arXiv:2603.09252v1 [math.NT] 10 Mar 2026

刚性联络上的 Frobenius 结构与算术应用

徐大新，易凌飞

摘要。对于分裂单群 $\check{G}$，我们在 $\mathbb{G}_m$ （或 $\mathbb{A}^1$）上的两族刚性非正则 $\check{G}$-联络上构造自然的弗罗贝尼乌斯结构：(i) 由 Chen 与 Yun 引入的、源于 Vinberg 的θ-群的 θ-联络；(ii) Jakob–Kamgarpour–Yi 的 Airy 联络，它推广了经典艾里方程。这些数据构成 Yun 与 Jakob–Kamgarpour–Yi 所引入的 ℓ-进局部系统的 p-进伴随对象。借助弗罗贝尼乌斯结构，我们研究这些局部系统在唯一野分歧点处的局部单值表示，并在我们的设定下验证 Reeder–Yu 关于上皮 Langlands 参数的预测。我们通过其局部单值计算一个特殊 Airy $\check{G}$-局部系统的全局几何单值群。我们证明这些局部系统的上同调刚性与物理刚性，正如 Heinloth–Ngô–Yun 所猜想的那样。

目录

1. 引言 1 2. p-进微分方程综述 7 3. P-进等斜联络 11 4. 某些刚性联络上的 Frobenius 结构 15 5. 对单值表示的应用 22 6. 物理刚性 37 附录 A. 代数与算术 $\mathscr{D}$-模的比较 41 参考文献 44

1. 引言

1.1. 曲线上的刚性联络：上同调刚性与物理刚性 .

1.1.1. 设 $j\colon U=\mathbb{P}^1-S\,,\to\mathbb{P}^1$ 是特征为零的域 K 上曲线的开嵌入，其中 S 是一个有限闭点集。设 G 是 K 上的连通分裂约化群，$\check{\mathfrak{g}}$ 是其李代数。

若 $\check{}$A G-丛及其联络 E on U 由其在 S处的 $\check{}$ 局部单值唯一确定，并且这些单值视为相关洛朗级数域上的亚纯 G-联络，则称其为物理刚性 。另一方面， E 诱导出伴随局部系统 $E(\check{\mathfrak{g}})$，而在 S 处固定形式类型时，E 的无穷小变形由中间延拓 $j_{!*}E(\check{\mathfrak{g}})$ 的上同调控制。若满足以下条件，则称 E 是上同调刚性的：

$$\mathrm{H}^*\big(\mathbb{P}^1,\, j_{!*}E(\check{\mathfrak{g}})\big)=0,$$

日期：2026年3月11日。

也就是说，不存在与所规定的形式局部性态相容的非平凡整体无穷小形变。

当 $\check{G}=$一般线性群$_n$时，Katz（在正则奇异性情形下） [44] 和 Bloch–Esnault [11] 证明，对于不可约联络，上同调刚性等价于物理刚性。一般而言，存在上同调刚性的 $\check{G}$-联络，并非物理刚性 [46, §7.2]。

对于有限域上的曲线， ℓ-进局部系统（或过收敛等晶体）也有类似的概念。本文证明，若一个 $\check{G}$-过收敛等晶体具有物理刚性的底层代数 $\check{G}$-联络，则该等晶体也是物理刚性的。一旦为 theta/艾里 $\check{G}$-联络赋予 Frobenius 结构，这一结果便适用于它们。

1.1.2. 经典贝塞尔/艾里联络 令 x 为 $0\in\mathbb{P}^1$处的坐标。带参数 λ 的经典贝塞尔微分方程和艾里微分方程（秩为 n）定义如下：

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n(f)-\lambda^n x\cdot f=0,\quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n(f)-\lambda^n x\cdot f=0. \tag{1.1.2.1}$$

它们可以分别转化为平凡丛上的刚性联络 Be$_n$ 和 Ai$_n$ ， 其秩为 n ， 定义在$\mathbb{G}_{m,\ K}$ 和$\mathbb{A}^1_K$ 上：

$$\mathrm{Be}_n=\ d+\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\\lambda^n x&0&0&\dots&0\end{pmatrix}\frac{dx}{x},\qquad \mathrm{Ai}_n=\ d+\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\\lambda^n x&0&0&\dots&0\end{pmatrix}dx. \tag{1.1.2.2}$$

Katz [42]计算了它们的微分伽罗瓦群。

1 $\check{}$.1.3. θ-联络。在下文中，我们还假设 G 几乎是简 e.
通过 Frenkel–Gross 构造了一个显式的$\check{G}$-联络，$\check{}$ 定义在 $\mathbb{G}_m$上，称为$Bessel\ \check{G}$-联络；当$\check{}$ $G=$为 SL$_n$ [29]时，它特化为 Be$_n$ 。在一篇未发表的工作中，Yun 从$\check{\mathfrak{g}}$的一个稳定分次构造了 Bessel G-联络的推广，称为 θ-联络。在 [13], ，Chen 证明，在稳定分次满足某个条件时，这些联络是上同调刚性的。

设 θ 是$\check{\mathfrak{g}}$ 在 K 上的一个内稳定分次，它通过 [62, 推论 14]对应于正则椭圆数 m。具体而言，我们可以假设 θ 由 exp(x) 的伴随作用给出，其中$x\in\mathbb{X}_*(\check{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$，且满足$\check{}$ $\lambda=mx\in\mathbb{X}_*(\check{T})$。那么 Ad$\check{}$$_{\lambda(\zeta_m)}$(分别为$\check{}$$\lambda$)定义了一个阶为 m 的分次$\check{\mathfrak{g}}=\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}\check{\mathfrak{g}}_l$ （以及一个 $\mathbb{Z}$-分次$\check{\mathfrak{g}}=\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}}\check{\mathfrak{g}}$ (l)）。我们假设（归一化的）Kac 坐标$s_0:=\alpha_0(x)$等于 1。关于正则椭圆数 m 及满足 $s_0=1$的正则椭圆数列表，请参见 [14, (2)] 和 [62, §7] 。我们取 $X=X_1+X_{1-m}\in\check{\mathfrak{g}}_1=\check{\mathfrak{g}}(1)\oplus\check{\mathfrak{g}}(1-m)$ 作为一个稳定元。$\check{}$ 与 X 及参数 $\lambda\in K$ 相关的 θ-联络是定义在 $\mathbb{G}_m$上的 G-联络，其定义为

$$\Theta(X,\lambda):=d+\left(X_1+\lambda^m X_{1-m}x\right)\frac{dx}{x}. \tag{1.1.3.1}$$

Wh $\check{}$ $\check{}$ en $m=h$ 是考克斯特数，上述 G-联络是贝塞尔 G-联络 .

1.1.4. 艾里联络。令 $m=h$ 和 $X=X_1+X_{1-h}\in\check{\mathfrak{g}}_1$ 为 1.1.3 中所述的稳定元。在引言中，我们考察一类特殊的 艾里$\check{G}$-联络，定义在 $\mathbb{A}^1$ (5.7.2.1) 上；当 $\check{G}=$一般线性群$_n$ 时，它特化为 Ai$_n$ (1.1.2.2):

$$\mathrm{Ai}(X,\lambda)=d+(X_1+\lambda^h X_{1-h}x)dx. \tag{1.1.4.1}$$

1.2. **Frobenius 结构**。

1.2.1. 主要结果概要。20 世纪 70 年代， [24], Dwork 和 Sperber 证明，在 p-进域 $K=\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ 上的贝塞尔联络 (1.1.2.2) 存在 Frobenius 结构，其 Frobenius 迹给出克罗内克和。所谓联络上的 ***Frobenius*** 结构，是指贝塞尔联络与其经"弗罗贝尼乌斯自同态" F 拉回所得对象之间的水平同构：$\mathbb{G}_{m,\ K}\to\mathbb{G}_{m,\ K}$ 在由 $x\mapsto x^p$ 定义的 K 上。

在 [71], Xu–Zhu 构造了贝塞尔 $\check{}G$-联络上的 Frobenius 结构，其工作建立在 Heinloth–Ngô–Yun [35] 和 Zhu [76]关于约化群的克罗内克局部系统的几何朗兰兹对应之上。本文将 [71] 的自变量推广，以在 θ-联络（分别为艾里联络）上构造自然的 Frobenius 结构。赋予 Frobenius 结构后，所得对象构成定义在 $\mathbb{G}_{m,\ \mathbb{F}_p}$上的 $\check{}G$-过收敛 F-等晶体 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ （分别为定义在 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$上的 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ ）。此外，对于素数 $\ell\neq p$， $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ （分别为 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ ）在适当意义下是 [75] 中构造的ℓ-进广义克洛斯特曼层 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}$ （分别是 [38]中构造的艾里层 $\mathrm{Ai}^{\ell}_{\check{G}}$ ）的 p-进伴随。

通过这些弗罗贝尼乌斯结构，我们得到如下算术应用 ：

(i) 我们明确研究 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ （相应地 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ ）在唯一野分歧点 ∞ 处的局部单值表示，并在我们的设定 [61,§ 7.1]中验证 Reeder–Yu 关于极深朗兰兹参数的预测。

(ii) 在Airy情形中，我们应用局部单值来计算 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ 的全局几何单值群。

(iii) 我们由 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ （相应地 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ ）的底层联络的物理刚性，推出其作为 $\check{}G$-过收敛等晶体的物理刚性。经由 p-ℓ 伴随，我们验证了 Heinloth–Ngô–Yun 关于约化群的 ℓ-进 Kloosterman 层之物理刚性的猜想 [35, 猜想 7.1]，此时 0 处的驯分歧单值为幂单。

1.2.2. 为陈述主要结果，我们回顾环 p-进解析函数，定义在 $\mathbb{P}^1$ 上并沿$\{\infty\}$ [8]过收敛。我们令 $K=\mathbb{Q}_p(\mu_p)$，配备 p-进赋值 $|\cdot|$ ，由 $|p|=p^{-1}$正规化，并用 $A^\dagger$ 表示 p-进解析函数环，其收敛半径为 >1:

$$A^\dagger=\Big\{\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\mid a_n\in K,\exists\ \rho>1,\lim_{n\to+\infty}|a_n|\rho^n=0\Big\}. \tag{1.2.2.1}$$

定理 1.2.3 (4.4,4.6)。 设 $K=\mathbb{Q}_p(\mu_p)$， K 为 $\overline{K}$ 的代数闭包，并令 $\lambda=-\pi\in K$满足 $\pi^{p-1}=-p$。假设$(p,m)=1$ （相应地， $p>h$），且***Kac*** 坐标 $s_0=1$ 亦如此，并且对李代数 $\mathfrak{g}$ 的阶 m 内稳定分次同样成立，该李代数属于对偶群 G 的$\check{}G$。存在自然的***Frobenius*** 结构 $\varphi(x)\in\check{}G(A^\dagger)$ ，它定义了θ-联络（相应地，***Airy*** 联络）与其***Frobenius*** 拉回之间的规范变换：

$$x\frac{d\varphi}{dx}\varphi^{-1}+\mathbf{Ad}_\varphi(X_1+\lambda^mX_{1-m}x)=p(X_1+\lambda^mX_{1-m}x^p),$$

$$(\text{resp. }\frac{d\varphi}{dx}\varphi^{-1}+\mathbf{Ad}_\varphi(X_1+\lambda^hX_{1-h}x)=px^{p-1}(X_1+\lambda^hX_{1-h}x^p).)$$

Frobenius 结构在 $\mathbb{F}_p$ 元素的 Teichmüller 提升处的取值之迹给出指数和，包括 Kloosterman 和。关于明确的指数和，请参阅 [71, §5.2]

$\check{}$ 经典群的 Kloosterman 层的和。当 $G=\mathrm{SL}_n$ 时，Ai_n(1.1.2.2) 上的 Frobenius 迹给出 $a\in\mathbb{F}_p$ 的艾里和 [42]，及其 Teichmüller 提升 $[a]$：

$$\mathrm{Tr}(\varphi([a]))=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\psi\Big(\frac{x^{n+1}}{n+1}+ax\Big),$$

其中 $\psi:\ \mathbb{F}_p\to K^\times$ 是与 π (2.1.1) 相关的加性特征。

1.2.4. 上述定理的证明包含三个要素：

(i) 按照 Yun [75] 和 Jakob–Kamgarpour–Yi [38] 的做法，我们构造一个 $\check{}G$-过收敛 F-等晶体 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$（分别为 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$），以及一个 $\check{}G$-联络 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}$（分别为 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}$），作为某个自守函数的朗兰兹参数。

(ii) 接着我们证明，过收敛等晶体 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$（分别为 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$）与 [71] 中的 $\check{}G$-联络 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}$（分别为 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}$）的解析化同构（见定理 4.2.2 和 4.6.1）。

(iii) Chen–Yi 和 Yi [14, 73] 证明了，$\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}$（分别地，$\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}$）作为代数的 $\check{}G$-联络，同构于 $\Theta(X,\lambda)$（分别地，$\mathrm{Ai}(X,\lambda)$）（见定理 4.3.2 和 4.5.3）。

因此，$\Theta(X,\lambda)$（分别地，$\mathrm{Ai}(X,\lambda)$）可以赋予自然的 Frobenius 结构，由此得到的 $\check{}G$-过收敛等晶体同构于 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$（分别地，$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$）。

注记 1.2.5. (i) 对于非分歧 p-进域上的具有正则奇点的刚性联络，Esnault–Groechenig 在适当假设下构造了自然的 Frobenius 结构 [25, 26]。他们的证明基于带有指定正则奇点的带联络丛模空间上的弗罗贝尼乌斯自同态映射。在他们的框架中，弗罗贝尼乌斯结构由有理函数给出。

