arXiv:2603.09126v1 [hep-ph] 10 Mar 2026

经典共形理论中的暗物质三重奏：弱相互作用大质量粒子、超冷却与磁单极子

Ke-Pan Xie[1], * 和 Cheng-Hao Zhan[1], †[1]物理学院,
北京航空航天大学，中国北京 *100191*

除了解决层级问题外，经典共形（CC）理论还能够自然地容纳暗物质（DM）。在本文中，我们研究了带有三重态暗标量的 CC $SU(2)_X$ 规范理论，揭示出三种不同的暗物质情景：弱相互作用大质量粒子、过冷暗物质和磁单极子。其产生机制受到 CC模型独特的一级相变演化历史的强烈影响，这与非共形模型中的情况存在显著差异。我们分别获得了每种情景的可行参数空间，并研究了地面实验和引力波观测台站当前的限制及未来的灵敏度。

I. 引言

作为标准模型（SM）中唯一的基本标量，希格斯玻色子的自能在高能标下受到量子修正所导致的二次发散影响，这被称为规范层级问题 [1]。一种有前景的解是经典共形（CC）原理 [2, 3], , 即理论在树图层次不包含任何有质量纲的参数，从而保持共形不变性。随后，共形对称性通过 Coleman-Weinberg（CW）势发生辐射破缺 [4, 5], , 从而动态地产生相应能标。鉴于观测到的希格斯质量 $m_h \approx 125$吉电子伏特 [6], , 这一思想的一种可行实现方式是首先通过Coleman-Weinberg机制触发隐藏扇区中的共形对称性破缺，然后通过希格斯门户相互作用将其部分传递到标准模型电弱（EW）扇区 [7–13]。

除了粒子物理学方面的动机外，CC理论也为宇宙学中的难题提供了解，例如暗物质（DM）。暗物质贡献了宇宙总能量的 $\sim$ 26% [14]。在这一框架下，一个颇具吸引力的最简暗物质情景是规范化隐藏扇区，其中新的规范玻色子发挥双重作用：它为暗标量产生 CW 势，使共形对称性和规范对称性破缺，同时自身也作为矢量暗物质候选粒子。此前的研究探讨了这一情景在 $U(1)_X$ 群 [15–18] 以及暗标量处于基本表示的 $SU(2)_X$ 群中的实现 [18–22]。

在本研究中，我们探讨了共形补偿框架下的 $SU(2)_X$ 理论中的暗物质情景，其中暗标量 ϕ 处于伴随表示。暗规范群的非阿贝尔性质阻止其与标准模型超荷$U(1)_Y$发生任何动能混合，从而确保矢量暗物质候选粒子的稳定性。此外，三重态 ϕ 会引发对称性破缺模式 $SU(2)_X \to U(1)_X$，而这一剩余未破缺群保证了矢量暗物质的绝对稳定性。这不同于暗标量为双重态的情景；在那些模型中，$SU(2)_X$ 会完全破缺，非重整化算符则可能介导暗物质衰变为标准模型粒子 [23]。三重态情景的另一特点是存在一种拓扑孤子，即 't Hooft-Polyakov 磁单极子 [24, 25], , 它提供了另一种暗物质候选粒子。

非共形理论中的暗物质 $SU(2)_X$ 已得到广泛研究，其中暗标量处于基本表示 [23,26–28], 伴随表示 [29–34], 或更高维表示 [35–37]。在这些模型中，树级质量参数触发 $SU(2)_X$和电弱对称性破缺，宇宙演化通常遵循标准的绝热热史，从而导致弱相互作用大质量粒子（WIMP）暗物质冻结。本文中的共形补偿框架在以下两个关键方面有所不同。

首先，CC理论中的对称性破缺由辐射修正驱动，因此形成自由参数更少、预测性更强的情景。其次，正如 Witten 最初提出的 [38]并且目前正受到积极研究 [39–51], , CC理论通常具有超冷的一级相变（FOPT），这可能显著影响宇宙学历史以及暗物质的形成 [19, 20, 52–57]或原初黑洞的形成 [58–64], , 并影响重子不对称性的产生 [65–67]。

在这项工作中，我们在含有三重态标量的 CC $SU(2)_X$ 模型中识别出三种不同的暗物质情景：(i) 暗规范玻色子 X 通过传统的冻结机制成为弱相互作用大质量粒子；(ii) 过冷暗物质，其中极度超冷一级相变导致稀释，并在相变 [19, 20, 54, 55]后非热产生 X；(iii) 由泡核化动力学产生的磁单极子暗物质。对于每种情景，我们都确定了能够解释全部暗物质遗迹丰度的参数空间，并探讨其唯象特征。

本文结构如下。第二节II介绍模型拉格朗日量并推导粒子谱。第三节III随后阐述该模型独特的宇宙热史，这使 CC 理论有别于非共形模型。三种暗物质情景将在第四节 IV中详细介绍，而暗物质参数空间及相应的唯象学分析将在第五节 V中呈现。我们将在第六节 VI作总结。

II. 模型

隐藏扇区在暗 $SU(2)_X$规范群下进行规范化，而$X^a_\mu = (X^1_\mu, X^2_\mu, X^3_\mu)$是相应的规范场。我们引入实标量 $\phi_a = (G_1, G_2, s)^T$，它在 $SU(2)_X$ 下为三重态，在标准模型规范群$SU(2)_L \times U(1)_Y$下为单态。拉格朗日量为

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} X^a_{\mu\nu} X^{\mu\nu}_a + \frac{1}{2} D_\mu \phi^a D^\mu \phi^a - V_0(\phi, H)\,, \quad (1)$$

* kpxie@buaa.edu.cn
† chzhan@buaa.edu.cn

其中，暗协变导数为

$$(D_\mu\phi)_a = \partial_\mu\phi_a + g_X\epsilon^{abc}X^b_\mu\phi_c\,, \tag{2}$$

其中 g_X 为暗规范耦合，场强张量为

$$X^a_{\mu\nu} = \partial_\mu X^a_\nu - \partial_\nu X^a_\mu + g_X\epsilon^{abc}X^b_\mu X^c_\nu\,, \tag{3}$$

其中 ϵ^{abc} 是在约定 $\epsilon^{123}=1$下的三维列维-奇维塔张量。

ϕ与标准模型希格斯双重态 $H=\left(G^+,\ (h+iG^0)/\sqrt{2}\right)^T$ 的树级联合势为

$$V(H,\phi) = \lambda_h|H|^4 + \frac{\lambda_s}{4}\left(\phi^T\phi\right)^2 + \frac{\lambda_{hs}}{2}|H|^2\left(\phi^T\phi\right)\,, \tag{4}$$

其中仅包含无量纲参数。因此，在这一阶，所有对称性（包括共形不变性） $SU(2)_X$和$SU(2)_L\times U(1)_Y$均得以保持。然而，辐射修正会改变这一图景。在幺正规范下，$H\to(0,\ h/\sqrt{2})^T$和 $\phi\to(0,\ 0,\ s)^T$，并假设 $SU(2)_X$ 尺度 $\langle s\rangle = w$ 远高于电弱尺度 $\langle h\rangle = v = 246$ 吉电子伏特，我们可以采用序贯对称性破缺近似 [68]。在此极限下，一圈势为

$$V_1(h,s) = \frac{3g_X^4}{16\pi^2}s^4\left(\log\frac{s}{w_0}-\frac{1}{4}\right)+\frac{\lambda_{hs}}{4}h^2s^2+\frac{\lambda_h}{4}h^4\,. \tag{5}$$

沿着 s方向的对数势由X^a_μ 通过Coleman-Weinberg机制产生，得到真空期望值（VEV） $w\approx w_0$。这打破了共形对称性，同时也使 $SU(2)_X$破缺至 $U(1)_X$，从而赋予 $X_\mu/X^\dagger_\mu = (X^1_\mu \pm iX^2_\mu)/\sqrt{2}$质量$m_X = g_X w$，而 X^3_μ 仍保持无质量，称为暗光子 A'_μ。注意，$X_\mu/X^\dagger_\mu$ 在 $U(1)_X$ 下带有 ∓1 电荷，但在标准模型规范群下为中性。物理标量 s 也获得了质量 $m_s\approx\sqrt{3g_X^2}w/(2\pi)$。在 $SU(2)_X$破缺后，负门户耦合 $\lambda_{hs}\approx -m_h^2/w^2$ 会为希格斯场诱导出负质量平方项 $-m_h^2h^2/4$，从而触发电弱对称性破缺。

门户耦合 λ_{hs} 还会导致物理标量玻色子 s 和 h之间发生混合，其描述式为

$$\begin{pmatrix}h\\ s\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{eigenstates}]{\text{to mass}} U\begin{pmatrix}h\\ s\end{pmatrix}\,,\quad U=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\,, \tag{6}$$

其中 $|\theta|<\pi/4$是由公式（5）中的势完全确定的混合角 [50]。给定实测的希格斯真空期望值 v 和质量 m_h，我们的模型仅有两个自由参数，我们将其选为质量本征值m_X 和 m_s，它们与暗物质唯象学密切相关。所有其他参数，例如 g_X、w（或 w_0）以及 θ，随后都可以通过解析方法推导得到。按照参考文献 [50], 中概述的步骤，我们得到

$$w = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi m_h m_s}\sqrt{\mathcal{D}\pm\sqrt{\mathcal{D}^2-36m_h^2m_s^2m_X^8}}\,. \tag{7}$$

