arXiv:2603.09204v1 [math.SP] 10 Mar 2026

非自伴狄拉克算子的半经典 WKB 问题

SETSURO FUJII ´E*、NICHOLAS HATZIZISIS† 和 SPYRIDON KAMVISSIS‡

Abstract. 我们回顾了关于带有势 $A\exp\{iS/\epsilon\}$ 的非自伴狄拉克算子散射数据半经典行为（$\epsilon \downarrow 0$）的一些近期严格结果，其中 A 和 S 都是可微函数，并在 $x \to \pm\infty$ 趋于常数。我们采用了所谓的精确 WKB 方法，或较早的 Olver 的 WKB 理论。我们的分析旨在理解具有初始数据 $A\exp\{iS/\epsilon\}$ 的聚焦型三次 NLS 方程的半经典行为；众所周知，Zakharov 和 Shabat 发现，狄拉克算子的谱分析使我们能够通过逆散射理论求得 NLS 方程的解。

Contents

1. 引言 1 2. 零初始相位情形 2 3. 非解析数据情形 5 4. 非平凡初始相位情形 8 4.1. 一般方法 8 4.2. 精确 WKB 方法 11 4.3. 简单转向点附近的连接 13 4.4. 渐近谱弧上一般点附近的特征值 15 4.5. 一个特殊情形的几何 17 4.6. 零点附近的特征值 18 参考文献 18

值 *Percy Deift* 80th 岁生日之际，谨致敬意与感谢!

1. Introduction

考虑半经典极限（$\epsilon \downarrow 0$）下一维非线性薛定¨谔方程带三次非线性的初值问题之解:

$$\begin{cases} i\epsilon\partial_t\psi + \frac{\epsilon^2}{2}\partial_x^2\psi + |\psi|^2\psi = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ \psi(x,0) = A(x)\exp\{iS(x)/\epsilon\}, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 A 和 S 是定义在实数轴上的实值函数。根据 [20], 中的开创性发现，对于任意固定的 $\epsilon > 0$，都可以通过所谓的逆散射方法 来研究这一初值问题。极限 $\epsilon \downarrow 0$ 需要

进行两个层次的仔细分析。半经典分析的一个必要首要组成部分是对相关狄拉克（或 Zakharov-Shabat）算子 $\mathfrak{D}_\epsilon$ 进行 $direct$ 谱分析和散射分析，其定义为

$$\mathfrak{D}_\epsilon = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx} & -iA(x)\exp\{iS(x)/\epsilon\} \\ -iA(x)\exp\{-iS(x)/\epsilon\} & \frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx} \end{bmatrix}.$$

第二部分当然是对逆问题的分析，颇具矛盾意味的是，它反而是最早得到严格研究的内容。20 年前，我们曾撰写一篇回顾文章献给 Percy Deift，专门讨论这一主题（[10], [12], [13], [11]）。如今，我们姗姗来迟地回到了正问题！

本篇回顾的主要目标是介绍关于算子 $\mathfrak{D}_\epsilon$的散射数据（反射系数、特征值及其对应的归一化常数）半经典行为的一些近期严格结果。

2. The case of zero initial phase

我们从初始相位 $S(x) = 0$ 的情形开始。我们的第一个结果假设初始数据 $A(x)$ 存在解析延拓。我们研究了狄拉克算子的反射系数渐近性和特征值分布

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx} & -iA(x) \\ -iA(x) & \frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx} \end{bmatrix}.$$

这里， $\epsilon > 0$ 是半经典小参数，而 $A(x)$是满足以下条件的函数。

(A1)： $A(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$上的实值正光滑函数，并可解析延拓至复域

$$D_0 = D(\rho_0, \theta_0) := \{x \in \mathbb{C}; |\Im\, x| < \max(\rho_0, (\tan\theta_0)|\Re\, x|)\}$$

对于某些正数 ρ_0 和 θ_0。此外，存在一个正数 τ，使得当 $x \to \infty$ 属于 D_0时，

$$A(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1-\tau}).$$

在此假设下，已知非自伴算子 L 的谱由连续谱 $\mathbb{R}$ 以及有限个特征值组成；这些特征值成共轭复数对，并且靠近 $i[-A_0, A_0]$，其中 A_0： 当 ϵ 较小时，$= \max_{x\in\mathbb{R}} A(x) > 0$。

在介绍我们的结果之前，先提醒读者谱／散射数据的定义。对于 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，方程 $L\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f}$存在一对解$\mathbf{f}^r_+(x,\epsilon)$、$\mathbf{f}^r_-(x,\epsilon)$，当 x的实部趋于D_0内的 $\Re\, x \to \infty$时，它们的行为如

$$\mathbf{f}^r_+ \sim \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x/\epsilon} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^r_- \sim \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x/\epsilon} \\ 0 \end{bmatrix},$$

以及一对解$\mathbf{f}^l_+(x,\epsilon)$、$\mathbf{f}^l_-(x,\epsilon)$，当 $\Re x \to -\infty$属于 D_0时，它们的行为如

$$\mathbf{f}^l_+ \sim \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x/\epsilon} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^l_- \sim \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x/\epsilon} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

这些解称为约斯特解。

每一对解都由条件唯一确定，并构成一个解基。令$T(\lambda,\ \epsilon)$为依赖于 λ 和 ϵ、表示这两对解之间基变换的 2×2 常数矩阵：

$$(\mathbf{f}_+^l, \mathbf{f}_-^l) = (\mathbf{f}_+^r, \mathbf{f}_-^r)T. \tag{2.1}$$

那么， T 具有如下形式

$$T(\lambda,\epsilon) = \begin{bmatrix} a(\lambda,\epsilon) & b^*(\lambda,\epsilon) \\ b(\lambda,\epsilon) & a^*(\lambda,\epsilon) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

其中， a^*、 b^* 表示 a， b的复共轭。反射系数 $R(\lambda,\ \epsilon)$按定义为

$$R(\lambda,\epsilon) = \frac{b(\lambda,\epsilon)}{a(\lambda,\epsilon)}. \tag{2.3}$$

容易看出，它可以表示为约斯特解的朗斯基行列式：

$$R(\lambda,\epsilon) = \frac{\mathcal{W}(\mathbf{f}_+^r, \mathbf{f}_+^l)}{\mathcal{W}(\mathbf{f}_+^l, \mathbf{f}_-^r)}. \tag{2.4}$$

我们有以下结果 [6]。对于反射系数，我们首先得到以下关于满足 $|\lambda| \geq \delta$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的结果，其中 ϵ 是与 δ 无关的正数。

定理 2.1。 假设 *(A1)* 成立。那么，对任意 $\delta > 0$，存在与 ϵ 无关的 $\sigma > 0$，使得

$$|R(\lambda,\epsilon)| = \mathcal{O}(e^{-\sigma/\epsilon}),$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，对 $\lambda \in (-\infty, \delta] \cup [\delta, \infty)$一致成立。

为了估计特征值，我们还（为简单起见）假设$A(x)$是一个“钟形”函数：

(A2): $A(x) = A(-x)$ and $A'(x) < 0$ for $x > 0$.
(A3): $A''(0) < 0$.

设 $\lambda = i\mu$ 且 $0 < \mu < A_0 = A(0)$。假设(A2)意味着存在唯一的正数 $x^*(\mu)$，使得恰好存在两个实数 $x^*(\mu)$和 $-x^*(\mu)$满足 $A(x) = \mu$。我们定义一个“作用积分”

$$H(\mu) = \int_{-x^*(\mu)}^{x^*(\mu)} \sqrt{A(x)^2 - \mu^2}\, dx. \tag{2.5}$$

于是所谓的玻尔-索末菲量子化规则可写为

$$-e^{2iH(\mu)/\epsilon} = 1.$$

该规则的含义是：当 μ遍历该方程的根时，值 $\lambda = i\mu$ 将是 $i[-A(0),\ A(0)]$ 上的特征值在 $\epsilon \to 0$时的良好估计。

为使这一点更加精确，我们将证明存在一个函数 $m(\mu, \epsilon)$，它在半经典极限 $\epsilon \to 0$ 下渐近于 -1，使得特征值恰好由 $\lambda = i\mu$ 给出，其中取 $m(\mu, \epsilon)e^{2iH(\mu)/\epsilon} = 1$.的根