(ii) 上文考察的联络是不规则的，而 Frobenius 结构是 p-进解析函数；这与正则奇点情形不同。自然可以预期，系数适当的不规则刚性联络具有 Frobenius 结构，但 Esnault–Groechenig 的方法并不适用于不规则情形。在我们的设定中，构造转而采用明确的几何朗兰兹描述。

更多关于 [39, 36, 45, 46] 上上同调刚性／物理刚性联络的例子，请参见 $\mathbb{P}^1-\{0,\infty\}$，其中包括上文考察的 θ-联络和艾里联络。

1.3. **对单值表示和刚性的应用。**

1.3.1. 局部单值表示。 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$（相应地，$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$）在唯一的野分歧点 ∞ 处的限制，定义了 Robba 环上的一个带 Frobenius 结构的微分模 $\mathscr{E}$。设 $F=\mathbb{F}_p((t))$ 是一个等特征局部域，I_F 是 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 的惯性子群，I_F^+ 是野惯性子群，W_F 是 Weil 群。根据 p-进局部单值定理 [5, 47, 56]，我们可以为 $\mathscr{E}$ 关联一个系数取值于 K 的 Weil–Deligne 表示 (ρ,N)：

$$\rho:W_F\to\check{G}(\overline{K}),\quad N\in\check{\mathfrak{g}}.$$

由 Reeder–Yu [61] 引入的初潮表示是 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}$ 在无穷远点处自守函数的局部分量。因此，(ρ,N) 可视为通过局部Langlands对应与极深表示相关的局部Langlands参数。

比较 $\mathscr{E}$ 的算术局部单值与 $\mathscr{E}$ 底层形式联络的局部单值（命题 3.2.1），我们证明了以下结果。特别地，这验证了 Reeder–Yu 关于极深朗兰兹参数 [61, § 7.1] 的预测。

定理1.3.2（推论 5.2.4，命题 5.7.3）。在 θ 情形下（艾里情形亦然），在定理 *1.2.3* 的假设下，局部单值表示 $(\rho,\ N)$ 满足：

(i) 幂零算子 N 为零。令 $\check{}T_X$ 为 $\check{}G(X)$ 中 $\check{}G$ 的 $X = X_1 + X_{1-m}$（分别为 $X_1 + X_{1-h}$）的中心化子，它是一个极大环面。表示 ρ 适合于如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & I_F^+ & \longrightarrow & I_F & \longrightarrow & I_F^t & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \check{T}_X & \longrightarrow & N_{\check{G}}(\check{T}_X) & \longrightarrow & \mathbb{W} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

使得温和惯性 I_F^t 的一个生成元映为魏尔群 $\mathbb{W}$ 中的一个正则椭圆元，其阶为 m（分别为一个 *Coxeter*元）。

(ii) 我们有 $\check{}\mathfrak{g}^{I_F} = 0$ 和 $\mathrm{Swan}(\check{}\mathfrak{g}) = \frac{\sharp\Phi}{m}$（分别为 $= \frac{\sharp\Phi\cdot 1+h}{h}$），其中 $\sharp\Phi$ 是 $\check{}\mathfrak{g}$ 的根的数量。

如 [75, 命题 5.2] 和 [38, 6中所述，3], 定理1.3.2推出了上同调刚性：

推论1.3.3。$\check{}G$-过收敛等晶体 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$、$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ 是上同调刚性的。

注记1.3.4。（i）在带有 $m = h$ 的 θ 情形中，表示 ρ 是 Gross–Reeder [34]引入的简单野参数。对于简单野参数，定理1.3.2(i)在假设 $p \nmid \sharp\mathbb{W}$ 的条件下由 [34,命题9.4] 证明，而定理1.3.2(ii)则分别由 [35, 定理2、推论2.15]（ℓ-adic情形）和 [71, 推论4.5.9] 在不对 p 作任何假设的情况下证明。

（ii）然而，如果 $p \mid h$，定理1.3.2(i)对于简单野参数 ρ 不成立。例如，当 $\check{}G = \mathrm{SL}_p$ 时，可以预期像 ρ（I_F^+）是一个阶为 p^3 的非阿贝尔群，而其驯商群是阶为 $p+1$ 的循环群。这一点对于 $p = 2,\ 3$ [4, 60]已知。

(iii) 受形式等斜率联络理论的启发，[39], 我们在 § 3.1 引入开单位圆盘上 p-*adic* 等斜率联络的概念。对于这类联络，我们在定理 3.2.3 中描述其相关的 Weil–Deligne 表示。我们预期，这些 Weil–Deligne表示在局部Langlands对应下对应于环面超尖表示 [3, 41]。在我们的情形中，我们证明微分模 $\mathscr{E}$ 在 ∞ 处是 p-adic 等斜率的，进而根据定理 3.2.3 的一般结果推导出上述定理。

(iv) 表示 ρ 按照 Kaletha [40]的定义是一个深层参数。我们预期，通过整体朗兹对应得到的构造与 Kaletha 纯粹局部的构造相容，未来将进一步探讨二者之间的关系。

1.3.5. 艾里局部系统的整体单值化。Frenkel–Gross [29, 推论 10] 和 Kamgarpour–Sage [45, 定理 12] 分别计算了 G_{diff} 上贝塞尔和艾里 $\check{}G$-联络 **(1.1.4.1)** 的微分伽罗瓦群。两个结果一致，我们在下表中列出它们（模去中心同源）：

(1.3.5.1)

$\check{G}$	G_{diff}
A_{2n}	A_{2n}
A_{2n-1}, C_n	C_n
$B_n, D_{n+1} (n \geq 4)$	B_n
E_7	E_7
E_8	E_8
E_6, F_4	F_4
B_3, D_4, G_2	G_2.

当 $m = h$ 时，$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}$ 的几何单值群（及其 ℓ-进伴随）已在[43, 35, 71]中计算。

若 G_{geo} 表示艾里 $\check{G}$-过收敛等晶体 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}$的几何单值群，则存在一个典范嵌入 [71, § 4.5.1]:

$$G_{\mathrm{geo}} \hookrightarrow G_{\mathrm{diff}}.$$

定理1.3.6 (定理 5.8.3)。 设 n 为李代数为 $\check{\mathfrak{g}}$的几乎单群中忠实表示的最小维数。若 $p > 2n + 1$, 则上述同态是同构。

注记 1.3.7。 借助伴随，我们还可以恢复ℓ-进艾里层 $\mathrm{Ai}^{\ell}_{\check{G}}$的几何单值群。如此一来，我们部分推广了 Katz 和 Šuch 关于秩为 n [42, 68]的ℓ-进艾里层的结果。

$\check{}$ Kamgarpour–Sage 的证明基于一个一般原理：若一个 G-联络具有最大斜率 $\frac{a}{h}$，其考克斯特数为 h，且 $(a,\ h) = 1$，则其微分伽罗瓦群 G_{diff} 具有一个基本次数 h。这一结果对正特征下的算术局部系统并不成立。例如，当 $p = 2$时，秩为 $2n + 1$ 的 Bessel F-等晶体的几何单值群为 SO_{2n+1} $(n \neq 3)$ 或 G_2 $(n = 3)$ [71, 定理 4.5.2], ，其最大基本次数为 $2n$。然而，其 p-进斜率为 $\frac{1}{2n+1}$。 在我们的证明中，我们首先证明在假设 $p > 2n+1$下， G_{geo} 是连通的。由于局部单值（定理1.3.2）包含于 G_{geo}，我们推得 G_{geo} 的魏尔群含有一个阶为 h 的元素，因此 G_{geo} 具有一个基本次数 h。由此可得定理1.3.6。

1.3.8. 物理刚性。给定一个开嵌入 $j : U \to \mathbb{P}^1$ 到 $\mathbb{F}_p$，若 U 上的一个 $\check{G}$-过收敛等晶体$\mathcal{E}$ 由其在边界 $\mathbb{P}^1 - U$ 处的局部单值表示唯一确定（见 § 6.1.1），则称其为物理刚性。我们证明，若存在一个物理刚性的代数 $\check{}\check{}$ G-联络 E，其底层对象为$\mathcal{E}$，则$\mathcal{E}$ 作为 G-过收敛等晶体也具有物理刚性（见定理 6.1.2）。

在 [72, 14, 73], ，第二作者与 T.H. Chen 证明了上文讨论的 θ-联络和艾里联络具有物理刚性。在 [36], ，Hohl–Jakob 在更一般的情形下证明了物理刚性。作为一项应用，我们可以推出以下结果。

定理 1.3.9 (推论 6.1.6)。 G-过收敛等晶体 $\check{G}$-过收敛等晶体 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}$ 、$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}$ 具有物理刚性。

1.3.10. 伴随对象与素数之间的转换。对于素数 $\ell \neq p$，我们期望通过伴随对象理论，为 ℓ-进局部系统推导出上述 p-进刚性结果。对于曲线上的 GL_n-局部系统，Abe [1] 已建立晶体伴随对象理论。对于每个表示 $V \in$ **表示范畴**$(\check{G})$，$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(V)$（分别为 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(V)$）是 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(V)$（分别为 $\mathrm{Ai}^{\ell}_{\check{G}}(V)$）的 p-进伴随对象。通过比较由伴随表示在 ∞ 处定义的局部单值表示（命题 5.1.3），我们可以据此推导出 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}$ 和 $\mathrm{Ai}^{\ell}_{\check{G}}$ 是上同调刚性的。

在本文中，我们关注由一个伴随群给定上局部系统的工作$\check{G}$ （见第 5.1 节） [23] 。当 $m = h$时，$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}$ 按上述意义是 p-进克洛斯特曼层 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}$ 的 ℓ-进伴随（命题 5.1.10）。通过联系伴随局部系统的局部单值表示，我们由定理 1.3.9 推得 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}$具有物理刚性，这正如 [35,猜想 7.1]所猜想的那样。

定理 1.3.11（定理 6.3.1）。 假设 p 不整除魏尔群 $\mathbb{W}$的阶。那么$\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}$ 具有物理刚性。

1.4. **论文结构**。 在 § 2 中，我们回顾后文所需的过收敛 F-等晶体和 p-adic 微分方程的一些性质。在 § 3 中，我们引入 p-adic 等斜联络的概念，并研究相关的 Weil–Deligne 表示。在 § 4 中，我们构造 θ 和艾里联络的 Frobenius 结构 定理 1.2.3。第 5 节致力于研究 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}$ 和 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}$ 的局部与整体单值表示的应用。最后，第 6 节确立了 p-adic 和 ℓ-adic 情形下的物理刚性结果。

致谢。 我们感谢 Tomoyuki Abe、Tsao-Hsien Chen、Weizhe Zheng 和 Xinwen Zhu 的宝贵讨论。徐大新获得国家重点研发计划 2025YFA1018000、国家自然科学基金项目（编号：12288201）以及中国科学院基础研究青年科学家项目（编号：YSBR-033）的资助。易凌飞获得国家重点研发计划（编号：2024YFA1014600）的资助。

2. p-进微分方程回顾

在本文中，我们固定一个素数 p。设 k 为一个有限域， k 为 k的一个代数闭包，且$\mathcal{O}_K$ 为一个以 k为剩余域的混合特征完备离散赋值环。我们令$K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_K)$，并配备由 $|p| = p^{-1}$正规化的赋值 $|\ |$。我们固定 K的一个代数闭包 K。设$\mathcal{O}_K$（相应地，$\mathfrak{m}_K$）为 K中的整数环（相应地，$\mathcal{O}_K$的极大理想）。设 $\mathbb{C}_p$ 为 K的 p-进完备化。

设 s 为一个正整数，并令 $q = p^s$。为讨论 Frobenius 结构，我们假设第s次弗罗贝尼乌斯自同态 $k \xrightarrow{\sim} k,\ x \mapsto x^q$ 提升为一个自同构 $\sigma : \mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K$。于是， σ可延拓为一个自同构 $\sigma : K \to K$，并且存在 K 中 K 的一列有限扩张K_n，使得 $\sigma(K_n) = K_n$，且使得 $\cup_n K_n = K$。

2.1. **过收敛（F-）等晶体**。

2.1.1. 设 X 是一个 k-概形。我们用 $\text{F-Isoc}^{\dagger}(X/K)$ 表示 X 上的过收敛 F-等晶体范畴（相对于 K 和 σ），定义见 [8] 。我们用 $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(X/K)$ 表示 X 上相对于 K 的过收敛等晶体范畴的厚满子范畴，该子范畴由那些可赋予 s'-次 Frobenius 结构的对象生成，其中 s' 是可被 s整除的某个整数。注意，此范畴与 σ的选择无关。

我们假设存在元素 π，属于 K 且满足 $\pi^{p-1} = -p$。若 x 表示 $\mathbb{A}^1$的一个坐标，则 $\mathcal{O}^{\mathbb{A}^1}_K$ 上的联络 $d - \pi dx$ [1] 是 $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathbb{A}^1_k/K)$ 中的一个对象，称为杜沃克等晶体，记作 $\mathscr{A}_\pi$。 $\mathscr{A}_\pi$ 上的 p-次 Frobenius 结构由过收敛函数$\theta_\pi(x) = \exp(\pi(x - x^p))$ 给出。