对于 $m_s\lesssim m_h$，其中 $\mathcal{D}=3m_X^4\left(m_h^2+m_s^2\right)-4\pi^2m_h^2m_s^2v^2$。仅当满足以下条件时，$w$ 才存在物理解

$$m_X > \sqrt{\frac{2\pi m_h m_s v}{\sqrt{3}|m_s-m_h|}}\,, \tag{8}$$

这表示（m_X，m_s）参数空间中的一个隐式一致性条件。一旦确定了 w，便可推导出 $g_X = m_X/w$，并可通过以下关系求得 θ

$$w = \frac{m_h^2\cot\theta + m_s^2\tan\theta}{|m_h^2-m_s^2|}v\,. \tag{9}$$

这可简化为 正切$\theta\approx(v/w)m_h^2/(m_h^2-m_s^2)$ 当 $w\gg v$ [9] 时。关于此参数化的更多细节见附录 A。

对称性破缺后，将式（1）中的拉格朗日量展开，可得物理粒子之间的相互作用。三线性耦合为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 \supset\ & \frac{2m_X^2}{w}sX^\dagger_\mu X^\mu + ig_X(X^\dagger_{\mu\nu}X^\mu - X_{\mu\nu}X^{\dagger\mu})A'^\nu\\ & + ig_X\partial^\mu A'^\nu(X^\dagger_\mu X_\nu - X_\mu X^\dagger_\nu)\,,\end{aligned} \tag{10}$$

四次耦合为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 \supset\ & g_X^2s^2X^\dagger_\mu X^\mu + g_X^2\left(X^{\dagger\mu}X^\nu A'_\mu A'_\nu - X^\dagger_\mu X^\mu A'_\nu A'^\nu\right)\\ & + \frac{g_X^2}{2}\left(X^\dagger_\mu X_\nu X^{\dagger\mu}X^\nu - X^\dagger_\mu X^\mu X^\dagger_\nu X^\nu\right)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

标量玻色子 s 还通过混合角与标准模型费米子和规范玻色子耦合 θ，反之，希格斯玻色子 h通过相同的混合与 X 耦合。 h与 s 之间的顶点与暗物质动力学关系不大，因此列于附录A。

在树级， s 不与暗光子耦合，因为它在 $U(1)_X$ 下为电中性；然而，涉及带电 X-玻色子的圈修正会生成五维算符

$$\mathcal{L}_{sA'A'}\approx\frac{7g_X^3}{32\pi^2m_X}sF'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}\,, \tag{12}$$

通过 $F'_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu$，从而诱导出 $sA'A'$耦合。这与标准模型中的 W圈诱导的希格斯-光子耦合 $hF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 类似。

III. 热历史

在早期宇宙中，等离子体会使标量势产生温度依赖。这通常会导致高温下的对称性恢复以及较低温度下的对称性破缺，从而驱动宇宙相变 [69]。CC理论的一个显著特征是，它们通常会导致一阶相变。

A. 演化模式的分类

由于 $|\lambda_{hs}|$很小，暗扇区和标准模型扇区的热修正可以分别处理。因此，有限温度有效势为

$$V_T(h,s,T) = V_1(h,s) + V_X^T(s,T) + V_h^T(h,T)\,. \quad (13)$$

完整表达式 $V_T(h,\ s,\ T)$ 由标准有限温量子场论给出，附录 B中列出了该表达式；这里，为作说明，我们在原点附近展开热势$(h,\ s)=(0,\ 0)$，得到

$$\text{Eq. (13)} \approx V_1(h,s) + \frac{g_X^2 T^2}{4}\left(1-\frac{g_X}{\pi}\right)s^2 + \frac{c_h T^2}{2}h^2\,, \quad (14)$$

其中 $c_h = (3g^2+g'^2)/16 + y_t^2/4 + \lambda_h/2 \approx 0.4$。共形补偿势 $V_1(h,\ s)$ 在原点处是平坦的：一阶和二阶导数均为零。因此，T^2 项总是在 $(0,\ 0)$ 处形成局部极小值，宇宙在 $T \gg w$ 时停留于此。随着 T 降至临界温度 T_c （通常为 $\lesssim w$），在 h、$s \neq 0$ 处出现一个全局极小值（真空），最终与零温真空期望值（$v,\ w$）重合。然而，由于原点仍是局部极小值，无法平滑跃迁至真空。相反，宇宙必须通过不连续的隧穿跃迁至真空，从而发生一级相变。

宇宙演化主要由高能标扇区的一级相变动力学支配 [42]。因此，我们重点关注 $O(3)$对称反弹解作用量 S_3/T，它由 s方向的热势推导得出

$$V_T(s,T) = V_1(0,s) + V_X^T(s,T)\,, \quad (15)$$

它决定了 $s=0$ 到$s\neq 0$的真空隧穿率（单位体积）为 [70]

$$\Gamma(T) \sim T^4\left(\frac{S_3}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-S_3/T}\,. \quad (16)$$

这会导致含有真空的泡核形成；随着T减小，假真空的体积分数 $F(T)$ $e^{-I(T)}$ T [71, 72] 也随之降低，其中

$$I(T) = \frac{4\pi}{3}\int_T^{T_c}\frac{\Gamma(T')\mathrm{d}T'}{T'^4 H(T')}\left(\int_T^{T'}\frac{v_w \mathrm{d}T''}{H(T'')}\right)^3\,, \quad (17)$$

其中 $H(T)$ 是由第一弗里德曼方程确定的哈勃常数，而 v_w 是泡壁膨胀速度。当 $F(T)$ 降至 0.71 时，真空泡能够形成一个无限连通簇，此时称为渗流 [73]，，并将对应温度 T_* 作为一级相变温度。对于较小的 g_X，作用量按 $S_3/T \propto g_X^{-3}$ [42]的规律变化，导致隧穿率受到极大抑制，进而产生超冷跃迁，其中 $T_* \ll w$。在极端情况下，如果在 $T_{\rm QCD} \approx 85$兆电子伏特之前无法发生渗流，QCD相变将显著改变式（15）的结构。由此产生的宇宙学历史分为两种主要模式，包含文献 [50]中分类的四种不同类型。

如果 $F(T)$ 在 $T_* > T_{\rm QCD}$ 时达到 0.71，演化将遵循**正常模式**。高能标 $SU(2)_X$ 和共形一级相变首先在 T_*发生，随后影响电弱相变。根据 T_* 与电弱特征温度 $T_{\rm ew} \equiv m_h/\sqrt{2c_h} \approx 140$吉电子伏特之间的关系，这种模式还可进一步分类：N1型（$T_* > T_{\rm ew}$），$SU(2)_X$ 在 T_*通过一级相变发生破缺，而电弱对称性则在 $T_{\rm ew}$附近通过平滑交叉发生破缺；N2型（$T_* < T_{\rm ew}$），联合的 $SU(2)_X$-电弱一级相变发生于 T_*。

如果 $\Gamma(T)$受到充分抑制，使得 $F(T) > 0.71$持续到 $T_{\rm QCD}$，演化便进入**反转模式**。宇宙在对称相(0,0)中保持到 $T_{\rm QCD}$，随后六味无质量夸克 [74–76]触发一级 QCD禁闭相变。通过顶夸克凝聚 [38, 42]，，这会诱导出 $h = v_{\rm QCD} \approx 100$ MeV的希格斯真空期望值，并沿 s 方向重塑势，具体通过

$$\delta V_{\rm QCD}(s,T) = \frac{\lambda_{hs}}{4}h^2 s^2\Big|_{h\to v_{\rm QCD}} \approx -\frac{m_h^2 v_{\rm QCD}^2}{4w^2}s^2\,, \quad (18)$$

在式（15）中加入热势 $V_T(s,T)$。这一针对 s 的负质量平方项会降低势垒，甚至使由 $T^2 s^2$ 项形成的势垒消失，从而定性地改变隧穿行为。后续动力学取决于 $T_{\rm QCD}$ 与使势垒消失的滚落温度 $T_{\rm roll} \equiv m_h v_{\rm QCD}/(g_X w\sqrt{1-g_X/\pi})$ 的先后顺序：I1型（$T_{\rm QCD} > T_{\rm roll}$）中，QCD一级相变之后，会在 $T_* \approx T_{\rm roll}$ 发生一次 $SU(2)_X$ 一级相变，进而驱动希格斯场从 $v_{\rm QCD}$ 演化到其最终真空期望值 v；[1] I2型（$T_{\rm QCD} < T_{\rm roll}$）中，QCD一级相变会瞬间触发联合的 $SU(2)_X$-电弱一级相变，且需要对 QCD相变动力学进行建模 [49]。

B. m_X 与 m_s 平面中的相变区域

利用附录B中列出的完整单圈热有效势，我们计算 CC $SU(2)_X$模型中的一级相变动力学，并根据其宇宙学演化类型对(m_X, m_s)参数空间中的每个点进行分类。所有四种演化历史均涉及一次 $SU(2)_X$ 一级相变。我们用两个标准参数刻画该相变：潜热与辐射能量密度之比

$$\alpha = \frac{1}{\pi^2 g_* T_*^4/30}\left(\Delta V_T - \frac{T}{4}\frac{\mathrm{d}\Delta V_T}{\mathrm{d}T}\right)\Big|_{T_*}\,, \quad (19)$$

其中，ΔV_T 是真空与假真空之间为正的势能差，g_* 是能量的有效自由度数；而相对于相变持续时间的哈勃时间为，

$$\frac{\beta}{H} = T\,\frac{\mathrm{d}(S_3/T)}{\mathrm{d}T}\Big|_{T_*}\,. \quad (20)$$