定理 2.2。 假设 *(A1)*、*(A2)* 和 *(A3)*。那么存在一个函数 $m(\mu, \epsilon)$，其渐近行为为

$$m(\mu,\epsilon) = -1 + \mathcal{O}(\epsilon)$$

当 $\epsilon \to 0$ 在任意闭区间 $I \subset (0, A(0)]$ 上一致时，使得 $\lambda = i\mu$ 其中$\mu \in I$ 是一个特征值，当且仅当

$$m(\mu,\epsilon)e^{2iH(\mu)/\epsilon} = 1. \tag{2.6}$$

现在，对于详细而严谨的逆散射分析而言，获得精细估计 $near\,0$ 尤为重要。我们将考察函数 $R(\lambda,\epsilon)$ 和 $m(\mu,\epsilon)$ 在 $\lambda>0$ 或 $\mu>0$ 趋于 0 时的渐近行为，其中 $\epsilon\to 0$。在这种情况下，我们需要对势 $A(x)$ 在 $|x|\to\infty$ 中的渐近行为作出更精确的假设，其中 D_0。

我们定义一个函数

$$z(x)=i\int_0^x\sqrt{A(t)^2+\lambda^2}dt, \tag{2.7}$$

其中，平方根分支取为在 $t=0$ 处为正。该函数定义良好，并且至少在原点 $x=0$ 附近全纯。它可以延拓到集合 D_0，但转向点处除外；这些转向点即 $A(t)^2+\lambda^2$ 的零点；在这些点周围，它是 $multi-valued.$

我们首先考虑 $\lambda>0$ 较小的情形。在这种情况下，实轴上没有转向点，且映射 $x\mapsto z(x)$ 将实轴映射到虚轴。令 $F(a)$ 为锥形集合

$$F(a)=\{z\in\mathbb{C};|\Re z|<a|\Im z|\}$$

当 $a>0$ 时。我们假设

(A4): 对于任意较小的 $\lambda>0$，存在正常数 $\rho(\lambda)$、$\theta(\lambda)$ 和 $a(\lambda)$，使得 $D(\rho(\lambda),\theta(\lambda))$ 不包含转向点，且其经映射 $x\mapsto z(x)$ 后的像包含 $F(a(\lambda))$。

定理 2.3. 假设 *(A1)*、*(A2)* 和 *(A4)*。则存在正常数c，使得

$$R(\lambda,\epsilon)=\mathcal{O}\left(e^{-ca(\lambda)/\epsilon}\right),$$

当 $\epsilon\to 0+$ 且 $\lambda\to 0+$，并满足$\frac{\epsilon}{a(\lambda)}\to 0$。

接下来我们考虑 $\lambda=i\mu$ 且 $\mu>0$ 很小的情形。在此情形下，实轴上恰好有两个转向点 $x^*(\mu)$和 $-x^*(\mu)$。通过映射 $x\mapsto z(x)$，实区间$(-x^*(\mu),x^*(\mu))$被映到虚区间$(-z(x^*(\mu)),z(x^*(\mu)))$，并且半直线$(x^*(\mu),\infty)$（相应地，$(-\infty,-x^*(\mu))$）被映到半直线 $z(x^*(\mu))+\mathbb{R}_+$（相应地，$-z(x^*(\mu))+\mathbb{R}_+$），此时(2.7)中的平方根从$(-x^*(\mu),x^*(\mu))$延拓到$(x^*(\mu),\infty)$（相应地，$(-\infty,-x^*(\mu))$），并绕转向点 $x^*(\mu)$（相应地，$-x^*(\mu)$）经过上半平面。注意，当 $\mu\to 0$时，有 $x^*(\mu)\to+\infty$ 以及

$$|z(x^*(\mu))|\to\int_0^{+\infty}A(x)dx=:z_\infty,$$

这是一个正的有限数。设 $G(b)$ 为 $\mathbb{C}_z$ 的复子域，定义为

$$\begin{aligned}G(b)=\ &\{-b<\Re z<0,|\Im z|<|z(x^*(\mu))|+b)\}\\ &\cup\{\Re z\geq 0,|z(x^*(\mu))|<|\Im z|<|z(x^*(\mu))|+b\}\end{aligned}$$

对于 $b>0$。我们假设

(A5): 对于任意 $\mu>0$ 小量，存在正常数 $\rho(\mu)$、$\theta(\mu)$ 和 $b(\mu)$，使得 $D(\rho(\mu),\theta(\mu))\cap\{z\in\mathbb{C};\ \Im z>0\}$ 不包含转向点，且其在映射 $x\mapsto z(x)$ 下的像包含 $G(b(\mu))$。

定理 2.4。假设 *(A1)*、*(A2)*、*(A3)* 和 *(A5)* 成立。那么存在一个函数$m(\mu,\epsilon)$，其渐近行为为

$$m(\mu,\epsilon) = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{b(\mu)}\right)$$

如 $\epsilon \to 0+$ 和 $\mu \to 0+$，其中$b^{\epsilon}(\mu) \to 0$，使得当且仅当(4.8)成立时，$\lambda = i\mu$ 是 L 的特征值。

为了让上述内容更易理解，下面考虑几个重要的特殊情形。

例 2.5. 设 $A(x)$ 满足 *(A1)*、*(A2)* 和

$$A(x) = Cx^{-d} + r(x) \text{ for } x > 1,$$

其中 $d > 1$、$C > 0$ 和 $r(x) = o(|x|^{-d-1})$，$r'(x) = o(|x|^{-d-2})$ 如 $\Re x \to \infty$ 中的 D_0。那么，对于某个正数常量 c，可以取 $a(\lambda) = c\lambda$ 和 $b(\mu) = c\mu^{1+\frac{1}{2d}}$。

例 2.6. 设 $A(x)$ 满足 *(A1)*、*(A2)* 和

$$A(x) = Ce^{-x^\sigma} + r(x) \text{ for } x > 1,$$

其中 $\sigma > 0$、$C > 0$ 与 $r(x) = o(e^{-x^\sigma})$，$r'(x) = o(x^{\sigma-1}e^{-x^\sigma})$ 如 $\Re x \to \infty$ 在 D_0 中那样。于是，可以取 $a(\lambda) = c\frac{\lambda}{\log\frac{1}{\lambda}}$ 与 $b(\mu) = c\mu(\log\frac{1}{\mu})^{-1+\frac{1}{\sigma}}$，其中 c 为某个正常数。

推论 2.7. 假设 *(A1)*、*(A2)* 和 *(A4)*，且 $a(\lambda) \geq c\lambda^\beta$ 对某个 $\beta > 0$ 和 $c > 0$ 成立。则反射系数 $R(\lambda,\epsilon)$ 关于 ϵ 是指数小的，对任意 $\alpha < 1/\beta$ 的 $|\lambda| \geq \epsilon^\alpha$ 一致成立。特别地，对于例 *2.5* 和例 *2.6* 中的势，$R(\lambda,\epsilon)$ 关于 ϵ 是指数小的，对任意 $\alpha < 1$ 的 $|\lambda| \geq \epsilon^\alpha$ 一致成立。

推论 2.8. 假设 *(A1)*、*(A2)*、*(A3)* 和 *(A5)* 满足 $b(\mu) \geq c\mu^\beta$，其中$\beta > 0$ 为某个值，并且还假设 $|H'(\mu)| \geq c\mu^\gamma$，其中 $c > 0$为某个值。那么

$$|\mu_n(\epsilon) - \mu_n^{\mathrm{WKB}}(\epsilon)| = o(\epsilon) \tag{2.8}$$

对于任意 $\alpha < 1/(\beta+\gamma)$，该式关于 $|\mu_n| \geq \epsilon^\alpha$ 一致成立。特别地，对于例 *2.5* 中的势，(2.8) 关于 $|\mu| \geq \epsilon^\alpha$ 一致成立，其中任意取 $\alpha < \frac{d}{d+1}$。对于例 *2.6* 中的势，(2.8) 关于 $|\mu| \geq \epsilon^\alpha$ 一致成立，其中任意取 $\alpha < 1$。

精确 WKB 方法源于 Jean Ecalle [2] 和 Andr´e Voros [19]的研究。这里我们采用了 [4] 的表述以及 [3]中的进一步发展。不同于通常依赖一般情况下发散的渐近级数的形式 WKB 方法，我们对级数进行“重新求和”，并以收敛级数构造“精确解”，从而解决“超越所有阶的渐近性”问题。我们将在后面的章节中更详细地介绍该方法（针对非零相位的情形）。

3. The case of non-analytic data

前述结果采用精确 WKB 理论，因此大量依赖解析性。以下结果采用 Olver 的另一种方法 [17]，该方法只要求一定的光滑性。我们不进行重求和，而是严格证明：用抛物柱函数逼近半经典狄拉克问题，在非常精确的意义下是有效的。

我们得到以下结果 [8]。我们假设函数 A 满足以下条件

- $A(x) > 0$ 对于 $x \in \mathbb{R}$
- $A(-x) = A(x)$ 对于 $x \in \mathbb{R}$
- A 属于 $C^4(\mathbb{R})$，并且在 0 的某邻域内属于 C^5 类
- $xA'(x) < 0$ 对于 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $A''(0) < 0$；我们令 $0 < A(0) =: A_{max}$
- 存在 $\tau > 0$，使得当 $x \to \pm\infty$时

$$A(x) = \mathcal{O}\Big(\tfrac{1}{|x|^{1+\tau}}\Big)$$
$$A'(x) = \mathcal{O}\Big(\tfrac{1}{|x|^{2+\tau}}\Big)$$
$$A''(x) = \mathcal{O}\Big(\tfrac{1}{|x|^{3+\tau}}\Big)$$