存在唯一的非平凡加性特征 $\psi\colon \mathbb{F}_p \to K^\times$，满足 $\psi(1) = 1 + \pi \bmod \pi^2$。对于每个 $x \in \mathbb{F}_p$，我们将 $[x]$ 记作 x 在 $\mathbb{Q}_p$中的 Teichmüller 提升。于是 $\theta_\pi([x]) = \psi(x)$ [7, 1.4]。因此， $\mathscr{A}_\pi$ 的 Frobenius 迹函数等于 $\psi \circ \mathrm{Tr}^{k/\mathbb{F}_p}(-)$。我们也将 $\mathscr{A}_\pi$ 记作 $\mathscr{A}_\psi$，因为它在 ℓ-进理论中扮演着与和 ψ 相关的 Artin–Schreier 层相似的角色。

2.1.2. 我们将 $\mathcal{A}_K$ 记作开单位圆盘 $|t| < 1$ 上解析函数的 K-代数，即

$$\mathcal{A}_K = \{\sum_{n\geq 0} a_n t^n \in K[\![t]\!];\ |a_n|\rho^n \to 0\ (n \to \infty)\ \forall \rho \in [0,1)\ \}. \tag{2.1.2.1}$$

[1] [71, 2.1.1]中有一处笔误， $d + \pi dx$ 应改为 $d - \pi dx$。

我们也将 $\mathcal{R}_K$ 记作某些环域上的解析函数所构成的 Robba 环：

$$\mathcal{R}_K = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \in K[\![t,t^{-1}]\!];\ |a_n|\rho^n \to 0\ (n\to\infty), \forall \rho\in(\rho_0,1)\ \text{ for some } \rho_0\in(0,1)\}. \tag{2.1.2.2}$$

对于任意代数扩张 L of K，记 $\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_K \otimes_K L$ 和 $\mathcal{R}_L = \mathcal{R}_K \otimes_K L$，当 $L = K$时省略下标 K。记 $\mathcal{A}_{K,t} = \mathcal{A}_K[\frac{1}{t}]$和 $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}[\frac{1}{t}]$。我们有自然嵌入

$$\mathcal{A}_t \to \overline{K}(\!(t)\!), \quad \mathcal{A}_t \to \mathcal{R}. \tag{2.1.2.3}$$

环 $\mathcal{R}, \mathcal{A}_t$配备了微分算子 d。我们将 MC($\mathcal{R}_K$)（分别将 MC($\mathcal{R}$)）记为相对于 K 的$\mathcal{R}_K$ （分别相对于 K 的$\mathcal{R}$ ）上的有限自由微分模范畴。MC($\mathcal{R}$) 中的每个对象都来自某个有限扩张 L of K 下 MC($\mathcal{R}_L$) 中某个对象的标量扩张。范畴 MC($\mathcal{R}$) 是 K 上的 Tannakian 范畴。

2.1.3. 存在一个 σ-线性自同态 ϕ of $\mathcal{R}_K$，定义为 $t \mapsto t^q$。如果存在同构 φ: $\phi^* M \simeq M$，我们称 MC($\mathcal{R}_K$) 中的对象 M 可以赋予 Frobenius 结构。称同构 φ 为 M 上的*Frobenius* 结构 （关于 σ）。

根据 Christol–Mebkhout 的定理 [16, § 6], , MC($\mathcal{R}$) 的全子范畴 MCF($\mathcal{R}$) 由可赋予 Frobenius 结构的对象的子对象和商对象生成，是一个 Tannakian 子范畴，并且在扩张下稳定。此外，根据 Dwork 的一个论证，MCF($\mathcal{R}$) 中的每个对象都是可解的（定义见 2.1.5）。

p-进局部单值定理 [5, 47, 56]指出，MCF($\mathcal{R}$) 中的每个对象都是准幺幂的。令 $F = k((t))$ 为局部域， I_F为 Gal(F/F) 的惯性子群， I_F^+为野惯性子群。特别地，MCF($\mathcal{R}$) 的 Tannakian 群同构于 $I_F \times \mathbb{G}_a$，其中I_F 被视为一个仿射群 [4, 定理 7.1。1], 即我们有一个张量等价：

$$\mathrm{MCF}(\mathcal{R}) \simeq \mathbf{Rep}_{\overline{K}}(I_F \times \mathbb{G}_a). \tag{2.1.3.1}$$

假设 $k = \mathbb{F}_q$和 $\sigma = \mathrm{id}_K$: $K \to K$。令 W_F为 F的 Weil 群。设 $(\mathscr{E}, \varphi)$ 是一个秩为 n 、带有 Frobenius 结构的 K域上的微分模。根据 [55, § 3.2, 3.4], , 我们可以将 Weil–Deligne 表示 (ρ, N) 与系数取自 K的 $(\mathscr{E}, \varphi)$ 联系起来，它扩展了 (2.1.3.1)：

$$\rho : W_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{K}), \quad N \in \mathfrak{gl}_n \text{ nilpotent},$$

使得 $\rho(I_F)$ 有限，且 $\rho(\mathrm{Frob}) N \rho(\mathrm{Frob})^{-1} = qN$。

2.1.4. 我们沿用 [48, § 11]的定义，回顾辅助半径的定义。

令 M 为一个秩为 n 、定义在 $K\langle \alpha/x, x/\beta\rangle$ 上的有限自由微分模，其中 $0 \le \alpha < \beta$。对于$\rho \in [\alpha, \beta]$，令 F_ρ 为 $K(x)$ 关于 ρ-Gauss 范数 $|\cdot|_\rho$ [48,（定义 9.4.1]）的完备化。令$R_i(M, \rho)$ 为 $M_\rho = M \otimes F_\rho$ [48, § 11.3] 的（外在）辅助半径，并按递增顺序排列，因此 $R_1(M, \rho)$ 是 M_ρ 的一般收敛半径。对于 $r \in [-\log \beta, -\log \alpha]$，我们定义

$$f_i(M, r) = -\log R_i(M, e^{-r}),$$

使得 $f_i(M,\ r) \ge r$ 对所有 r成立。我们定义

$$F_i(M, r) = f_1(M, r) + \cdots + f_i(M, r). \tag{2.1.4.1}$$

这些函数满足以下性质 [48, 定理 11.2.1]：

- (线性性) 对于 $i = 1, \cdots n$, $f_i(M,\ r)$ $F_i(M,\ r)$ 是连续且分段线性的。此外，不同的斜率只有有限多个。
- (凸性) 对于 $i = 1, \cdots n$, $F_i(M,\ r)$ 是凸的。

2.1.5. 设 M 是 Robba 环 $\mathcal{R}$ 上的有限自由微分模。回顾一下， M 是可解的，当且仅当 $\lim_{\rho\to 1^-} R_1(M,\rho)=1$。假设 M 可解，则存在非负有理数$\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_n$ 以及某个 $\varepsilon\in(0,1)$，使得 [15, 定理 4.2-1]

$$R_i(M,\rho)=\rho^{1+\alpha_i},\quad \forall 1\leq i\leq n,\quad \forall\rho\in(1-\varepsilon,1). \tag{2.1.5.1}$$

有理数 $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_n\geq 0$ 称为 p-进斜率，对应于 M；而 α_1 称为最大 p-进斜率。 M 的$(p$-进$)$不规则度 定义为 p-进斜率之和:

$$\mathrm{Irr}(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

这是一个整数。由等价关系 (2.1.3.1)，Irr(M) 等于与 M [70]相关的表示的 Swan 导子。

2.2. **Clark 定理**。 考虑一个线性微分方程

$$A_n(x)y^{(n)}+A_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+A_0(x)y=0, \tag{2.2.0.1}$$

其系数属于 $\mathbb{C}_p[\![x]\!]$，且收敛半径非零。我们可以写作

$$A_i(x)=x^i\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}x^j,\qquad 0\leq i\leq n,$$

其中 $a_{i0}\neq 0$ 对某个 i成立。对于 $j\geq 0$，定义

$$\Phi_j(s)=\sum_{i=0}^{n}a_{ij}\binom{s}{i}i!.$$

那么 Φ_0 就是 (2.2.0.1) 在 $x=0$ 处的指标多项式。

定理 2.2.1 ([17]定理 3, [64])**.** 若 (2.2.0.1) 的指标多项式 Φ_0 的每个零点的相反数都是 p-进非 *Liouville* 数 [17, 定义 1], ，则每个幂级数解 $f(x)$在以下范围内收敛:

$$\mathrm{ord}\,x>c,$$

其中 c 是由 Φ_0 [17, 定义 2] 的零点权重以及 Φ_j 的系数的 p-进阶所确定的常数。

我们将上述定理应用于系数 $A_i(x)$ 位于 $(\mathbb{Q}\cap K)[x]$ 中的微分方程。在此情形下， $\Phi_0(s)$ 的每个零点都是 p-进非 Liouville 数。因此，我们推出 (2.2.0.1) 的幂级数解 $f(x)$ 具有正的 p-进收敛半径。

2.3. **Robba 环上的秩一微分模，据 Pulita** [59].

2.3.1. 设 $P(X)$ 是一个 Lubin-Tate 级数:

$$P(X)=pX+\cdots+X^p+\cdots\in\mathbb{Z}_p[[X]],$$

使得 $P(X)\equiv X^p$ 模 p 且 $P(X)\equiv pX$ 模 X^2。我们固定一列 $\{\pi_j\}_{j\geq 0}$ 中的元素，使得

$$P(\pi_{j+1})=\pi_j,\ P(\pi_0)=0,\quad \pi_0\neq 0.$$

鉴于 P 的牛顿多边形，我们有

$$|\pi_0|=p^{-\frac{1}{p-1}}:=\omega,\quad |\pi_i|=\omega^{\frac{1}{p^i}}.$$

序列 $(\pi_j)_{j\geq 0}$ 构成由 P 定义的形式群的塔特模的一个拓扑生成元。例如，若 $P(X)=(X+1)^p-1$，我们取 $\pi_i=\zeta_{p^i}-1$，并配以一组相容的本原 p^i 次单位根 ζ_{p^i}。若 $P(X)=X^p+pX$，我们取 π_0 为 Dwork 的 π (2.1.1)。

2.3.2. 设 B 是一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数。令 $\mathrm{W}(B)$ 表示 Witt 向量环。对于 $n\geq 0$，我们定义 $\mathrm{W}_n(B)=\mathrm{W}(B)/V^{n+1}\mathrm{W}(B)$。我们将第 n 个幽灵分量记为

$$\omega_n:\mathrm{W}_n(B)\to B,\quad \lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mapsto \lambda_0^{p^n}+p\lambda_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^n\lambda_n.$$

对于每个 $m\geq 0$，存在唯一的元素 $[\pi_m]\in\mathrm{W}(\mathbb{Z}_p(\pi_m))$，其幽灵坐标为：[59,注记 2.3]

$$\langle\omega_0([\pi_m]),\ldots,\omega_m([\pi_m]),\ldots\rangle=\langle\pi_m,\pi_{m-1},\cdots,\pi_0,0,\cdots\rangle.$$

我们将阿廷-哈斯指数记为

$$E(T):=\exp\left(T+\frac{T^p}{p}+\frac{T^{p^2}}{p^2}+\cdots\right)\in 1+T\mathbb{Z}_{(p)}[[T]].$$

对于 $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots)\in\mathrm{W}(B)$，相对于 λ 的阿廷-哈斯指数为

$$E(\lambda,T):=\prod_{j\geq 0}E(\lambda_jT^{p^j})=\exp\left(\omega_0T+\omega_1\frac{T^p}{p}+\cdots\right)\in 1+TB[[T]],$$

其中 $\langle\omega_0,\omega_1,\cdots\rangle$ 是 λ 的幽灵分量。

命题 2.3.3 ([59] 命题 2.2)**.** (i) 对于 $m\geq 0$，下列形式级数在圆盘 $|T|<1$ 中恰好收敛：

$$E([\pi_m],T)=\exp\left(\pi_mT+\pi_{m-1}\frac{T^p}{p}+\cdots+\pi_0\frac{T^{p^m}}{p^m}\right).$$

（ii）设 $d=np^m$ 为正整数，满足 $(n,p)=1$ 且 $\lambda=(\lambda_0,\cdots\ \lambda_m)\in\mathrm{W}_m(\mathbb{Z}_p[\pi_m])$。以下级数

$$e_d(\lambda,T):=E([\pi_m]\lambda,T^n)=\exp\left(\pi_m\omega_0T^n+\cdots+\pi_0\omega_m\frac{T^d}{p^m}\right)$$

当 $|T|<1$ 时收敛，其中 $\omega_i=\omega_i(\lambda)$ 是第 i 个幽灵分量。

定义 2.3.4。设 $d=np^m$ 为如上所述的正整数，且 $K_m=K(\pi_m)$。对于 $\lambda=(\lambda_0,\ \cdots\ \lambda_m)\in\mathrm{W}_m(\mathcal{O}_K)$，我们记

$$L_d(\lambda):=d+n\cdot\left(\frac{\pi_0\omega_m}{T^d}+\cdots+\frac{\pi_m\omega_0}{T^n}\right)\frac{dT}{T},$$

与 $e_d(\lambda,T^{-1})$ 相关的 $\mathcal{R}^{K_m}$ 上的微分模（即 $e_d(\lambda,T^{-1})$ 是一个解）。

定理 2.3.5 （[59] 定理 2.2、2.5）。（i）微分模 $L_d(\lambda)$ 是可解的。

（ii）若对所有 $i=0,\ 1,\cdots\ m$，都有 $|\lambda_i|<1$，则 $L_d(\lambda)$ 是平凡的。

If $|\lambda_0|\ \cdots\ |\lambda_{r-1}|<1$ 且 $|\lambda_r|=1$ 对于某个 $r\leq m$，则有 $\mathrm{Irr}(L_d(\lambda))=d/p^r$。