[1] 格点模拟表明，即使当 T 非常接近 $T_{\rm roll}$ 且势垒足够低时，该相变仍以一级相变的方式进行 [77]。

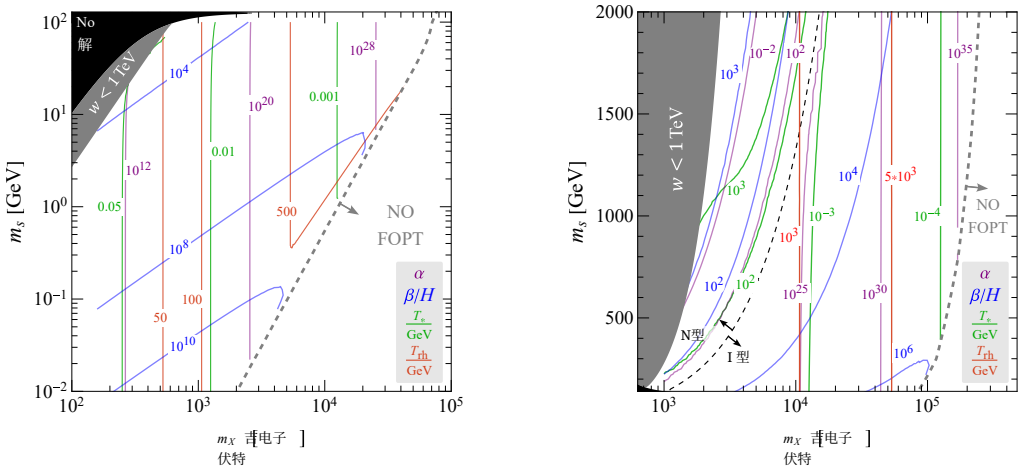


图1. $m_s < m_h$ （左）和 $m_s > m_h$ （右）的一级相变特征参数 α （紫色）、 β/H （蓝色）、 T_* （绿色）和 $T_{\rm rh}$ （红色）的等值线。黑色和灰色阴影区域分别表示非物理区域和 $w < 1$ 太电子伏特区域，而灰色虚线将一级相变区域与非一级相变区域分开。在右图中，黑色虚线是不同热历史模式的边界。

将真空能量密度表示为特征温度尺度较为方便， T_Λ，其定义为$\pi^2 g_* T_\Lambda^4/30 = \Delta V_T$。一级相变期间释放的真空能量会使宇宙从 T_* 加热至 $T_{\rm rh}$ [19]，

$$T_{\rm rh} = T_\Lambda \times \min\left(1, \frac{\Gamma_{\rm eff}}{H(T_*)}\right)^{1/2}, \tag{21}$$

其中 $\Gamma_{\rm eff} = \Gamma_h \sin^2\theta + \Gamma_s \cos^2\theta$， Γ_h 和 Γ_s 分别为 h 和 s 玻色子的衰变宽度。在深度过冷区间（$\alpha \gg 1$）中， $T_\Lambda \approx (1+\alpha)^{1/4} T_*$。

一级相变的特征参数如图1所示，其中左图和右图分别对应 $m_s < m_h$ 和$m_s > m_h$。灰色阴影区域表示 $w < 1$太电子伏特，此时连续对称性破缺假设不成立；黑色区域则不满足方程（8），因此 w不存在物理解。

在左图中，只观察到 Type-I1演化。这种情形的特征是极度过冷且持续时间极短的一级相变。具体而言，参数通常处于以下范围： $T_* = \mathcal{O}(1-100)$ 毫电子伏特、$T_{\rm rh} = \mathcal{O}(10^2)$ 吉电子伏特以及 $\beta/H = \mathcal{O}(10^4 - 10^{10})$。值得注意的是， α 和 T_* 的等高线几乎与m_s 轴平行。这是因为势能差 ΔV_T 和一级相变温度 T_* （Type-I1 中的 $\approx T_{\rm roll}$ ）均由 $m_X = g_X w$主导，而对 m_s基本不敏感。对于 $T_{\rm rh}$，在瞬时再加热极限下，温度按 m_X标度变化。这一趋势源于对 α （或等价地，对 ΔV_T）的显著敏感性。 $T_{\rm rh} = 500$ 吉电子伏特等高线处出现的拐点标志着系统进入缓慢再加热区域，即 $\Gamma_{\rm eff} < H(T_*)$。 β/H 的等高线几乎与耦合 g_X的等高线平行，例如， $\beta/H = 10^4$ (10^8)与 $g_X = 10^{-1}$ (10^{-3})大致重合，但灰色虚线附近有一些拐点。附录 C 对这种排列关系作了详细解释。

至于图 1 的右图，N 型和 I-I1 型演化路径均有可能，二者由黑色虚线分隔。在 N 型区域，一级相变发生在相对较高的温度下， $T_* = \mathcal{O}(10^2 - 10^3)$ 吉电子伏特，并伴有轻度过冷。相反，在黑色虚线右侧，我们重新得到 I 型 I1 模式，并发生极度超冷的一级相变。在此处， T_* 显著降至 $\mathcal{O}(0.1-100)$ 兆电子伏特，而 β/H 则达到 $\mathcal{O}(10^4 - 10^6)$。在此区域内， α 和T_* 主要由 m_X决定，因此它们的等值线几乎与 m_s 轴平行。

在两个面板中，灰色虚线右侧的区域均不存在一级相变。在这些区域中，随着温度降至 $T_{\rm roll}$，始终不会发生渗流，这表明相变实际上是二级相变或交叉。严格来说，这种现象源于小g_X 极限下的两种效应。首先，当 $T \to T_{\rm roll}$时，作用量 $S_3/T \sim g_X^{-3}(1 - T_{\rm roll}/T)^{3/2}$，这使得 $\Gamma(T) \to 0$ ，这是由式（16）中的前因子导致的。我们已确认，即使在此极限下， $O(4)$对称作用量的贡献仍可忽略不计。其次，相变持续时间变得极短， $\beta/H \propto g_X^{-2}$ ，没有足够的时间让泡成核并发生渗流。不过，需要注意的是，这一结论基于单圈有效势和半经典隧穿率。如果对有效势的高阶修正 [78–80] 以及隧穿率的泛函行列式 [81–83]进行严格计算，情况可能会有所不同。

IV. 三种暗物质情景

基于上述热历史，CC $SU(2)_X$ 模型中存在三种暗物质情景。带电$X^\pm$ 玻色子可以构成粒子暗物质，其实现方式取决于它们在一级相变之后的热化情况：既可以通过WIMP冻结实现，也可以成为过冷暗物质。此外，三重态$SU(2)_X$ 模型中存在一种磁单极子暗物质候选粒子。我们考察

依次讨论各个情形。

A. 粒子暗物质：弱相互作用大质量粒子还是超冷却

在 $SU(2)_X$ 一级相变之前，规范玻色子 $X^\pm$ 和A'均为无质量粒子，在热浴中的数密度 $\sim T^3$很高。对称相中 $X^\pm$ 的平衡丰度可由无质量玻色-爱因斯坦分布得到，即:

$$Y_{\rm eq}^{\mathfrak{s}} \equiv \frac{3\zeta_3 T^3/\pi^2}{2\pi^2 g_{*s} T^3/45} = \frac{135\zeta_3}{2\pi^4 g_{*s}}, \tag{22}$$

其中 $\zeta_3 \approx 1.202$， g_{*s} 是熵的有效自由度数。注意，在公式（ $X^\pm$ (X^+ 或 X^-）中，22只计入了

在 $SU(2)_X$ 一级相变期间，带电玻色子 $X^\pm$ 在泡壁内获得质量 $m_X^* = g_X w_*$ ，其中 w_* 是 s在 T_*处的真空值。在中等强度的一级相变中，若 $m_X^* \gg T_*$，大多数 $X^\pm$ 玻色子因质量间隙 [84–86]所导致的排斥力，缺乏足够的动能穿透泡壁。然而，在超冷一级相变中，泡壁速度 $v_w \approx 1$，从而产生巨大的洛伦兹因子 $\gamma_w =(1-v_w^2)^{-1/2} \gg 1$。在泡壁参考系中，入射粒子的能量被提升至 $\sim \gamma_w T_* \gg m_X^*$，使得它们全部都能进入泡壁 [65–67]。尽管所有粒子都穿透了泡壁，但 $X^\pm$ 的最终丰度会因一级相变后再加热期间的熵释放而被稀释。再加热后， X^+ 或X^- 粒子的丰度为 [19]

$$Y_{\rm rh} = Y_{\rm eq}^{\mathfrak{s}} \left(\frac{T_{\rm rh}}{T_\Lambda}\right)\left(\frac{T_*}{T_\Lambda}\right)^3, \tag{23}$$

它作为后续暗物质演化的初始条件。对于我们所考虑的超冷跃迁， $Y_{\rm rh}$ 通常受到极大抑制，可以忽略不计，而 $w_* \approx w$ 则是相当准确的近似。

一级相变之后，标量场围绕真空发生相干振荡，并衰变为标准模型的轻粒子，例如 e^+e^-、 $\nu\bar{\nu}$或 $b\bar{b}$，从而产生热等离子体，随后宇宙进入辐射主导时期。在我们感兴趣的参数空间中， s 可以通过与标准模型粒子的相互作用达到热平衡。随后， $X^\pm$ 玻色子可以通过 s 或标准模型粒子的湮灭产生。对于快速再加热， $\Gamma_{\rm eff} > H_*$， $X^\pm$ 的演化由玻尔兹曼方程描述

$$\frac{{\rm d}Y}{{\rm d}z} = \sqrt{\frac{\pi g_{*s}^2}{45 g_*}} \frac{M_{\rm Pl} m_X}{z^2} \langle\sigma v_{\rm rel}\rangle \left[(Y_{\rm eq}^{\mathfrak{b}})^2 - Y^2\right], \tag{24}$$

其中 $M_{\rm Pl} = 1.22\times10^{19}$ 吉电子伏特是普朗克尺度， Y表示一级相变后 X^+ 或 X^- 的产额（即数密度与熵密度之比），

$$Y_{\rm eq}^{\mathfrak{b}} \equiv \frac{3m_X^2 T K_2(m_X/T)/(2\pi^2)}{2\pi^2 g_{*s} T^3/45} = \frac{135 z^2 K_2(z)}{4\pi^4 g_{*s}} \tag{25}$$

