arXiv:2603.09144v1 [cs.DS] 10 Mar 2026

加权无三角形二匹配的多项式时间近似方案

Miguel Bosch -Calvo* Fabrizio Grandoni* Yusuke Kobayashi† Takashi Noguc hi†

摘要

在加权无三角形 2-匹配问题（WTF2M）中，给定一个无向带边权图。我们的目标是计算一个最大权子图，该子图是一个 2-匹配（即没有节点的度数超过 2），且无三角形（即不包含任何由 3 条边构成的环）。这一问题及相关问题的主要动机之一，是它们在实践和理论上与旅行商问题以及一些二连通网络设计问题存在联系。目前尚不清楚 WTF2M 是否为 NP难问题，同时也尚无已知的多项式时间算法能够解决一般情形（目前只针对某些特例已知多项式时间算法）。该问题目前已知的最佳（广为人知的）近似算法很简单：先计算一个最大权 2-匹配，再删除每个三角形中权重最小的边；该算法可得到一个 $2/3$ 近似。本文提出了一个 WTF2M 的多项式时间近似方案，即对于任意给定的常数 $\varepsilon > 0$，都存在一个多项式时间的（$1-\varepsilon$）近似算法。我们的结果基于一种简单的局部搜索算法和一项非平凡的分析。

1 引言

设 $G = (V, E, w)$， w: $E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ 为一个简单无向边加权图。 G 的 2-匹配 M是边的子集 $M \subseteq E$ ，使得V中每个节点至多关联 M 的两条边。注意，一个 2-匹配导出一组互不相交的路径和环。2-匹配问题要求计算最大权重的 2-匹配 $w(M) := \sum_{e \in M} w(e)$：该问题可通过归约到匹配在多项式时间内求解（参见例如 [34, 第 30.6 章.]）。

本文关注加权无三角形二匹配 问题（WTF2M），它是 2-匹配的一个自然推广，并进一步要求所计算的匹配 M 不导出任何三角形 （即具有 3 条边的环）。Hartvigsen 在其 1984 [14], 的博士论文中为无权版本 TF2M 提出了一种（极其复杂的）精确算法，该结果的（同样复杂的）期刊版本最近发表于 [16]。最近，Paluch [30] 报告了该问题的另一种多项式时间算法（尚未发表）。为简化验证与分析，Bosch-Calvo、Grandoni 和 Ameli [8] 针对该问题提出了一种简单的基于局部搜索的多项式时间近似方案（PTAS），即一种算法：对于任意给定的输入常数参数 $\varepsilon > 0$，可在多项式时间内计算出该问题的 $(1 - \varepsilon)$-近似解。Kobayashi 和 Noguchi [27] 进一步大幅简化了上述 PTAS 的正确性证明。TF2M 的精确算法和多项式时间近似方案被用作子程序，以设计某些网络设计问题的改进近似算法（更多细节见第 1.2 节）。

关于该问题的加权版本，我们所知甚少。尚不清楚 WTF2M 是否为 NP难问题。对于该问题的一些特例，已有多项式时间算法。具体而言，Hartvigsen 和 Li [17] 证明，当

*{miguel.boschcalvo,fabrizio}@idsia.ch，IDSIA、USI-SUPSI、卢加诺、瑞士。
†{yusuke,tnoguchi}@kurims.kyoto-u.ac.jp，RIMS、京都大学、日本。

输入图为次三次图，即最大度不超过 3 时，WTF2M 可以在多项式时间内求解（另见 [3] 有关推广的讨论，以及 [24,32]有关简化的讨论）。此外，Kobayashi [25] 针对输入图中的所有三角形均边不相交的情形，提出了一种多项式时间算法。目前已知最佳的（广为人知的）WTF2M 近似算法很简单：先计算一个最大权 2-匹配，然后删去每个三角形中权重最小的边，由此得到一个 $2/3$ 近似。

1.1 我们的结果与技术

本文提出了一个用于 WTF2M 的多项式时间近似方案，这是对前述平凡 $2/3$近似的首次改进。

Th定理 1. 加权无三角形 *2*-匹配问题存在一个多项式时间近似方案 .

更具体地，令 OPT(G) 表示所考虑的加权无三角形 2-匹配实例G的某个最优解，opt(G) $= w$(OPT(G)) 表示其权重。当 G 上下文明确时，我们将简写为 OPT 和 opt。

我们的多项式时间近似方案基于一个简单的局部搜索算法，步骤如下。给定一个无三角形 2-匹配 M，增广迹 P 对于 M 是这样一条迹： $M\Delta P$ 是一个权重严格大于 M的无三角形 2-匹配。这里， Δ 表示对称差。给定一条迹 P，我们用 $|P|$ 表示其边数。在每一步中，如果存在有界 $|P|$ 的增广迹P，算法就会找到它，并用它增加当前解 M （初始为空）的权重；详情见算法 1。

算法 1 WTF2M 的局部搜索。**输入：** 一个常数 $\varepsilon \in (0,1]$ 以及一个无向边加权图 $G = (V, E, w)$。**输出：** 图 G 的一个无三角形 2-匹配 APX，满足 w(APX) $\geq$ $(1-\varepsilon)$opt(G)。1: APX $\leftarrow \emptyset$2: **当** 存在一条关于 APX 的增广迹 P，且满足 $|P| \leq 7/\varepsilon$ **时**3: APX $\leftarrow$ APXΔP4: **返回**APX

证明上述算法有效的关键是下面这个定理。

定理 2。 设 $G = (V, E, w)$ 是一个简单加权图，APX 是图G的一个无三角形2-匹配，且 $\varepsilon \in (0,1]$ 是一个常数。如果$(1-\varepsilon)\mathsf{opt}(G) > w(\mathsf{APX})$，那么存在一条关于APX 的增广迹$P$，满足 $|P| \leq 7/\varepsilon$。

定理 2 意味着算法 1 会返回一个 $(1-\varepsilon)$-近似解。然而，它是否能在多项式时间内运行并不显然。为克服这一困难，我们将问题归约到整数权重为多项式有界的情形；详情见第 2 节。

我们对定理 2 的证明思路与 [27], 类似，都是基于图归约。其关键要素是对三角形无自由的推广，称为 $\mathcal{T}$-自由。具体而言，我们通过引入一个三角形列表 $\mathcal{T}$ 来推广三角形无自由约束；列表中的三角形不得包含在所需的 2-匹配中。通过变换图，我们将输入图归约为规模更小的 $\mathcal{T}$；再将从归约后的图中得到的迹变换回原图，从而构造出所需的迹（见第 4 节）。最后，将 $\mathcal{T}$ 设为 G 中所有三角形的集合，即可得到所需结果。

正如我们将在技术部分看到的那样，我们的方法同样适用于包含自环但不含平行边的非简单图。对于此类图，给定任意输入的 $\mathcal{T}$三角形集合，我们可以为计算 $\mathcal{T}$-无三角形2-匹配的问题获得一个多项式时间近似方案。

如果多项式时间算法确实存在，那么为WTF2M找到一个精确的多项式时间算法仍然是该领域一个重要的开放问题。

1.2 相关工作

我们已经提到了 TF2M 的精确算法和多项式时间近似方案。TF2M 的一种精确算法被用作子程序，以设计针对 $\{1,2\}$-TSP 问题的改进近似算法；这是旅行商问题中一个研究充分的特例，其中所有边权均为 1 或 2。这里的一个关键观察是，给定由费用为 1 的边构成的最大基数 2-匹配 M，$2n-|M|$ 是旅行商回路最小费用的下界。若改用最大基数无三角形 2-匹配，同样的下界仍然成立。在 [5]中，最大基数无三角形 2-匹配被用作构造可行旅行商回路的起点。出于技术上的原因，无三角形这一性质证明很有用。 [1]也宣布了类似的方法。

TF2M 的一种精确算法也被用作子程序，以设计针对 2-边连通生成子图问题（2ECSS）的改进近似算法。在这个问题中，给定一个无向图，目标是计算一个边数最少的子图，该子图包含所有节点且为 2-边连通，也就是说，任意删除一条边后，图仍保持连通。关于该问题的近似算法已有大量研究[10, 12, 20, 22, 35, 37]。最新的改进近似算法 [6, 19, 26] 采用如下方法：首先构造一个最大基数无三角形 2-匹配 M，然后将 M 转化为一个最小基数无三角形 2-边覆盖[1] C。可以证明，$|C|$ 是输入 2-边连通生成子图实例的最优解规模的有效下界。最后，以 C 为起点构造一个可行的 2-边连通生成子图解。同样在这种情况下，出于技术上的原因， C 中没有三角形这一点对构造很有帮助。事实上，若能避免更长的环（例如长度达到 4 或 5 条边的环），将会非常有帮助。然而，目前尚无针对这一目标的精确算法或足够好的近似算法。出于类似原因，TF2M 也可用于简化（并可能改进）相关的 2-顶点连通生成子图问题 [7, 13, 18, 22]的近似因子。

据我们所知，尚无类似工作将该问题的加权版本（即 WTF2M）用于设计近似算法，尽管这似乎是未来研究的一个自然方向。

加权 $C_{\leq k}$-自由 2-匹配问题（WCkF2M）是 WTF2M 的自然推广：我们希望计算一个最大权 2-匹配，使其不诱导任何长度至多为 k 边的环。即使在二分图中，该问题对于 $k \geq 4$ 也是 NP难的 [23]。正如我们已经提到的，WTF2M，即情形 $k=3$，目前仍未解决。若边权函数满足一项称为每个四边形上的顶点诱导性质的特定性质，则二分图中的加权 $C_{\leq 4}$-自由 2-匹配问题可在多项式时间内求解（见 [28, 31, 36]）。

WCkF2M 的无权版本 CkF2M 的情况略有不同。Papadimitriou 证明了情形 $k \geq 5$ 是 NP难的（其证明由 Cornuéjols 和 Pulleyblank 在 [11] 中作了描述）。该问题在 $k=4$ 下的复杂性状态尚未解决。Hartvigsen [15] 证明，在二分图中，$k=4$ 时该情形可在多项式时间内求解（另见 [2, 33]）。Bérczi 和 Végh [4] 证明，若输入图是次三度图，同一问题可在多项式时间内求解。

C_k-无环 2-匹配问题是指寻找一个最大基数 2-匹配，且不包含长度恰为 k 条边的环（但允许更短的环）。特别地，TF2M 是上述问题在 $k=3$ 时的特例。Bérczi 和 Kobayashi [9] 证明，无方形情形，即 $k=4$ 的情形，在次三度图上可在多项式时间内求解。Nam [29]证明，如果这些方形彼此顶点不相交，则该问题可在多项式时间内求解；Iwamasa 等人 [21] 将这一结果推广了。

[1]我们回顾一下，2 -边覆盖是边的一个子集 C，使得每个节点至少有 2 条边 C 与其关联 .