(iii) 下列函数是过收敛的（即在某个圆盘 $|T|<1+\varepsilon$ *with*$\varepsilon>0$ 中收敛）：

$$\theta_d(\lambda,T):=\frac{e_d(\lambda,T^{-1})}{e_d(\sigma(\lambda),T^{-p})}.$$

它在 $L_d(\lambda)$上诱导出 *Frobenius* 结构，该结构对应于 K_m 上一个将 σ 扩展的 *Frobenius* 的提升。

命题 2.3.6。设 d 是一个整数 ≥ 1。设

$$L := d + \left(\frac{a_d}{T^d} + \frac{a_{d-1}}{T^{d-1}} + \cdots + \frac{a_1}{T}\right)\frac{dT}{T}$$

是 R_K 上带有 $a_d \neq 0$ 的秩一可解微分模。

(i) L 可以赋予 *Frobenius* 结构。(ii) 对于 $1 \leq i \leq d-1$，有 $|a_d| \leq \omega$ 和 $|a_i| < 1$。(iii) 等式 $|a_d| = \omega$ 成立，当且仅当 $\mathrm{Irr}(L) = d$。

证明。(i) 扩大 K 后，我们可以假设每个 a_i 都包含在 K 中。由于 L 在 $\frac{dT}{T}$ 上的系数为零，该断言由 [58, 定理 4.9] 得出。

(ii) 通过直接计算，可以证明一般半径 [58, 引理 3.4]

$$R(L,\rho) = \omega|a_d|^{-1}\rho^{d+1}, \quad \text{for } \rho \text{ sufficiently close to } 0. \tag{2.3.6.1}$$

利用 $F(L, r)$ 的凸性 $= -\log R(L, e^{-r})$，我们推得 $|a_d| \leq \omega$ [58, 引理 4.2]。

我们对 d 进行归纳来证明该断言。$d = 1$ 的情形已知。假设已对整数 $\leq d-1$ 证明了该断言，现证明 d 的情形。

设 $d = np^m$ 满足 $(n, p) = 1$。由于 $|a_d| \leq \omega$，我们可以找到一个元素 $(\lambda_0, \cdots \lambda_m) \in W_m(\mathcal{O}_K)$，使得 $n\omega_m(\lambda)\pi_0 = a_d$。由于可解模在张量积下封闭，微分模 $L \otimes (L_d(\lambda))^{-1}$ 是可解的，并且根据定理 2.3.5 和归纳假设，其系数属于 $\mathfrak{m}_K$。于是断言得证。

(iii) 如果 $\mathrm{Irr}(L) = d$，则当 ρ 充分接近 1 时，$R(L, \rho) = \rho^{d+1}$。由 $F(L, r)$ 的凸性以及 (2.3.6.1)，我们推出对于所有 $\rho \in (0, 1)$，$R(L, \rho) = \rho^{d+1}$，因而 $|a_d| = \omega$。

若 $|a_d| = \omega$，由 $F(L, r)$ 的凸性及 (2.3.6.1)，我们推得 $R(L, \rho) = \rho^{d+1}$ 对所有 $\rho \in (0, 1)$ 都成立。因此 $\mathrm{Irr}(L) = d$。□

3. P-进等斜率联络

本节中，设 G 是 K 上一个伴随型连通分裂几乎单简单群，并配备一个定义在 $\mathcal{O}_K$ 上的分裂模型，且 $\check{\mathfrak{g}}$ 是其李代数。我们固定 $\check{G}$ 的一个极大环面 $\check{T}$，以及一个博雷尔子群 $T \subset B \subset G$。我们假设 p 对 G 是良好的。

魏尔群 $\mathbb{W}$（对应于 G）中正则椭圆元的阶称为 $\check{G}$ [66] 的正则椭圆数。设 m 是 $\check{G}$ 的一个正则椭圆数，且与 p 互素；设 N 是一个与 m 互素的正整数。我们令 $\nu = \frac{N}{m}$。

3.1. P-进开单位圆盘上的等斜率联络。

3.1.1. 令 $\check{\rho}$ 为 $\check{\mathfrak{g}}$ 的正余根之半和。固定一个本原 m 次单位根 ζ_m。令 $\theta = \mathbf{Ad}_{\check{\rho}(\zeta_m)}$ 为 $\check{\mathfrak{g}}$ 的一个内自同构，它定义了一个分次：

$$\check{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \check{\mathfrak{g}}_i. \tag{3.1.1.1}$$

以下 [39], 形式等斜率联络 是一个取值于 $\check{\mathfrak{g}}$ 的联络：

$$d + (A_r t^r + A_{r+1}t^{r+1} + \cdots)dt, \quad A_i \in \check{\mathfrak{g}}(\overline{K}), \quad r \in \mathbb{Z},$$

其可通过 $\check{G}(K((t)))$ 上的规范变换化为以下典范形式 [6]：

$$d + (X_{-N}t^{-N/m} + \cdots + X_{-1}t^{-1/m})\frac{dt}{t}, \tag{3.1.1.2}$$

其中 $X := X_{-N} \in \check{\mathfrak{g}}(K)$ 是正则半单的，$(N,\ m) = 1$, $X_i \in \mathfrak{z}_{\check{\mathfrak{g}}}(X) =: \check{\mathfrak{t}}_X$ 且对于 $-N+1 \leq i \leq -1$，$\overline{X_i} \in \check{\mathfrak{g}}_i(K)$。

此外，其微分伽罗瓦群由包含 X 的 G 中最小的环面，以及魏尔群 $\mathbb{W}$ of G 中正则椭圆元 m 阶的一个提升生成。

为了处理 p-进系数，我们还需要以下观察。

引理 3.1.2. 斜率为 $\frac{N}{m}$ 的形式等斜率联络可以在 $\check{G}(K(\!(t^{1/2m})\!))$ 上经规范变换化为其典范形式。

证明. 设 ∇ 是斜率为 $\frac{N}{m}$ 的形式等斜率联络，其典范形式的首项 $X \in \check{\mathfrak{g}}$ 为正则半单。令 $\{p_{-1}, 2\check{\rho}, p_1\}$ 为 $\check{\mathfrak{g}}$ 的一个主 $\mathfrak{sl}_2$-三元组，其中 p_{-1} 是负简单根子空间的一组基之和。令 r 为 G 的秩，$\{d_i\}_{i=1}^r$ 为 G 的基本次数，$\{p_i\}_{i=1}^r$ 为权为 d_i 的 $\check{\mathfrak{g}}^{p_1}$ 的齐次基。记 $\ell_{i,j} = (d_i - 1)N + m(d_i - 1 - j)$ 分别表示 $1 \leq i \leq r$ 和任意 j。根据 [73, 命题 23]，∇ 可以经 $\check{G}(K((t)))$ 规范变换为如下方程：

$$d + (p_{-1} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell_{i,j} \geq -N} v_{i,j} t^{-j-1} p_i) dt,$$

其中 $v_{i,\ j} \in \mathbb{C}$ 且 $Y := p_{-1} + \sum_{m|d_i} v_{i,\ d_i + \frac{d_i N}{m} - 1} p_i \in \check{G} \cdot X$。

固定 $s = t^{1/2m}$。通过 $s^{2(N+m)\check{\rho}}$进行规范变换，得到 ∇'，如同上中的方程 (44) 所示；这是一个最高极项为 $2mY s^{-2N-1} ds$的形式联络。由于 $2mY$ 是正则半单的，同上中引理 20 的证明表明，∇' 可以在 $\check{G}(K((t^{1/2m})))$ 上经规范变换化为其典范形式。□

注 3.1.3. 上述论证实际上表明，只要 $\check{\rho}$ 是 G的一个 $\check{}$ 余特征，斜率为 $\frac{N}{m}$ 的形式等斜率联络就可以在 $\check{G}(K((t^{1/m})))$ 上经规范变换化为其典范形式。例如，当 G 是伴随的情形下，这一条件成立。此外，可以验证，对于那些 G使得 m 可以为奇数的情况，$\check{\rho}$ 始终是一个余特征。

以下我们考虑上述概念的一个 p-进类比。

定义 3.1.4。 一个具有（p-进）斜率 $\nu = \frac{N}{m}$ 的 p-进等斜联络 是一个可解的$\check{\mathfrak{g}}$值微分模 $\mathscr{E}$，定义在$\mathcal{A}_t$ 上（2.1.2，2.1.5），且 $[2m]^*\mathscr{E}$ 可通过 $\check{G}(\mathcal{A}_{t^{1/2m}})$-规范变换化为如下形式：

$$d + \left(\pi X_{-N} t^{-N/m} + \cdots + X_{-1} t^{-1/m}\right) \frac{dt}{t}, \tag{3.1.4.1}$$

其中 $X := X_{-N} \in \check{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}_K)$，并且 X 在 $\check{\mathfrak{g}}(K)$ 和 $\check{\mathfrak{g}}(k)$中均为正则半单，$\overline{X_i} \in \check{\mathfrak{t}}_X$且 $\overline{X_i} \in \check{\mathfrak{g}}_i(\mathfrak{m}_K)$，其中 $-N+1 \leq i \leq -1$。

根据注 3.1.3，当 m 为奇数时，我们可以通过 $\check{G}(\mathcal{A}_{t^{1/m}})$进行规范变换。因此，$p$ 总与所需覆盖的次数 $2m$ （或 m）互素。此后，我们只考虑 $p > 2$ 的情形。当 $p = 2$ 时，我们可以将 $t^{1/2m}$ 替换为 $t^{1/m}$，从而重新进行以下论证。

根据假设，X 在 $\check{\mathfrak{g}}$ 上的作用的特征值要么为零，要么是 p-进单位。通过伴随表示 $\check{G} \to \mathrm{GL}(\check{\mathfrak{g}})$，我们得到 $[2m]^*\mathscr{E}(\check{\mathfrak{g}})$在$\mathcal{A}_{t^{1/2m}}$上的微分模范畴中的一个分解：

$$[2m]^*\mathscr{E}(\check{\mathfrak{g}}) \simeq Y_0 \bigoplus \oplus_{\alpha \in \Phi} Y_\alpha, \tag{3.1.4.2}$$

其中， Y_0 是秩为 $r=\mathrm{rank}(\check{G})$的平凡微分模。记 $s=t^{1/2m}$。每个 Y_α 都是$\mathcal{A}_s$上的秩一可解微分模：

$$Y_\alpha = d+\left(\varepsilon_{N,\alpha}s^{-2N}+\cdots+\varepsilon_{1,\alpha}s^{-2}\right)\frac{ds}{s},$$

与 $|\varepsilon_{N,\alpha}|=\omega$ 以及 $|\varepsilon_{i,\alpha}|<1$。

命题 *3.1.5.* *</style}*设 $\mathscr{E}$ 是一个 p-*adic* 等斜率联络。

(i) </style}可以赋予一个定义在 R 上、取值于$\check{G}$的 *Frobenius* 结构。

(ii) </style} 的最大 -adic 斜率为 。此外，由伴随表示定义的 ($\check{\mathfrak{g}}$) 的 p-*adic* 斜率多重集由 $\sharp\Phi$ 个 ν 和 r 个0组成。

证明。 (i) 扩大 K （由 σ 保持）后，我们可以假设 K 包含所有 n 次单位根，且 (3.1.4.1) 中 $\mathscr{E}$ 的系数 X_i 属于 $\check{\mathfrak{g}}(K)$。考虑通过伴随表示 $\iota:\check{G}\to \mathrm{GL}(\check{\mathfrak{g}})$ 得到的取值于 GL($\check{\mathfrak{g}}$) 的联络 $\mathscr{E}(\check{\mathfrak{g}})$。根据命题 2.3.6(i)， $[2m]^*\mathscr{E}(\check{\mathfrak{g}})$ 具有定义在 Robba 环$\mathcal{R}$上的 Frobenius 结构：

$$\varphi(s)=\exp(\iota(\left(\frac{m\pi}{N}X_{-N}s^{-2N}+\cdots+mX_{-1}s^{-2}\right)))\cdot\exp(\iota(\left(\frac{m\pi}{N}\sigma(X_{-N})s^{-2qN}+\cdots+m\sigma(X_{-1})s^{-2q}\right)))^{-1},$$

其中 σ: $\mathcal{O}_K\to\mathcal{O}_K$是第 q 次 Frobenius 的一个提升。由构造， $\varphi(s)$ 位于 $\check{G}(\mathcal{R}_K)\subset$一般线性群($\check{\mathfrak{g}}$)($\mathcal{R}_K$) 中，并在 $[2m]^*\mathscr{E}$ 上定义了一个取值于 $\check{G}$ 的 Frobenius 结构。当我们把 s 替换为 $\zeta_{2m}s$ （其中 ζ_{2m} 是一个 m 次单位根）时， $\varphi(s)$ 通过 $\iota(\check{\rho}(\zeta_{2m}))$ 与 $\varphi(\zeta_{2m}s)$ 共轭。因此， φ 下降为 $\mathscr{E}$ 上一个取值于 $\check{G}$ 的 Frobenius 结构，从而断言成立。

(ii) 由命题 2.3.6(iii)，分解 (3.1.4.2) 中的每个 Y_α 具有 p-进斜率 $2N$。于是断言成立。□

3.2. **局部单值群的比较**。 设 $\mathscr{E}$ 是一个 p-进等斜率联络。设 $\mathcal{E}$ 是经由典范映射 $\mathcal{A}_t\to K((t))$ (2.1.2.3) 与 $\mathscr{E}$ 相关的形式联络。则 $\mathcal{E}$ 在 3.1.1 的意义下是一个形式等斜率联络。