是 $SU(2)_X$破缺相中的平衡产额，其中$K_2(z)$ 是第二类修正贝塞尔函数， $z \equiv m_X/T$，而 $\langle\sigma v_{\rm rel}\rangle$是热平均湮灭截面，具体细节见附录D。对 $\langle\sigma v_{\rm rel}\rangle$有贡献的主要湮灭道为

$$X^+X^- \to ss; \quad X^+X^- \to W^+W^-/ZZ/t\bar{t}, \tag{26}$$

湮灭至标准模型末态的过程通过非壳层h 或 s 玻色子进行。

式（24）所描述的演化始于 $z_{\rm rh} \equiv m_X/T_{\rm rh}$，其初始条件为 $Y(z_{\rm rh}) = Y_{\rm rh}$。最终的遗迹丰度由以下两者之间的关系决定： $X^\pm$ 湮灭率

$$\Gamma_{\rm ann} \equiv \left(\frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T_{\rm rh}^3\right) Y_{\rm eq}^{\mathfrak{b}} \langle\sigma v_{\rm rel}\rangle\Big|_{T_{\rm rh}} \tag{27}$$

以及再加热温度下的哈勃参数 $H_{\rm rh} \equiv H(T_{\rm rh})$。如果 $\Gamma_{\rm ann} > H_{\rm rh}$， $X^\pm$ 玻色子会迅速达到热平衡，随后经历常规的热冻结。这便产生了熟悉的 WIMP奇迹 [87]

$$\Omega_{\rm fo}h^2 \approx 2\times\frac{2.55\times10^{-10}\ {\rm GeV}^{-2}}{\langle\sigma v_{\rm rel}\rangle}. \tag{28}$$

相反，如果 $\Gamma_{\rm ann} < H_{\rm rh}$， $X^\pm$ 玻色子将无法达到热平衡。它们的丰度由冻入机制决定，其渐近产额为 [54]

$$Y_\infty \approx Y_{\rm rh} + \frac{135\sqrt{5} M_{\rm Pl} m_X \langle\sigma v_{\rm rel}\rangle}{128\pi^{13/2} g_{*s}\sqrt{g_*}} (1+2z_{\rm rh}) e^{-2z_{\rm rh}}, \tag{29}$$

相应的遗迹密度为

$$\Omega_{\rm sc}h^2 = 2Y_\infty s_0 m_X \frac{8\pi}{3M_{\rm Pl}^2}\left(\frac{h}{H_0}\right)^2, \tag{30}$$

其中 $s_0 \approx 2891$ 厘米$^{-3}$ 是当前的熵密度 [88]以及 $H_0/h = 100$ 千米/(秒·兆秒差距)。这种产生机制称为过冷暗物质 [19, 20, 54, 55]。[2] 在这种情形下，通常有 $z_{\rm rh} \gtrsim 20$，表达式可简化为便于使用的近似形式

$$\Omega_{\rm sc}h^2 \approx \left(\frac{m_X}{\rm TeV}\right)^2 \left(\frac{z_{\rm rh}}{23}\right) \frac{e^{-2(z_{\rm rh}-23)}\langle\sigma v_{\rm rel}\rangle}{2.43\times10^{-10}\ {\rm GeV}^{-2}}. \tag{31}$$

这凸显了过冷暗物质与WIMP冻结之间的关键区别：遗迹密度正比于 $\langle\sigma v_{\rm rel}\rangle$，且受到来自 $m_X/T_{\rm rh}$的指数玻尔兹曼抑制。需要指出的是，式（28）和式（31）仅用于说明；在我们的分析中，遗迹丰度通过数值求解式（24）中的完整玻尔兹曼方程得到。

[2] 对于较低的暴胀再加热温度，也可能存在类似的机制 [89, 90]。

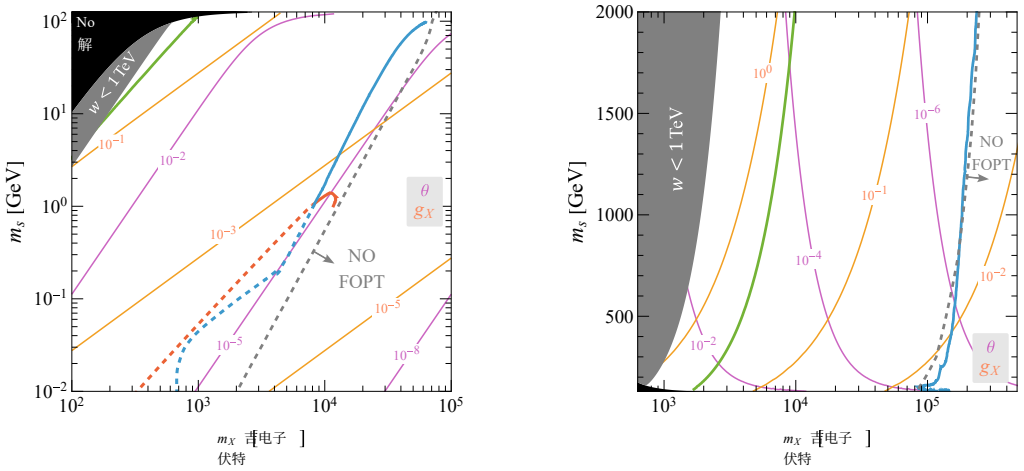


图 2. $(m_X,\ m_s)$ 平面中有效的暗物质情景，其中 $m_s < m_h$ （左）和 $m_s > m_h$ （右）。粗体彩色曲线表示具有正确暗物质遗迹丰度的参数空间：弱相互作用大质量粒子（绿色）、过冷暗物质（蓝色）和磁单极子暗物质（红色，仅左图）。 g_X 和 θ 的等高线分别以橙色和洋红色表示。其他所有约定均遵循图 1。

我们讨论当今可能存在的暗辐射背景。一级相变后，A' 的产额因熵产生而被稀释至可忽略不计，且 A'无法重新热化。这是因为再加热后的等离子体仅包含标准模型粒子和 s 玻色子：标准模型粒子不会直接与 A'耦合，而圈图诱导的 $sA'A'$ 耦合受到较大的$SU(2)_X$ 破缺尺度抑制，不足以使 A'热化。因此， A' 的演化通过未受抑制的 X^+X^-A' 顶点与 $X^{\pm}$玻色子的演化相关联。在WIMP冻结情景中， $X^{\pm}$ 会热化，并通过 $X^+X^- \to A'A'$再现暗光子热浴。相比之下，在过冷暗物质情景中， $X^{\pm}$ 始终无法达到平衡，相变后也不会重新形成显著的暗光子热浴。

B. 拓扑孤子暗物质：磁单极子

三重态 $SU(2)_X$ 模型支持一种称为 't Hooft-Polyakov磁单极子的拓扑孤子 [24, 25]。对于 $m_X \gtrsim m_s$，磁单极子的半径为 $R_{\rm mp} \approx m_X^{-1}$ ，质量为 $M_{\rm mp} \approx 4\pi w/g_X$ [91]。这些磁单极子通过Kibble-Zurek机制在早期宇宙中形成，此时 $SU(2)_X \to U(1)_X$对称性破缺发生 [92,93]。在我们的CC模型中，这种破缺由一级相变驱动。因此，形成后磁单极子的数密度可根据 T_*处真空泡的密度进行估算，并参数化为 [94, 95]

$$n^*_{\rm mp} = p n^*_b\,, \tag{32}$$

其中 $p \sim 10^{-1}$，且 $n^*_b = \beta^3/(8\pi v_w^3) \approx 0.04\beta^3/v_w^3$ 为泡数密度。

产生后，磁单极子和反磁单极子可能发生湮灭，其演化通常由一组玻尔兹曼方程描述 [96]。然而，如果不存在一级相变后形成的暗光子热浴，湮灭过程就会受到强烈抑制，磁单极子只会自由传播，而不会发生显著相互作用 [91]。在这种情况下，它们的数密度仅因再加热期间的熵产生而被稀释，此后其演化与冷暗物质相同。因此，当前的遗迹丰度为

$$\Omega_{\rm mp}h^2 = \frac{n^*_{\rm mp}}{s_*}\frac{T_{\rm rh}}{T_\Lambda}\left(\frac{T_*}{T_\Lambda}\right)^3 s_0 M_{\rm mp}\frac{8\pi}{3M_{\rm Pl}^2}\left(\frac{h}{H_0}\right)^2\,, \tag{33}$$

其中 $s_* = 2\pi^2 g_{*s}T_*^3/45$ 为一级相变时的熵密度。

V. 唯象学

结合第III 与第IV节中讨论的宇宙学历史与暗物质机制，我们现在确定本模型中可行的暗物质参数空间。我们要求每个暗物质候选粒子都能再现观测到的遗迹丰度$\Omega_{\rm DM}h^2 \approx 0.12$，并随后考察其多信使特征，范围从地面粒子物理实验（包括暗物质直接探测、大型强子对撞机搜寻以及长寿命粒子前沿）到宇宙学引力波观测台。

A. 暗物质情景全景

暗物质参数空间在$(m_X,\ m_s)$ 平面上如图2所示，其中对应于正确遗迹丰度的曲线针对三种不同情形加以突出显示：弱相互作用大质量粒子（绿色）、过冷暗物质（蓝色）和磁单极子暗物质（红色，仅在 $m_s < m_h$ 区域）。在弱相互作用大质量粒子区间，一级相变后的再加热温度满足 $z_{\rm rh} \lesssim 20$，使得 $X^{\pm}$ 玻色子能够与等离子体有效热化。其最终丰度随后由标准冻结