如果允许取同一条边的多个副本，问题会变得更容易（即 2-匹配不是简单的）。特别是，加权无三角形非简单 2-匹配问题可以在多项式时间内精确求解 [11]。

1.3 预备知识

我们采用标准的图论记法。令 $G=(V,\ E,\ w)$ 表示一个边加权图，其中 $w\colon\ E\to\mathbb{Q}_{\geq 0}$。在本文中，我们始终假设图可以包含自环，但不含平行边。给定一个节点 $u\in V$ 和边的子集 $F\subseteq E$，u 关于 F 的相对度 $d_F(u)$ 定义为 F 中与 v 相 incident 的边数，其中自环计数两次，即当 $uu\in F$ 时，$d_F(u)=|\{uv\mid uv\in F\}|+1$，否则 $d_F(u)=|\{uv\mid uv\in F\}|$。若边集 $M\subseteq E$ 满足对任意 $v\in V$ 都有 $d_M(v)\leq 2$，则称其为 2-匹配。对于边的子集 $F\subseteq E$，记 $w(F)=\sum_{e\in F}w(e)$。

一条迹 P（长度为 $|P|=k-1$）是由一系列首尾相接且互不相同的边 $u_1u_2,\ u_2u_3,\ \ldots\ldots,\ u_{k-1}u_k$组成的序列。节点 $u_1,\ \ldots\ldots,\ u_k$不一定互不相同。我们分别称 u_1和 u_k为该迹的首 节点和末节点，它们都是该迹的端点 。注意，我们允许 $u_1=u_k$，此时称该迹为闭合。对于由 G构成的迹 P，我们用 sl(P) 表示 P中自环的数量。给定一条迹 P，我们也用 P表示相应的边集 $\{u_1u_2,\ldots,u_{k-1}u_k\}$（忽略其顺序）；具体含义由上下文决定。对于两个边子集 $A_1,\ A_2\subseteq E$，相对于 ($A_1,\ A_2$) 的交替迹 是 $A_1\Delta A_2$中的一条（可能闭合的）迹，它在 $A_1\setminus A_2$ 和 $A_2\setminus A_1$的边之间交替，即 $u_iu_{i+1}\in A_1\setminus A_2$ 当且仅当$u_{i+1}u_{i+2}\in A_2\setminus A_1$对 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k-2$成立。

三角形是构成长度为 3 的环的边集。边子集 $F\subseteq E$ 称为无三角形的，当且仅当其中不包含任何三角形。设 $\mathcal{T}$ 是 $G=$（V、E、w）中的三角形子集。若边集 $F\subseteq E$ 不包含任何作为其子集的三角形 $T\in\mathcal{T}$，则称其为 $\mathcal{T}$-无三角形的。注意，当 $\mathcal{T}$ 是 G 中所有三角形的集合时，$\mathcal{T}$-三角形无自由等价于无三角形。对于G 的三角形子集 $\mathcal{T}$ 和边的子集 $F\subseteq E$，我们将 $\mathcal{T}(F)$ 定义为 $\mathcal{T}$ 中包含 F 至少一条边的所有三角形的集合。下面的观察将在我们的论证中多次使用。

观察 1。设 G 为一个图，$\mathcal{T}$ 为 G 的三角形子集，M 为一个2-匹配，且 T 为 G 的一个三角形（可能为 $T\notin\mathcal{T}$）。若 $|M\cap T|=2$，则 M 是 $\mathcal{T}$（T）-无三角形的。

证明。令 $T=\{u_1u_2,u_2u_3,u_1u_3\}$，不失一般性地假设 $T\cap M=\{u_1u_2,u_1u_3\}$。反设 M不是 $\mathcal{T}(T)$-自由的，因此 M包含一个三角形 $T'\neq T$，且该三角形包含 T的一条边，不失一般性地设为 u_1u_2。根据 u_1的度约束，与 u_1 相连的 M 的另一条边只能是u_1u_3。于是，由于 $T'\subseteq M$，T'也必须包含 u_1u_3，因此它等于 T，矛盾。

□

2 权重缩减与定理 1 的证明

如第 1 节所述，算法 1 能否在多项式时间内运行并非显而易见。为解决这一问题，我们将问题归约到输入实例的边权为$\{0,\ldots,\lfloor n/\varepsilon\rfloor\}$中的整数的情形，其中 $\varepsilon>0$ 是一个给定的常数。这里，n 表示输入图中的顶点数。

引理 1. 对于任意常数 ε、$\varepsilon'\in(0,1],$，若给定一个针对 *WTF2M* 的多项式时间 $(1-\varepsilon')$-近似算法，且假设边权为 $\{0,\ldots,\lfloor n/\varepsilon\rfloor\}$ 中的整数，则存在一个针对 *WTF2M*（无任何限制）的多项式时间 $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon')$-近似算法。

证明。设 $G=(V,\ E,\ w)$ 是 WTF2M 的输入实例，并设 OPT 是该实例的某个最优解。令 $e_{\max}$ 为 G 中权重最大的边，且 $W:=w(e_{\max})$。我们可以假设

$W > 0$，否则所有边的权重都为零，且 $w(\mathsf{OPT}) = 0$。注意，$\{e_{\max}\}$ 是 WTF2M 的一个可行解，因此 $W \le w(\mathsf{OPT})$。接下来，对每个 $e \in E$，我们定义权重 $w'(e) = \lfloor \frac{w(e)}{W} \frac{n}{\varepsilon} \rfloor$。对于由此得到的 WTF2M 实例 $G' = (V, E, w')$，我们应用引理假设所给出的、具有有界整数权重的 $(1-\varepsilon')$-近似算法，并返回所得解 APX。令 OPT′ 为 G'的一个最优解。于是

$$w'(\mathsf{OPT}') \ge w'(\mathsf{OPT}) \ge \sum_{e \in \mathsf{OPT}} \left(\frac{w(e)}{W} \frac{n}{\varepsilon} - 1 \right) \ge w(\mathsf{OPT}) \frac{n}{W\varepsilon} - n \ge (1-\varepsilon) w(\mathsf{OPT}) \frac{n}{W\varepsilon},$$

其中，第三个和最后一个不等式分别使用了 $|\mathsf{OPT}| \le n$ 和 $W \le w(\mathsf{OPT})$。因此

$$w(\mathsf{APX}) \ge \frac{W\varepsilon}{n} w'(\mathsf{APX}) \ge \frac{W\varepsilon(1-\varepsilon')}{n} w'(\mathsf{OPT}') \ge (1-\varepsilon)(1-\varepsilon') w(\mathsf{OPT}),$$

由此完成证明。 □

结合定理 2 和引理 1，我们得到 WTF2M 的多项式时间近似方案，并证明定理 1 如下。

定理 *1* 的证明。 由引理 1 可知，只需证明算法 1 是针对有界整数权重问题的多项式时间近似方案。由构造可知，该解显然是可行的。显然，while 循环的每次迭代都可以在 $n^{O(1/\varepsilon)}$ 时间内执行。每次执行此循环，解的权重至少增加 1（因为所有权重都是整数）。由于初始解的权重为 0，且任何解的权重都不可能超过 n^2/ε （对应于 n 条权重可能达到最大值的边），while 循环的迭代次数至多为 n^2/ε。然后，由于每次迭代都能在 $n^{O(1/\varepsilon)}$ 时间内找到一条迹，总运行时间也至多为 $n^{O(1/\varepsilon)}$。根据定理 2，只要$(1-\varepsilon)\mathsf{opt}(G) > w(\mathsf{APX})$，APX 的值就会更新。这意味着算法终止时，$(1-\varepsilon)\mathsf{opt}(G) \le w(\mathsf{APX})$。

□

剩下的工作是证明定理 2。下文将证明以下更强的定理。

定理 *3.* 设 $G = (V, E, w)$ 是一个带权图。设 $\mathcal{T}$ 是 G 的三角形的一个子集，A_1 和 A_2 是 G 的两个无 $\mathcal{T}$ 的 *2*-匹配，并设 $\varepsilon \in (0, 1]$ 是一个常数。若 $(1-\varepsilon)w(A_1) > w(A_2)$，则存在一条相对于 (A_1, A_2) 的交替迹 P，满足：*(1)* $A_2 \Delta P$ 是一个无 $\mathcal{T}$ 的 *2*-匹配，*(2)* $w(A_2 \Delta P) > w(A_2)$，以及 *(3)* $|P| + 2sl(P) \le 7/\varepsilon$。

回顾一下，G 可以有自环，但没有平行边。注意，令 $A_1 =$ 为 OPT、$A_2 =$ 为 APX，即可由定理 3 推出定理 2。为证明定理 3，我们先在第 3 节考虑 $\mathcal{T} = \emptyset$ 的情形，然后在第 4 节考虑一般情形。

3 无禁用三角形的情形

本节中，我们证明定理 3 的一个特例，其中 $\mathcal{T} = \emptyset$。

引理 2. 设 $G = (V, E, w)$ 为边加权图，A_1, A_2 是 G的两个 *2*-匹配，且 $\varepsilon \in (0, 1]$ 为常数。若 $(1-\varepsilon)w(A_1) > w(A_2)$，则存在一条关于$(A_1, A_2)$ 的交替迹 P，满足：*(1)* $A_2 \Delta P$是一个 *2*-匹配，*(2)* $w(A_2 \Delta P) > w(A_2)$，且 *(3)* $|P| \le 3/\varepsilon$。

证明。设 $\mathcal{P}$ 是 $A_1\Delta A_2$ 的一个划分，其中各部分是关于 (A_1, A_2) 的交替迹，且对每个 $P \in \mathcal{P}$，$A_2\Delta P$ 都是一个 2-匹配。此类划分的存在性是众所周知的事实，例如参见 [27, 引理 2.1]。有

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{P}} w(A_2 \cap P) &= w(A_2) - w(A_1 \cap A_2)\\ &< (1-\varepsilon)w(A_1) - w(A_1 \cap A_2)\\ &\le (1-\varepsilon)(w(A_1) - w(A_1 \cap A_2))\\ &= \sum_{P\in\mathcal{P}} (1-\varepsilon)w(A_1 \cap P).\end{aligned}$$

因此，存在满足 $w(A_2 \cap P^*) < (1-\varepsilon)w(A_1 \cap P^*)$ 的 $P^* \in \mathcal{P}$。

令 $m := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$。由于 $w(A_1 \cap P^*) > w(A_2 \cap P^*)$，可得 $w(A_2\Delta P^*) - w(A_2) > 0$，因此当 $|P^*| \le 2m-1 \le 3/\varepsilon$ 时，P^* 满足引理的断言。现在我们假设 $P^* = u_1u_2,\ u_2u_3,\ \ldots,\ u_ku_{k+1}$ 满足 $|P^*| > 2m-1$。我们分别考虑以下两种情形。