令$\langle\mathcal{E}\rangle$ 为由$\mathcal{E}$生成的、关于 K 的$K((t))$上形式联络范畴 MC($\overline{K}((t))$) 的 Tannakian 子范畴。令$\langle\overline{\mathscr{E}}\rangle$ 为由$\mathscr{E}$生成的 $\overline{\mathrm{MC}}(\mathcal{R})$ 的 Tannakian 子范畴。我们将$\langle\mathcal{E}\rangle$ （分别将$\langle\mathscr{E}\rangle$）的 Tannakian 群记为 $G_{\mathrm{diff}}(\mathcal{E})$（分别记为 $G_{\mathrm{geo}}(\mathscr{E})$）。我们建立这两个 Tannakian 范畴之间的关系。

命题 3.2.1. 这两个 *Tannakian* 范畴之间存在一个自然的张量函子：

(3.2.1.1) $$\langle\mathcal{E}\rangle\to\langle\mathscr{E}\rangle,$$

它诱导出局部单值群之间的一个嵌入：

$$G_{\mathrm{geo}}(\mathscr{E})\to G_{\mathrm{diff}}(\mathcal{E}).$$

证明。 根据构造，范畴$\langle[2m]^*\mathscr{E}\rangle$ （分别是$\langle[2m]^*\mathcal{E}\rangle$）是半单的，且该范畴中的每个不可约对象都是秩一的，并具有形式 $d+(\sum_{j\geq1}a_js^{-j})\frac{ds}{s}$。对于 MC($K((s))$) 中的两个秩一对象$L_i=d+(\sum_{j\geq1}a_{i,j}s^{-j})\frac{ds}{s}$， $L_1\simeq L_2$当且仅当$a_{1,j}=a_{2,j}$对每个 j都成立。因此，存在一个自然的张量函子

$$\langle[2m]^*\mathcal{E}\rangle\to\langle[2m]^*\mathscr{E}\rangle.$$

一般而言，范畴 $\langle\mathcal{E}\rangle$ （分别为 $\langle\mathscr{E}\rangle$）等价于沿拉回 $[2m]^*$ 的下降数据范畴。于是，我们可以将上述函子作用于下降数据，从而定义函子 (3.2.1.1)。特别地，对于 $\check{G}$ 的每个表示 V，函子都会将 $\mathcal{E}(V)$ 映至 $\mathscr{E}(V)$。

By [22，命题 2.21], the induced morphism $G_{\mathrm{geo}}(\mathscr{E})\to G_{\mathrm{diff}}(\mathcal{E})$ 是一个 c losed 浸入。 □

3.2.2. 设 $F = k((t))$ 为局部域，Gal_F 为 F 的伽罗瓦群，I_F 为 Gal_F 的惯性子群。根据命题 3.1.5(i) 和 p-进局部单值定理（见 2.1.3），可以为 $\mathscr{E}$ 配上一种表示 (ρ, N)，其系数取自 K

$$\rho : I_F \to \check{G}(\overline{K}), \quad N \in \check{\mathfrak{g}}(\overline{K}) \text{ nilpotent},$$

使得 ρ, N 彼此交换，且 $\rho(I_F)$ 是有限的。

定理 3.2.3. (i) 设 $^\vee T_X$ 为 X 在 K 上的 $^\vee G$ 中的中心化子 $C_{\check{G}}(X)$，它是一个极大环面。表示 ρ 可纳入一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & I_F^+ & \longrightarrow & I_F & \longrightarrow & I_F^t & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \check{T}_X & \longrightarrow & N_{\check{G}}(\check{T}_X) & \longrightarrow & \mathbb{W} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

使得野惯性子群 I_F^+ 被映到 $^\vee T_X$，且温和惯性 I_F^t 的一个生成元被映到魏尔群 $\mathbb{W}$ 中阶为 m 的正则椭圆元 σ。

(ii) 幂零算子 N 是平凡的。(iii) $\rho(I_F^+)$（相应地，$\rho(I_F)$）在 $^\vee G$ 中的中心化子是环面 $^\vee T_X$（相应地，$^\vee T_X^\sigma$，它是有限的）。(iv) 我们有 $^\vee\mathfrak{g}^{I_F} = 0$ 以及斯旺 $(^\vee\mathfrak{g}) = \sharp\Phi \cdot \nu$。

证明. **(i)** 由 [14, 命题 12], 的类似论证，$G_{\mathrm{diff}}(\mathcal{E})$ 的野惯性群是其李代数包含 X 的最小环面 S，且其驯商群的一个生成元被映到魏尔群 $\mathbb{W}$ 中阶为 m 的正则椭圆元。因此，局部微分伽罗瓦群 $G_{\mathrm{diff}}(\mathcal{E})$ 可纳入如下的图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G_{\mathrm{diff}}^{\mathrm{wild}}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & G_{\mathrm{diff}}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \check{T}_X & \longrightarrow & N_{\check{G}}(\check{T}_X) & \longrightarrow & \mathbb{W} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

于是该断言由命题 3.2.1 得出。

(ii) 鉴于分解 (3.1.4.2)，单值算子 N 是平凡的。

(iii) 设 $^\vee T_X[p]$ 是 $^\vee T_X$ 的 p-挠子群。令 $\mathbb{X} = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, {}^\vee T_X)$，则有一个同构

$$\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{X} \xrightarrow{\sim} \check{T}_X[p], \quad a \otimes \lambda \mapsto \lambda(\zeta_p^a).$$

由于 $\rho(I_F^+)$ 是有限阿贝尔 p-群，ρ 可经由商群 $I_F^+ \twoheadrightarrow k'^+ \to {}^\vee T_X[p]$ 因子化，其中 k' 是 k 的有限扩张。通过同构 $k' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(k', {}^\vee T_X[p])$，$\rho$ 对应于一个元素 $^\vee\lambda \in k' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{X}$。鉴于 $\rho(I_F^+)$ 对 $^\vee\mathfrak{g}$ (3.1.4.2) 的作用，我们推得，对任意根 $\alpha : {}^\vee T_X \to \mathbb{G}_m \in \Phi$，都有 $\alpha \circ {}^\vee\lambda \neq 0$。另一方面，$\rho(I_F^+)$ 包含于极大环面 $^\vee T_X$ 中。由于 $\rho(I_F^+)$ 是一个初等阿贝尔 p-群，根据 [67,定理 2.28(c)]，$\rho(I_F^+)$ 的中心化子是连通的，因而等于 $^\vee T_X$。

由于驯生成元 $\sigma = \rho(1) \in \mathbb{W}$ 的像是椭圆的，我们推得 $C_{^\vee G}(\rho(I_F)) = {}^\vee T_X^\sigma$ 是有限的。

(iv) 由 (iii)，我们有 $^\vee\mathfrak{g}_X^{I_F^+} = {}^\vee\mathfrak{t}_X$。由于 $\sigma = \rho(1) \in \mathbb{W}$ 是椭圆的，我们推出 $^\vee\mathfrak{g}_X^{I_F} = {}^\vee\mathfrak{t}_X^\sigma = 0$。$p$-进不规则性可由命题 3.1.5(ii) 计算。□

推论 3.2.4. $\mathscr{E}$ 上的 *Frobenius* 结构在相差 $\check{}\, T_X^\sigma$ 中一个位于 $\check{}G(K)$ 内的元素的意义下是唯一的。

证明。给定两个 Frobenius 结构 φ_1，φ_2，复合映射 $u=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$与 $\rho(I_F)$可交换。因此，该推论由定理 3.2.3(iii)得出。□

3.2.5. 假设 $k=\mathbb{F}_q$, $\sigma=\mathrm{id}_K$： $K\to K$，并且 $\mathscr{E}$上存在一个 Frobenius 结构 φ。根据 2.1.3，我们可以将 $(\mathscr{E},\ \varphi)$ 关联到一个系数取自 K 的 Weil–Deligne 表示 $(\rho,\ N)$

$$\rho: W_F\to \check{G}(\overline{K}),\quad N=0.$$

推论 3.2.6。 (i) *Weil* 表示 ρ： $W_F\to\check{}G(K)$ 是惯性离散的，即 $\rho(I_F)$ 在 $\check{}G$ 中的中心化子是有限的。

(ii) 像 $\rho(W_F)=D$ 是有限的，并且包含于正规化子 $N_{\check{}G}(\check{}T_X)$中。它的分歧滤过具有如下形式：

$$D\geq D_0=\rho(I_F)\geq D_1=\rho(I_F^+),\quad D_2=1.$$

唯一的非零上分歧断点是 $\nu=\frac{N}{m}$。

证明。断言（i）由定理 3.2.3(iii)推出。

(ii) 由 [34, 引理 3.1]，，我们推得 $\rho(W_F)$ 是有限的。Frobeniusρ(Fr) 的一个提升的像正规化了像 $\rho(I_F^+)$，因此也正规化了中心化子 $C_{\check{}G}(\rho(I_F^+))=\check{}T_X$。因此，$\rho(W_F)$ 也包含于 $N_{\check{}G}(\check{}T_X)$ 中。

由命题 3.1.5(ii)可知，唯一的非零分歧断点是 ν。□

注记 3.2.7。 由上述讨论可见，与斜率为 ν 的 p-adic 等斜率联络相关的 Weil–Deligne 表示是一个一般深度为 ν[41, 定义 6.1.1] 中的环面超尖参数。在同上中，作者为此类参数构造了超尖 L-包。我们将在后文通过整体几何 Langlands 对应讨论此类对应的例子。然而，对于 p-adic 等斜率联络是否给出全部环面超尖参数，我们尚不清楚。

4. 某些刚性联络上的 Frobenius 结构

本节中，设 G 是基底 k（或 $\mathcal{O}_K$，K）上的分裂连通几乎单群，具体基底将另行说明。固定一个 Borel 子群 $B\subset G$ 和一个极大环面 $T\subset B$。设 $U\subset B$ 是 B 的幂零根基，$U^{\mathrm{op}}\subset B^{\mathrm{op}}$ 是对偶 Borel 子群及其幂零根基。用 $T_{\mathrm{ad}}\subset B_{\mathrm{ad}}\subset G_{\mathrm{ad}}$ 表示 $T\subset B\subset G$ 对中心 $Z(G)$ 取商所得的商群。记 $(\check{}G,\ \check{}B,\ \check{}T)$ 为 G 在 K 上的 Langlands 对偶群，它由几何 Satake 等价构造而得。

4.1. 广义克洛斯特曼层，依 Yun [75] 所述。

4.1.1. 我们在基底 k 上工作。设 $\mathbf{P}$ 是 $G(k((t)))$ 的一个抛物子群。$\mathbf{P}(1)$，$\mathbf{P}(2)$ 分别是 $\mathbf{P}$ 的 Moy–Prasad 滤过的第一步和第二步，设 $L_{\mathbf{P}}\subset\mathbf{P}$ 是 Levi 商 $L_{\mathbf{P}}\simeq\mathbf{P}/\mathbf{P}(1)$ 的自然提升。令 $V_{\mathbf{P}}=\mathbf{P}(1)/\mathbf{P}(2)$，其带有 $L_{\mathbf{P}}$ 的作用。

若存在一个在对偶空间$V_{\mathbf{P}}^*$ 上具有有限稳定子 [75, 定义 2.5] 的闭 $L_{\mathbf{P}}$轨道，则称抛物子群 $\mathbf{P}$ 为可容许的。这样的轨道称为稳定轨道。可容许抛物子群 $\mathbf{P}$ 的集合与 G [75,§ 2.6]的正则椭圆数 $m=m(\mathbf{P})$的集合之间存在双射。

令 m 为与$\mathbf{P}$ 相关的 G 的正则椭圆数（它同时也是$\check{}G$的正则椭圆数）。我们假设 p 与 m 互素，且 p 不是 G的挠素数。当$m=h$ 为考克斯特数时，我们不对 p作任何假设。

令$\mathcal{G}$ 为 $\mathbb{P}^1$ 上的群概形，使得$\mathcal{G}|_{D_0} \simeq \mathbf{P}^{\mathrm{op}}$ 是与$\mathbf{P}$相对的抛物子群，$\mathcal{G}|_{D_\infty} \simeq \mathbf{P}(2)$ 和 $\mathcal{G}|_{\mathbb{G}_m} \simeq G \times \mathbb{G}_m$，其中 D_x 是围绕 $x \in \{0, \infty\}$的形式圆盘。令 $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ 为 $\mathbb{P}^1$上的$\mathcal{G}$-挠子模叠。存在一个开浸入

$$j : U(\simeq V_{\mathbf{P}}) \hookrightarrow \mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}, \tag{4.1.1.1}$$

使得 U 是 $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ [74, 上某个线丛截面的非零轨迹（引理 3.1]）。特别地， j 是开仿射的。

4.1.2. 我们取一个非平凡的加性特征 $\psi : \mathbb{F}_p \to K^\times$，并将满足 $\pi^{p-1} = -p$ （与 ψ 相关）的元素记为 $\pi \in K$。设 $\mathscr{A}_\psi$ 是 $\mathbb{A}^1_k$ 上的 Dwork F-等晶体（2.1.1）。下文中，我们使用算术 $\mathscr{D}$-模 [10, 2] 的理论（简要概述见 [71, § 2.1] ）。

我们固定一个定义在 k 上的稳定函数 ϕ: $V_{\mathbf{P}} \to \mathbb{A}^1$。典范态射

$$j_!(\phi^+\mathscr{A}_\psi) \to j_+(\phi^+\mathscr{A}_\psi)$$

是一个同构。于是我们定义 $\mathcal{A}_\phi = j_{!+}(\phi^+\mathscr{A}_\psi)$，它是 $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ 上的一个全纯模。它是不可约的，并且相对于 $\mathbf{P}(1)$ 在 $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ 的 ∞ 处的作用，具有 $(\mathbf{P}(1)$ $\phi^+\mathscr{A}_\psi)$-等变性。