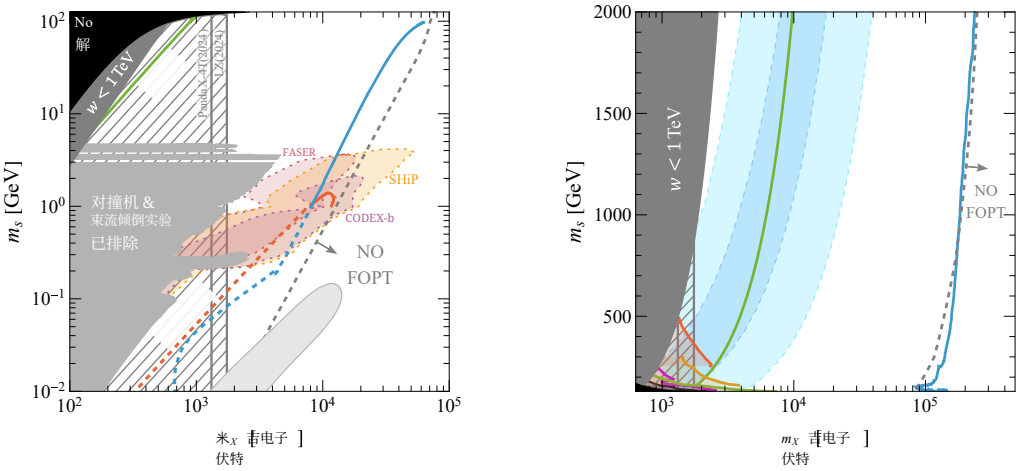


图 3. （m_X， m_s）平面中的实验约束与预期灵敏度，适用于 $m_s < m_h$（左）和 $m_s > m_h$（右）。中灰色：对撞机和束流倾倒实验的排除区域；浅灰色：来自 SN1987A 的天体物理界限；灰色斜线区域：直接探测限值。彩色虚线轮廓（左）表示长寿命粒子搜寻的预期探测范围。蓝色和浅蓝色阴影区域（右）表示 LISA 和 BBO 对一级相变产生的随机引力波背景的灵敏度。靠近 $m_X \sim$ 太电子伏特的彩色区域（右）表示对撞机约束和预期灵敏度（详情见图4 ）。其他标记约定参见图1 和2。

条件决定，从而呈现出人们熟悉的对湮灭截面的反比依赖。该区域通常与电弱尺度规范耦合 $g_X \sim 10^{-1}$以及太电子伏特尺度附近的暗物质质量m_X 相关联。

过冷暗物质情景与弱相互作用大质量粒子情景有显著差异。较小的规范耦合使$X^{\pm}$ 玻色子无法重新进入热平衡，从而导致冻结产生机制。尽管较小的耦合会使 $z_{\rm rh} \sim 20$显著偏离典型情况，但该模型的特点是在瞬时再加热区间内产生 $z_{\rm rh} \sim 10$；超冷却产生的高再加热温度 $T_{\rm rh}$使得暗物质质量谱可以更重，落在一个独特区域，其中 $m_X = \mathcal{O}(10 - 10^2)$ 太电子伏特，且耦合显著降低至 $g_X = \mathcal{O}(10^{-2} - 10^{-3})$ 。弱相互作用大质量粒子与过冷暗物质曲线之间的参数空间标示了 $X^{\pm}$玻色子过量产生的区域。

在图的左图中 2 其中 $m_s < m_h$，当一级相变极其迅速时，'t Hooft-Polyakov 磁单极子可作为一种暗物质候选粒子。其丰度遵循 Kibble-Zurek 机制：更大的 β/H 表示相变更快、成核气泡密度更高，从而增强磁单极子的产生。观测到的遗迹密度沿红线达到，对应于 $\beta/H \sim 10^9$，相应的磁单极子质量为 $M_{\rm mp} \sim 10^{12}$ 吉电子伏特。在右下方，更大的 β/H 会导致磁单极子过量产生。磁单极子线与过冷暗物质线的交汇形成互斥区域；二者合计丰度超过观测上限的区域以虚线标出。不过应当注意，由式（32）给出的磁单极子丰度仅为粗略近似，红线的精确位置有待通过详细模拟加以修正。

我们的结果与参考文献 [97], 的观点相反，该文认为 $X^{\pm}$ 暗物质丰度始终高于磁单极子丰度，这排除了磁单极子作为可行暗物质候选粒子的可能性。差异源于我们模型的共形耦合特征，它产生的是对数势，而非参考文献 [97], 中的多项式形式，从而使极度超冷的一级相变成为可能，并产生足够大的 β/H。

B. 实验约束与预期灵敏度

唯象可行性总结于图3中。在左图中，当 $m_s < m_h$ 时，地面实验（包括 LHCb [98, 99], NA62 [100, 101], CHARM [102],E949 [103], LSND [104], 和 MicroBooNE [105], 对混合角 θ 在 s和 h之间的取值施加约束，形成中灰色排除区域。基于能量损失论证 [102], 得出的 SN1987A 天体物理界限 $X^{\pm}$ 进一步限制了参数空间。此外， A'玻色子之间通过无质量的 720 [106介导的长程力相互作用，可能会在天文可观测量中留下印记，例如 NGC108]–的引力势椭圆率。然而，在我们的模型中，这一约束次要，因此未在图中列出。

另一项约束来自暗物质直接探测，它为 $X^{\pm}$ 与核子 N 之间的自旋无关（SI）散射截面设定了界限。可以在有效场论框架内系统地分析这一可观测量（例如参见文献 [109]）。在我们的模型中，该相互作用由可重整化的希格斯门户耦合控制，因此得到 [110]

$$\sigma_{\rm SI} = \frac{\mu_{XN}^2}{\pi} \frac{g_X^4 \sin^2 2\theta}{4v^2} m_N^2 f_N^2 \left(\frac{1}{m_h^2} - \frac{1}{m_s^2} \right)^2 \tag{34}$$

其中 $\mu_{XN} = m_X m_N/(m_X + m_N)$是暗物质-核子系统的约化质量，而 $f_N \approx 0.3$ [111]是有效

核子耦合。当 θ 随着 w的增大而减小时，该截面对于更重的暗物质会自然受到抑制。将我们的参数空间与来自LZ [112]和PandaX-4T [113]的最新限制进行比较，得到图中所示的带斜线的灰色排除区域，其中整个弱相互作用大质量粒子情景现已被排除。

当前实验约束下，过冷暗物质和磁单极子暗物质情景仍然可行。不过，通过针对中性标量的长寿命粒子搜寻，有可能间接探测到它们 s。如图 3左图所示，这两种非弱相互作用大质量粒子情景均处于较大的w区域，其中 θ 与 s之间的 h混合角受到极大抑制。这种抑制使总衰变宽度相应地变得很小 $\Gamma_s \propto \sin^2\theta$，因此 s 寿命足够长，可由未来的长寿命粒子搜寻实验探测。图 3 中的彩色虚线轮廓表示 FASER 等实验的预期灵敏度 [114], CODEX-b [115], 和 SHiP [116]。

图3 （$m_s > m_h$）右图中，当前实验限制允许弱相互作用大质量粒子和过冷暗物质情景存在，但质量低于 ~ 2 太电子伏特的弱相互作用大质量粒子已被直接探测排除。通过一级相变产生的引力波，可有效探测弱相互作用大质量粒子区域。可探测信号落在未来空间干涉仪的灵敏度范围内，例如 LISA [117] 和 BBO [118], , 如蓝色和浅蓝色区域所示。可探测性定义为信噪比超过 50，并使用标准数值公式 [119, 120] , 积分时间为 $\mathcal{T} = 0.75 \times 4$ 年。预计天琴 [121] 和太极 [122] 也将达到相近的灵敏度。相比之下，正如文献 [50], 所强调的， $m_s < m_h$ 区域的一级相变极强但持续时间短，因此其引力波信号无法探测。

在 $m_s > m_h$ 区域内， s的即时衰变是探测弱相互作用大质量粒子情景的另一种间接手段，如图3右图所示（详细视图见图4 ）。当前界限以黑色轮廓线表示，结合了大型强子对撞机第二次运行中希格斯信号强度测量 [6] ($36.1 - 139$ fb^{-1}) 和超出标准模型 $s \to ZZ$ 搜索 [123](35.9fb^{-1}) 。将这些结果外推至高亮度大型强子对撞机（3000 fb^{-1}）后得到紫色轮廓线，可有效覆盖 $m_h \lesssim m_s \lesssim 2m_h$，但在 $m_s \sim 170$GeV附近因分支比抑制而出现明显的凹陷 [124]。要进一步深入探测参数空间，则需要未来的 10 太电子伏特 μ子对撞机（μC），在该对撞机上通过矢量玻色子融合（VBF）产生 s 可达到低至 $\theta \sim 10^{-2}$的灵敏度。探测范围因衰变道而异，这反映了 s的主要分支比： $s \to bb$ （浅绿色）和 $s \to VV$ （橙色）的覆盖范围明显宽于 $s \to hh$（红色）。关于在 μC上对这些矢量玻色子融合过程的详细唯象学分析，参见文献 [50]。