假设 P^* 是闭合且为偶数的，即 $u_1 = u_{k+1}$，并且 u_1u_2 和 u_ku_{k+1} 中一个属于 A_1，另一个属于 A_2。令 $\mathcal{S}$ 为 P^* 的交错子迹 P 的集合，其中 $|P| = 2m-1$，且首边和末边均属于 A_2（包括经过 $u_1 = u_{k+1}$ 的子迹）。也就是说，$\mathcal{S}$ 中的每条迹都具有如下形式：$u_iu_{i+1},\ u_{i+1}u_{i+2},\ \ldots,\ u_{i+2m-2}u_{i+2m-1}$，其中下标模 k 取值。容易看出，对于任意 $P \in \mathcal{S}$，$A_2\Delta P$ 都是一个 2-匹配，因为对于任意 $v \in V$，$d_{A_2\Delta P}(v) \le d_{A_2}(v) \le 2$。$A_1 \cap P^*$ 中的每条边恰好包含在 $\mathcal{S}$ 中的 $m-1$ 条迹里，而 $A_2 \cap P^*$ 中的每条边恰好包含在 $\mathcal{S}$ 中的 m 条迹里。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{S}} (w(A_2\Delta P) - w(A_2)) &= \sum_{P\in\mathcal{S}} (w(A_1 \cap P) - w(A_2 \cap P))\\ &= (m-1)w(A_1 \cap P^*) - m \cdot w(A_2 \cap P^*)\\ &> m\left(\left(1 - \frac{1}{m}\right) - (1-\varepsilon)\right) w(A_1 \cap P^*) \ge 0.\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了 $m = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$，而在倒数第二个不等式中使用了如下事实：$w(A_2 \cap P^*) < (1-\varepsilon)w(A_1 \cap P^*)$。由此可知存在 $P \in \mathcal{S}$，使得 $w(A_2\Delta P) - w(A_2) > 0$，从而满足该引理的断言。

现假设 P^* 不是闭合的或不为偶的，即 $u_1 \ne u_{k+1}$，或者 $u_1 = u_{k+1}$ 且 u_1u_2 与 u_ku_{k+1} 对于某个 $i \in \{1, 2\}$ 均属于 A_i。设 $\mathcal{S}$ 为 P^* 中满足下列条件之一的交错子迹 P 的集合：

- $|P| = 2m-1$，且 P 的第一条边和最后一条边都包含在 A_2 中；或者
- $|P| < 2m-1$，其中 P 的第一条边或最后一条边与 P^* 的第一条边或最后一条边重合，且 P 的另一条端边包含在 A_2 中（可能为 $|P| = 1$）。

注意，$\mathcal{S}$ 中的每条迹都具有如下形式：$u_iu_{i+1},\ u_{i+1}u_{i+2},\ \ldots,\ u_{i+\ell-1}u_{i+\ell}$，其中 $\ell \le 2m-1$，且这些下标不是模 k 取值的。可以看出，对于每个 $P \in \mathcal{S}$，$A_2\Delta P$ 都是一个 2-匹配，因为对于每个 $v \in V$，$d_{A_2\Delta P}(v) \le \max\{d_{A_2}(v),\ d_{A_2\Delta P^*}(v)\} \le 2$。$A_1 \cap P^*$ 中的每条边恰好包含在 $\mathcal{S}$ 的 $m-1$ 条迹中，而 $A_2 \cap P^*$ 中的每条边恰好包含在 $\mathcal{S}$ 的 m 条迹中。于是，运用与前一种情形相同的论证可知，存在 $P \in \mathcal{S}$ 使得 $w(A_2\Delta P) - w(A_2) > 0$，这满足了该引理的断言。 □

该引理结合以下观察，证明了定理 3 的特例，其中 $\mathcal{T}=\emptyset$。

观察 2. 对于满足引理 *2* 中条件的迹 P，有 $|P|+2\mathrm{sl}(P)\leq\frac{7}{\varepsilon}$。

证明。由于 G 没有平行边，$\mathrm{sl}(P)$ 至多等于 P中节点的数量，而该数量等于$|P|-\mathrm{sl}(P)+1$。因此，$\mathrm{sl}(P)\leq\frac{|P|+1}{2}$，所以 $|P|+2\mathrm{sl}(P)\leq 2|P|+1\leq\frac{7}{\varepsilon}$。 □

4 定理 3 的证明

我们通过对 $|\mathcal{T}|$ 使用归纳法证明定理 3。基例，即当 $\mathcal{T}=\emptyset$ 时，由引理 2 和观察 2 得出。假设 $|\mathcal{T}|>0$ 成立。我们考虑以下情形，并在每种情形中假设前面的情形均不成立：

(1) 存在一个不包含在 $A_1\cup A_2$ 中的三角形 $T\in\mathcal{T}$。**(2)** 存在一个三角形 $T\in\mathcal{T}$，使得 $|A_1\cap T|=|A_2\cap T|=2$。**(3)** 存在一个三角形 $T\in\mathcal{T}$，使得 $|A_1\cap T|=2$，且 $A_1\Delta T$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。**(4)** 存在一个三角形 $T\in\mathcal{T}$，使得 $|A_2\cap T|=2$，且 $A_2\Delta T$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。**(5)** 存在一个三角形 $T\in\mathcal{T}$，使得 $|A_1\cap T|=2$。**(6)** 存在一个三角形 $T\in\mathcal{T}$，使得 $|A_2\cap T|=2$。

对于每个带有 $T\in\mathcal{T}$ $T\subseteq A_1\cup A_2$ 的情形，都有 $|A_1\cap T|=2$ 或 $|A_2\cap T|=2$，因为 A_1 和 A_2 都是 $\mathcal{T}$-自由的。因此，情形 **（1）**、**（5）**和 **（6）**涵盖了所有可能的情形，从而定理 3 由这六种情形得证。注意，情形 **（2）**、**（3）**和 **（4）**不成立这一事实，是证明情形 **（5）**和 **（6）**所必需的。下面将逐一讨论各情形。在用于说明不同情形的图中，实线表示 A_1 中的边，虚线表示 A_2 中的边。

（1）存在一个三角形 $T\in\mathcal{T}$ 不包含于 $A_1\cup A_2$ 中。

定义 $\mathcal{T}':=\mathcal{T}\setminus\{T\}$。由于 A_1 和 A_2 都是 $\mathcal{T}'$-自由的 2-匹配，且 $|\mathcal{T}'|<|\mathcal{T}|$，根据归纳假设，存在一条关于（$A_1$，$A_2$）的交替迹 P，使得 $|P|+2\mathrm{sl}(P)\leq 7/\varepsilon$，$w(A_2\Delta P)>w(A_2)$，并且 $A_2\Delta P$ 是 G 的 $\mathcal{T}'$-自由 2-匹配。由于 T 不包含于 $A_1\cup A_2$ 中，$A_2\Delta P$ 不包含 T，因此 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。综上，P 满足该定理的断言。

(2) 存在一个三角形 $T\in\mathcal{T}$使得 $|A_1\cap T|=|A_2\cap T|=2$。

令 $T=\{u_1u_2,u_2u_3,u_1u_3\}$。由于 A_1 和 A_2 都是 $\mathcal{T}$-自由的，且情形 (1) 不成立，因此不失一般性地假设 $u_2u_3\in A_1\cap A_2$、$u_1u_2\in A_1\setminus A_2$和 $u_1u_3\in A_2\setminus A_1$（见图 1 左侧）。我们定义辅助加权图 $G'=(V',E',w')$ 如下：

- $V':=V\cup\{u_1'\}$, $E':=(E\setminus\{u_1u_2,u_1u_3\})\cup\{u_1'u_2,u_1'u_3,u_1u_1'\}$,
- $w'(e)=w(e)$ 对所有 $e\in E\setminus\{u_1u_2,u_1u_3\}$,
- $w'(u_1'u_2)=w(u_1u_2)$，$w'(u_1'u_3)=w(u_1u_3)$，$w'(u_1u_1')=0$。

我们还定义：

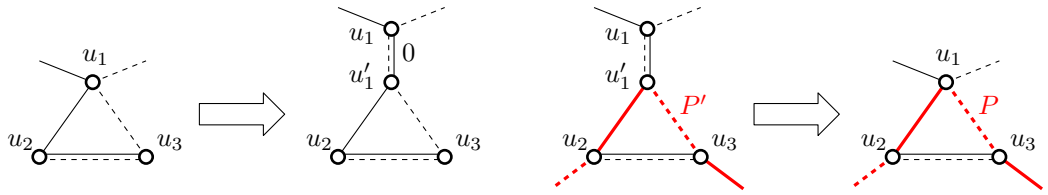


图 1：情形(2)的归约。

- $A'_1 := (A_1 \setminus \{u_1u_2\}) \cup \{u'_1u_2, u_1u'_1\}$, $A'_2 := (A_2 \setminus \{u_1u_3\}) \cup \{u'_1u_3, u_1u'_1\}$,
- $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$。

注意，$(1-\varepsilon)w'(A'_1) = (1-\varepsilon)w(A_1) > w(A_2) = w'(A'_2)$。我们断言，$A'_i$ 是 G'的 $\mathcal{T}'$无三角形 2-匹配，其中 $i \in \{1,2\}$。由于对于每个节点 $u \in V$，$d_{A'_i}(u) = d_{A_i}(u) \le 2$，且 $d_{A'_i}(u'_1) = 2$，A'_i 是 G' 的 A'_i 是一个-匹配。我们还注意到，集合中唯一不属于的边与 $u'_1 \notin V$关联，因此它们不是 $\mathcal{T}$中三角形的边，也就不是 $\mathcal{T}'$中三角形的边。结合 A_i 是 $\mathcal{T}$无三角形这一事实，可知 A'_i 是 $\mathcal{T}'$无三角形，其中 $i \in \{1,2\}$。因此，A'_i 是 G'的 $\mathcal{T}'$无三角形 2-匹配，其中 $i \in \{1,2\}$。此外，由于 T 同时包含 u_1u_2 和 u_1u_3，可得$|\mathcal{T}'| < |\mathcal{T}|$。可以应用归纳假设，找到一条关于$(A'_1, A'_2)$的交替迹 P'，使得 $|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$，$w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2)$，且 $A'_2\Delta P'$ 是 G'的 $\mathcal{T}'$无三角形 2-匹配。

设 P 为 G 中的迹，它是将 P' 中的 u'_1u_2 替换为 u_1u_2、并将 u'_1u_3 替换为 u_1u_3（若其中任一项存在于 P' 中）后得到的（见图 1 右侧）。注意，P 是关于 (A_1, A_2) 的交替迹。我们断言，P 满足定理的条件。

注意，$|P|+2\mathrm{sl}(P) = |P'|+2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$。现在我们证明 $w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。注意，G 中的 A_2（分别为 $A_2\Delta P$）是通过收缩 $u_1u'_1$（即，移除 $u_1u'_1$ 并将 u'_1 与 u_1 合并）由 G' 中的 A'_2（分别为 $A'_2\Delta P'$）得到的。由于 $w'(u'_1u_2) = w(u_1u_2)$、$w'(u'_1u_3) = w(u_1u_3)$，且 $w'(u_1u'_1) = 0$，这一观察表明 $w(A_2\Delta P) = w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2) = w(A_2)$。