人们早已知道 [14]，对于这样的 A，离散谱是虚的。我们有如下结果。

定理 3.1. 假设 $\lambda = i\mu \in \{i\kappa \mid \kappa \in [A_0, A_{max}]\}$ 是狄拉克算子 $\mathfrak{D}_\epsilon$ 的一个特征值，并定义 $a > 0$ 使得 $\mu = A(a)$。存在一个非负整数 n（同时依赖于 μ与 ϵ），使得玻尔-索末菲量子化条件成立，即

$$\int_{-a}^{a} \big[A^2(x) - \mu^2\big]^{1/2} dx = \pi\Big(n + \tfrac{1}{2}\Big)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{5}{3}}) \quad as \quad \epsilon \downarrow 0. \tag{3.1}$$

反之，对每一个使得 $\pi(n + \frac{1}{2})\epsilon \in [0, \frac{\pi}{2}\alpha_0^2]$（$A_0 = A(\alpha_0)$）的非负整数 n，存在唯一的 μ，从而存在一个 $a > 0$，使得 $\mu = A(a)$（其中 μ 与 a 均依赖于 n、ϵ）满足

$$\left| \int_{-a}^{a} \big[A^2(x) - \mu^2\big]^{1/2} dx - \pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\epsilon \right| \le C\epsilon^{\frac{5}{3}}$$

且有一个既不依赖于 n 也不依赖于 ϵ的常数 C；从而 $\lambda = i\mu$ 是狄拉克算子 $\mathfrak{D}_\epsilon$的一个特征值。

下面的推论是定理 3.1 的直接应用，它给出了狄拉克算子在虚轴上一个不含 0 的固定区间（与 ϵ 无关）内的特征值数目。

推论 3.2. 考虑区间 $(\mu_1, \mu_2) \subset [A_0, A_{max}]$，并取 a_j，$j = 1,2$，使得 $A(a_j) = \mu_j$ 对于 $j = 1, 2$成立。则落在集合 $\{i\mu \mid \mu \in (\mu_1, \mu_2)\} \subset \mathbb{C}$ 中的狄拉克算子 $\mathfrak{D}_\epsilon$ 的特征值 $\lambda = i\mu$ 总数 $\mathcal{N}_\epsilon$ 等于

$$\mathcal{N}_\hbar = \pi^{-1}\big[\Phi(a_1) - \Phi(a_2)\big]\epsilon^{-1} + R(\epsilon) \tag{3.2}$$

其中，对于充分小的 ϵ，有 $|R(\epsilon)| \le 1$。

定理 3.1 的另一个直接应用使我们能够表示狄拉克算子 [1]的归一化常数。我们有如下推论。

推论 3.3。假设 $\lambda(\epsilon)$ 是狄拉克算子的一个特征值。那么存在一个非负整数 n（同时取决于 λ和 ϵ），使得相应的规范化常数具有如下渐近性

$$(-1)^n + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{2}{3}}) \quad as \quad \epsilon \downarrow 0.$$

[1]特别地，我们看到，得到的渐近性与已知事实相符：由于势的对称性，相应的归一化常数恰好为 $(-1)^n$。当然，我们的方法也很容易推广到非对称情形，见 [9]。

同样，对于聚焦型非线性薛定谔方程的半经典理论应用而言，理解零点附近特征值的行为至关重要。与 [6] 中的做法一样，我们将给出一类特定但涵盖范围相当广的数据A的结果。不过，我们注意到，对于任何一类由明确指定的无穷远渐近行为 A 所定义的数据，都存在一个显式积分[2] ，其收敛性（很容易验证）可确保零点附近的特征值具有良好的行为。

假设 3.4. 进一步假设存在正实数 $1 < r_+ \leq s_+$，使得

$$\frac{C_1^+(x)}{|x|^{s_+}} \leq A(x) \leq \frac{C_2^+(x)}{|x|^{r_+}} \quad for \quad x > 0$$

其中C_1^+、C_2^+为有界函数且 $2r_+ - s_+ > \frac{1}{3}$；并且存在正实数 $1 < r_- \leq s_-$，使得

$$\frac{C_1^-(x)}{|x|^{s_-}} \leq A(x) \leq \frac{C_2^-(x)}{|x|^{r_-}} \quad for \quad x < 0$$

其中 C_1^-、C_2^-为有界函数且 $2r_- - s_- > \frac{1}{3}$。或者，假设存在正实数 $0 < r \leq s$，使得

$$C_1(x)e^{-|x|^s} \leq A(x) \leq C_2(x)e^{-|x|^r}, \quad x \in \mathbb{R}$$

其中 C_1、C_2 为有界函数。

我们有（证明见 [8] ）

定理 3.5。令 $0 < b < \frac{5}{3}$ （与 ϵ 无关），并考虑满足上述假设的初始数据函数 A。那么，对于每个非负整数 n，只要 $\pi(n + \frac{1}{2})\epsilon$ 属于 $(0, \frac{\pi}{2}\alpha_0^2(\epsilon))$，就存在唯一的 $\mu_n(\epsilon)$ 满足

$$|\mu_n(\epsilon) - \mu_n^{WKB}(\epsilon)| = \mathcal{O}\big(\frac{\epsilon^{5/3}}{\log \epsilon}\big), \quad as \quad \epsilon \downarrow 0$$

对 $\mu_n(\epsilon)$ 属于 $[\epsilon^b, A_{max}]$ 的情形一致成立。

此外，归一化常数渐近地为 $(-1)^n + \mathcal{O}(\epsilon^{2/3})$，且关于 $\epsilon \to 0$ 一致成立。最后，反射系数足够小，即使在趋近于 0 时也是如此。确实。

定理 3.6。令 A 满足本节开头的假设（仅此而已），取 $0 < b < \frac{1}{5}$ （与 ϵ 无关），并令 $s > 0$。那么，反射系数满足

$$R(\lambda(\epsilon), \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{1-sb}) \quad as \quad \epsilon \downarrow 0 \tag{3.3}$$

对 $\lambda(\epsilon)$ 属于 $[\epsilon^b, +\infty)$的任意闭区间的情形一致成立。

在 [9] 中，我们将上述结果推广到 A 不对称且具有多个（有限个）局部极大值的情形。

[2] [9]中的(5.13)

4. The case of non-trivial initial phase

最后，我们考虑 S 不恒为零的情形。我们确实需要一定的解析性，或者至少需要亚纯性，因为现有的两种 WKB方法（精确WKB和Olver方法）都依赖于相位具有某种解析性。在我们考虑的例子中， A， S 在复平面上存在亚纯延拓。

在 [7] 和 [5] 中，我们结合两种 WKB 方法研究了特殊情形 $A(x) = S(x) =$ 双曲正割$(2x)$；我们的工作受到 Peter Miller 较早一篇论文（[16]）以及 Jared Bronski 早期一些数值观察[1]的启发。全面理解这个特例，有助于洞察最一般的典型亚纯情形。半经典地，谱沿着可数个解析弧的并集聚集。

4.1. 一般方法。 本节介绍对 [16] 中所提出程序的一种改进，用于求狄拉克（或 Zakharov-Shabat）算子的半经典特征值

$$\mathfrak{D}_\epsilon = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx} & \omega(x,\epsilon) \\ -\omega^*(x,\epsilon) & \frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

其中 ω 是复势函数

$$\omega(x,\epsilon) = -iA(x)\exp\left\{i\frac{S(x)}{\epsilon}\right\}$$

对于定义在实数轴 [上的某些实值解析函数 $A(x)$和 $S(x)$，当然， $\omega^*(x,\epsilon)$表示 $\omega(x,\epsilon)$ 的复共轭，] 使得 A 和 S' 可积。我们关注的谱问题是

$$\mathfrak{D}_\epsilon \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \tag{4.2}$$

其中 $\mathbf{u} = [u_1\ u_2]^T$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}^2$ 的函数， $\lambda \in \mathbb{C}$ 则充当谱参数。显然，(4.2) 等价地可以写成如下微分方程一阶系统:

$$\frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx}\mathbf{u}(x,\lambda,\epsilon) = K(x,\lambda,\epsilon)\mathbf{u}(x,\lambda,\epsilon) \tag{4.3}$$

其中

$$K(x,\lambda,\epsilon) = \begin{bmatrix} -\lambda & \omega(x,\epsilon) \\ \omega^*(x,\epsilon) & \lambda \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