VI. 结论

本研究考察了 CC $SU(2)_X$ 规范理论中的三种暗物质情景及其唯象学，其中暗标量处于三重态表示。电弱对称性破缺由 $SU(2)_X$ 部门通过

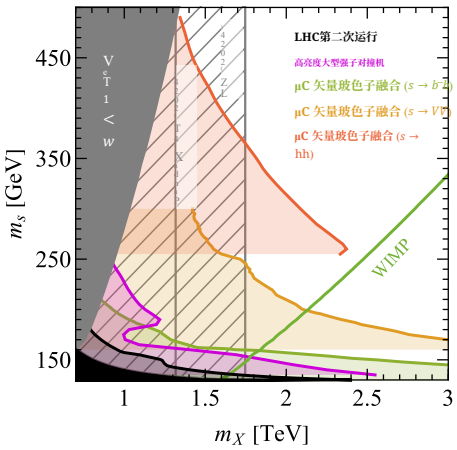


图 4. 图 3右侧面板的局部放大图。阴影区域表示对撞机约束和预期灵敏度：LHC第二次运行（半透明黑色）、高亮度大型强子对撞机外推（紫色），以及 10 太电子伏特 μ子对撞机（μC），其中 s 通过矢量玻色子融合产生，并衰变为 bb （浅绿色）、VV（橙色），以及 hh（红色）。图示约定同图3。

Coleman-Weinberg机制动态触发，从而缓解层级问题。除了传统的弱相互作用大质量粒子外，该模型还包含两种额外的暗物质候选粒子：源自 CC 理论中特有的一级相变过程的过冷暗物质，以及由标量场的伴随表示所允许的拓扑磁单极子。

CC 理论的简约性使得整个参数空间可以简洁地表示在二维平面（m_X， m_s）中，从而为暗物质唯象学提供统一视角。在轻标量区间（$m_s < m_h$），三种暗物质情景均可实现。值得注意的是，与早先的说法相反，磁单极子暗物质仍是可行候选者。尽管弱相互作用大质量粒子区域已被直接探测实验排除，过冷暗物质和磁单极子暗物质情景仍然成立，并可通过未来的长寿命粒子搜寻加以探测。在重标量区间（$m_s > m_h$），只有弱相互作用大质量粒子和过冷暗物质情景仍然存在。弱相互作用大质量粒子候选者可通过结合对撞机和引力波实验进行探测，而过冷暗物质则超出了当前及可预见未来实验的探测范围。

这项工作还可以从几个方向进一步拓展。首先，仍需探索更直接的超冷暗物质和磁单极子暗物质探测途径（而不仅是通过标量 s 获得间接灵敏度）。其次，基于标准的单圈有效势和半经典真空衰变率，我们的分析揭示了 m_X 较大时一级相变不会发生的区域。要对此区域作出明确判断，还需考虑高阶修正，并对真空隧穿率进行更精细的处理。第三，由于一级相变后再加热不可避免地会稀释所有原有遗迹，包括重子不对称性，因此必须纳入适当的重子生成机制。

致谢

我们感谢 Shao-Ping Li 提供的宝贵讨论和意见。本工作得到国家自然科学基金委员会资助，项目编号为 12305108。

附录 A：参数化方案

定义 $B = 3g_X^4/(4\pi^2)$，根据参考文献 [50],，模型参数可重新参数化为

$$\begin{aligned} \lambda_{hs} &= \frac{w(m_s^2+m_h^2)\pm\mathcal{C}}{-2w\left(v^2+w^2\right)}, \\ B &= \frac{(m_s^2+m_h^2)w\mp\mathcal{C}}{2w^3}, \\ \tan\theta &= \frac{\pm 2m_h^2 v}{\pm(m_h^2-m_s^2)w+\mathcal{C}}, \end{aligned} \tag{A1}$$

对于 $m_s \lesseqgtr m_h$，以及 $\lambda_h = -\lambda_{hs}w^2/(2v^2)$，其中 $\mathcal{C} = \sqrt{w^2(m_h^2-m_s^2)^2 - 4m_s^2m_h^2v^2}$。

由于 $w \gg v$，我们可以将场在真空附近展开，从而得到物理粒子之间的相互作用，即，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = &-\frac{m_h^2}{2v}h^3 + \frac{m_h^2(2m_h^2+m_s^2)}{2w(m_s^2-m_h^2)}h^2 s \\ &+ \frac{m_h^2 m_s^2 v(m_h^2-4m_s^2)}{2w^2(m_h^2-m_s^2)^2}hs^2 - \frac{5m_s^2}{6w}s^3, \end{aligned} \tag{A2}$$

对于三线性耦合，以及

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{m_h^2}{8v^2}h^4 + \mathcal{L}_{h^3s} + \mathcal{L}_{h^2s^2} + \mathcal{L}_{hs^3} - \frac{11m_s^2}{24w^2}s^4, \tag{A3}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{h^3s} &= -\frac{m_h^4}{2}\left[\frac{(m_s^4-2m_h^4)v}{(m_h^2-m_s^2)^3w^3} + \frac{1}{(m_h^2-m_s^2)vw}\right]h^3 s, \\ \mathcal{L}_{h^2s^2} &= \frac{m_h^2}{4w^2}\left[1 - \frac{3m_h^4}{(m_s^2-m_h^2)^2}\right]h^2 s^2, \\ \mathcal{L}_{hs^3} &= \frac{m_h^2(5m_h^4m_s^2 - 19m_h^2m_s^4 + 11m_s^6)v}{6(m_h^2-m_s^2)^3w^3}hs^3, \end{aligned} \tag{A4}$$

对于四次耦合，无论h 和 s之间的质量排序如何。

附录B：热势的完整表达式

式（13）中有限温度有效势的完整形式详述如下。暗扇区的热贡献为，

$$\begin{aligned} V_X^T(s,T) = &\frac{3T^4}{\pi^2}J_B\left(\frac{g_X^2 s^2}{T^2}\right) \\ &- \frac{g_X^3}{6\pi}T\left[\left(s^2+T^2\right)^{3/2} - s^3\right], \end{aligned} \tag{B1}$$

包括单圈热积分，以及对$SU(2)_X$ 规范玻色子纵向模式的环链重求和修正。对于标准模型扇区，热势为

$$V_h^T(h,T) = \sum \frac{n_i T^4}{2\pi^2}J_{B/F}\left(\frac{M_i^2(h)}{T^2}\right) + V_{\rm SM}^{\rm ds}(h,T), \tag{B2}$$

其中求和遍及标准模型自由度。主要贡献来自电弱规范玻色子、顶夸克和标量：

$$\begin{cases} M_W^2(h) = g^2h^2/4, & n_W = 2\times 3 = 6; \\ M_Z^2(h) = (g^2+g'^2)h^2/4, & n_Z = 3; \\ M_t^2(h) = y_t^2h^2/2, & n_t = N_c\times 4 = 12; \\ M_h^2(h) = 3\lambda_h h^2, & n_h = 1; \\ M_G^2(h) = \lambda_h h^2, & n_G = 3, \end{cases} \tag{B3}$$

其中 g 和 g' 分别是 $SU(2)_L$ 和$U(1)_Y$ 群的规范耦合。雏菊重求和项$V_{\rm dsSM}(h,T)$ 可见参考文献 [125]。这里，热积分为

$$J_{B/F}(y) = \pm\int_0^\infty {\rm d}x x^2 \log\left(1 \mp e^{-\sqrt{x^2+y}}\right), \tag{B4}$$

其中，上（下）号对应玻色子（费米子）。

附录 C：I 型中极度超冷相变动力学的解析估算

图中“无一阶相变”区域的物理起源1 以及一级相变参数的标度行为，都可以通过简单的解析方法来理解。欧几里得作用量为

$$\frac{S_3}{T} = \frac{1}{T}\int_0^\infty 4\pi r^2 {\rm d}r\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{\rm d}s_b}{{\rm d}r}\right)^2 + V_T(s_b(r),T)\right], \tag{C1}$$

其中， $s_b(r)$ 是由运动方程得到的 $O(3)$ 对称反弹解

$$\frac{{\rm d}^2 s_b}{{\rm d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{{\rm d}s_b}{{\rm d}r} = \left.\frac{{\rm d}V_T(s,T)}{{\rm d}s}\right|_{s=s_b}, \tag{C2}$$

满足以下边界条件

$$\left.\frac{{\rm d}s_b}{{\rm d}r}\right|_{r=0} = 0, \quad \lim_{r\to\infty} s_b(r) = 0. \tag{C3}$$

在极端过冷的情形下，相变发生时的温度 T_* 非常接近 $T_{\rm roll}$。在此极限下，反弹解主要由势垒的结构决定，而非真空的深度。

令 s_1 表示分隔位于 $s=0$ 处的假真空与真真空盆地的$V_T(s,T)$的局部极大值位置，并令 $V_1 \equiv V_T(s_1,\ T)$表示相应的

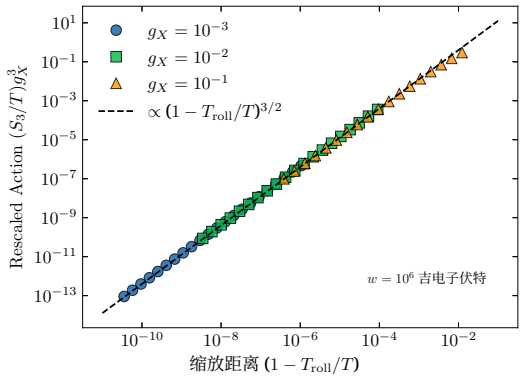


图 A1. $(S_3/T)g_X^3$ 随$(1-T_{\rm roll}/T)$的缩放。在固定 $w = 10^6$吉电子伏特时，$g_X = 10^{-1}$、10^{-2}和 10^{-3} 的数值结果坍缩到一条普适线上，证实了式（C6）的解析标度关系（虚线）。

势垒高度。我们进一步将 s_0 定义为势在势垒之后立即变为零处的场值，即对于 $s_0 > s_1$，$V_T(s_0, T) = 0$。为分析缩放行为，我们对场、势和径向坐标进行如下缩放：

$$\tilde{s} = \frac{s}{s_0}, \quad \tilde{V} = \frac{V_T(s,T)}{V_1}, \quad \tilde{r} = \sqrt{\frac{V_1}{s_0^2}}\, r\,. \tag{C4}$$