现在证明 $A_2\Delta P$ 是一个 2-匹配。由于 $A_2\Delta P$ 是通过收缩 $u_1u'_1$ 从 $A'_2\Delta P'$ 得到的，对于每个节点 $u \in V \setminus \{u_1\}$，$d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A'_2\Delta P'}(u) \le 2$。由于边 $u_1u'_1$ 同时计入 $d_{A'_2\Delta P'}(u_1)$ 和 $d_{A'_2\Delta P'}(u'_1)$，但不属于 $A_2\Delta P$，因此有 $d_{A_2\Delta P}(u_1) = d_{A'_2\Delta P'}(u_1) - 1 + d_{A'_2\Delta P'}(u'_1) - 1 \le 2$。

最后，还需证明 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。由于 $A'_2\Delta P'$ 是 $\mathcal{T}'$-自由的，因此 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}'$-自由的。现在注意，只有当边 u'_1u_2 属于 P' 时，u'_1u_3 才属于 P'，因为 $d_{A'_2\Delta P'}(u'_1) \le 2$。因此，若 $u'_1u_2 \in P'$，则 u_1u_2、$u_1u_3 \in P$ 和 $(A_2\Delta P) \cap T = \{u_1u_2, u_2u_3\}$ 均成立，所以根据观察 1，$A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}(T)$- 自由的（这意味着它也是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$-自由的）。现在假设 $u'_1u_2 \notin P'$，于是 $u_1u_2 \notin P$，从而 $u_1u_2 \notin A_2\Delta P$。若 $u_1u_3 \in A_2\Delta P$，则 $(A_2\Delta P) \cap T = \{u_1u_3, u_2u_3\}$，所以根据观察 1，$A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}(T)$-自由的（这意味着它也是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$-自由的）。另一方面，若 $u_1u_3 \notin A_2\Delta P$，则有 u_1u_2、$u_1u_3 \notin A_2\Delta P$，从而 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$-自由的。断言得证。

(3) 存在一个三角形 $T \in \mathcal{T}$，使得 $|A_1 \cap T| = 2$ and $A_1\Delta T$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。

令 $T = \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3\} \in \mathcal{T}$。由于情形(1) 和(2) 均不成立，不失一般性，我们可以假设 w.l.o.g. $\{u_1u_2, u_1u_3\} \subseteq A_1 \setminus A_2$ and $u_2u_3 \in A_2 \setminus A_1$。我们考虑以下子情形。

(3.1) $u_1u_1 \in A_2$。若 $w(u_1u_2)+w(u_1u_3) > w(u_2u_3)+w(u_1u_1)$，则令 $P := \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3, u_1u_1\}$。下面证明 P 满足定理的断言。事实上，由于 $w(u_1u_2) + w(u_1u_3) > w(u_2u_3) + w(u_1u_1)$，$w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。有 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = 6 < 7/\varepsilon$，且由于 P 是偶闭交替迹，$A_2\Delta P$ 是一个 2-匹配。此外，由于 $(A_2\Delta P) \cap T = \{u_1u_2, u_1u_3\}$，根据观察 1，$A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}(T)$-自由的。由于 P 中唯一不属于 T 的边是 u_1u_1，这意味着 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。

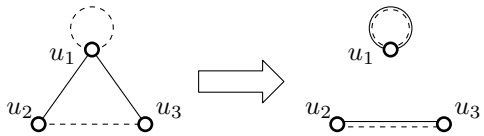


图2：情形(**3.1**)的归约

从现在起　　我们假设 $w(u_1u_2)+w(u_1u_3) \le w(u_2u_3)+w(u_1u_1)$。我们设（见图2）　　：

- $A_1' := (A_1 \setminus \{u_1u_2, u_1u_3\}) \cup \{u_2u_3, u_1u_1\}$, $A_2' := A_2$,
- $w'(e) := w(e)$ 对所有 $e \in E$,
- $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$。

注意， A_1' 和 A_2' 都是 G的2-匹配。显然， A_2' 是 $\mathcal{T}'$-自由的，而根据这个情形假设， $A_1\Delta T$ 是 $\mathcal{T}$-自由的，因此 $A_1' = (A_1\Delta T)\cup\{u_1u_1\}$ 也是 $\mathcal{T}'$-自由的。因此，对于 $i \in \{1,2\}$， A_i' 是 G的一个 $\mathcal{T}'$-自由2-匹配。此外， $w'(A_2') = w(A_2)$且 $w'(A_1') = w(A_1)+w(u_2u_3)+w(u_1u_1)-w(u_1u_2)-w(u_1u_3) \ge w(A_1)$，因为 $w(u_1u_2)+w(u_1u_3) \le w(u_2u_3)+w(u_1u_1)$。根据该定理的假设，有$(1-\varepsilon)w'(A_1') \ge (1-\varepsilon)w(A_1) > w(A_2) = w'(A_2')$。

由于 A_1' 和 A_2' 都是 $\mathcal{T}'$-自由 2-匹配，且 $(1-\varepsilon)w'(A_1') > w(A_2')$，因此可以应用归纳假设，找到一条关于 (A_1', A_2') 的交替迹 P'，使得 $|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$,$w'(A_2'\Delta P') > w'(A_2')$，并且 $A_2'\Delta P'$是 G'的一个 $\mathcal{T}'$-自由 2-匹配。令 $P := P'$，并注意到P 是关于 (A_1, A_2) 的一条交替迹。我们断言， P 满足定理的条件。注意，$|P| + 2\mathrm{sl}(P) = |P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$，且 $w(A_2\Delta P) = w'(A_2'\Delta P') > w'(A_2') = w(A_2)$。

由于 $A_2' = A_2$与 $P' = P$，对每一个 $u \in V$都有 $d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A_2'\Delta P'}(u) \le 2$，因此 $A_2\Delta P$是一个2-匹配。此外，由于 $A_2'\Delta P'$不含 $\mathcal{T}'$， $A_2\Delta P$也不含。另外，由于 $u_1u_2, u_1u_3 \notin A_1' \cup A_2'$，可得 $u_1u_2, u_1u_3 \notin P$，从而 $u_1u_2, u_1u_3 \notin A_2\Delta P$。因此， $A_2\Delta P$不含 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$。该断言成立。

(3.2) $u_1u_1 \notin A_2$**.** 注意到 $u_1u_1 \notin A_1$，这是因为 u_1上的度约束。我们定义

- $A_2' := A_2$,

对于所有 $e \in E \setminus \{u_1u_1\}$， • $w'(e) := w(e)$,

- $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$。

如果 $w(u_1u_2)+w(u_1u_3) - w(u_2u_3) \ge 0$，在情形 $u_1u_1 \notin E$ 下，我们将 u_1u_1 加入 E，并赋予其任意的非负权。此外，我们设

- $A_1' := (A_1 \setminus \{u_1u_2, u_1u_3\}) \cup \{u_2u_3, u_1u_1\}$,
- $w'(u_1u_1) := w(u_1u_2) + w(u_1u_3) - w(u_2u_3)$。

否则，如果 $u_1u_1 \in E$，我们将其从 E 中移除。此外，我们设

- $A_1' := (A_1 \setminus \{u_1u_2, u_1u_3\}) \cup \{u_2u_3\}$.

注意， A_1' 和 A_2' 都是 G的2-匹配。显然， A_2' 是无 $\mathcal{T}'$的；根据此情形假设， $A_1\Delta T$ 是无 $\mathcal{T}$ 的，因此 $A_1' \subseteq (A_1\Delta T) \cup \{u_1u_1\}$ 也无 $\mathcal{T}'$。还需注意， $w'(A_2') = w(A_2)$，且 $w'(A_1') \ge w(A_1)$。

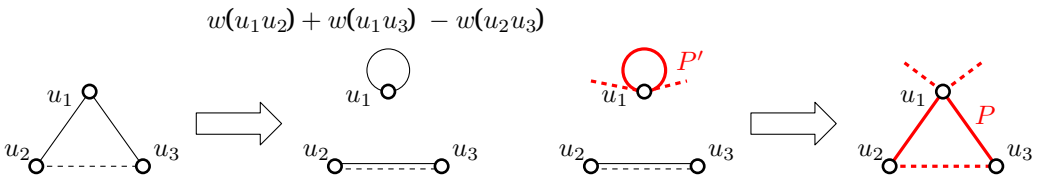


图3：情形 **(3.2)** 的归约。

由于 A_1' 和 A_2' 都是无 $\mathcal{T}'$的2-匹配，且 $w'(A_2') = w(A_2) < (1-\varepsilon)w(A_1) \le (1-\varepsilon)w'(A_1')$，可以应用归纳假设，找到一条相对于$(A_1', A_2')$的交替迹 P'，使得 $|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$，$w'(A_2'\Delta P') > w'(A_2')$，并且 $A_2'\Delta P'$是 G'的一个无 $\mathcal{T}'$的2-匹配。若$u_1u_1 \in P'$，则令 P为将迹 u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3 插入以替换 u_1u_1 后所得的交替迹（见图3右侧）。若 $u_1u_1 \notin P'$，则令 $P := P'$。注意，P是相对于(A_1, A_2)的交替迹。我们断言，P满足定理的条件，即 $A_2\Delta P$是一个无 $\mathcal{T}$的2-匹配，$|P| + 2\mathrm{sl}(P) \le 7/\varepsilon$，且 $w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。

注意，无论 $u_1u_1 \in P'$ 是否成立，$|P| + 2\mathrm{sl}(P) = |P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$ 都成立。如果 $u_1u_1 \notin P'$，由于 $A_2 = A_2'$ 和 $P = P'$，我们有 $w(A_2\Delta P) = w'(A_2'\Delta P') > w'(A_2') = w(A_2)$。另一方面，如果 $u_1u_1 \in P'$，那么 $A_2\Delta P = ((A_2'\Delta P') \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$。因此，

$$\begin{aligned} w(A_2\Delta P) &= w'(A_2'\Delta P') - w'(u_1u_1) - w'(u_2u_3) + w(u_1u_2) + w(u_1u_3) \\ &= w'(A_2'\Delta P') > w'(A_2') = w(A_2), \end{aligned}$$

其中，在第二个等式中，我们使用了 $w'(u_1u_1) = w(u_1u_2) + w(u_1u_3) - w(u_2u_3)$ 以及 $w'(u_2u_3) = w(u_2u_3)$。在这两种情形下，都有 $w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。

