S. Zhou、X. Zhuang、T. Rabczuk，多孔介质中流体驱动的动态开裂相场建模，《计算机在应用力学与工程中的方法》350 (2019) 169–198。doi:https: //doi.org/10.1016/j.cma.2019.03.001。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782519301276[70] V. P. Nguyen、J.-Y. Wu，采用相场正则化内聚区模型对固体动态断裂进行建模，《计算机在应用力学与工程中的方法》340 (2018) 1000–1022。doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.06.015。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578251830313X[71] C. M. 等，断裂的相场建模：第二部分。热弹塑性固体中的耦合脆性至延性失效准则与裂纹扩展，《计算机在应用力学与工程中的方法》294 (2015) 486–522。doi:https://doi.org/10.1016/j.cma. 2014.11.017。[72] P. K. A. V. Kumar、A. Dean、S. Sahraee、J. Reinoso、M. Paggi，基于实体壳概念、采用类内聚界面的薄壁结构非线性热弹性分析，《分析与设计中的有限元》202 (2022) 103696。doi:https://doi.org/10.1016/j.finel.2021.103696。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X21001700[73] P. K. Asur Vijaya Kumar、A. Dean、J. Reinoso、M. Paggi，基于实体壳概念的薄壁结构非线性热弹性相场断裂，《计算机在应用力学与工程中的方法》396 (2022) 115096。doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115096。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782522002936[74] J. Bleyer、R. Alessi，包括多种损伤机制的各向异性脆性断裂相场建模，《计算机在应用力学与工程中的方法》336 (2018) 213–236。doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.03.012。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782518301373[75] A. Dean、J. Reinoso、N. Jha、E. Mahdi、R. Rolfes，短纤维增强复合材料延性断裂的相场方法，《理论与应用断裂力学》106 (2020) 102495。doi:https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102495。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167844219306536[76] Q. Wang、Y. Feng、W. Zhou、Y. Cheng、G. Ma，基于统一拉伸断裂准则的混合模式断裂相场模型，《计算机在应用力学与工程中的方法》370 (2020) 113270。doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113270。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782520304552[77] P. Asur Vijaya Kumar、A. Dean、J. Reinoso、P. Lenarda、M. Paggi，功能梯度材料的断裂相场建模： Γ-收敛性与梯度变化影响的力学见解，《薄壁结构》159 (2021) 107234。doi:https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107234。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823120311046

[78] R. Alessi, F. Freddi，混杂层合板失效的相场建模，《复合材料结构》181（2017）9–25。doi:https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.08.073。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822317313107[79] J. Reinoso, A. Arteiro, M. Paggi, P. Camanho，采用有限断裂力学和相场方法预测含缺口薄铺层层合板的强度，《复合材料科学与技术》150（2017）205–216。doi:https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2017.07.020。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353817310552[80] Hirshikesh, S. Natarajan, R. K. Annabattula，采用相场法对变刚度复合材料层合板中的裂纹扩展进行建模，《复合材料结构》209（2019）424–433。doi:https: //doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.083。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822318325935[81] A. Singh, S. Pal，复合材料中各种断裂机制的多相场建模，《工程断裂力学》241（2021）107348。doi:https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020. 107348。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794420309292[82] P. Zhang, W. Yao, X. Hu, T. Q. Bui，复合材料渐进拉伸失效的显式相场模型，《工程断裂力学》241（2021）107371。doi:https://doi.org/10.1016/j. engfracmech.2020.107371。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794420309516[83] Q. Yue, Q. Wang, W. Tian, T. Rabczuk, W. Zhou, G. Ma, X. Zhuang, X. Chang，断裂问题的相场格子模型（PFLM）：理论及其在复合材料中的应用，《复合材料结构》323（2023）117432。doi:https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117432。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382232300778X[84] A. Dean, M. Hematipour, P. K. Asur Vijaya Kumar, R. Rolfes，短纤维增强聚合物胶粘剂中韧性与疲劳断裂的实验-数值相场建模，《复合材料科学与技术》279（2026）111588。doi:https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2026. 111588。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353826000734[85] O. Gültekin, H. Dal, G. A. Holzapfel，软生物组织各向异性失效的数值分析表明应优先采用基于能量的准则：率相关各向异性裂纹相场模型，《计算机在应用力学与工程中的方法》331（2018）23–52。doi:10.1016/j.cma.2017.11.008。[86] O. Gültekin, H. Dal, G. Holzapfel，采用相场方法对动脉壁断裂进行建模：理论与有限元分析，《计算机在应用力学与工程中的方法》312（2016）542–566。doi:10.1016/j.cma.2016.04.007。[87] A. Quintanas-Corominas, J. Reinoso, E. Casoni, A. Turon, J. Mayugo，采用相场方法模拟长纤维复合材料中的层内与穿层断裂，《复合材料结构》220（2019）899–911。doi:https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.007。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822318339928[88] P. Zhang, X. Hu, T. Q. Bui, W. Yao，纤维增强复合材料层合板断裂的相场建模，《国际机械科学杂志》161-162（2019）105008。doi:https://doi. org/10.1016/j.ijmecsci.2019.07.007。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740318341729[89]S. Mrunmayee, A. Rajagopal, K. Rakesh, K. Basant, J. Reddy，采用相场方法预测复合材料中的混合模式分层与分层迁移，《复合材料结构》337（2024）118074。doi:https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2024.118074。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822324002022