在 CC $SU(2)_X$模型中，$s_0 \sim T/g_X$由热质量（$\sim g_X T$）与 CW 势（$\sim g_X^2$）之间的竞争决定。值得注意的是，势垒高度随后标度为 $V_1 \sim T^4$，与 g_X 无关，至多相差一个整体前置因子 [42]。采用上述缩放后，热作用量因子化为：

$$\frac{S_3}{T} = \frac{4\pi}{T}\frac{s_0^3}{\sqrt{V_1}}\tilde{S}_3 \equiv \frac{\mathcal{A}}{g_X^3}\tilde{S}_3(\tilde{T})\,, \tag{C5}$$

其中 $\mathcal{A}$ 是一个系数，而 $\tilde{S}_3(\tilde{T})$ 是无量纲形状因子。在 $T_{\rm roll}$ 附近，可以通过厚壁近似计算形状因子，得到 [70]

$$\frac{S_3}{T} \propto \frac{1}{g_X^3}\left(1 - \frac{T_{\rm roll}}{T}\right)^{3/2}, \tag{C6}$$

如图A1所示。

对于 I 型演化模式下极度超冷的一级相变，相变温度 $T_* \approx T_{\rm roll}$，成核条件 $\Gamma(T_n)/H^4(T_n) = 1$可简化为

$$\left.\frac{S_3}{T}\right|_{T_n} \approx 4\log\frac{M_{\rm Pl}\, m_h\, v_{\rm QCD}}{g_X^3 w^3}\,. \tag{C7}$$

在参数空间的大部分区域，T_n 与渗流温度 T_*密切相关，因此我们可以利用成核判据提取标度行为。将式（C6）中的反弹作用量与式（C7）相等，可知$(1-T_{\rm roll}/T_n)$ $\sim$ g_X^2 g_X^{-3} 必须补偿作用量中的前因子，从而得到

$$\frac{\beta}{H} \sim \frac{1}{g_X^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(1 - \frac{T_{\rm roll}}{T_n}\right)^{3/2} \sim g_X^{-2}\,, \tag{C8}$$

这解释了 g_X 等高线的排列与图1f中观测到的情况一致。β/H 等高线在“无一级相变”边界附近出现的拐点，源于成核条件与渗流条件之间差异的增大。在这一区域，近似 $T_n \approx T_*$ 不再成立，因此上述标度分析也不再适用。

附录D：$\langle\sigma v_{\rm rel}\rangle$的定义

对于麦克斯韦-玻尔兹曼分布，过程 $ab \to cd$的热平均截面为 [126]

$$\langle\sigma_{ab\to cd} v_{\rm vel}\rangle = \frac{(8m_a^2 m_b^2 T)^{-1}}{K_2(m_a/T)K_2(m_b/T)}\int \mathrm{d}\hat{s}\,\sigma_{ab\to cd}(\hat{s})\left[1 - \frac{(m_a+m_b)^2}{\hat{s}}\right]\left[1 - \frac{(m_a-m_b)^2}{\hat{s}}\right]\hat{s}^{3/2}K_1\left(\frac{\sqrt{\hat{s}}}{T}\right), \tag{D1}$$

其中 $\sigma_{ab\to cd}(\hat{s})$ 为初态平均截面，且$\hat{s}$ 是质心能量的平方。在我们的研究中，X^+X^- 的湮灭主要反应道列于式（26）中，即 $\langle\sigma v_{\rm vel}\rangle \equiv \langle\sigma_{X^+X^-\to ss} v_{\rm vel}\rangle + \langle\sigma_{X^+X^-\to \text{标准模型标准模型}} v_{\rm vel}\rangle$。此外，我们还考虑以下过程

$$ss/sh \to hh/t\bar{t}/W^+W^-/ZZ\,; \quad sZ \to W^+W^-\,, \tag{D2}$$

以及它们的所有交叉过程，以验证 s 能否在一级相变之后与标准模型等离子体达到热平衡。

由于 $X^\pm$ 玻色子带有剩余 $U(1)_X$ 电荷，它们会受到由无质量暗光子 A' 介导的长程吸引力。这种相互作用通过索末菲增强改变非相对论湮灭截面。为纳入这一效应，我们将 $\langle\sigma v_{\rm vel}\rangle$ 乘以一个额外因子 $\mathcal{S}$ [127]

$$\mathcal{S} = \frac{\pi\alpha_X/v_{\rm dm}}{1 - e^{-\pi\alpha_X/v_{\rm dm}}}\,, \tag{D3}$$

与 $\alpha_X = g_X^2/(4\pi)$ 和 $v_{\rm dm} \approx \sqrt{6/z_\circ}$ 尽管索末菲因子会略微提高湮灭率，但由于 g_X 的值较小，在所关注的参数区域内，该因子仍接近于 1。

[1]M. E. Peskin, 《核物理B》1018, 116971 (2025), 2505.00694。[2] W. A. Bardeen，载于御岳粒子物理暑期研究所（1995）。[3] K. A. Meissner 和 H. Nicolai, 《物理快报B》660, 260 (2008), 0710.2840。[4] S. R. Coleman 和 E. J. Weinberg, 《物理评论D》7, 1888 (1973)。[5] R. Jackiw, 《物理评论D》9, 1686 (1974)。[6] G. Aad 等人（ATLAS），物理报告1116, 4 (2025), 2404.05498。[7] R. Hempfling, 《物理快报B》379, 153 (1996), hep-ph/9604278。[8] S. Iso、N. Okada 和 Y. Orikasa, 《物理快报B》676, 81 (2009), 0902.4050。[9] S. Iso、N. Okada 和 Y. Orikasa, 《物理评论D》80, 115007 (2009), 0909.0128。[10] E. J. Chun、S. Jung 和 H. M. Lee, 《物理快报B》**725**, 158 2013 [730, 357 359 2014 ( ), 勘误: Phys.Lett.B – ( )], 1304 5815 。.[11] A. Das、N. Okada 和 N. Papapietro, 《欧洲物理学杂志C》77, 122 (2017), 1509.01466。[12] S. Jung 和 K. Kawana, 《物理学进展报告》2022, 033B11 (2022), 2105.01217。[13] T. de Boer、M. Lindner 和 A. Trautner, 《物理快报B》861, 139241 2025 2407 15920 ( ), . . [14] N. Aghanim 等人（普朗克卫星）, 《天文学与天体物理学》641, A6 (2020 [652, 4 2021],), 勘误: 1807 06209 Astron.Astrophys. C ( ) . .[15] S. Yaser Ayazi 和 A. Mohamadnejad，高能物理学杂志03, 181 (2019), 1901.04168。[16]A. Mohamadnejad, 《欧洲物理学杂志C》80, 197 (2020), 1907.08899。[17] V. Baules 和 N. Okada (2025), 2508.13527。[18] M. T. Frandsen、M. Heikinheimo、M. E. Thing、K. Tuominen 和 M. Rosenlyst, 《物理评论D》108, 015033 (2023), 2301.00041。[19] T. Hambye、A. Strumia 和 D. Teresi，高能物理学杂志08, 188 (2018), 1805.01473。[20]I. Baldes 和 C. Garcia-Cely，高能物理学杂志05, 190 (2019), 1809.01198。[21] D. Borah、A. Dasgupta 和 S. K. Kang, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》12, 039 (2021), 2109.11558。[22] M. Kierkla、A. Karam 和 B. Swiezewska，高能物理学杂志03, 007 (2023), 2210.07075。[23] T. Hambye，高能物理学杂志01, 028 (2009), 0811.0172。[24] G. 't Hooft, 《核物理B》79, 276 (1974)。[25] A. M. Polyakov, 《苏联物理学实验与理论物理学快报》20, 194 (1974)。[26] N. Baouche、A. Ahriche、G. Faisel 和 S. Nasri, 《物理评论 D 》 104, 075022 (2021), 2105.14387。[27] N. Benincasa、L. Delle Rose、L. Panizzi、M. Razzaq 和 S. Urzetta, 《物理评论D》112, 095004 (2025), 2506.22248。[28] A. L. Foguel、R. Z. Funchal 和 M. Frigerio (2025), 2510.26765。[29]S. Baek、P. Ko 和 W.-I. Park, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》10, 067 (2014), 1311.1035。[30] V. V. Khoze 和 G. Ro，高能物理学杂志10, 061 (2014), 1406.2291。[31] I. Chaffey 和 P. Tanedo, 《物理评论D》101, 075005 (2020), 1907.10217。[32] T. Ghosh、H.-K. Guo、T. Han 和 H. Liu，高能物理学杂志07, 045 (2021), 2012.09758。[33] T. Nomura、H. Okada 和 S. Yun，高能物理学杂志06, 122 (2021), 2012.11377.[34] Z. Hu、C. Cai、Y.-L. Tang、Z.-H. Yu 和 H.-H. Zhang，高能物理学杂志 07，089（2021），2103.00220。[35] C.-H. Chen 和 T. Nomura, 《物理快报B》746，351（2015），1501.07413。[36] Z. Zhang、C. Cai 和 H.-H. Zhang, 《物理评论D》106，115022（2022），2209.01980。[37] C.-X. Yuan、Z. Zhang、C. Cai、Y.-L. Tang 和 H.-H. Zhang, 《物理评论D》111，015004（2025），2405.16165。[38] E. Witten, 《核物理B》177，477（1981）。[39] T. Konstandin 和 G. Servant, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》12，009（2011），1104.4791。[40] R. Jinno 和 M. Takimoto, 《物理评论D》95，015020（2017），1604.05035。[41] C.-W. Chiang 和 E. Senaha, 《物理快报B》774，489（2017），1707.06765。[42] S. Iso、P. D. Serpico 和 K. Shimada，物理评论快报119，141301 2017 1704 04955 ( )，. . [43] C. Marzo、L. Marzola 和 V. Vaskonen, 《欧洲物理学杂志C》79，601 2019 1811 11169 ( )，. . [44] L. Bian、W. Cheng、H.-K. Guo 和 Y. Zhang，中国物理C辑45，113104（2021），1907.13589。[45] J. Ellis、M. Lewicki、J. M. No 和 V. Vaskonen, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》06，024（2019），1903.09642。[46] J. Ellis、M. Lewicki 和 V. Vaskonen, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》11，020（2020），2007.15586。[47] K. Kawana, 《物理评论D》105，103515（2022），2201.00560。[48] A. Ahriche、S. Kanemura 和 M. Tanaka，高能物理学杂志01，201（2024），2308.12676。[49] L. Sagunski、P. Schicho 和 D. Schmitt, 《物理评论D》107，123512 2023 2303 02450 ( )，. . [50] W. Liu 和 K.-P. Xie, 《物理评论D》110，115001（2024），2408.03649。[51] A. Salvio（2026），2602.20246。[52] Z. Kang 和 J. Zhu, 《物理评论D》102，053011（2020），2003.02465。[53] V. V. Khoze 和 D. L. Milne, 《物理评论D》107，095012（2023），2212.04784。[54] X.-R. Wong 和 K.-P. Xie, 《物理评论D》108，055035（2023），2304.00908。[55] S. Y. Ayazi 和 M. Hosseini, 《核物理B》1020，117138（2025），2502.14526。[56] P. Athron、S. Datta 和 Z.-Y. Zhang（2025），2511.10288。[57] D. Racco 和 A. Stanzione（2025），2512.16809。[58] I. Baldes 和 M. O. Olea-Romacho，高能物理学杂志01，133（2024），2307.11639。[59] A. Salvio, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》12，046（2023），2307.04694。[60] Y. Gouttenoire, 《物理快报B》855，138800（2024），2311.13640。[61] M. Arteaga、A. Ghoshal 和 A. Strumia（2024），2409.04545。[62] I. K. Banerjee、F. Rescigno 和 A. Salvio, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》07，007（2025），2412.06889。[63] I. K. Banerjee、U. K. Dey 和 S. Khalil，高能物理学杂志12，009（2024），2406.12518。[64] Q.-H. Cao、M. Tanaka、J.-C. Wang、K.-P. Xie 和 J.-J. Zhang（2025），2505.23007。[65] I. Baldes、S. Blasi、A. Mariotti、A. Sevrin 和 K. Turbang, 《物理评论D》104，115029（2021），2106.15602。[66] P. Huang 和 K.-P. Xie，高能物理学杂志09，052（2022），2206.04691。[67] E. J. Chun、T. P. Dutka、T. H. Jung、X. Nagels 和 M. Vanvlasselaer，高能物理学杂志09，164（2023），2305.10759。