只需证明 $A_2\Delta P$ 是一个 $\mathcal{T}$-自由的 2-匹配。回顾一下，$A_2' = A_2$。若 $u_1u_1 \in P'$，则 $P' = P$，因此对所有 $u \in V$，$d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A_2'\Delta P'}(u) \le 2$。另一方面，若 $u_1u_1 \notin P'$，则 $A_2\Delta P = ((A_2'\Delta P') \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$。因此，对所有 $u \in V$，$d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A_2'\Delta P'}(u) \le 2$。故 $A_2\Delta P$ 是一个 2- 匹配。

由于 $A_2'\Delta P'$ 是 $\mathcal{T}'$-自由的，$A_2\Delta P \subseteq (A_2'\Delta P') \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$，且 u_1u_2 和 u_1u_3 均不包含在 $\mathcal{T}'$ 中的任何三角形内，因此 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}'$-自由的。现在，若 $u_1u_1 \in P'$，则 u_1u_2，u_1u_3，$u_2u_3 \in P$，从而 $(A_2\Delta P) \cap T = \{u_1u_2, u_1u_3\}$，因此根据观察 1，$A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$-自由的。若 $u_1u_1 \notin P'$，则由于 $P = P'$ 既不包含 u_1u_2 也不包含 u_1u_3，$A_2\Delta P$ 也同样是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$-自由的。因此，$A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。断言得证。

(4) 存在一个三角形 $T \in \mathcal{T}$，使得 $|A_2 \cap T| = 2$ 和 $A_2\Delta T$是$\mathcal{T}$-无的。

令 $T = \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3\}$。由于情形**(1)** 和**(2)** 均不成立，不失一般性地，我们可以假设 $\{u_1u_2, u_1u_3\} \subseteq A_2 \setminus A_1$ 和 $u_2u_3 \in A_1 \setminus A_2$。我们考虑以下子情形。

(4.1) $u_1u_1 \in A_1$。 如果 $w(u_1u_1)+w(u_2u_3) > w(u_1u_2)+w(u_1u_3)$，则令 $P := \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3, u_1u_1\}$。下面证明 P 满足定理的断言。事实上，由于 $w(u_1u_1) + w(u_2u_3) > w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$，$w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。有 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = 6 < 7/\varepsilon$，且由于 P是一个偶闭交替迹，$A_2\Delta P$ 是一个 2-匹配。此外，根据此情形假设，$A_2\Delta T$ 是 $\mathcal{T}$-无的，因此 $A_2\Delta P = (A_2\Delta T) \cup \{u_1u_1\}$ 也同样是 $\mathcal{T}$-无的。

从现在起，我们假设 $w(u_1u_1) + w(u_2u_3) \le w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$。我们设定（见图4）：

- $A_1' = A_1$, $A_2' := (A_2 \setminus \{u_1u_2, u_1u_3\}) \cup \{u_2u_3, u_1u_1\}$,
- $w'(e) := w(e)$ 对所有 $e \in E \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}$,
- $w'(u_1u_1) = w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$, $w'(u_2u_3) = 0$,

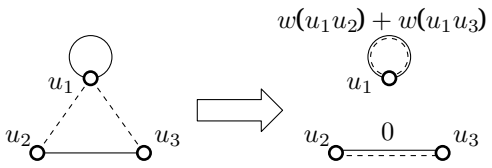


图4：情形(4.1)的归约

- $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$。

注意， A'_1 和 A'_2 是 G的2-匹配。显然， A'_1 是 $\mathcal{T}'$-自由的；根据这一情形假设， $A_2\Delta T$ 是 $\mathcal{T}$-自由的，因此 $A'_2 = (A_2\Delta T) \cup \{u_1u_1\}$ 也是 $\mathcal{T}'$-自由的。还需注意， $w'(A'_2) = w(A_2)$，并且

$$\begin{aligned} w'(A'_1) &= w(A_1) - w(u_1u_1) - w(u_2u_3) + w'(u_1u_1) + w'(u_2u_3) \\ &= w(A_1) - w(u_1u_1) - w(u_2u_3) + w(u_1u_2) + w(u_1u_3) \geq w(A_1), \end{aligned}$$

最后一个不等式中，我们使用了 $w(u_1u_1) + w(u_2u_3) \leq w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$。因此，根据定理的假设， $w'(A'_2) = w(A_2) < (1-\varepsilon)w(A_1) \leq (1-\varepsilon)w'(A'_1)$。

由于 A'_1 和 A'_2 都是 $\mathcal{T}'$-自由的2-匹配，且 $w'(A'_2) < (1-\varepsilon)w'(A'_1)$，可以应用归纳假设，找到一条关于$(A'_1, A'_2)$的交替迹 P'，使得 $|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \leq 7/\varepsilon$,$w'(A'_2\Delta P) > w(A'_2)$，并且 $A'_2\Delta P'$ 是 G'的一个 $\mathcal{T}'$-自由2-匹配。令 $P := P'$，并注意到 P是关于(A_1, A_2)的一条交替迹。我们断言， P 满足定理的条件。

可得 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = |P'| + 2\mathrm{sl}(P') \leq 7/\varepsilon$。注意， $A_2\Delta P = ((A'_2\Delta P') \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$。因此，

$$\begin{aligned} w(A_2\Delta P) &= w'(A'_2\Delta P') - w'(u_1u_1) - w'(u_2u_3) + w(u_1u_2) + w(u_1u_3) \\ &= w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2) = w(A_2), \end{aligned}$$

其中在 第二个等式中，我们使用了 $w'(u_1u_1) = w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$ 和 $w'(u_2u_3) = 0$。

剩下需要证明 $A_2\Delta P$ 是一个 $\mathcal{T}$-自由 2-匹配。由于 $A_2\Delta P = ((A'_2\Delta P') \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$，对每个 $u \in V$，都有 $d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A'_2\Delta P'}(u) \leq 2$，这意味着 $A_2\Delta P$ 是一个 2-匹配。

由于 $A'_2\Delta P'$ 是 $\mathcal{T}'$-无三角形的， $A_2\Delta P \subseteq (A'_2\Delta P') \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$，并且 u_1u_2和 u_1u_3均不包含在 $\mathcal{T}'$中的任何三角形内，因此 $A_2\Delta P$是 $\mathcal{T}'$-无三角形的。此外，由于 $A_2\Delta P = ((A'_2\Delta P') \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$，可知 $(A_2\Delta P) \cap T = \{u_1u_2, u_1u_3\}$，故根据观察 1， $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$- 无三角形的，这意味着它是 $\mathcal{T}$- 无三角形的。断言得证。

(4.2) $\boldsymbol{u_1u_1 \notin A_1}$。若 $w(u_2u_3) > w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$，则令 $P := \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3\}$。我们来证明 P 满足该定理的断言。事实上，由于 $w(u_2u_3) > w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$，$w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。有 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = 3 < 7/\varepsilon$，并且由于对每个 $v \in V$， $d_{A_2\Delta P}(v) \leq d_{A_2}(v) \leq 2$， $A_2\Delta P$是一个 2-匹配。此外，根据此情形假设，$A_2\Delta P = A_2\Delta T$是 $\mathcal{T}$-无三角形的。

接下来我们假设 $w(u_2u_3) \leq w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$。注意，由于 u_1的度约束， $u_1u_1 \notin A_2$。我们假设 $u_1u_1 \in E$，否则我们将其以任意非负权加入 E 。令（见图5）：

- $A'_1 := A_1$, $A'_2 := (A_2 \setminus \{u_1u_2, u_1u_3\}) \cup \{u_1u_1, u_2u_3\}$,

对于所有 $e \in E \setminus \{u_1u_1\}$, • $w'(e) := w(e)$,

- $w'(u_1u_1) := w(u_1u_2) + w(u_1u_3) - w(u_2u_3)$,

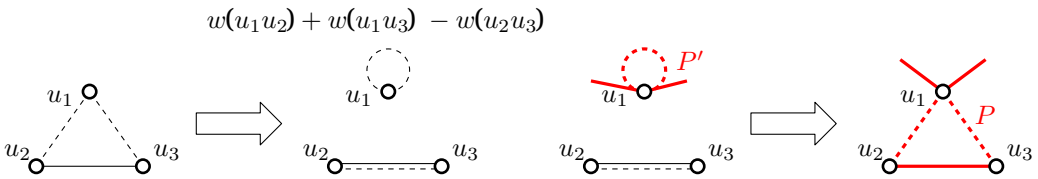


图5：情形 **(4.2)** 的归约。

- $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$。

注意， A'_1 和 A'_2 是 G的 2-匹配。显然， A'_1 是无 $\mathcal{T}'$的；根据此情形假设， $A_2\Delta T$是无 $\mathcal{T}$的，因此 $A'_2 = (A_2\Delta T) \cup \{u_1u_1\}$ 也无 $\mathcal{T}'$。注意， $w'(A'_1) = w(A_1)$以及$w'(A'_2) = w(A_2)$。我们还注意到 $w'(u_1u_1) \geq 0$，因为 $w(u_2u_3) \leq w(u_1u_2) + w(u_1u_3)$。

由于 A'_1 和 A'_2 都是 $\mathcal{T}'$-自由的 2-匹配，且 $w'(A'_2) = w(A_2) < (1-\varepsilon)w(A_1) = (1-\varepsilon)w'(A'_1)$，因此可以应用归纳假设，找到一条关于 (A'_1, A'_2) 的交替迹 P'，使得 $|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \leq 7/\varepsilon$，$w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2)$，并且 $A'_2\Delta P'$ 是 G' 的 $\mathcal{T}'$-自由 2-匹配。若$u_1u_1 \in P'$，则令 P 为将迹 u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3 插入以替代 u_1u_1 后得到的交替迹（见图5右侧）。若 $u_1u_1 \notin P'$，则令 $P{:=}\, P'$。注意， P 是关于 (A_1, A_2) 的交替迹。下面证明 P 满足定理的条件。

注意，无论 $u_1u_1 \in P'$ 是否成立， $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = |P'| + 2\mathrm{sl}(P') \leq 7/\varepsilon$均成立。现在我们证明 $w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。如果 $u_1u_1 \notin P'$，那么 $A_2\Delta P = ((A'_2\Delta P') \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$。因此，

$$\begin{aligned} w(A_2\Delta P) &= w'(A'_2\Delta P') - w'(u_1u_1) - w'(u_2u_3) + w(u_1u_2) + w(u_1u_3) \\ &= w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2) = w(A_2). \end{aligned}$$

另一方面，如果 $u_1u_1 \in P'$，那么 $A_2\Delta P = A'_2\Delta P'$。因此， $w(A_2\Delta P) = w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2) = w(A_2)$。在这两种情形下，均有 $w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。还需证明 $A_2\Delta P$ 是一个不含 $\mathcal{T}$ 的 2-匹配。

如果 $u_1u_1 \notin P'$，那么 $A_2\Delta P = ((A'_2\Delta P') \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$；而如果 $u_1u_1 \in P'$，则 $A_2\Delta P = A'_2\Delta P'$。在这两种情形下，对所有 $u \in V$，都有 $d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A'_2\Delta P'}(u) \leq 2$。因此，$A_2\Delta P$ 是一个 2-匹配。