首先应用变换

$$\mathbf{u}(x,\lambda,\epsilon) = \begin{bmatrix} \exp\left\{i\frac{S(x)}{2\epsilon}\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{-i\frac{S(x)}{2\epsilon}\right\} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(x,\lambda,\epsilon)$$

其中 $\tilde{\mathbf{v}} = [\tilde{v}_1\ \tilde{v}_2]^T$，可将 (4.3) 中的系统化为新的形式

$$\frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx}\tilde{\mathbf{v}}(x,\lambda,\epsilon) = \begin{bmatrix} -\lambda - \frac{1}{2}S'(x) & -iA(x) \\ iA(x) & \lambda + \frac{1}{2}S'(x) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(x,\lambda,\epsilon) \tag{4.5}$$

其中撇号表示对 x 的微分。接下来，我们应用映射

$$\tilde{\mathbf{v}}(x,\lambda,\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(x,\lambda,\epsilon)$$

其中 $\mathbf{v} = [v_1\ v_2]^T$，最终将初始系统表示为

$$\frac{\epsilon}{i}\frac{d}{dx}\mathbf{v}(x,\lambda,\epsilon) = M(x,\lambda)\mathbf{v}(x,\lambda,\epsilon) \tag{4.6}$$

其中

$$M(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & g_+(x,\lambda) \\ -g_-(x,\lambda) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$\text{and} \quad g_\pm(x,\lambda) = \mp[\lambda + \frac{1}{2}S'(x) \pm iA(x)]. \tag{4.8}$$

所研究的关键函数是

$$\begin{aligned} V_0(x,\lambda) &= \det M(x,\lambda) \\ &= g_-(x,\lambda)g_+(x,\lambda) \\ &= -[\lambda + \tfrac{1}{2}S'(x)]^2 - A^2(x). \end{aligned} \tag{4.9}$$

该函数的零点发挥着重要作用。

定义4.1。对于固定的 $\lambda \in \mathbb{C}$，$V_0(\cdot、\ \lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 中的零点称为（*4.6*）的转向点。

当 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 时，势函数 $V_0(\cdot,\ \lambda)$ 是复值的，而转向点通常不是实数。假设我们可以将函数 A 和 S全纯地延拓到复 x-平面上，那么我们可以研究（4.3）[最终即（4.6）] 的解在某条轮廓上的渐近性；这条轮廓位于复 x-平面内，且不同于实 x-轴，连接 $-\infty$与 $+\infty$，并要求该轮廓至少经过一对复转向点。因此，固定一个 $\lambda \in \mathbb{C}$。基于上述直观认识，我们有如下定义。这与 [16]的定义并不完全相同；这里采用的形式可以使下一小节的精确 WKB 方法直接适用。但可以看出，在类似$A(x) = S(x) = sech(2x)$的情形下，两者是等价的。

定义4.2。考虑一对复根 $\{x_-(\lambda)、\ x_+(\lambda)\}$，属于 $V_0(x,\lambda) = 0$。复平面 x上的一条轮廓 $C = C^- \cup C^0 \cup C^+$，其中

- 曲线 C^- 连接 $-\infty$与 $x_-(\lambda)$
- 曲线 C^0 连接 $x_-(\lambda)$ 与 $x_+(\lambda)$，并且
- 曲线 C^+ 连接 $x_+(\lambda)$ 与 $+\infty$,

若满足以下四个条件，则称其为可容许的：

(i) 函数 $V_0(x,\lambda)$ 在 x内全纯，对于复平面 x中由 C 和实 x轴围成的区域内所有 x 均成立（这是为了确保近似特征函数可以延拓回实 x轴）。

(ii) 对于所有 $x \in C^-$

$$\Re\left\{ i\int_{C^-(x\rightsquigarrow x_-(\lambda))} \sqrt{-V_0(t,\lambda)}dt \right\}$$

当 x 向 $-\infty$ 移动时递减，其中线积分是沿 C^- 从 x 到 x_-（λ）计算的。

(iii) 对于所有 $x \in C^0$

$$\Re\left\{ i\int_{C^0(x_-(\lambda)\rightsquigarrow x)} \sqrt{-V_0(t,\lambda)}dt \right\} = 0$$

其中线积分沿 C^0 从 $x_-(\lambda)$ 到 x （此条件确保转向点通过一条路径相连，且两个 *WKB*本征函数沿该路径均有界，当 $\epsilon \downarrow 0$ 时）。

(iv) 对所有 $x \in C^+$

$$\Re\left\{ i \int_{C^+(x_+(\lambda) \rightsquigarrow x)} \sqrt{-V_0(t,\lambda)}dt \right\}$$

当 x向 $+\infty$移动时递增，其中线积分沿 C^+从 $x_+(\lambda)$ 取至 x。

在上述定义中所有包含 $\sqrt{-V_0}$ 的平方根的关系式里，我们通过选取 C^0 作为适当的割线，并规定当 $x > 0$较大时它为 $\sim \lambda$ ，来选择 $\sqrt{-V_0(x,\lambda)}$的分支。 C^0 称为斯托克斯线。上述列表中的第(iii)项可重新解释为复 x平面中路径C^0 的微分方程。事实上，若 $x = u + iv$，其中 $u, v \in \mathbb{R}$，则由微分关系定义一个曲线场

$$\Re\left\{ i\sqrt{-V_0(u+iv,\lambda)}(du + idv) \right\} = 0. \tag{4.10}$$

现设对于一对复转向点 $\{x_-(\lambda)\ x_+(\lambda)\}$ ，我们有条件

$$\Re\left\{ i \int_{C^0(x_-(\lambda) \rightsquigarrow x_+(\lambda))} \sqrt{-V_0(t,\lambda)}dt \right\} = 0 \tag{4.11}$$

并令 λ变化。给定一对在复 λ平面某一区域内始终互不相同的转向点，关系式 (4.11)本身便在复 λ平面上确定一条曲线。若 λ 位于这些曲线之一上，则可预期标准WKB方法能够适用，用以判定 λ 是否实际上与某一特征值相距 $o(\epsilon)$（当然，这以斯托克斯线 C^0 避开任何奇点以及存在适当路径 C^-、 C^+为前提）。

因此，当 $\epsilon \downarrow 0$时，我们预期(4.1)的离散特征值将聚集在由公式(4.11)所描述的复 λ平面曲线之并集上，其中并集取遍各对复转向点。由此我们得到如下内容。

定义4.3. 复 λ平面上由那些能产生容许围道 C （在 x平面上）的 λ点所组成的曲线，称为渐近谱弧。

根据该定义可知，这些渐近谱弧是解析弧的并集；若每个 λ 只有有限个转向点，则它们是有限个解析弧的并集。将 WKB 理论应用于 [5] 中的轮廓 C（容许围道），我们严格地得到了统一特征值条件

$$\frac{1}{\pi\epsilon}\Im\left\{ i \int_{C^0(x_-(\lambda) \rightsquigarrow x_+(\lambda))} \sqrt{-V_0(t,\lambda)}dt \right\} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \tag{4.12}$$

这可以解释为一种玻尔-索末菲量子化规则，对于 λ ，在与条件 (4.11) 对应的适当渐近谱弧上，对所有可能的可容许转向点选取 $x_-(\lambda)$ 和 $x_+(\lambda)$。

4.2. **精确 WKB 方法**。在本小节和下一小节 4.3 中，我们回顾应用于固定开集 $\mathbb{C}$ 中的 Zakharov-Shabat 算子的精确 WKB 方法局部理论。

固定 λ，令 Ω 为 x 复平面中一个不含转向点的单连通子域，并取定点 $\alpha \in \Omega$。我们定义一个相位映射

$$z(\cdot, \lambda, \alpha) : \Omega \to \mathbb{C} \quad \text{with}$$
$$z(x, \lambda, \alpha) = i \int_{\gamma(\alpha \rightsquigarrow x)} \sqrt{-V_0(t, \lambda)} dt \tag{4.13}$$

其中，显然积分路径无关；我们选择$\sqrt{-V_0(x, \lambda)}$的分支，使其在 $x > 0$ 足够大时为正。注意，z 在 Ω 中有唯一确定的定义，并将 Ω 保角映射到 $z(\Omega, \lambda, \alpha)$。

我们寻求具有以下形式的 (4.6) 的解

$$\mathbf{v}(x, \lambda, \epsilon, \alpha) = \exp\left\{ \pm \frac{z(x, \lambda, \alpha)}{\epsilon} \right\} \tilde{\mathbf{w}}^{\pm}[z(x, \lambda, \alpha)] \tag{4.14}$$

对于 $\tilde{\mathbf{w}}^{\pm} = [\tilde{w}_1^{\pm}\ \tilde{w}_2^{\pm}]^T$。将其代入 (4.6)，得到系统

$$\frac{\epsilon}{i} \frac{d}{dz} \tilde{\mathbf{w}}^{\pm}(z) = \begin{bmatrix} \pm i & H(z)^{-2} \\ -H(z)^2 & \pm i \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}^{\pm}(z) \tag{4.15}$$