[68] L. Chataignier、T. Prokopec、M. G. Schmidt 和 B. ´Swie˙zewska，高能物理学杂志08，083（2018），1805.09292。[69] L. Dolan 和 R. Jackiw，《物理评论D》9，3320（1974）。[70] A. D. Linde，《核物理B》216，421（1983），[勘误：《核物理B》223，544（1983）]。[71] A. H. Guth 和 S. H. H. Tye，物理评论快报44，631（1980），[勘误：物理评论快报44，963（1980）]。[72] A. H. Guth 和 E. J. Weinberg，《物理评论D》23，876（1981）。[73] M. D. Rintoul 和 S. Torquato，《物理学杂志A：数学与一般》30，L585（1997）。[74] R. D. Pisarski 和 F. Wilczek，《物理评论D》29，338（1984）。[75] J. Braun 和 H. Gies，高能物理学杂志06，024（2006），hep-ph/0602226。[76] Y. Guan 和 S. Matsuzaki，高能物理学杂志09，140（2024），2405.03265。[77] T. P. Dutka、T. H. Jung 和 C. S. Shin，高能物理学杂志05，182（2025），2412.15864。[78] M. Christiansen、E. Madge、C. Puchades-Ibáñez、M. E. Ramirez-Quezada 和 P. Schwaller（2025），2511.02910。[79] J. Liu、R. Qin 和 L. Bian（2026），2601.05793。[80] R. Qin 和 L. Bian，《物理评论D》111，L051702（2025），2408.09677。[81] W.-Y. Ai、J. Alexandre 和 S. Sarkar，《物理评论D》109，045010 2024 2312 04482 ( )，. .[82] A. Ekstedt、O. Gould 和 J. Hirvonen，高能物理学杂志12，056（2023），2308.15652。[83] O. Gould、A. Kormu 和 D. J. Weir，《物理评论D》111，L051901（2025），2404.01876。[84] M. J. Baker、J. Kopp 和 A. J. Long，物理评论快报125，151102 2020 1912 02830 ( )，. .[85] D. Chway、T. H. Jung 和 C. S. Shin，《物理评论D》101，095019 2020 1912 04238 ( )，. .[86] J.-P. Hong、S. Jung 和 K.-P. Xie，《物理评论D》102，075028（2020），2008.04430。[87] G. Bertone、D. Hooper 和 J. Silk，物理报告405，279（2005），hep-ph/0404175。[88] S. Navas 等（粒子数据组），《物理评论D》110，030001 2024( )。[89] O. Lebedev、A. P. Morais、V. Oliveira 和 R. Pasechnik，高能物理学杂志04，136（2025），2410.21874。[90] G. Arcadi、D. Cabo-Almeida 和 O. Lebedev，《物理快报B》861，139268（2025），2409.02191。[91] Y. Bai、M. Korwar 和 N. Orlofsky，高能物理学杂志07，167（2020），2005.00503。[92] T. W. B. Kibble，《物理学杂志A》9，1387（1976）。[93] W. H. Zurek，《自然》317，505（1985）。[94] M. B. Einhorn 和 K. Sato，《核物理B》180，385（1981）。[95] J. Yang、R. Zhou 和 L. Bian，《物理快报B》839，137822（2023），2204.07540。[96] J. Preskill，物理评论快报43，1365（1979）。[97] F. Brümmer、G. Ferrante、T. Fischer 和 M. Frigerio（2025），2509.21924。[98] R. Aaij 等（LHCb），物理评论快报115，161802（2015），1508.04094.[99]R. Aaij 等（LHCb），《物理评论D》95，071101（2017），1612.07818.[100]E. Cortina Gil 等（NA62），高能物理学杂志 02，201（2021），2010.07644.[101]E. Cortina Gil 等（NA62），高能物理学杂志 03，058（2021），2011.11329.[102] M. W. Winkler，《物理评论D》99，015018（2019），1809.01876。[103] A. V. Artamonov 等（BNL-E949），《物理评论D》79，092004（2009），0903.0030。[104] S. Foroughi-Abari 和 A. Ritz，《物理评论D》102，035015（2020），2004.14515。[105] P. Abratenko 等（MicroBooNE），物理评论快报 127，151803 2021 2106 00568（），。[106] J. L. Feng、M. Kaplinghat、H. Tu 和 H.-B. Yu，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 07，004 （ 2009 ），0905.3039。[107] P. Agrawal、F.-Y. Cyr-Racine、L. Randall 和 J. Scholtz，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》05，022（2017），1610.04611。[108] M. Badziak、G. Grilli di Cortona、K. Harigaya 和 M. Łukawski，高能物理学杂志 10，057（2022），2202.10488。[109] J.-H. Liang、Y. Liao、X.-D. Ma 和 H.-L. Wang，《物理评论D》111，095033（2025），2501.13501。[110] S. Baek、P. Ko、W.-I. Park 和 E. Senaha，高能物理学杂志 05，036（2013），1212.2131。[111] M. Hoferichter、J. Ruiz de Elvira、B. Kubis 和 U.-G. Meißner，物理评论快报 115，092301（2015），1506.04142。[112] J. Aalbers 等（LZ），物理评论快报 135，011802（2025），2410.17036。[113] Z. Bo 等（熊猫X），物理评论快报 134，011805（2025），2408.00664。[114] A. Ariga 等（FASER），《物理评论D》99，095011（2019），1811.12522。[115] V. V. Gligorov、S. Knapen、M. Papucci 和 D. J. Robinson，《物理评论D》97，015023（2018），1708.09395。[116] C. Ahdida 等（SHiP），《欧洲物理学杂志C》81，451（2021），2011.05115。[117] P. Amaro-Seoane 等（LISA）（2017），1702.00786。[118] J. Crowder 和 N. J. Cornish，《物理评论D》72，083005（2005），gr-qc/0506015。[119] C. Caprini 等，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》04，001（2016），1512.06239。[120] C. Caprini 等，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03，024（2020），1910.13125。[121] J. Luo 等（天琴），经典与量子引力 33，035010（2016），1512.02076。[122] W.-H. Ruan、Z.-K. Guo、R.-G. Cai 和 Y.-Z. Zhang，国际现代物理杂志A 35，2050075（2020），1807.09495。[123] A. M. Sirunyan 等（CMS），高能物理学杂志 06，127（2018），[勘误：高能物理学杂志 03，128（2019）], 1804.01939。[124] A. Djouadi，物理报告 457，1（2008），hep-ph/0503172。[125] M. E. Carrington，《物理评论D》45，2933（1992）。[126] P. Gondolo 和 G. Gelmini，《核物理B》360，145（1991）。[127] N. Arkani-Hamed、D. P. Finkbeiner、T. R. Slatyer 和 N. Weiner，《物理评论D》79，015014（2009），0810.0713。