根据 [75, T 定理 3.8], $\mathcal{A}_\phi$ 是一个 Hecke 特征模。我们将$\mathcal{A}_\phi$ 的 Hecke 特征值记为

$$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}_{\check{G}}(\phi) : \mathbf{Rep}(\check{G}) \to \text{F-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_{m,k}/K).$$

4.1.3. 设 ℓ 是一个不同于 p的素数。Yun 的构造有一种变体：使用代数的$\mathscr{D}$-模（分别为 ℓ-adic 层）替代算术 $\mathscr{D}$-模，以在$\mathbb{G}_{m,K}$ 上构造一个 $\check{}G$-联络（分别在$\mathbb{G}_{m,k}$上构造一个 ℓ-adic $\check{}G$-局部系统），因为构造中使用的所有几何对象在 O_K上都有对应物。具体而言，我们将 $\mathbb{A}^1_k$上的过收敛 F-等晶体 $\mathscr{A}_\psi$替换为带有参数 $\lambda \in K$的指数 $\mathscr{D}$-模 $\mathrm{E}_\lambda = Kx, \partial_x/(\partial_x + \lambda)$，其中参数取自 $\mathbb{A}^1_K$（分别替换为固定加性特征 ψ : $\mathbb{F}_p \to \mathbb{Q}_\ell^\times$ 对应的 Artin–Schreier 层 AS_ψ ）。我们在 K 上（分别在 k上）固定一个稳定函数 ϕ : $V_{\mathbf{P}} \to \mathbb{A}^1$。应用上述构造，我们得到一个 de Rham（分别为 ℓ-adic）Hecke 特征值:

$$\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\lambda\phi) : \mathbf{Rep}(\check{G}) \to \mathrm{Conn}(\mathbb{G}_{m,K}) \qquad (\text{resp. } \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi) : \mathbf{Rep}(\check{G}) \to \mathrm{LocSysm}(\mathbb{G}_{m,k})).$$

4.2. Kl与$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$ 的比较。本小节中，我们研究定义在$\mathcal{O}_K$上的概形。若线性函数 $\phi : V_{\mathbf{P}} \to \mathbb{A}^1$ 定义在$\mathcal{O}_K$ 上，且其在 k 和 K 上的基变换均为稳定，则称该线性函数为稳定函数。取这样一个函数 ϕ ，并滥称其在 k （分别为 K）上的基变换为 ϕ。

4.2.1. 设 $U \hookrightarrow X = \mathbb{P}^1$ 是定义在$\mathcal{O}_K$ 上的概形之间的开浸入，其补集 $S \to X$在$\mathcal{O}_K$上平坦。令 $\mathfrak{X}$ （分别为 $\mathfrak{U}$）为 X（分别为 U）的 p-进完备化， $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$（分别为 $\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}$）为其相关刚性泛纤维，并令 $\mathcal{X}$（分别为$\mathcal{U}$）为 X_K^{an}（分别为 $U_{\mathrm{an}K}$）的解析化。则这两个刚性空间$\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ 和$\mathcal{X}$ 同构，且 $\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}$ 是$\mathcal{X}$中 U_k 的管状邻域 $]U_k[_{\mathfrak{X}}$ 。特别地，$\mathcal{U}$ 是 $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$中 $\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}$的严格邻域。我们用 $\mathrm{Conn}(U_K)$ 表示由带有可积联络的相干 $\mathscr{O}_{U_K}$-模构成的范畴。

设 (M, ∇) 是一个赋有（相对于 K 的）可积联络的相干 $\mathscr{O}_{U_K}$-模。我们用 $(M_{\mathrm{an}}\, \nabla^{\mathrm{an}})$ 表示沿 ε: $\mathcal{U} \to U_K$ 拉回到 $\mathcal{U}$ 上的对象。对于 $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ 中 $\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}$ 的任意严格邻域 V，函子 $j^\dagger$ 的定义参见 ([8] 2.1.1)；该函子从 V 上阿贝尔层的范畴 $\mathbf{Ab}(V)$ 到其自身。我们为 M^{an} 关联一个带有相应联络的 $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-模 $M^\dagger = j^\dagger(M^{\mathrm{an}})$。在此情形下，我们有如下张量函子:

$$\mathrm{Conn}(U_K) \xrightarrow{(-)^\dagger} \mathrm{Conn}(j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \hookleftarrow \mathrm{Isoc}^\dagger(U_k/K) \tag{4.2.1.1}$$

其中 $\mathrm{Isoc}^\dagger(U_k/K)$ 表示相对于 K 的 U_k 上过收敛等晶体的范畴，且第二个函子是全忠实的。然而，函子 $(-)^\dagger$ 并非全忠实。

我们可以通过标量扩张，将函子 (4.2.1.1) 延拓至 $\overline{K}$ 上。

定理 4.2.2. 存在一个典范同构，将取值于 $\check{G}$ 的带联络 $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-模..... on

$$\iota : (\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(-\pi\phi_K))^\dagger \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}_{\check{G}}(\phi_k).$$

可以使用与 [71, § 4.2], 中相同的自变量证明上述定理，该处证明了 Iwahori 情形 $\mathbf{P}=\mathbf{I}$。在 *loc. cit* 的证明中，一个关键要素是开嵌入 $j : V_{\mathbf{I}} \to \mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ 是 $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ 上某个线丛的截面的非零轨迹。在我们的抛物型设置中，同样具有这一几何性质。

4.3. Kl 与 theta 联络之间的比较。

本小节中，我们研究定义在 K 上的概形。

4.3.1. 设 θ 是 $\check{\mathfrak{g}}$ 在 K 上的一个内稳定分次，它通过 [62, 推论 14] 与正则椭圆数 m 相对应。更精确地说，我们可以假设 θ 由 $\exp(x)$ 的伴随作用给出，其中 $x \in \mathbb{X}_*(\check{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，并满足 $\check{\lambda} = mx \in \mathbb{X}_*(\check{T})$。此外，我们还可以假设 x 位于基本阿尔科夫的 $\check{}$ 闭包中。我们将 $\check{\mathfrak{g}}$ 上由 λ 定义的 $\mathbb{Z}$-分次记为：

$$\check{\mathfrak{g}} = \bigoplus_l \check{\mathfrak{g}}(l). \tag{4.3.1.1}$$

令 $\check{\mathfrak{g}}_1 \subset \check{\mathfrak{g}}$ 为相对于 θ 的一度子空间。于是有：

$$\check{\mathfrak{g}}_1 = \bigoplus_{l\equiv 1 \bmod m} \check{\mathfrak{g}}(l). \tag{4.3.1.2}$$

令 $X \in \check{\mathfrak{g}}_1$ 为一个元素。记作 $X = \sum_l X_l$，其中 $X_l \in \check{\mathfrak{g}}(l)$。令 β 为最高根，α_0 为仿射根 $1-\beta$。(归一化的) Kac 坐标 $s_0 := \alpha_0(x)$ 等于 0 或 1。根据 [13, 引理 2.1], , 那些满足 $X_l \neq 0$ 的 l 满足 $s_0 - m \leq l \leq m$ 和 $m|l-1$。

沿用 Yun 和 Chen 的做法，θ-联络 X 对应的 [13], 是定义在 $\mathbb{G}_m$ 上的 $\check{G}$-联络，定义如下：

$$\Theta(X) := d + \left(\sum_l X_l x^{\frac{1-l}{m}}\right)\frac{dx}{x} = d + \left(X_1 + X_{1-m}x\right)\frac{dx}{x}. \tag{4.3.1.3}$$

令 $\check{} G_0 \subset \check{G}$ 为由 θ 固定的约化子群。令 $\check{\mathfrak{g}}^{\mathrm{st}}$ 为稳定向量的轨迹，即其 $\check{} G_0$-共轭类是闭的且具有有限稳定子。另一方面，我们用 $V^{*,\mathrm{st}}_{\mathbf{P}}$ 表示在 $L_{\mathbf{P}}$ (4.1.1) 的作用下稳定向量的轨迹。

定理 4.3.2 （[14]引理 3，定理 5）。 假设相关点 x 的 *Kac* 坐标满足 $s_0 = 1$，且 $\mathfrak{g}$ 的 m 稳定内分次的阶也满足同样条件。

(i) 自然同构 $\mathfrak{g}^*/\!\!/G \simeq \check{\mathfrak{g}}/\!\!/\check{G}$ 诱导出一个同构

$$V^*_{\mathbf{P}}/\!\!/L_{\mathbf{P}} \xrightarrow{\sim} \check{\mathfrak{g}}_1/\!\!/\check{G}_0, \tag{4.3.2.1}$$

该同构限制为稳定共轭类之间的双射

$$V^{*,\mathrm{st}}_{\mathbf{P}}/L_{\mathbf{P}} \xrightarrow{\sim} \check{\mathfrak{g}}^{\mathrm{st}}_1/\check{G}_0. \tag{4.3.2.2}$$

(ii) 设 $\phi \in V^{*,\mathrm{st}}_{\mathbf{P}}$ 是一个稳定线性函数，X 是由 ϕ 在(4.3.2.2)下的像所给出的稳定向量轨道的一个代表。则存在一个 $\check{G}$-联络的同构：

$$\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\phi) \xrightarrow{\sim} \Theta(X). \tag{4.3.2.3}$$

证明。 由下降理论可知，只需证明该定理在从 K 到 K的基变换之后成立。

断言（i）在 [14,引理 3]中得到证明。

(ii) 我们首先假设 G 是单连通的。由于构造 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\phi)$ 中的几何对象都定义在 K上，因此根据下降，只需证明该断言在从 K 到 K 的基变换之后成立。然后，我们按照 [14, 定理 5]中的做法，应用几何朗兰兹对应的伽罗瓦到自守方向来证明该断言。

我们可以按照 [71, § 4.3.6]中的做法，将这一结果推广到 G 为一般几乎单群的情形。按照 $loc.cit$中的相同论证，除同构外，存在唯一的 de Rham G-局部系统，定义在$\mathbb{G}_{m,\ K}$上，它诱导出 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}_{\mathrm{ad}}}$，并且在 0 处具有幂零单值化。于是我们推出 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\phi)$ 与 $\Theta(X)$ 同构。□

4.4. **Frobenius 结构在 θ-联络上。** 在本小节中，我们将上述要素结合起来，构造 theta 联络上的 Frobenius 结构。我们沿用 4.2 的记号。

4.4.1. 如 4.2 所述，我们取一个非平凡加性特征 $\psi:\ \mathbb{F}_p \to K^\times$ 以及一个稳定线性函数 $\phi:\ V_{\mathbf{P}} \to \mathbb{A}^1$，定义在 $\mathcal{O}_K$ 上。我们令 $\lambda = -\pi$ 对应于 ψ (2.1.1)。设 $X_{-\pi} \in \check{\mathfrak{g}}_1$（相应地， $X \in \check{\mathfrak{g}}_1$）在同构 (4.3.2.1) 下匹配$-\pi\phi_K$（相应地， ϕ_K）。假设 $\Theta(X)$ 如 (4.3.1.3) 所给。通过考虑不变多项式在 $X_{-\pi}$ 与 $-\pi\phi_K$上的取值，我们推出：

$$\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(-\pi\phi_K) \simeq \Theta(X_{-\pi}) \simeq d + \left(X_1 + (-\pi)^m X_{1-m} x\right)\frac{dx}{x}. \tag{4.4.1.1}$$

设 $\Theta^\dagger(X_{-\pi})$ 为 $\Theta(X_{-\pi})$：**表示范畴**$(\check{G}) \to \mathrm{Conn}(X_K)$ 与 $(-)^\dagger$ 函子 (4.2.1.1) 的复合。根据定理 4.2.2，对上述同构的一个选取赋予 $\Theta^\dagger(X_{-\pi})$ 一个 Frobenius 结构 φ，即把 $\Theta^\dagger(X_{-\pi})$ 提升为一个函子 **表示范畴**$(\check{G}) \to \mathrm{Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_{m,k}/K)$，并带有张量函子的一个同构：

$$\varphi : F^*_{X_k} \circ \Theta^\dagger(X_{-\pi}) \xrightarrow{\sim} \Theta^\dagger(X_{-\pi}) : \mathbf{Rep}(\check{G}) \to \mathrm{Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_{m,k}/K),$$

其中 $F^*_{X_k}:\ \mathrm{Isoc}^\dagger(X_k/K) \to \mathrm{Isoc}^\dagger(X_k/K)$ 表示第 s 次 Frobenius 拉回函子 r.