其中 [回忆 (4.8)] 后，函数 H 由下式给出

$$H(z) = \left[\frac{g_-(x, \lambda)}{g_+(x, \lambda)} \right]^{1/4}.$$

最后，我们令

$$P_{\pm}(z) = \begin{bmatrix} H(z)^{-1} & H(z)^{-1} \\ iH(z) & -iH(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{1 \pm 1}{2}}$$

并应用变换

$$\tilde{\mathbf{w}}^{\pm}(z) = P_{\pm}(z) \mathbf{w}^{\pm}(z)$$

对于$\mathbf{w}^{\pm} = [w^{\pm}_{\text{even}}\ w^{\pm}_{\text{奇}}]^T$。于是，(4.15) 中的系统可写为

$$\frac{\epsilon}{i} \frac{d}{dz} \mathbf{w}^{\pm}(z) = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{H}(z) \\ \mathcal{H}(z) & \mp \frac{2}{\epsilon} \end{bmatrix} \mathbf{w}^{\pm}(z) \tag{4.16}$$

其中，我们认为 $\mathcal{H}$ 由下式定义

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\dot{H}(z)}{H(z)} \tag{4.17}$$

其中，点表示对 z 求微分。容易得到

$$\mathcal{H}(z) = \frac{d}{dz} \log[H(z)] = \frac{1}{4} \frac{A(x)S''(x) - 2\lambda A'(x) - A'(x)S'(x)}{\left\{ [\lambda + \frac{1}{2} S'(x)]^2 + A^2(x) \right\}^{3/2}}.$$

在通常的WKB 理论中，向量值符号 $\mathbf{w}^{\pm}$ 被构造为参数 ϵ的幂级数，该级数一般是发散的。精确 WKB 方法在于按如下方式对这一发散级数进行重新求和。取一点 $x_0 \in \Omega$，并令

$$z_0 \equiv z_0(\lambda) = z(x_0, \lambda, \alpha)$$

并假定级数试探解

$$\mathbf{w}^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{w}_n^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} w_{2n}^{\pm} \\ w_{2n-1}^{\pm} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w_{\text{even}}^{\pm} \\ w_{\text{odd}}^{\pm} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

由 (4.16) 可知，函数 $w_n^{\pm},\ -1 \leq n \in \mathbb{Z},$ 可以通过归纳定义为

$$w_{-1}^{\pm} \equiv 0, \quad w_0^{\pm} \equiv 1$$

且对于 $1 \leq n \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \frac{d}{dz} w_{2n}^{\pm}(z) & = \mathcal{H}(z) w_{2n-1}^{\pm}(z) \\ (\frac{d}{dz} \pm \frac{2}{\epsilon}) w_{2n-1}^{\pm}(z) & = \mathcal{H}(z) w_{2n-2}^{\pm}(z) \\ w_n^{\pm}(z_0) & = 0. \end{array} \right. \tag{4.19}$$

这些递推方程唯一确定（至少在 x_0 的某个邻域内）标量函数序列 $\{w_n^{\pm}(z, \epsilon, z_0)\}_{n=-1}^{\infty}$，进而确定向量值函数序列 $\{\mathbf{w}_n^{\pm}(z, \epsilon, z_0)\}_{n=0}^{\infty}$。若引入以下积分算子 $\mathcal{I}_{\pm}$ 和 $\mathcal{J}$，将函数从 $\mathscr{H}(z(\Omega\ \lambda, \alpha))$ 映射到 $\mathscr{H}(z(\Omega\ \lambda, \alpha))$ 中的函数，则可将关系式 (4.19) 写成积分形式：

$$\mathcal{I}_{\pm}[f](z) = \int_{\Gamma} e^{\pm 2(\zeta - z)/\epsilon} \mathcal{H}(\zeta) f(\zeta) d\zeta \tag{4.20}$$

$$\mathcal{J}[f](z) = \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\zeta) f(\zeta) d\zeta \tag{4.21}$$

其中，$\Gamma \equiv \Gamma(z_0 \rightsquigarrow z)$ 是 z 对 Ω 中连接 x_0、x 的路径 $\gamma \equiv \gamma(x_0 \rightsquigarrow x)$ 的像；换言之，$\Gamma = z(\gamma)$。于是，$n \geq 1$ 的 (4.19) 变为

$$\left\{ \begin{array}{rl} w_{2n}^{\pm} & = \mathcal{J}[w_{2n-1}^{\pm}] \\ w_{2n-1}^{\pm} & = \mathcal{I}_{\pm}[w_{2n-2}^{\pm}]. \end{array} \right. \tag{4.22}$$

回到初始系统 (4.3)，我们构造了如下形式的（形式）WKB解

$$\mathbf{u}^{\pm}(x, \lambda, \epsilon, \alpha, x_0) = \exp\Big\{ \pm \frac{z(x, \lambda, \alpha)}{\epsilon} \Big\} Q(x, \lambda, \epsilon) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{1 \pm 1}{2}} \mathbf{w}^{\pm}[z(x, \lambda, \alpha), \epsilon, z_0] \tag{4.23}$$

其中 $Q(\cdot,\ \lambda,\ \epsilon)$ 是一个取值为

$$Q(x, \lambda, \epsilon) = \begin{bmatrix} \exp\{-iS(x)/(2\epsilon)\} & 0 \\ 0 & \exp\{iS(x)/(2\epsilon)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(z)^{-1} & H(z)^{-1} \\ iH(z) & -iH(z) \end{bmatrix}.$$

这里，我们在解 $\mathbf{u} = [u_1\ u_2]^T$ 上添加了上标 $\pm$ ——从而得到记号 $\mathbf{u}^{\pm} = [u_1^{\pm}\ u_2^{\pm}]$——以区别于前文讨论中的两种不同情形；同时我们注意到，(4.23) 中的 WKB解依赖于相位映射 (4.13) 的基点 α 以及符号 $\mathbf{w}^{\pm}$ 的基点 x_0。

根据渐进路径的定义，

$$\Omega_{\pm} = \{\, x \in \Omega \mid \exists\ (\pm)\text{-progressive path } \gamma(x_0 \rightsquigarrow x) \subset \Omega \,\}.$$

我们有如下基本定理；证明参见 [3]。

定理 4.4. *(4.23)* 中的精确 *WKB* 解满足以下性质。

(i) *(4.18)* 中的形式级数在 x_0 的某个邻域内绝对收敛。

(ii) 对于每个 $N \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathbf{w}^{\pm} - \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{w}_n^{\pm} = \mathcal{O}(\epsilon^N) \quad as \quad \epsilon \downarrow 0$$
$$w_{\text{even}}^{\pm} - \sum_{n=0}^{N-1} w_{2n}^{\pm} = \mathcal{O}(\epsilon^N) \quad as \quad \epsilon \downarrow 0$$
$$w_{\text{odd}}^{\pm} - \sum_{n=0}^{N-1} w_{2n-1}^{\pm} = \mathcal{O}(\epsilon^N) \quad as \quad \epsilon \downarrow 0$$

在 $\Omega_{\pm}$ 的任意紧子集上一致成立。特别地，在那里我们有

$$w_{\text{even}}^{\pm} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad as \quad \epsilon \downarrow 0$$
$$w_{\text{odd}}^{\pm} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad as \quad \epsilon \downarrow 0.$$

(iii) 对于该符号，任何两个具有不同基点的精确 *WKB* 解都满足

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}^{+}(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_0),\mathbf{u}^{-}(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_1)] = 4iw_{\text{even}}^{+}(z_1,\epsilon,z_0) \tag{4.24}$$
$$\mathcal{W}[\mathbf{u}^{+}(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_0),\mathbf{u}^{+}(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_1)] = -4ie^{2z_1/\epsilon}w_{\text{odd}}^{+}(z_1,\epsilon,z_0) \tag{4.25}$$

其中 x_0、 x_1 是Ω 中的两个不同点，并且对于 $j = 0,\ z_j = z(x_j,\lambda,\alpha)$，1。

4.3. **简单转向点附近的连接**。本节将继续介绍简单转向点附近精确 WKB 解的局部连接公式。设 α 为一个简单转向点，即

$$\det M(\alpha) = g_+(\alpha)g_-(\alpha) = 0$$
$$(\det M)'(\alpha) = g_+(\alpha)g_-'(\alpha) + g_+'(\alpha)g_-(\alpha) \neq 0$$