[90] D. Pranavi, A. Rajagopal, J. Reddy，各向异性裂纹相场与纤维增强复合材料界面内聚区模型的相互作用，《复合材料结构》270（2021）114038。doi:https: //doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114038。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822321004980[91] A. D. et al.，基于 Puck失效理论的长纤维增强复合材料多相场断裂模型，《复合材料结构》251（2020）112446。doi:https://doi.org/10.1016/j. compstruct.2020.112446。[92] P. K. A. et al.，层合复合材料的多相场-内聚区模型：在分层迁移中的应用，《复合材料结构》276（2021）114471。doi:https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114471。[93] I. Jain, A. Muixí, C. Annavarapu, S. S. Mulay, A. Rodríguez-Ferran，正交各向异性复合材料断裂的自适应相场建模，《工程断裂力学》292（2023）109673。doi:https: //doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109673。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794423006318[94] A. Kumar, T. Sain，采用基于相场的内聚区方法对纤维增强聚合物复合材料中的分层进行建模，《复合材料结构》329（2024）117751。doi:https://doi.org/10.1016/j. compstruct.2023.117751。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822323010978[95] O. Lopez-Pamies, J. E. Dolbow, G. A. Francfort, C. J. Larsen，经典变分相场模型无法预测断裂萌生，《计算机在应用力学与工程中的方法》433（2025）117520。doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117520。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782524007746[96]F. Kamarei, J. Dolbow, O. Lopez-Pamies，断裂萌生：反对经典变分相场模型的第一卦限证据，《应用力学杂志》（2024）1–5arXiv:https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/doi/10.1115/1.4067146/7404104/jam-24-1344.pdf，doi:10.1115/1.4067146。URL https://doi.org/10.1115/1.4067146[97] Z. Hashin，单向纤维复合材料的疲劳失效准则，《应用力学杂志》48（4）（1981）846–852。doi:10.1115/1.3157744。URL https://doi.org/10.1115/1.3157744[98] S. T. Pinho, et al.，FRP在面内或三维应力状态下（包括剪切非线性）的失效模型与准则，伦敦帝国学院航空系，2013年。[99] S. T. Pinho, L. Iannucci, P. Robinson，层合纤维增强复合材料基于物理的失效模型与准则，重点讨论纤维扭折：第一部分：模型开发，《复合材料A辑：应用科学与制造》37（1）（2006）63–73。doi:https://doi.org/10.1016/j. compositesa.2005.04.016。[100] S. T. Pinho, R. Darvizeh, P. Robinson, C. Schuecker, P. P. Camanho，聚合物基纤维增强复合材料的材料与结构响应，《复合材料杂志》46（19-20）（2012）2313–2341。doi:10.1177/0021998312454478。[101] G. Bullegas, J. M. Lamela, S. Pimenta, S. Pinho，动态应力集中与断裂力学在纤维增强复合材料纵向拉伸失效中的作用，《工程断裂力学》228（2020）106920。doi:https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106920。