最后，我们以如下引理结束。

引理 4.4.2. 保持上述假设。设 Σ为X 在$\check{\mathfrak{g}}$上的伴随作用的特征值集合。

(i) Σ 的每个元素要么为零，要么是一个 p-进单位。(ii)
在 Σ上存在自然的 μ_m-作用。

证明. (i) 由于 ϕ_K与 X经由同构 $\mathfrak{t}^*/\!/W \simeq \check{\mathfrak{t}}/\!/W$等同，只需对 ϕ_K证明该断言。由于 ϕ_k 与 ϕ_K 均为稳定线性函数， ϕ_K 的任一非零特征值的约化模 $\mathfrak{m}_K$ 仍是 ϕ_k的非零特征值。于是该引理成立。

(ii) 回忆一下， θ 表示 $\check{\mathfrak{g}}$ 的自同构，它定义了 $\check{\mathfrak{g}}$ 上的分次。于是我们有$\theta(X) = \zeta_m X$。令 $\check{\mathfrak{t}}_X$为 X 的中心化子，它是 $\check{\mathfrak{g}}$ 的一个嘉当子代数，而 $\Phi = \Phi(\check{\mathfrak{g}}, \check{\mathfrak{t}}_X)$ 是相对于 $\check{\mathfrak{t}}_X$ 的根集。 θ 的作用保持 $\check{\mathfrak{t}}_X$ 不变，并通过 $\theta \cdot \alpha(Y) = \alpha(\theta Y)$ 对 Φ 诱导一个作用，其中 $Y \in \check{\mathfrak{t}}_X$ 且 $\alpha \in \Phi$。特别地，我们有 $\theta \cdot \alpha(X) = \zeta_m \alpha(X)$。于是断言得证。□

4.5. **艾里局部系统**。我们考虑另一族在 [38], 中构造的刚性局部系统，它推广了经典艾里方程。其德拉姆变体在其唯一的奇点处是等斜的。

4.5.1. 我们回顾 [38, §2.3] 中 艾里自守数据 的构造。假设 p 严格大于考克斯特数 h。令 $\mathbf{P}=\mathbf{I}\subset G(k((t)))$ 为带有 Moy-Prasad滤过子群 $\mathbf{I}(r)$、 $r\in\mathbb{N}$ 的伊wahori子群。令 $N\in\mathfrak{g}$ 为负简单根子空间的一组基之和， E 为最高根子空间的一组基。令 $S=C_{G(k((t)))}(tN+E)$ 为一个椭圆环面。记$S(r)=S\cap\mathbf{I}(r)$。

当考克斯特数 h 为偶数时，令 $J=S(1)\mathbf{I}(1+h/2)$。当 h 为奇数时（这仅在 G 为 A_{2n} 型时发生），令 P 为由 $\check{}\rho/2n$ (3.1.1) 定义的抛物子群，并令$J=S(1)P(1+n)$。在这两种情况下，都有 $\mathbf{I}(1+h)\subset J\subset\mathbf{I}(1)$。

令 $\phi\in V_{\mathbf{I}}^*=(\mathbf{I}(1)/\mathbf{I}(2))^*$ 为由 Killing 型和对 Lie$(\mathbf{I}(1))$ 的限制从 $tN+E\in\mathfrak{g}(k((t)))$ 诱导的线性形式。它在 § 4.1.1 的意义下是稳定的，并诱导出一个特征

$$\mathbf{I}(1+h)\to\mathbf{I}(1+h)/\mathbf{I}(2+h)\simeq I(1)/I(2)\to k.$$

当 h 为偶数（分别为奇数）时，它可以平凡地延拓为 $\mathbf{I}(1+h/2)$（分别为 $P(1+n)$）上的特征。令 χ 为 ϕ 到 J 的任意延拓:

$$\chi:J\to\mathbb{A}^1. \tag{4.5.1.1}$$

令 $\mathcal{G}$ 为 $\mathbb{P}^1$ 上满足 $\mathcal{G}\mid_{\mathbb{A}^1}\simeq G\times\mathbb{A}^1$ 和 $\mathcal{G}|_{D_\infty}\simeq I(2+h)$ 的群概形。令 Bun$_\mathcal{G}$ 为 $\mathbb{P}^1$ 上 $\mathcal{G}$-丛的模叠。记 $L^-G=G[t^{-1}]$, 则有

$$\mathrm{Bun}_\mathcal{G}\simeq L^-G\backslash G((t))/I(2+h).$$

令 $j:\ O:=L^-G\backslash L^-GJ/I(2+h)\ \to$ Bun$_\mathcal{G}$ 为命题 19] 中的相关轨道 [38, 。对于 Dwork F-等晶（分别为 Artin–Schreier 层） $\mathscr{A}_\psi$，设$\mathcal{A}_\chi=j_{!+}(\chi^+\mathscr{A}_\psi)$。根据引理 21、定理 26], $\mathcal{A}_\chi$ 是一个全纯模，且为 Hecke 特征模。我们将相关的 Hecke特征值记为

$$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{G}}(\chi):\mathbf{Rep}(\check{G})\to\text{F-Isoc}^\dagger(\mathbb{A}^1_k/K),\qquad(\text{resp. }\mathrm{Ai}^{\ell}_{\check{G}}(\chi):\mathbf{Rep}(\check{G})\to\mathrm{LocSysm}(\mathbb{A}^1_k)).$$

4.5.2. 与广义 Kloosterman 情形类似，我们可以对上述构造 $\check{}$ 作一变体：使用代数的 $\mathscr{D}$-模而非算术 $\mathscr{D}$-模，在 $\mathbb{G}_{m,K}$ 上构造一个 G-联络，只需将 $\mathscr{A}_\psi$ 替换为带有参数 $\lambda\in K-\{0\}$ 的 $\mathbb{A}^1_K$ 上的 $\mathrm{E}_\lambda=K\langle x,\partial_x\rangle/(\partial_x+\lambda)$。在 χ 的定义中，我们将 k 替换为 K。由此得到一个（de Rham）Hecke特征值:

$$\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\lambda\chi):\mathbf{Rep}(\check{G})\to\mathrm{Conn}(\mathbb{A}^1_K).$$

令 $p_{-1},\{p_i\}_{i=1}^r$ 如引理 3.1.2 的证明中所述，其中 r 是 $\check{}G$ 的秩， d_i's 是基本次数。

定理 4.5.3. $\check{}G$-联络 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\lambda\chi)$ 同构于以下形式:

$$\mathrm{Ai}(\underline{a},\lambda)=d+(p_{-1}+a\lambda^h xp_r+\sum_{i=1}^{r-1}a_i\lambda^{d_i}p_i)dx,\quad a\in K^\times,\ a_i\in K,\ 1\le i\le r-1. \tag{4.5.3.1}$$

其在无穷远点处的限制 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\lambda\chi)\mid_{D^\times_\infty}$ 是一个斜率为 $1+\frac{1}{h}$ (3.1.1) 的等斜正式 $\check{}G$-联络。此外，其典范形式的首项 $X=p_{-1}+a\lambda^h p_r$ 在对应关系下对应于 $\phi=\chi\mid_{I(1+h)/I(2+h)}\in(\mathbf{I}(1+h)/\mathbf{I}(2+h))^*\simeq V^*_{\mathbf{I}}$，其中对应关系由定理 4.3.2 中针对 $\mathbf{P}=\mathbf{I}$的 ***(i)*** 给出。

证明。 当 $\check{}_G = \check{}G_{\mathrm{ad}}$ 为伴随型时，该定理由 [73, 定理 36、命题 38、定理 41] 得出。

接下来，我们说明如何推广这一结果，使 G 成为一般几乎单群。我们断言，在同构意义下，存在唯一的 G-联络于 $\mathbb{A}^1$ 上，它诱导出 $\mathrm{Ai}_{\check{}G_{\mathrm{ad}}}(a,\lambda)$ 作为 G_{ad}-联络。事实上，任意两个这样的 de Rham G-局部系统之差是 $\mathbb{A}^1$ 上的一个 Z-联络。$\check{}\check{}$ 由于 Z 是有限的，这个 Z-联络在 ∞ 处的微分伽罗瓦群的野部分必定是平凡的，因此该联络是平凡的。于是此情形下的定理得证。□

4.6. **Ai 与 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}$ 之间的比较。** 本小节中，我们在 $\mathcal{O}_K$ 上工作。令 $j: U=\mathbb{A}^1 \to X=\mathbb{P}^1$ 为 $\mathcal{O}_K$ 上的开浸入。我们假设在 § 4.5.1 中固定的函数 ϕ, χ 定义在 $\mathcal{O}_K$ 上，并且 ϕ_k（分别地，ϕ_K）按照 § 4.1.1 的意义是稳定的。

我们证明关于艾里联络的一个与定理 4.2.2 类似的结果。

定理 4.6.1. 存在带联络的 $\check{}G$ 值 $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-模的典范同构

$$\iota : (\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(-\pi\chi_K))^\dagger \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{G}}(\chi_k).$$

4.6.2. 如同 4.4，若取 $\lambda=-\pi$，则上述定理表明 $\check{}G$-联络 $\mathrm{Ai}_{\check{}G}(a,-\pi)$（4.5.3.1）可配备 $\check{}G$ 值 Frobenius 结构，并作为 $\check{}G$-过收敛 F-等晶体 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{}G}(\chi_k)$ 的底。此外，由于 ϕ_k 与 ϕ_K 均稳定，我们可推知此时（4.5.3.1）中的系数 a 是一个 p-进单位。

证明. 开浸入 $O' := L^-G\backslash L^-GI(1)/I(2+h) \to \mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ 由线丛的一个截面的非零轨迹定义，因而为仿射的 [38, 命题 19]。相关轨道 $O = L^-G\backslash L^-GJ/I(2+h)$ 是 O' 的一个闭子叠。其几何结构与 $\mathrm{Kl}_{\check{G}}$ 的构造情形略有不同，在后者中相关轨道是 $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ 的一个开子叠。下面，我们说明如何利用附录中的相对专化映射 (A.2.4.1) 修改 [71, § 4.2] 的自变量，以证明该定理。在 O 上我们有秩一对象

$$\chi^+E_{-\pi} \quad (\text{algebraic on } O_K) \qquad \text{and} \qquad \chi^+\mathscr{A}_\psi \quad (\text{arithmetic on } O_k),$$

它们在定义 A.2.2 的意义下是相关的。

考虑 $U=\mathbb{A}^1$ 上的黑克堆栈及自然投影：

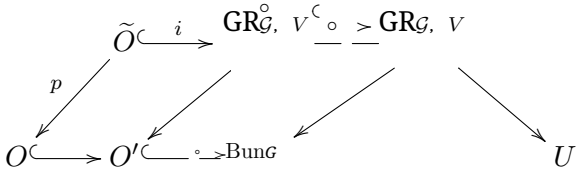
$$\mathrm{Bun}_{\mathcal{G}} \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{Hk}^U_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{Bun}_{\mathcal{G}} \times U.$$

令 $\star \in \mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ 为对应于平凡丛 $\mathcal{G}$ 的基点。将上述图基变换至 $\star \times U$ 后可写为：

$$\mathrm{Bun}_{\mathcal{G}} \xleftarrow{p_1} \mathrm{GR}_{\mathcal{G}} \xrightarrow{p_2} U,$$

其中 $\mathrm{GR}_{\mathcal{G}}$ 是 $\mathcal{G}$ 在 U 上带有修改的 Beilinson-Drinfeld 格拉斯曼量。注意，$\mathrm{GR}_{\mathcal{G}} \simeq \mathrm{Gr}_G \times U$。

$\check{}$ 令 V 为 G 的一个表示。我们用 $\mathrm{GR}_{\mathcal{G},V} \subset \mathrm{GR}_{\mathcal{G}}$ 表示 V 的 Satake 层的支撑。考虑以下图表：



其中各方块均为笛卡尔方块。令 $f:\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},V}\to U$ 为上述图表中的复合映射。根据命题 A.2.5，以下模在 $\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},V}$ 上相关：

$$M_V:=i_+(p^+(\chi^+E_{-\pi}))\in\mathbf{Coh}(\mathscr{D}_{\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},V}/K}),\qquad \mathscr{M}_V:=i_+(p^+(\chi^+\mathscr{A}_\psi))\in\mathrm{Hol}(\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},V,k}),$$

根据艾里特征层 A_χ 的构造以及海克特征值函子的定义，我们有典范同构（与 [71,§ 4.2]中完全相同）

$$\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G},V}(-\pi\chi_K)\simeq f_{K,+}(M_V),\qquad \mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{G},V}(\chi_k)\simeq f_{k,+}(\mathscr{M}_V). \tag{4.6.2.1}$$

按照 [71, § 4.2], 中的论证，我们考虑以下两种情形：

(i) 情形 $\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},V}$ 为极小，在这种情形下 f 有一个良好紧化（参见 [71, 4.2.3]）。相对特化映射 (A.2.4.1) 是一个带联络的相干 $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-模态射

$$\iota_V:(f_{K,+}(M_V))^\dagger\to f_{k,+}(\mathscr{M}_V).$$

By t通过 [71, 4.2.5], 中的相同论证，我们可以证明上述映射是一个同构 .