由于 $A'_2\Delta P'$ 是 $\mathcal{T}'$-自由的， $A_2\Delta P \subseteq (A'_2\Delta P') \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$，且 u_1u_2 和 u_1u_3 都不包含在 $\mathcal{T}'$ 的任何三角形中，因此 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}'$-自由的。现在，若 $u_1u_1 \notin P'$，则 $A_2\Delta P = ((A'_2\Delta P') \setminus \{u_1u_1, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_1u_3\}$，从而 $(A_2\Delta P) \cap T = \{u_1u_2, u_1u_3\}$，所以根据观察 **1**， $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$-自由的。若 $u_1u_1 \notin P'$，则 $A_2\Delta P = A'_2\Delta P'$，因此 $A_2\Delta P$ 既不包含 u_1u_2，也不包含 u_1u_3，这意味着它是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2, u_1u_3\})$-自由的。因此，$A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。断言得证。

(5) 存在一个三角形 $T \in \mathcal{T}$，满足 $|A_1 \cap T| = 2$。

设 $T = \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3\}$。由于情形 **(1)**、**(2)** 和 **(3)** 均不成立，我们不妨假设存在一个三角形 $T' = \{u_2u_4, u_2u_3, u_3u_4\} \in \mathcal{T}$，满足 $u_4 \in V \setminus \{u_1, u_2, u_3\}$、$\{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_4, u_3u_4\} \subseteq A_1 \setminus A_2$ 和 $u_2u_3 \in A_2 \setminus A_1$（见图 6 和图 7 左侧）。我们首先证明如下结论。

断言 **1.** 对于每个 $T'' \in \mathcal{T}(T \cup T')$， T'' 的节点集包含于 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

证明。假设存在一个三角形 $T'' \in \mathcal{T}(T \cup T')$，其节点集 T'' 包含一个节点 $u \in V \setminus \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，从而得出矛盾。注意，由于情形 **(1)** 不成立， T'' 包含于 $A_1 \cup A_2$ 中。令 $T'' = \{xy, xu, yu\}$，其中 $xy \in \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_4, u_3u_4, u_2u_3\}$。

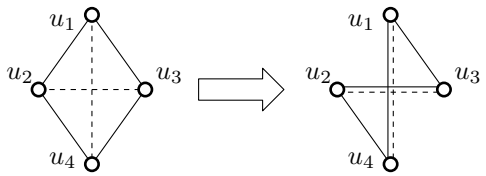


图 6：情形 (**5.1**) 的归约。

如果 $xy = u_1u_2$，那么根据 A_1 的度约束， u_1u 和 u_2u 属于 $A_2 \setminus A_1$。于是，由于 $(A_2\Delta T'') \cap T = \{u_1u_2, u_2u_3\}$，根据观察 1， $A_2\Delta T''$ 是 $\mathcal{T}(\{u_1u_2\})$-free 的。这与 $A_2\Delta T'' \subseteq A_2 \cup \{u_1u_2\}$ 一起表明， $A_2\Delta T''$ 是 $\mathcal{T}$-free 的。因此， T'' 满足情形 (**4**) 中的条件，矛盾。当 $xy \in \{u_1u_3, u_2u_4, u_3u_4\}$ 时，同样的论证也适用。如果 $xy = u_2u_3$，那么根据 A_1 的度约束， u_2u 和 u_3u 属于 $A_2 \setminus A_1$。于是， T'' 包含于 A_2 中，这与 A_2 是 $\mathcal{T}$-free 的假设矛盾。□

我们考虑以下子情形。

(5.1) $\boldsymbol{u_1u_4 \in A_2}$. 注意到 $u_1u_4 \notin A_1$，这是因为 u_1 和 u_4上的度约束。若$w(u_1u_2) + w(u_3u_4) > w(u_1u_4) + w(u_2u_3)$，则令 $P := \{u_1u_4, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\}$。我们断言$P$满足该定理的条件。事实上，由于 $w(u_1u_2) + w(u_3u_4) > w(u_1u_4) + w(u_2u_3)$， $w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。于是有 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = 4 < 7/\varepsilon$，并且由于 P是一条偶闭交替迹， $A_2\Delta P$是一个2-匹配。此外，由断言 1， $A_2\Delta P$中仅可能的三角形为 T、T'、$\{u_1u_2, u_2u_4, u_1u_4\}$和 $\{u_1u_3, u_3u_4, u_1u_4\}$，但它们都不在 $A_2\Delta P$中，因此 $A_2\Delta P$是无 $\mathcal{T}$的。

从现在起，我们假设 $w(u_1u_2) + w(u_3u_4) \le w(u_1u_4) + w(u_2u_3)$。我们设定（见图 6）：

- $A'_1 := (A_1 \setminus \{u_1u_2, u_3u_4\}) \cup \{u_1u_4, u_2u_3\}$, $A'_2 := A_2$
- $w'(e) := w(e)$ for all $e \in E$,
- $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(T \cup T')$.

注意， A'_1 和 A'_2 都是 $\mathcal{T}'$-自由的 G' 的 2-匹配。此外， $w'(A'_2) = w(A_2)$，且 $w'(A'_1) = w(A_1) - w(u_1u_2) - w(u_3u_4) + w(u_1u_4) + w(u_2u_3) \ge w(A_1)$，因为 $w(u_1u_2) + w(u_3u_4) \le w(u_1u_4) + w(u_2u_3)$。因此，根据定理的假设， $w'(A'_2) = w(A_2) < (1-\varepsilon)w(A_1) \le (1-\varepsilon)w'(A'_1)$。我们应用归纳假设，找到一条关于 (A'_1, A'_2) 的交替迹 P'，使得$|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$, $w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2)$，且 $A'_2\Delta P'$ 是 G' 的 $\mathcal{T}'$-自由 2-匹配。令 $P := P'$，并注意到 P 是关于 (A_1, A_2) 的一条交替迹。我们断言， P 满足定理的条件。

有 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = |P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$，且由于 $P = P'$和 $A_2 = A'_2$，还有 $w(A_2\Delta P) = w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2) = w(A_2)$。同样，由于 $P = P'$和 $A_2 = A'_2$，且 $A'_2\Delta P'$ 是一个 2-匹配， $A_2\Delta P$ 也是一个 2-匹配。接下来只需证明 $A_2\Delta P$是 $\mathcal{T}$-自由的。

由于 $A'_2\Delta P'$是 $\mathcal{T}'$-自由的， $A_2\Delta P$也是如此。根据断言 1，接下来只需证明 $A_2\Delta P$不包含 T， T', T'': $= \{u_1u_4, u_3u_4, u_1u_3\}$，以及 $T''' := \{u_1u_4, u_2u_4, u_1u_2\}$。由于 $u_1u_2 \notin A_2\Delta P$， T和 T'''都不在 $A_2\Delta P$中。由于 $u_3u_4 \notin A_2\Delta P$， T'和 T''都不在 $A_2\Delta P$中。断言得证。

(5.2) $\boldsymbol{u_1u_4 \notin A_2}$。 注意，由于 u_1 和 u_4 上的度约束， $u_1u_4 \notin A_1$。我们通过以与情形 (**2**) 类似的方式拆分每个 u_2 和 u_3，构造辅助图 $G' = (V',\ E',\ w')$。令（见图 7 右侧）：

- $V' = V \cup \{u'_2, u'_3\}$, $E' = (E \setminus \{u_1u_2, u_3u_4, u_2u_3\}) \cup \{u_1u'_2, u'_3u_4, u'_2u'_3, u_2u'_2, u_3u'_3\}$,
- $A'_1 := (A_1 \setminus \{u_1u_2, u_3u_4\}) \cup \{u_1u'_2, u'_3u_4, u_2u'_2, u_3u'_3\}$, $A'_2 := (A_2 \setminus \{u_2u_3\}) \cup \{u'_2u'_3, u_2u'_2, u_3u'_3\}$,

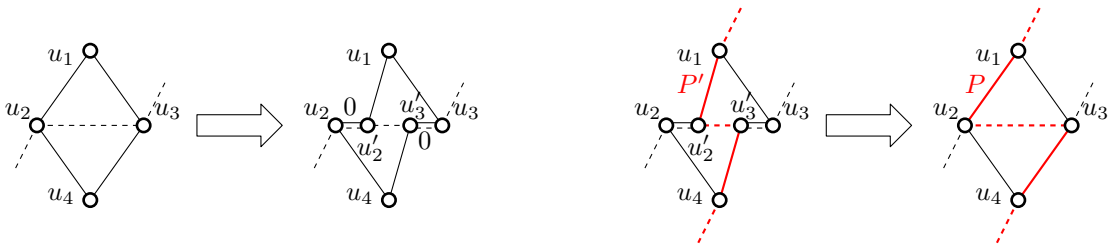


图 7：情形 **(5.2)** 的归约。

对所有 $e \in E \setminus \{u_1u_2, u_3u_4, u_2u_3\}$，• $w'(e) := w(e)$,

• $w'(u_1u'_2) = w(u_1u_2)$，$w'(u'_3u_4) = w(u_3u_4)$，$w'(u'_2u'_3) = w(u_2u_3)$，$w'(u_2u'_2) = w'(u_3u'_3) = 0$,

• $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(T \cup T')$。

注意到 A'_1 和 A'_2 都是G'的2-匹配。此外，由于 A_1 和 A_2 是无 $\mathcal{T}$的，且添加到 A_1 和 A_2 的边不在 G中，因此 A'_1 和 A'_2 都是无 $\mathcal{T}'$的。同样注意到$w'(A'_1) = w(A_1)$且 $w'(A'_2) = w(A_2)$。

由于 A'_1 和 A'_2 都是无 $\mathcal{T}'$的2-匹配，且 $w'(A'_2) = w(A_2) < (1-\varepsilon)w(A_1) = (1-\varepsilon)w'(A'_1)$，可以应用归纳假设找到一条关于$(A'_1, A'_2)$的交替迹 P'，使得 $|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$，$w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2)$，并且 $A'_2\Delta P'$ 是 G'的一个无 $\mathcal{T}'$的2-匹配。设 P为将 $u_1u'_2$ 替换为 u_1u_2、将 $u'_2u'_3$ 替换为 u_2u_3、将 u'_3u_4 替换为 u_3u_4（若它们中的任一个出现在 P' 中）所得到的迹（见图 7 右侧）。注意到 P是一条关于(A_1, A_2)的交替迹。我们断言 P 满足该定理的条件。

注意到 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = |P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$。现在我们证明 $w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。注意，在 G 中，A_2（分别为 $A_2\Delta P$）是通过同时收缩 $u_2u'_2$ 和 $u_3u'_3$，由 G' 中的 A'_2（分别为 $A'_2\Delta P'$）得到的。由于 $w(u_1u_2) = w'(u'_1u_2)$、$w(u_2u_3) = w'(u'_2u'_3)$、$w(u_3u_4) = w'(u'_3u_4)$，并且 $w'(u_2u'_2) = w'(u_3u'_3) = 0$，这一观察表明 $w(A_2\Delta P) = w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2) = w(A_2)$。