[102] M. J. Laffan, S. T. Pinho, P. Robinson, L. Iannucci, A. J. McMillan, 《层合复合材料纵向纤维压缩失效模式相关断裂韧度的测量》, 《复合材料A辑：应用科学与制造》43 (11) (2012) 1930–1938。doi:https:// doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.04.009。[103] M. J. Laffan, S. T. Pinho, P. Robinson, L. Iannucci, 《FRP中与I型纤维拉伸失效相关的原位铺层断裂韧性的测量。第二部分：尺寸与铺层效应》, 《复合材料科学与技术》70 (4) (2010) 614–621。doi:https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.12.011。[104] P. K. Asur Vijaya Kumar, R. Fleischhacker, A. Dean, R. Rolfes, H. E. Pettermann, 基于Puck理论重新审视纤维增强复合材料的多相场模型, 《复合材料结构》372 (2025) 119549。doi:https: // doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.119549。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822325007147[105] P. Li, J. Yvonnet, Y. Wu, 基于拓扑结构和沉积层方向提升3D打印弹塑性结构的抗断裂能力, 《国际机械科学杂志》220 (2022) 107147。doi:https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107147。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740322000777[106] Z. Pan, K. Liew, 含有碳纳米管增强复合材料单层和受损纤维增强复合材料单层的旋转复合材料叶片振动特性预测, 《复合材料结构》250 (2020) 112580。doi:https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112580。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822320320419[107] Z. Pan, L.-W. Zhang, K. Liew, 变刚度复合材料设计优化的自适应代理模型和声搜索算法, 《计算机在应用力学与工程中的方法》379 (2021) 113754。doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113754。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521000906[108] Z. Pan, L. Zhang, K. Liew, 变刚度复合材料单层失效建模的相场框架, 《计算机在应用力学与工程中的方法》388 (2022) 114192。doi:https: //doi.org/10.1016/j.cma.2021.114192。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521005235[109] T. Flatscher, 层合纤维增强聚合物复合材料铺层弹塑性损伤行为的本构模型：开发、实现及其在有限元模拟中的应用, 毕业论文, 维也纳工业大学, 可在reposiTUm获取 https://resolver.obvsg.at/urn:nbn:at:at-ubtuw: 1-31444 (2010)。[110] X. Li, S. R. Hallett, M. R. Wisnom, N. Zobeiry, R. Vaziri, A. Poursartip, 超高紧凑拉伸试验中损伤扩展的实验研究, 《复合材料A辑：应用科学与制造》40 (12) (2009) 1891–1899, 特刊：CompTest 2008。doi:10.1016/j.compositesa.2009. 08.017。[111] S. Hörrmann, A. Adumitroaie, M. Schagerl, 存在制造缺陷的非卷曲织物厚度方向疲劳行为, 《结构完整性会议论文集》2 (2016) 158–165, 第21届欧洲断裂会议（ECF21）, 2016年6月20日至24日, 意大利卡塔尼亚。doi:https://doi.org/10.1016/j. prostr.2016.06.021。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S245232161630021X[112] S. Hörrmann, A. Adumitroaie, M. Schagerl, 铺层褶皱这一制造缺陷对碳纤维增强塑料材料疲劳寿命的影响, 《断裂与结构完整性》10 (38) (2016) 第76–81页。doi: 10.3221/IGF-ESIS.38.10。URL https://www.fracturae.com/index.php/fis/article/view/1772

[113] S. Hörrmann, A. Adumitroaie, C. Viechtbauer, M. Schagerl, 纤维波曲对碳纤维增强塑料材料疲劳寿命的影响, 《国际疲劳学杂志》90 (2016) 139–147。doi:https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.04.029。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112316300834[114] J. Felger, N. Stein, W. Becker, 有限宽度开孔复合材料板中的混合模式断裂：渐近耦合应力与能量方法, 《国际固体与结构杂志》122-123 (2017) 14–24。doi:https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.039。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768317302524[115] J. Broger, 将弹塑性损伤模型从Abaqus/Standard移植至Abaqus/Explicit及其在层合纤维增强聚合物复合材料中的应用, 毕业论文, 维也纳工业大学, 可在reposiTUm获取https://doi.org/10.34726/hss.2014.3960 (2014)。[116] Q. Yang, B. Cox, 层合复合材料损伤演化的内聚模型, 《International Journal of Fracture》133 (2) (2005) 107–137。doi:10.1007/s10704-005-4729-6。URL https://doi.org/10.1007/s10704-005-4729-6[117] S. R. Hallett, M. R. Wisnom, 缺口拉伸试验中渐进损伤及铺层效应的数值研究, 《复合材料杂志》40 (14) (2006) 1229–1245。doi:10.1177/0021998305057432。URL https://doi.org/10.1177/0021998305057432