这意味着， α 是 $g_+(x)$或 $g_-(x)$中且仅其中一个的单零点。三条斯托克斯线 l_0、 l_1 和 l_2按逆时针方向编号，从α 出发，将 α 的邻域 ω 分成三个区域： ω_0 由 l_1 和 l_2 围成，ω_1 由 l_2 和 l_0 围成，而 ω_2 由 l_0 和 l_1围成。在每个区域中，我们将分别定义精确 WKB 解$\mathbf{u}_0$, 、$\mathbf{u}_1$ 和$\mathbf{u}_2$ ，使得根据定理 4.4，它们在 α 附近的渐近行为是已知的。

我们首先要指定由(4.13)定义的多值函数 $z(x,\lambda,\alpha)$的分支。取 x_j 为 ω_j ($j = 0$, 1,2)中的基点。我们在斯托克斯线 l_1上设置一条分支切割，并选取函数 $\sqrt{\det M}$的分支，使得 $\Re\, z(x,\lambda,\alpha)$从 x_0 朝转向点 α递增。于是， $\Re\, z(x,\lambda,\alpha)$从 x_1 朝 α 递减，并从 x_2 朝 α递增。

我们定义三个精确 WKB 解：

$$\mathbf{u}_0(x,\epsilon) = \mathbf{u}^{+}(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_0), \tag{4.26}$$
$$\mathbf{u}_1(x,\epsilon) = \mathbf{u}^{-}(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_1), \tag{4.27}$$
$$\mathbf{u}_2(x,\epsilon) = \mathbf{u}^{+}(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_2). \tag{4.28}$$

这些解分别在 x_0、 x_1、 x_2 附近构造，但可以解析延拓到 ω。它们不可能线性无关，因为解的向量空间维数为二。更确切地说，它们满足以下线性关系。

命题 4.5。 设$\mathbf{u}_0$，$\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ 是区域 ω 内微分方程(4.2) 的三个解。则下列恒等式成立：

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]\mathbf{u}_0+\mathcal{W}[\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_0]\mathbf{u}_1+\mathcal{W}[\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1]\mathbf{u}_2=0. \tag{4.29}$$

证明。 若三个行列式 $\mathcal{W}[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]$, $\mathcal{W}[\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_0]$ 和 $\mathcal{W}[\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1]$ 均为 0，则该恒等式显然成立。设其中至少一个不为零，不妨设$\mathcal{W}[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]\neq 0$不为零。于是，对 (4.29) 左边与 $\mathbf{u}_1$ 取行列式，可得

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]\mathcal{W}[\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1]+\mathcal{W}[\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1]\mathcal{W}[\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1]$$

这显然为零。同理可得，(4.29) 左边与$\mathbf{u}_2$ 的行列式为零。由于解对 $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ 构成解空间的一组基，这意味着 (4.29) 左边应为零。□

回到上文定义的精确 WKB 解 $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$ 和$\mathbf{u}_2$ ，并计算本命题中出现的行列式的渐近行为。

命题 *4.6*。 *</style}*当 $\epsilon\downarrow 0$ 时，以下渐近性成立

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1]=2i(1+\mathcal{O}(\epsilon)), \tag{4.30}$$

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]=-2i(1+\mathcal{O}(\epsilon)), \tag{4.31}$$

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_0]=\mp 2(1+\mathcal{O}(\epsilon)), \tag{4.32}$$

其中，在 *(4.32)* 中，若 α 是 g_+ 的零点，则取上面的符号（负号）；若 α 是 g_- 的零点，则取下面的符号（正号）。特别地，当 ϵ 足够小时，解 $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 中任意两个都线性无关。

证明。 由定理 4.4 (iii)，我们得到 由定理 4.4 (iii)，我们得到

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]=-2iw^+_{\mathrm{even}}(z_1,\epsilon,z_2)$$

其中 $z_j=z(x_j,\lambda,\alpha)$。由于存在一条从 x_2 到 x_1 的 (+)-渐进路径，根据定理 4.4 (ii)，有 $w^+_{\mathrm{even}}(z_1,\epsilon,z_2)=1+\mathcal{O}(\epsilon)$，因此得到 (4.31)。类似地，我们有

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1]=2iw^+_{\mathrm{even}}(z_1,\epsilon,z_0)=2i(1+\mathcal{O}(\epsilon)).$$

在计算行列式 $\mathcal{W}[\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_0]$, 时，我们必须谨慎，因为 x_2 与 x_0之间存在一条分支切割。在应用“朗斯基公式”之前，我们将 $\mathbf{u}_2$ 改写为定义在从 x_0 跨过分支后延拓得到的黎曼片上。设 x 是 x_2 附近的一点，而 $\hat{}x$ 是与 x 相同的点，但位于该黎曼片上。于是我们有

$$\begin{aligned}&z(x,\lambda,\alpha)=-z(\hat{x},\lambda,\alpha),\\&H(x)=\mp iH(\hat{x}),\ \text{if } \alpha \text{ is a zero of } g_\pm \quad \text{and}\\&w^\pm(z,\epsilon,z_2)=w^\mp(z,\epsilon,z_2).\end{aligned}$$

注意到 $\arg(x-\alpha)=\arg(\hat{}x-\alpha)+2\pi$，因此第一个恒等式显然成立，因为 z 的被积函数包含一个 $\sqrt{x-\alpha}$ 型的多值函数。第二个断言成立，因为 H 是 $g_+^{-1/4}$ 与 $g_-^{1/4}$ 的乘积。为验证第三个恒等式，设 $w_n^\pm(z)$, $n\geq 1$ 是输运

方程 (4.19) 的一族解，满足初始条件 $w_n^{\pm}(z_2) = 0$，其中 $z_2 = z(x_2)$，并令$f_n^{\pm}(\hat{z}) = w_n^{\pm}(z)$，$n \geq 1$。考察 (4.19) 并利用 $d/dz = -d/d\hat{z}$，不难验证

$$\left(\frac{d}{d\hat{z}} \mp \frac{2}{\epsilon}\right) f_{2n+1}^{\pm}(\hat{z}) = \frac{dH(\hat{z})/d\hat{z}}{H(\hat{z})} f_{2n}^{\pm}(\hat{z}),$$
$$\frac{d}{d\hat{z}} f_{2n+2}^{\pm}(\hat{z}) = \frac{dH(\hat{z})/d\hat{z}}{H(\hat{z})} f_{2n+1}^{\pm}(\hat{z})$$

其中 $f_n^{\pm}(\hat{z}_2) = 0$ 位于 $\hat{z}_2 = z(\hat{x}_2)$。由解的唯一性可知，$w_n^{\pm}(z) = w_n^{\mp}(\hat{z})$，且 $w_n^{\mp}(\hat{z}_2) = 0$；鉴于 (4.18)，这意味着

$$\mathbf{w}^{\pm}(z, \epsilon, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} w_{2n}^{\pm}(z, z_2) \\ w_{2n+1}^{\pm}(z, z_2) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} w_{2n}^{\mp}(\hat{z}, \hat{z}_2) \\ w_{2n+1}^{\mp}(\hat{z}, \hat{z}_2) \end{pmatrix} = \mathbf{w}^{\mp}(\hat{z}, \epsilon, \hat{z}_2).$$

因此，以该点 $\hat{x}_2$ 作为象征的基点，解 $\mathbf{u}_2(x, \epsilon)$ 可写为

$$\mathbf{u}_2(x, \epsilon) = \mp i \mathbf{u}^{-}(x, \lambda, \epsilon, \alpha, \hat{x}_2), \text{ if } \alpha \text{ is a zero of } g_{\pm}.$$

我们现在应用定理 4.4 (iii)，利用上述表达式计算所需的行列式。由于存在一条从 x_0 到 $\hat{x}_2$ 的前进曲线，我们有

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_2] = \pm i (\det Q) w_{\text{even}}^{+}(\hat{z}_2, \epsilon, z_0) = \pm 2(1 + \mathcal{O}(\epsilon))$$

当 α 是 $g_{\pm}$ 的零点时。 □

4.4. 渐近谱弧上一般点附近的特征值。 在本节中，我们回到 Zakharov-Shabat 算子 $\mathfrak{D}_\epsilon$ 的特征值问题 (4.2)。在下述一般条件下，我们推导属于一条渐近谱弧、且与 ϵ无关的固定 λ_0 的小邻域内特征值的量子化条件。

(H1): C^0 contains no other turning point than $x_-(\lambda)$ and $x_+(\lambda)$.