现在证明 $A_2\Delta P$ 是 G 的 2-匹配。由于 $A_2\Delta P$ 是通过收缩 $u_2u'_2$ 和 $u_3u'_3$ 从 $A'_2\Delta P'$ 得到的，对于每个节点 $u \in V \setminus \{u_2, u_3\}$，都有 $d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A'_2\Delta P'}(u) \le 2$。由于边 $u_2u'_2$ 同时计入 $d_{A'_2\Delta P'}(u_2)$ 和 $d_{A'_2\Delta P'}(u'_2)$，但不在 $A_2\Delta P$ 中，因此有 $d_{A_2\Delta P}(u_2) = d_{A'_2\Delta P'}(u_2) - 1 + d_{A'_2\Delta P'}(u'_2) - 1 \le 2$。对 u_3 的论证类似，因此对于每个 $u \in V$，都有$d_{A_2\Delta P}(u) \le 2$。

最后，只需证明 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。由于 $A'_2\Delta P'$ 是 $\mathcal{T}'$-自由的，因此 $A_2\Delta P$ 也是如此。现在证明 $A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}(T \cup T')$-自由的，这便意味着它是 $\mathcal{T}$-自由的。根据断言 1 以及此情形假设 $u_1u_4 \notin A_1 \cup A_2$，$\mathcal{T}$ 中不属于 $\mathcal{T}'$ 的三角形只有 T 和 T'。注意，若$u_1u'_2 \in P'$，则 $u'_2u'_3 \in P'$，这是因为 u'_2 上的度约束。这意味着，若 $u_1u_2 \in P$，则 $u_2u_3 \in P$。进而可知，若 $u_1u_2 \in A_2\Delta P$，则 $u_2u_3 \notin A_2\Delta P$。因此，$T$ 不在 $A_2\Delta P$ 中。类似地，若 $u_3u_4 \in A_2\Delta P$，则 $u_2u_3 \notin A_2\Delta P$，所以 T' 不在 $A_2\Delta P$ 中。断言得证。

（6）存在一个三角形 $T \in \mathcal{T}$，满足 $|A_2 \cap T| = 2$。

令 $T = \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3\}$。由于情形 **(1)**、**(2)** 和 **(4)** 均不成立，我们不失一般性地假设存在一个三角形 $T' = \{u_2u_4, u_2u_3, u_3u_4\}$，满足 $u_4 \in V\setminus\{u_1, u_2, u_3\}$、$\{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_4, u_3u_4\} \subseteq A_2 \setminus A_1$ 和 $u_2u_3 \in A_1 \setminus A_2$（见图 8 和图 9 左侧）。我们将使用与前一种情形中类似的断言。

断言 2. 对于每个 $T'' \in \mathcal{T}(T \cup T')$，$T''$ 的节点集包含于 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

证明。 证明与断言 1 的证明对称。 □

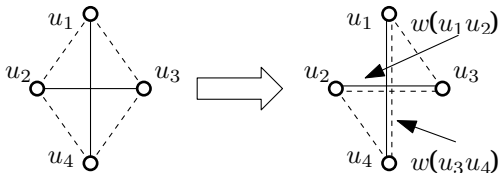


图 8：情形 (6.1) 的归约。

我们考虑以下子情形。

(6.1) $u_1u_4 \in A_1$. 注意到 $u_1u_4 \notin A_2$，这是因为 u_1 和 u_4上的度约束。若$w(u_1u_4) + w(u_2u_3) > w(u_1u_2) + w(u_3u_4)$，则令 $P := \{u_1u_4, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\}$。我们断言$P$满足该定理的条件。事实上，由于 $w(u_1u_4) + w(u_2u_3) > w(u_1u_2) + w(u_3u_4)$，$w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。于是有 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = 4 < 7/\varepsilon$，并且由于 P是一条偶闭交替迹，$A_2\Delta P$是一个 2-匹配。此外，由断言 2，$A_2\Delta P$中仅可能的三角形为 T、T'、$\{u_1u_2, u_2u_4, u_1u_4\}$和 $\{u_1u_3, u_3u_4, u_1u_4\}$，但它们都不在 $A_2\Delta P$中，因此 $A_2\Delta P$是 $\mathcal{T}$-无的。

从现在起，我们假设 $w(u_1u_4) + w(u_2u_3) \le w(u_1u_2) + w(u_3u_4)$。我们设（见图 8）：

- $A'_1 := A_1$, $A'_2 := (A_2 \setminus \{u_1u_2, u_3u_4\}) \cup \{u_1u_4, u_2u_3\}$
- $w'(e) := w(e)$ 对所有 $e \in E \setminus \{u_2u_3, u_1u_4\}$ 均成立,
- $w'(u_2u_3) = w(u_1u_2)$, $w'(u_1u_4) = w(u_3u_4)$,
- $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(T \cup T')$。

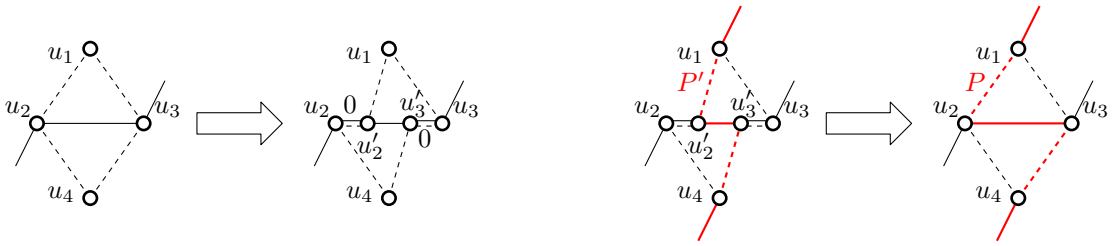
注意，A'_1 和 A'_2 都是 $\mathcal{T}'$-自由的 2-匹配。此外，$w'(A'_2) = w(A_2)$，并且 $w'(A'_1) = w(A_1) - w(u_1u_4) - w(u_2u_3) + w(u_1u_2) + w(u_3u_4) \ge w(A_1)$，因为 $w(u_1u_4) + w(u_2u_3) \le w(u_1u_2) + w(u_3u_4)$。因此，根据定理的假设，$w'(A'_2) = w(A_2) < (1-\varepsilon)w(A_1) \le (1-\varepsilon)w'(A'_1)$。于是可以应用归纳假设，找到一条关于 (A'_1, A'_2) 的交替迹 P'，使得$|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$, $w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2)$，并且 $A'_2\Delta P'$是 $\mathcal{T}'$-自由的 2-匹配。令 $P := P'$，并注意到 P 是关于 (A_1, A_2) 的交替迹。我们断言，P 满足定理的条件。

由此可得 $|P|+2\mathrm{sl}(P) = |P'|+2\mathrm{sl}(P') \le 7/\varepsilon$。注意到 $A_2\Delta P = ((A'_2\Delta P')\setminus\{u_1u_4, u_2u_3\})\cup\{u_1u_2, u_3u_4\}$。由于 $w'(u_1u_4) = w(u_1u_2)$ 且 $w'(u_2u_3) = w(u_3u_4)$，可得 $w(A_2\Delta P) = w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2) = w(A_2)$。再者，由于对每个 $u \in V$ 均有 $A_2\Delta P = ((A'_2\Delta P') \setminus \{u_1u_4, u_2u_3\}) \cup \{u_1u_2, u_3u_4\}$,$d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A'_2\Delta P'}(u) \le 2$，因此 $A_2\Delta P$是一个2-匹配。剩下只需证明$A_2\Delta P$ 是 $\mathcal{T}$-自由的。

由于 $A'_2\Delta P'$ 不含 $\mathcal{T}'$，因此 $A_2\Delta P$ 也不含 $\mathcal{T}'$。根据断言 2，只需证明 $A_2\Delta P$ 不包含 T，$T', T'' := \{u_1u_4, u_3u_4, u_1u_3\}$和 $T''' := \{u_1u_4, u_2u_4, u_1u_2\}$。由于 $u_2u_3 \notin A_2\Delta P$，$T$ 和 T' 均不在 $A_2\Delta P$ 中。由于 $u_1u_4 \notin A_2\Delta P$，$T$ 和 T' 均不在 $A_2\Delta P$ 中。断言得证。

(6.2) $u_1u_4 \notin A_1$。注意到 $u_1u_4 \notin A_2$，这是因为 u_1 和 u_4 上的度约束。我们通过拆分 u_2 和 u_3 来构造辅助图 $G' = (V', E', w')$，拆分方式与情形(5.2)相同。令（见图 9 左图）：

- $V' = V \cup \{u'_2, u'_3\}$, $E' = (E \setminus \{u_1u_2, u_3u_4, u_2u_3\}) \cup \{u_1u'_2, u'_3u_4, u'_2u'_3, u_2u'_2, u_3u'_3\}$,
- $A'_1 := (A_1 \setminus \{u_2u_3\}) \cup \{u'_2u'_3, u_2u'_2, u_3u'_3\}$, $A'_2 := (A_2 \setminus \{u_1u_2, u_3u_4\}) \cup \{u_1u'_2, u'_3u_4, u_2u'_2, u_3u'_3\}$,
- $w'(e)$: 对所有 $e \in E \setminus \{u_1u_2, u_3u_4, u_2u_3\}$, $= w(e)$,



情形 (**6.2**) 的归约如图 9 所示。

- $w'(u_1u'_2) = w(u_1u_2)$, $w'(u'_3u_4) = w(u_3u_4)$, $w'(u'_2u'_3) = w(u_2u_3)$, $w'(u_2u'_2) = w'(u_3u'_3) = 0$,
- $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(T \cup T')$.