附录 A.：双缺口拉伸试样中的应力分布

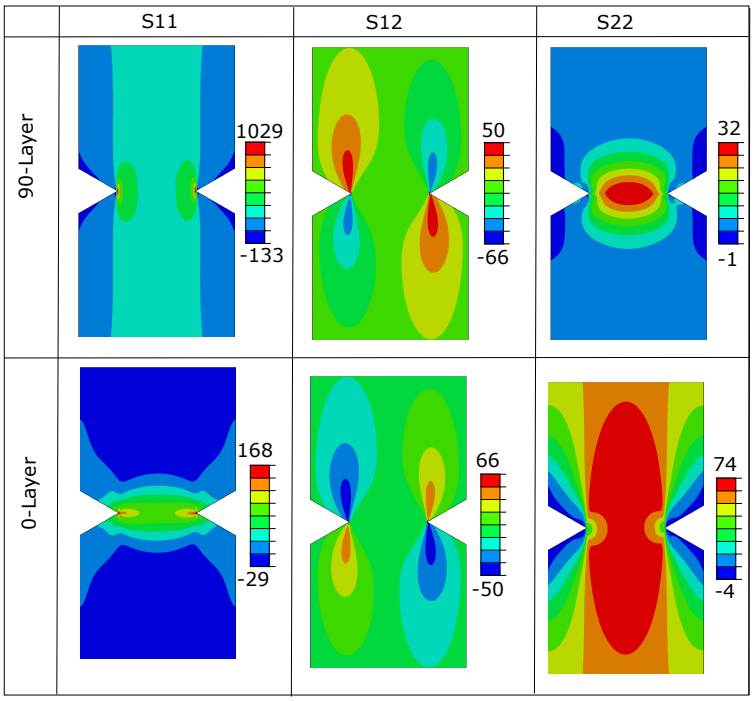


图 A.21：应力　　层合板 $[0/90]_s$中每一层的分布。所有　　应力的单位均为兆帕。

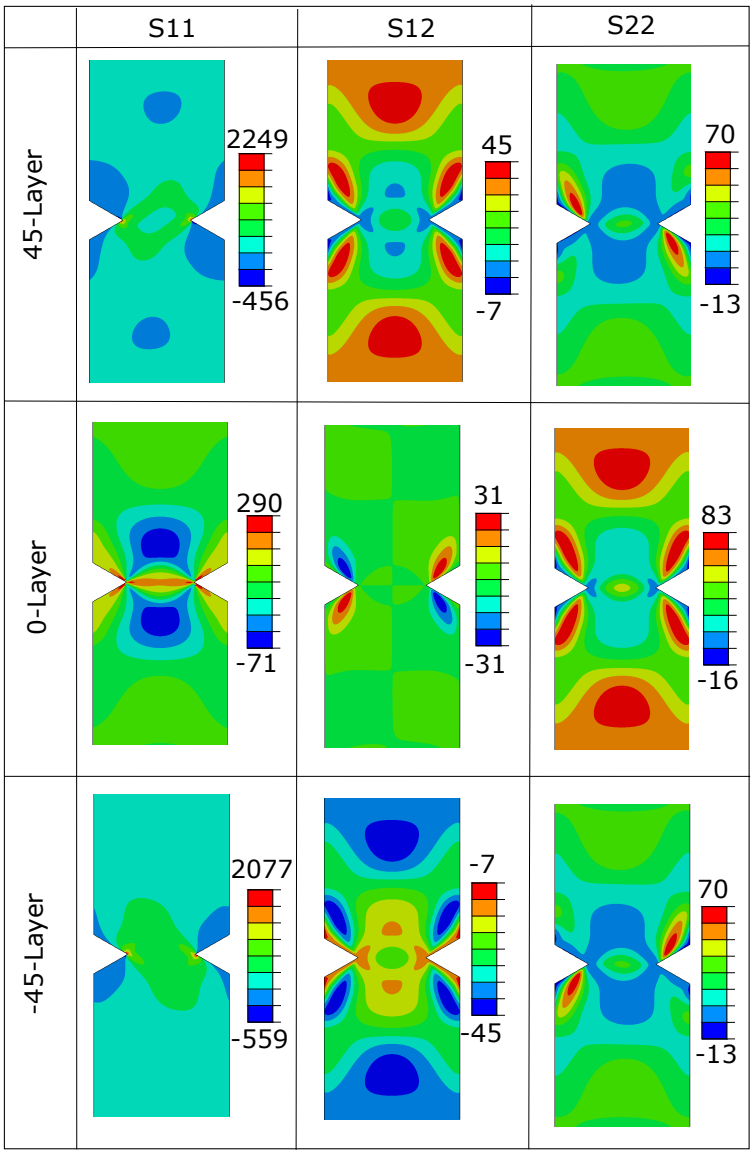


图 A.22：层合板各层中的应力分布 $[45/90/-45]_{s}$。所有应力单位均为兆帕 .