设 $C(\lambda_0)$ 为容许围道 $C(\lambda_0) = C^-(\lambda_0) \cup C^0(\lambda_0) \cup C^+(\lambda_0)$，对应于 λ_0，并将 $\alpha_0 = \alpha(\lambda_0) = x_-(\lambda_0)$、$\beta_0 = \beta(\lambda_0) = x_+(\lambda_0)$ 记为 $C^0(\lambda_0)$ 两端的简单转向点。对于 λ 在 λ_0 的一个足够小的邻域内，简单转向点 $\alpha = \alpha(\lambda) = x_-(\lambda)$ 和 $\beta = \beta(\lambda) = x_+(\lambda)$ 仍然有定义且为解析的。从点 α 发出三条斯托克斯线，即 l_0^{α}、l_1^{α}、l_2^{α}（按逆时针顺序）；同样地，从 β 发出三条斯托克斯线，我们将其记为 l_0^{β}、l_1^{β}、l_2^{β}（按顺时针顺序）。关于该构型，请参见图 1。设 $\lambda = \lambda_0$，并且 l_0^{α} 和 l_0^{β} 与 $C^0(\lambda)$ 重合。五条斯托克斯线 $C^0(\lambda)$、l_1^{α}、l_2^{α}、l_1^{β} 和 l_2^{β} 将容许围道的一个邻域 ω 分为四个区域，记作如下

- $\omega^{\alpha}{}_{\text{左}}$以 l_1^{α}、l_2^{α}为界
- $\omega^{\beta}{}_{\text{右}}$以 l_1^{β}、l_2^{β} 为界
- $\omega^{\alpha,\ \beta}{}_{\text{上}}$以 $C^0(\lambda)$、l_1^{α}、l_1^{β} 为界，最后
- $\omega^{\alpha,\ \beta}{}_{\text{下}}$以 $C^0(\lambda)$、l_2^{α}、l_2^{β} 为界。

让我们在这些区域中各取一点：x_0^{α} 位于区域 $\omega_{\text{left}}^{\alpha}$，$x_0^{\beta}$ 位于区域$\omega^{\beta}{}_{\text{右侧}}$，$x_1$ 位于区域 $\omega^{\alpha,\ \beta}{}_{\text{下方}}$ 以及 x_2 位于区域 $\omega^{\alpha,\ \beta}{}_{\text{up}}$。

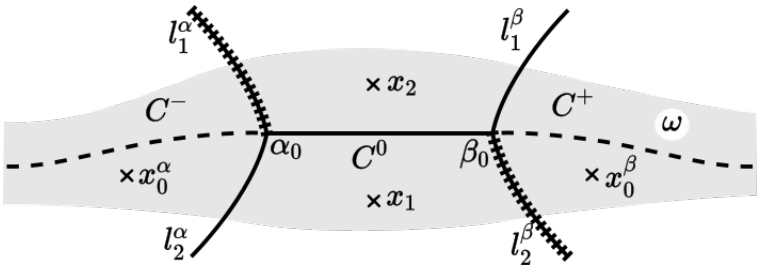

FIGURE 1. 简单转向点附近的斯托克斯线。

与§4.3中一样，我们必须考虑支割线；我们在斯托克斯线 l_1^α上取一条，并在 l_2^β 上取一条。假设 $\Re z(x)$在 $\omega_{\text{left}}^\alpha$内朝 α 增大，我们按如下方式定义精确 WKB 解。

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_0^\alpha(x,\epsilon) &= \mathbf{u}^+(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_0^\alpha), \quad \mathbf{u}_0^\beta(x,\epsilon) = \mathbf{u}^-(x,\lambda,\epsilon,\beta,x_0^\beta)\\
\mathbf{u}_1^\alpha(x,\epsilon) &= \mathbf{u}^-(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_1), \quad \mathbf{u}_1^\beta(x,\epsilon) = \mathbf{u}^-(x,\lambda,\epsilon,\beta,x_1)\\
\mathbf{u}_2^\alpha(x,\epsilon) &= \mathbf{u}^+(x,\lambda,\epsilon,\alpha,x_2), \quad \mathbf{u}_2^\beta(x,\epsilon) = \mathbf{u}^+(x,\lambda,\epsilon,\beta,x_2)
\end{aligned}$$

注意，所有这些精确 WKB 解的选取方式，均使得定理 4.4 (ii) 中的渐近展开在指定转向点附近成立。特别地，$\mathbf{u}_0^\alpha(x,\epsilon)$ 是沿着 $C^-(\lambda_0)$ 的衰减解，而 $\mathbf{u}_0^\beta(x,\epsilon)$ 是沿着 $C^+(\lambda_0)$ 的衰减解。这意味着以下引理成立。

引理 4.7。对于渐近谱弧上的任意 λ_0，存在 λ_0 的一个复邻域 $U = U(\lambda_0)$，使得 $\lambda \in U$ 是 $\mathfrak{D}_\epsilon$ 的特征值，当且仅当 $\mathbf{u}_0^\alpha(x,\epsilon)$ 与 $\mathbf{u}_0^\beta(x,\epsilon)$ 线性相关。

在 α 和 β 附近应用命题 4.5，可得

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_1^\alpha,\mathbf{u}_2^\alpha]\mathbf{u}_0^\alpha + \mathcal{W}[\mathbf{u}_2^\alpha,\mathbf{u}_0^\alpha]\mathbf{u}_1^\alpha + \mathcal{W}[\mathbf{u}_0^\alpha,\mathbf{u}_1^\alpha]\mathbf{u}_2^\alpha = 0, \tag{4.33}$$

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_1^\beta,\mathbf{u}_2^\beta]\mathbf{u}_0^\beta + \mathcal{W}[\mathbf{u}_2^\beta,\mathbf{u}_0^\beta]\mathbf{u}_1^\beta + \mathcal{W}[\mathbf{u}_0^\beta,\mathbf{u}_1^\beta]\mathbf{u}_2^\beta = 0. \tag{4.34}$$

另一方面，$j = 1,2$ 时，$\mathbf{u}_j^\alpha$ 与 $\mathbf{u}_j^\beta$ 之间存在显而易见的关系：

$$\mathbf{u}_1^\beta = e^{z(\beta,\lambda,\alpha)/\epsilon}\mathbf{u}_1^\alpha, \quad \mathbf{u}_2^\beta = e^{-z(\beta,\lambda,\alpha)/\epsilon}\mathbf{u}_2^\alpha \tag{4.35}$$

其中，$z(\beta,\lambda,\alpha)$ 是 α 与 β 之间的作用积分

$$z(\beta,\lambda,\alpha) = i\int_{\gamma(\alpha\rightsquigarrow\beta)} \sqrt{-V_0(t,\lambda)}dt. \tag{4.36}$$

由此可知，$\mathbf{u}_0^\alpha(x,\epsilon)$ 与 $\mathbf{u}_0^\beta(x,\epsilon)$ 线性相关，当且仅当

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_2^\alpha,u_0^\alpha]\mathcal{W}[\mathbf{u}_0^\beta,\mathbf{u}_1^\beta] = \mathcal{W}[\mathbf{u}_0^\alpha,\mathbf{u}_1^\alpha]\mathcal{W}[\mathbf{u}_2^\beta,\mathbf{u}_0^\beta]e^{2z(\beta,\lambda,\alpha)/\epsilon}.$$

回顾函数 $g_\pm(x,\lambda) = \mp[\lambda + \frac{1}{2}S'(x) \pm iA(x)]$。对于一对简单转向点 α,β，我们定义指标 $\delta(\alpha,\beta)$ 如下：

$$\delta(\alpha,\beta) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad g_+(\alpha,\lambda) = g_+(\beta,\lambda) = 0 \quad \text{or} \quad g_-(\alpha,\lambda) = g_-(\beta,\lambda) = 0,\\ 1 & \text{if} \quad g_+(\alpha,\lambda) = g_-(\beta,\lambda) = 0 \quad \text{or} \quad g_-(\alpha,\lambda) = g_+(\beta,\lambda) = 0. \end{cases} \tag{4.37}$$

因此，我们得到以下结果。

定理 4.8。 对于渐近谱弧上的任意满足条件（**H1**）的 λ_0 ，存在 λ_0 的一个复邻域 U，使得 $\lambda \in U$ 是 $\mathfrak{D}_\epsilon$ 的特征值当且仅当

$$m(\epsilon)e^{2z(\beta,\lambda,\alpha)/\epsilon} = 1, \quad with \quad m(\epsilon) = \frac{\mathcal{W}[\mathbf{u}_0^\alpha, \mathbf{u}_1^\alpha]\mathcal{W}[\mathbf{u}_2^\beta, \mathbf{u}_0^\beta]}{\mathcal{W}[\mathbf{u}_2^\alpha, \mathbf{u}_0^\alpha]\mathcal{W}[\mathbf{u}_0^\beta, \mathbf{u}_1^\beta]}.$$

当 $\epsilon \downarrow 0$、 $m(\epsilon)$ 具有渐近行为

$$m(\epsilon) = \delta(\alpha_0, \beta_0) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

证明。 尚需验证该陈述的渐近部分。由命题 4.6 已知，当 $\epsilon \downarrow 0$

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_2^\alpha, \mathbf{u}_0^\alpha] = \mp 2 + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \mathcal{W}[\mathbf{u}_0^\alpha, \mathbf{u}_1^\alpha] = 2i + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.38}$$