注意，A'_1 和 A'_2 都是 G'的 2-匹配。此外，由于 A_1 和 A_2 均不含 $\mathcal{T}$，且添加到 A_1 和 A_2 中的边不属于 G，因此 A'_1 和 A'_2 均不含 $\mathcal{T}'$。还需注意，$w'(A'_1) = w(A_1)$，且 $w'(A'_2) = w(A_2)$。

由于 A'_1 和 A'_2 都是 $\mathcal{T}'$-自由 2-匹配，且 $w'(A'_2) = w(A_2) < (1-\varepsilon)w(A_1) = (1-\varepsilon)w'(A'_1)$，因此可以应用归纳假设，找到关于 (A'_1, A'_2) 的交替迹 P'，使得 $|P'| + 2\mathrm{sl}(P') \leq 7/\varepsilon$, $w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2)$，并且 $A'_2\Delta P'$ 是 G' 的 $\mathcal{T}'$-自由 2-匹配。令 P 表示这样得到的迹：如果 $u_1u'_2$、$u'_2u'_3$ 和 u'_3u_4 中有任何一个出现在 P' 中，则分别将其替换为 u_1u_2、u_2u_3 和 u_3u_4（见图 9 右侧）。注意，P 是关于 (A_1, A_2) 的交替迹。我们断言，P 满足该定理的条件。

注意到 $|P| + 2\mathrm{sl}(P) = |P'| + 2\mathrm{sl}(P') \leq 7/\varepsilon$。现在我们证明 $w(A_2\Delta P) > w(A_2)$。注意，在 G 中的 A_2（分别为 $A_2\Delta P$）是通过同时收缩 $u_2u'_2$ 和 $u_3u'_3$，由 G' 中的 A'_2（分别为 $A'_2\Delta P'$）得到的。由于 $w(u_1u_2) = w'(u'_1u_2)$、$w(u_2u_3) = w'(u'_2u'_3)$、$w(u_3u_4) = w'(u'_3u_4)$，且 $w'(u_2u'_2) = w'(u_3u'_3) = 0$，这一观察表明 $w(A_2\Delta P) = w'(A'_2\Delta P') > w'(A'_2) = w(A_2)$。

现在证明 $A_2\Delta P$ 是 G 的 2-匹配。由于 $A_2\Delta P$ 是通过收缩 $A'_2\Delta P'$ 中的 $u_2u'_2$ 和 $u_3u'_3$ 得到的，对于每个节点 $u \in V \setminus \{u_2, u_3\}$，$d_{A_2\Delta P}(u) = d_{A'_2\Delta P'}(u) \leq 2$。由于边 $u_2u'_2$ 同时计入 $d_{A'_2\Delta P'}(u_2)$ 和 $d_{A'_2\Delta P'}(u'_2)$，但不在 $A_2\Delta P$ 中，因此有 $d_{A_2\Delta P}(u_2) = d_{A'_2\Delta P'}(u_2) - 1 + d_{A'_2\Delta P'}(u'_2) - 1 \leq 2$。对 u_3 也可作类似论证，因此对每个 $u \in V$，都有$d_{A_2\Delta P}(u) \leq 2$。

最后，还需证明 $A_2\Delta P$是无 $\mathcal{T}$的。由于 $A'_2\Delta P'$是无 $\mathcal{T}'$的，故 $A_2\Delta P$亦然。现在我们证明 $A_2\Delta P$是无 $\mathcal{T}(T \cup T')$的，从而它是无 $\mathcal{T}$的。由断言 2 以及该情形假设 $u_1u_4 \notin A_1 \cup A_2$，$\mathcal{T}$中不在 $\mathcal{T}'$ 中的三角形仅有 T和 T'。注意，若 $u'_2u'_3 \in P'$，则由于 u'_2和 u'_3上的度约束，$u_1u'_2 \in P'$与 $u'_3u_4 \in P'$均成立。由此可知，若 $u_2u_3 \in P$，则 u_1u_2，$u_3u_4 \in P$，进而若 $u_2u_3 \in A_2\Delta P$，则 u_1u_2，$u_3u_4 \notin A_2\Delta P$，因此 T与 T'均不在 $A_2\Delta P$中。断言得证。 □

致谢

本研究得到京都大学与丰田汽车公司联合项目“面向移动社会的先进数学科学”、日本学术振兴会科研费项目（编号：JP22H05001 和 JP24K02901）以及 JST SPRING（项目编号：JP MJSP2110）的资助。前两位作者还获得瑞士国家科学基金会项目 200021_200731/1 的部分资助。

参考文献

[1] A. Adamaszek、M. Mnich 和 K. Paluch。(1,2)-旅行商问题的新近似算法。载于第*45*届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP 2018*），第107卷，莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*），第9:1–9:14页，2018年。[2] M. A. Babenko。偶因子和无平方简单 b-匹配的改进算法。*Algorithmica*，64(3):362–383，2012年11月。[3] K. Bérczi。次三正则图的无三角形 2-匹配多面体。技术报告 TR- 2012-02，Egerváry 研究组，布达佩斯，2012年。http://egres.elte.hu。[4] K. Bérczi 和 L. A. Végh。度有界图中的受限 b-匹配。载于第*14*届整数规划与组合优化会议论文集（*IPCO 2010*），第6080卷，计算机科学讲义，第43–56页，2010年。[5] M. Bläser 和 L. S. Ram。针对距离为一和二的旅行商问题的改进近似算法。载于 M. Liśkiewicz 和 R. Reischuk（编），计算理论基础，第504–515页，柏林、海德堡，2005年。Springer Berlin Heidelberg。[6] M. Bosch-Calvo、M. Garg、F. Grandoni、F. Hommelsheim、A. J. Ameli 和 A. Lindermayr。二边连通性的 5/4-近似算法。载于 M. Koucký 和 N. Bansal（编），第*57*届 *ACM* 计算理论研讨会年会论文集（*STOC 2025*），布拉格，捷克，*2025*年*6*月*23*日至*27*日，第653–664页。ACM，2025年。[7] M. Bosch-Calvo、F. Grandoni 和 A. J. Ameli。双顶点连通性的 4/3 近似算法。载于 K. Etessami、U. Feige 和 G. Puppis（编），第*50*届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP 2023*），*2023*年*7*月*10*日至*14*日，帕德博恩，德国，第261卷，*LIPIcs*，第29:1–29:13页。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2023年。[8] M. Bosch-Calvo、F. Grandoni 和 A. J. Ameli。无三角形 2-匹配的多项式时间近似方案。*arXiv*预印本 *arXiv:2311.11869*，2023年。[9] K. Bérczi 和 Y. Kobayashi。一种用于 (n-3)-连通性增强问题的算法：跳系统方法。组合理论杂志 *B*辑，102(3):565–587，2012年。[10] J. Cheriyan、A. Sebő 和 Z. Szigeti。改进最小 2-边连通生成子图的 1.5-近似算法。*SIAM* 离散数学杂志，14(2):170–180，2001年。[11] G. Cornuéjols 和 W. Pulleyblank。一个带附加条件的匹配问题。离散数学，29(2):135–159，1980年。[12] M. Garg、F. Grandoni 和 A. J. Ameli。二边连通性的改进近似算法。载于第*34*届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会年会论文集（*SODA 2023*），第2368–2410页，2023年。[13] N. Garg、S. S. Vempala 和 A. Singla。通过更好的下界技术改进双连通子图的近似算法。载于 V. Ramachandran（编），第四届 *ACM/SIGACT-SIAM* 离散算法研讨会论文集，*1993*年*1*月*25*日至*27*日，奥斯汀，得克萨斯州，美国，第103–111页。ACM/SIAM，1993年。[14] D. Hartvigsen。匹配理论的拓展。博士论文，卡内基梅隆大学，1984年。可在 https://david-hartvigsen.net 查阅。

[15] D. Hartvigsen. 二分图中最大无平方因子2-匹配的求解. 组合理论杂志，*B*辑, 96(5):693–705, 2006.[16] D. Hartvigsen. 一般图中无三角形2-因子的求解. 《图论杂志》, 106(3):581–662, 2024.[17] D. Hartvigsen与Y. Li. 次三正则图中的无三角形简单2-匹配（扩展摘要）. 载于第*12*届整数规划与组合优化国际会议论文集, IPCO '07, 第43–52页, 柏林, 海德堡, 2007. 施普林格出版社.[18] K. Heeger与J. Vygen. 至多含$\frac{10}{7}OPT$条边的二连通生成子图. *SIAM* 离散数学杂志, 31(3):1820–1835, 2017.[19] F. Hommelsheim、A. Lindermayr与Z. Liu. 二边连通性的优于5/4近似. 载于第*36*届年度*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集（*SODA 2026*）, 第1468–1520页, 2026. 预印本见arXiv:2509.19655.[20] C. Hunkenschröder、S. Vempala与A. Vetta. 最小2-边连通子图问题的4/3-近似算法. *ACM*算法汇刊, 15(4):1–28, 2019.[21] Y. Iwamasa、Y. Kobayashi与K. Takazawa. 经由布尔边约束满足问题求解最大受限 t-匹配. 载于第*32*届欧洲算法年度研讨会论文集（*ESA 2024*）, $LIPIcs$第308卷, 第75:1–75:15页, 2024.[22] S. Khuller与U. Vishkin. 双连通性近似与图切割. *ACM*学报, 41(2):214–235, 1994.[23] Z. Király. 二分图中的受限t-匹配. 技术报告 QP-2009-04, Egerváry 研究组, 布达佩斯, 2009. http://egres.elte.hu.[24] Y. Kobayashi. 在次三正则图中寻找最大无三角形 2-匹配的简单算法. 离散优化, 7(4):197–202, 2010.[25] Y. Kobayashi. 带边不相交禁止三角形的加权无三角形 2-匹配问题. 《数学规划》, 192(1–2):675–702, 2022.[26] Y. Kobayashi与T. Noguchi. 经由无三角形二边覆盖求解二边连通子图问题的近似算法. 载于 第*34*届算法与计算国际研讨会（*ISAAC 2023*）, 莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*）第283卷, 第49:1–49:10页, 2023.[27] Y. Kobayashi与T. Noguchi. 通过简单分解定理验证无三角形 2-匹配的多项式时间近似方案. 载于*2025*年算法简洁性研讨会（*SOSA*）, 第281–289页, 2025.[28] M. Makai. 关于二分图的最大费用$K_{t,t}$-无 t-匹配. *SIAM* 离散数学杂志, 21:349–360, 2007.[29] Y. Nam. 匹配理论：具有度约束及其他性质的子图. 博士论文, 英属哥伦比亚大学, 1994.[30] K. Paluch. 无三角形 2-匹配. *arXiv* 预印本 *arXiv:2311.13590*, 2023.

[31] K. Paluch与M. Wasylkiewicz. 经由半边的受限 t-匹配. 载于第*29*届欧洲算法年度研讨会论文集（*ESA 2021*）, $LIPIcs$第204卷, 第73:1–73:17页, 2021.[32] K. Paluch与M. Wasylkiewicz. 次三正则图中受限2-匹配的简单组合算法——经由半边. 《信息处理快报》, 171:106146, 2021.[33] G. Pap. 关于匹配、偶因子与无平方因子2-因子的组合算法. 《数学规划》, 110(1):57–69, 2007.[34] A. Schrijver. 组合优化：多面体与效率. 施普林格科学与商业媒体, 2003.[35] A. Sebő与J. Vygen. 借助更优的耳得到更短的巡回：图旅行商问题的7/5近似、路径版本的3/2近似，以及双边连通子图的4/3近似. 《组合数学》, 34(5):597–629, 2014.[36] K. Takazawa. 二分图上的加权$K_{t,t}$-无 t-因子算法. 《运筹学数学》, 34:351–362, 2009.[37] S. Vempala与A. Vetta. 最小双连通子图的因子4/3近似. 载于第三届组合优化近似算法国际研讨会论文集（*APPROX 2000*）, 第262–273页, 2000.