当 α 为 $g_\pm$的零点时。类似地，当 $\epsilon \downarrow 0$ 时，我们有

$$\mathcal{W}[\mathbf{u}_2^\beta, \mathbf{u}_0^\beta] = 2i + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \mathcal{W}[\mathbf{u}_0^\beta, \mathbf{u}_1^\beta] = \mp 2 + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.39}$$

当 β 为 $g_\pm$的零点时。这些渐近公式立即给出该断言。

□

注 4.9. （分支端点 $\lambda_D^{(j)}$ 、 $j = 1$、2 处的情形）由证明显然可见，定理*4.8*的陈述对于渐近谱弧的极限点处的 λ_0 仍然成立，在该处 $x_+(\lambda_0)$ 与 $x_-(\lambda_0)$ 汇合为二重转向点。

关于分岔点附近的详细分析，请参见 [5]。

4.5. **某个特定情形的几何结构**。 现在我们聚焦于这个非常特殊的 r
case

$$A(x) = S(x) = \operatorname{sech}(2x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.40}$$

这个例子并没有什么特别之处；只是恰好它是 [1] 中最先进行数值研究的情形，随后又在 [16] 中得到研究。 [3] 不过，显然这里发生的现象适用于非常广泛的一类数据 A 和 S。

Bronski 的数值观察结果是，渐近谱由五条弧组成。有一条竖直线段 $[-i\mu_s, i\mu_s]$ ，其中 μ_s 约为 0。28。此外还有四条略微弯曲的弧，分别位于谱平面的不同象限。它们各自连接 $i\mu_s$ 与 λ_D 的某个取值，其中

$$\lambda_D = i\sigma\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1 + i\tau\sqrt{7}}{8}}\left(1 - \frac{1 + i\tau\sqrt{7}}{4}\right) \quad \text{where} \quad \sigma, \tau = \pm 1 \tag{4.41}$$

a是超越方程的解

式

$$\tanh(2x) = \frac{1 + i\tau\sqrt{7}}{4i\sigma} \quad \text{where} \quad \sigma, \tau = \pm 1$$

我们采用记号 $\lambda_D^{(j)}$, $j = 1, \ldots,$4，并要求点 $\lambda_D^{(j)}$ 位于复 λ-平面的第 j^{th} 象限。

[16] 中的数值计算在此不作详细介绍。总而言之，考虑复平面上 λ 的不同取值，然后针对每个取值，考察复x平面中是否存在一条连接 $-\infty$ 和 $+\infty$的容许路径。

[3]文献 [15]研究了另一个例子。

我们在 [5] 中的主要贡献是，为渐近谱弧上的特征值给出了严格的渐近性。我们的结果与零相位情形下的玻尔-索末菲关系非常相似!

我们以远离分岔点 $\lambda_\otimes = i\mu_s$ 邻域的渐近谱弧并集上的特征值量子化条件结束本小节。关于分岔点附近的类似结论（及其证明），请参见 [5] 中的定理 2.23。

定理 4.10。对于渐近谱弧并集上的任意与 ϵ 无关的 $\delta > 0$ 和 $\lambda_0 \neq 0$，若满足 $|\lambda_0 - \lambda_\otimes| > \delta$，则存在 λ_0 的一个复邻域U 以及一个函数 $m_j(\epsilon)$，其具有一致的渐近行为 $m_j(\epsilon) = -1 + \mathcal{O}(\epsilon)$，在 U 中使得 $\lambda \in U$ 是 $\mathfrak{D}_\epsilon$ 的特征值，当且仅当

$$m_j(\epsilon) e^{2z_j(\beta,\lambda,\alpha)/\epsilon} = 1.$$

指标 $j = 1$、2、3 表示渐近谱弧的选择。相位z_j 也取决于该选择（见 ***(4.13)***）。

4.6. 零点附近的特征值。与前几节一样，零点附近特征值的分布需要特别处理。在 [5] 中，我们对这一问题进行了讨论。精确 WKB 方法似乎无法为逆散射问题的渐近分析提供必要的估计。因此，我们采用了 Olver 理论，具体参见 [18]中的进一步发展。在特殊的$sech$ 情形下，由于初始数据在无穷远处具有显式的指数行为，不会出现复杂情况。

References

[1] J. C. Bronski: *Semiclassical eigenvalue distribution of the Zakharov–Shabat eigenvalue problem* 97, 376 397 1996 , Physica D，第 – 页 （） [2] J. Ecalle: *Cinq applications des fonctions résurgentes,* 奥赛预印本，1981年。[3] S. Fujii´e、C. Lasser、L. Nedelec: *Semiclassical resonances for a two-level Schrödinger operator with a conical intersection* 65, 1 2 2009 17 58 ，渐近分析，第 n. - 期（），第 - 页。[4] C. G´erard、A. Grigis: *Precise Estimates of Tunneling and Eigenvalues near a Potential Barrier* 72 1988 149 177 ，J. 微分方程（），第 - 页。[5] S. Fujii´e、N. HATZIZISIS 和 S. KAMVISSIS: *Semiclassical WKB Problem for the Non-self-adjoint Dirac Operator with an Analytic Rapidly Oscillating Potential* ，J. 微分方程 360（2023），第90-150页。[6] S. Fujii´e 和 S. KAMVISSIS: *Semiclassical WKB Problem for the Non-self-adjoint Dirac Operator with Analytic Potential* 61, 1, 011510 ，数学物理杂志，第 no. 期，(2020)。[7] N. HATZIZISIS: *Semiclassical WKB Problems for Non-Self-Adjoint Dirac Operators with Decaying Potentials* 2022 ，博士论文，克里特大学，。[8] N. HATZIZISIS 和 S. KAMVISSIS: *Semiclassical WKB Problem for the Non-Self-Adjoint Dirac Operator with a Decaying Potential* 62, 3, ，数学物理杂志，第 no. 期，033510（2021）。[9] N. HATZIZISIS 和 S. KAMVISSIS: *Semiclassical WKB Problem for the Non-Self-Adjoint Dirac Operator with a Multi-Humped Decaying Potential* 137, ，渐近分析，第 n. 3-4 期（2024），第177-243页。[10] S. KAMVISSIS: *From Stationary Phase to Steepest Descent*，当代数学 458，美国数学会，2008年，第145-162页。[11] S. KAMVISSIS: *Comment on the article "Existence and Regularity for an Energy Maximization Problem in Two Dimensions" by Spyridon Kamvissis, Evguenii A. Rakhmanov*，数学物理杂志，第 50卷，第10期，104101，2009年。[12] S. KAMVISSIS, K. McLaughlin, P. Miller: *Semiclassical Soliton Ensembles for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation* 154, ，数学年刊研究丛书，第v卷，普林斯顿，2003年。

[13] S.Kamvissis、E.A.Rakhmanov: *Existence and Regularity for an Energy Maximization Problem in Two Dimensions* ，数学物理杂志，第46卷，第8期，2005年。[14] M. Klaus 和 J. K. Shaw: *Purely Imaginary Eigenvalues of Zakharov-Shabat Systems*，物理评论E 65，第3期（2002），第036607页。[15] N. Korneev、J.A. Catana Castellanos、V.A. Vysloukh: *Multisoliton pulse breakup in WKB approximation* 207 2020 164359 ，Optik（），。[16] P. D. Miller: *Some Remarks on a WKB Method for the Non-selfadjoint Zakharov-Shabat Eigenvalue Problem with Analytic Potentials and Fast Phase*，Physica D，非线性现象 152（2001），第145-162页。[17] F. W. J. Olver: *Second-Order Linear Differential Equations with Two Turning Points*，伦敦皇家学会哲学汇刊，A辑，数学与物理科学 278，第1279期（1975），第137-174页。[18] F. W. J. Olver: *General Connection Formulae for Liouville-Green Approximations inthe Complex Plane*，伦敦皇家学会哲学汇刊，A辑，数学与物理科学，第289卷，第1364期，第501-548页（1978）。[19] A. Voros: *The return of the quartic oscillator. The complex W.K.B. method*，Ann. Inst. H. Poincar´e 29，第211-338页（1983）[20] V. E. 扎哈罗夫和 A. B. 沙巴特: *Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Wave in Nonlinear Media*，实验与理论物理杂志 34，第1期，第62-69页（1972）。

* Department of Mathematical Sciences, Ritsumeikan University, Japan*Email address*: fujiie@fc.ritsumei.ac.jp

† Department of Pure & Applied Mathematics, University of Crete, Greece*Email address*: nhatzitz@gmail.com

‡ Department of Pure & Applied Mathematics, University of Crete, and Institute of Applied and Computational Mathematics, FORTH, GR–711 10 Voutes Campus, Greece *Email address*: spyros@tem.uoc.gr