(ii) 情形 V 与一个拟极小余权 λ 相关。与 [71, 4.2.6], 中一样，我们取一个同构 $\mathrm{GR}_{\mathcal{G},\,V}\simeq U\times\mathrm{Gr}_{\leq\lambda}$，并将 $\mathrm{GR}^{\circ\circ}_{\mathcal{G},\,V}=\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},\,V}\cap(X\times\mathrm{Gr}_\lambda)$ 定义为 $\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},\,V}$的光滑轨迹。我们用 $j:\mathrm{GR}^{\circ\circ}_{\mathcal{G},\,V}\to\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},\,V}$ 表示开浸入，并用

$$\tau=p_2^{\circ}\circ j:\mathrm{GR}^{\circ\circ}_{\mathcal{G},V}\to X \tag{4.6.2.2}$$

典范态射，它在 A.2.4 的意义下允许一个良好紧化 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\leq\lambda}\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$。令 M_V° 和 $\mathscr{M}^{\circ}V$ 分别为 M_V 和 $\mathscr{M}_V$ 在 $\mathrm{GR}^{\circ\circ}_{\mathcal{G},\,V}$ 上的限制，它们是相关的。于是有 $j_{+!}(M_V^{\circ})\simeq M_V$, $j_{+!}(\mathscr{M}^{\circ}V)\simeq\mathscr{M}_V$。根据 [71,引理 4.2.7(i)],，我们可以证明：(a) 复形 $\tau_{k,\,+}(\mathscr{M}^{\circ}V)[1]$（分别地，$\tau_{K,\,+}(M_V^{\circ})[1]$）是全纯的。

(b) 设 s 是 $U(k)$ 的一个点。我们在 $U(\mathcal{O}_K)$ 中选取一个提升，并仍以 s 表示它。于是纤维上同调上的特化态射

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}((\mathrm{GR}^{\circ\circ}_{\mathcal{G},V,s})_K,M^{\circ}_{V,s})\to\mathrm{H}^*_{\mathrm{rig}}((\mathrm{GR}^{\circ\circ}_{\mathcal{G},V,s})_k,\mathscr{M}^{\circ}_{V,s})$$

诱导出一个同构

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}((\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},V,s})_K,j_{!+}(M^{\circ}_{V,s}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^0_{\mathrm{rig}}((\mathrm{GR}^{\circ}_{\mathcal{G},V,s})_k,j_{!+}(\mathscr{M}^{\circ}_{V,s})). \tag{4.6.2.3}$$

由 (a)，我们有一个 D_{X_K}-模图表：

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(U_K,\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G},V}(-\pi\chi_K))&\longrightarrow&\Gamma(U_K,\tau_{K,+}(M_V^{\circ}))\\ &&\downarrow\\ \Gamma(U_k,\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{G},V}(\chi_k))&\longrightarrow&\Gamma(U_k,\tau_{k,+}(\mathscr{M}_V^{\circ}))\end{array}$$

其中竖直箭头是相对专化态射（A.2.4.1）。根据[71, 4.2.8], 的自变量，我们可以得出结论：该竖直映射诱导出一个带联络的 $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-模的同构

$$(\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G},V}(-\pi\chi_K))^\dagger\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}_{\check{G},V}(\chi_k).$$

最后，我们按照 [71, 4.2.9] 中的做法，从极小情形和拟微小情形推出该定理。 □

4.6.3. Ai 的平凡函子性 Ai$_{\check{G}}$。设 $\check{}_G \to \check{}G'$ 是一个约化群同态，并在它们的伴随商 $\check{}\, G_{\mathrm{ad}} \xrightarrow{\sim} \check{}G'_{\mathrm{ad}}$ 上诱导同构。根据定理 4.5.3，鉴于显式联络形式 (4.5.3.1)，Ai$_{\check{G}'}(\lambda\chi)$ 同构于沿 $\check{}_G \to \check{}G'$ 对 Ai$_{\check{G}}(\lambda\chi)$ 作出的推出。

于是，根据定理 4.6.1，我们可以由德拉姆情形推出过收敛情形。由于解析化函子 $(-)^{\dagger}$ 与结构群的推出自然交换，平凡函子性对过收敛等晶体 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}_G}$ 同样成立。

5. 单值表示的应用

5.1. 伴随对象回顾。 在本小节中，我们假设 $k = \mathbb{F}_q$ 和 $\sigma = \mathrm{id}_K$：$K \to K$。

5.1.1. 设 X 是定义在 k上的光滑几何连通曲线。设 ℓ 是一个素数。若 $\ell \neq p$，我们用 $\mathcal{T}_\ell(X)$ 表示 X 上光滑 $\mathbb{Q}_{\ell^-}$层的范畴中的 Tannakian 子范畴；若 $\ell = p$，则表示 F-Isoc$^{\dagger}(X/K) \otimes_K K$ 范畴中的 Tannakian 子范畴。该子范畴由半单对象 $\mathcal{E}$ 组成，且每个 $\mathcal{E}$ 的不可约分量的行列式均为有限阶。

$\mathcal{E}$ 是$\mathcal{T}_\ell(X)$的一个对象。由 [51, 1], 可得：

- 对每个 $x \in |X|$，多项式 $\det(1 - t \cdot F_x, \mathcal{E})$属于 $\mathbb{Q}[t]$;
- 对每个素数 $\ell\prime$，存在一个 $\ell\prime$-伴随 $\mathcal{E}\prime$，它是$\mathcal{T}_{\ell'}(X)$的对象，且

$$\det(1 - t \cdot F_x, \mathcal{E}) = \det(1 - t \cdot F_x, \mathcal{E}') \quad \text{for all } x \in |X|.$$

注意，$\mathcal{E}'$ 的一个 ℓ'-伴随在同构意义下唯一 [52, 命题 1.1.2.1]。

在上述克洛斯特曼／艾里 $\check{}G$-局部系统 $E = \mathrm{Kl}_{\check{}_G}$（分别地，Ai$_{\check{G}}$）的构造中，对于每个 $V \in \mathbf{Rep}(\check{}G)$，$p$-进实现 $E^{\mathrm{rig}}(V)$是 ℓ-进实现 $E^{\ell}(V)$的 p-进伴随。**5.1.2.** 设 X 是 X的一个光滑紧化。对于一个闭点 $x \in X$，我们可以将一个 Weil–Deligne 表示$\rho^{\mathrm{WD}}_{\mathcal{E},x}$,与在 x 处、系数取自 $\mathbb{Q}_\ell$的$\mathcal{E}$ （它是$\mathcal{T}_\ell(X)$的对象）相关联。对每个素数 ℓ，我们固定一个同构 $\mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{C}$。我们可以将$\rho^{\mathrm{WD}}_{\mathcal{E},x}$,及其弗罗贝尼乌斯半单化 $\rho^{\mathrm{WD,ss}}_{\mathcal{E},x}$ 视为系数取自 $\mathbb{C}$的表示。可以通过伴随来比较与$\mathcal{E}$ 相关的弗罗贝尼乌斯半单化 Weil–Deligne 表示。

命题 5.1.3 ([20]定理 9。8, [49]定理 4.4.5)。设 E 是 $T_\ell(X)$ 的一个对象，ℓ' 一个素数，且 E' 是 E 的 ℓ'-伴随。则对于任意闭点 $x \in X$，我们在 一般线性群$_{n,\ \mathbb{C}}$ 中有一个模共轭同构：

$$\rho^{\mathrm{WD,ss}}_{\mathcal{E},x} \sim_{\mathrm{GL}_{n,\mathbb{C}}} \rho^{\mathrm{WD,ss}}_{\mathcal{E}',x}.$$

5.1.4. 根据德林费尔德 [23], ，我们修订了$\check{}$的伴随局部系统的概念，将 $\check{}$ 对一般线性群$_n$ 的定义推广到半单群 G。

设 E 为代数闭域。关于原半单群和原约化群的概念，请参阅 [23, § 2.1.1] 。根据 [23, § 1.2.3]，Pro-red(E) 表示如下群胚：其对象是 E 上的原约化群，其态射定义如下：态射 $G_1 \to G_2$ 是群概形 $G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ 的同构，并且只在与形如 $x \mapsto gxg^{-1}$ 的 G_2 的自同构复合的意义下定义，其中 g 属于 G_2 的单位连通分支 G_2°。令 Pro-ss(E) $\subset$ Pro-red(E) 表示由原半单群构成的全子范畴。

对于任意的 E 上的原代数群 G，我们将其原约化（分别为原半单）商群记作 G^{red} （分别为 G^{ss}）。

对任意原约化群 G，令 $[G]$ 表示 G 在单位连通分支 G°的共轭作用下的 GIT商。我们有投影 $G \to [G]$ 以及典范映射$[G] \twoheadrightarrow \pi_0(G) := G/G^{\circ}$。

5.1.5. 固定 $\mathbb{Q}$的一个代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}$。令 ℓ为一个素数。德林费尔德将 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的原半单群Π_ℓ 定义为 Tannakian 子范畴$\mathcal{T}_\ell(X)$（5.1.1）的 Tannakian 群。嵌入$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_\ell$ 诱导群胚等价 [23, 命题 2.2.5]:

$$\text{Pro-ss}(\overline{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \text{Pro-ss}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell). \tag{5.1.5.1}$$

我们将由上述等价对应于 Π_ℓ 的 Pro-ss($\mathbb{Q}$) 中的对象记为 $\Pi_{(\ell)}$。

5.1.6. 令 X 为 X 的有限 étale 覆盖范畴的万能覆盖，令 Π 为 X/X 的自同构群；选取基点 x 后，X/X 与 étale 基本群 $\pi_1(X,x)$ 同构。

仿射群 Π 有一个稠密子集 Π_{Fr}，由几何弗罗贝尼乌斯 $F_{\widetilde{x}}^n$ 的幂构成，其中 $\widetilde{x}$ 遍历 $|X|$，而 n 遍历 $\mathbb{N}$。

我们有一个基底为 $\mathbb{Q}$ 的仿射概形 $[\Pi_{(\ell)}]$、一个态射 $[\Pi_{(\ell)}] \to \pi_0(\Pi_{(\ell)}) = \Pi$，以及典范态射 [23, (1.5),(7.12)]:

$$\Pi_{\mathrm{Fr}} \to [\widehat{\Pi}_{(\ell)}](\overline{\mathbb{Q}}) \twoheadrightarrow \Pi. \tag{5.1.6.1}$$

主要结果 [23, 定理 1.4.1] 表明：给定两个素数 ℓ，ℓ'，存在唯一的同构

$$\widehat{\Pi}_{(\ell)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\Pi}_{(\ell')} \tag{5.1.6.2}$$

在群胚 Pro-ss($\mathbb{Q}$)中，它将图表 (5.1.6.1) 映至 $\Pi_{(\ell')}$ 的相应图表。

5.1.7. 设有群概形 G_1, G_2 定义在 E上，令 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{coarse}}(G_1,G_2)$ 表示集合$\mathrm{Hom}_E(G_1,G_2)$ 关于 $G_2^\circ(E)$的共轭作用所得的商集。令 E 为一个包含E的代数闭域。若 G_1 是原约化的，则有以下典范映射，它是双射 [23, 命题 2.3.3]:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{coarse}}(G_1,G_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{coarse}}(G_1 \otimes_E \widetilde{E}, G_2 \otimes_E \widetilde{E}). \tag{5.1.7.1}$$

定义 5.1.8. 设 G 是定义在 $\mathbb{Q}$上的连通半单群，且 $\varphi_\ell : \Pi_\ell \to {}^L G$ 是一个 ℓ-adic ${}^L G$-局部系统。对于另一个素数 ℓ'，我们将 ℓ'-伴随 $\varphi_{\ell'} : \widehat{\Pi}_{\ell'} \to {}^L G$ 定义为 φ_ℓ 在同构 (5.1.6.2) 和 (5.1.7.1) 下的像：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{coarse}}(\widehat{\Pi}_\ell, \check{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{coarse}}(\widehat{\Pi}_{(\ell)}, \check{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{coarse}}(\widehat{\Pi}_{(\ell')}, \check{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{coarse}}(\widehat{\Pi}_{\ell'}, \check{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}}).$$

命题5.1.9. 沿用定义 *5.1.8* 的记号，对于每个表示 $r : {}^L G \to$ 一般线性群(V),$r \circ \varphi_{\ell'}$ 是 $r \circ \varphi_\ell$ 在5.1.1 意义下的 ℓ'-伴随。

证明。 我们考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\Pi_{\mathrm{Fr}} & \longrightarrow & [\widehat{\Pi}_{(\ell)}](\overline{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\varphi_{(\ell)}} & [\check{G}](\overline{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{r} & [\mathrm{GL}(V)](\overline{\mathbb{Q}}) \\
\| & & \sim\downarrow & \nearrow_{\varphi_{(\ell')}} & & & \\
\Pi_{\mathrm{Fr}} & \longrightarrow & [\widehat{\Pi}_{(\ell')}](\overline{\mathbb{Q}}) & & & &
\end{array}$$

因此，对于每个几何弗罗贝尼乌斯 $F_{\widetilde{x}}$，它经由 φ_ℓ，$\varphi_{\ell'}$ 在 [一般线性群$V(\mathbb{Q})$] 中有相同的像。这就完成了证明。□

命题 5.1.10. 假设 $m = h$ 是考克斯特数。设 ℓ 是不同于 p 的素数，ϕ 是 $\mathfrak{g}_1^*(k)$ 上的稳定函数。那么，$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{{}^L G}(\phi)$ (4.1.2) 是 ℓ-进克洛斯特曼层 $\mathrm{Kl}_{\check{G}}^{\ell}(\phi)$ 的 p-进伴随，具体含义见定义 *5.1.8*。

证明。 设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$ 的 ℓ-进伴随，具体含义见定义 5.1.8。根据构造及命题5.1.9，对于 $\check{}G$ 的每个表示 V 以及 $a \in |\mathbb{G}_{m,k}|$，我们有

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_a, \mathcal{E}_{\overline{a}}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_a, \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)_{\overline{a}}).$$

注意到，$\mathcal{E}$ 和 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$具有相同的几何单值群，如 [71, 定理4.5.2、推论4.5.8]所计算。于是，借助与 [71, 定理5.1.4]类似的论证，我们可以证明两个表示$\mathcal{E}$ 和 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$在几何单值群中共轭。□

注5.1.11. 我们预期，即使没有假设 $m = h$，结论仍然成立；对于 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}$，$\mathrm{Ai}^{\ell}_{\check{G}}$，我们也有同样的预期，因为它们满足命题5.1.9中的性质。

$\check{}\check{}$**注5.1.12.** 设 G 是 $\mathbb{Q}$上的连通半单群，$\mathcal{E}$ 是定义在 k 上的光滑曲线 X 上的一个 ℓ-进 G-局部系统（我们允许 $\ell = p$）。设 ℓ' 是另一个素数，且$\mathcal{E}'$ 是$\mathcal{E}$的 ℓ'-伴随。设X 是 X 的光滑紧化， x 是 $X - X$的一个闭点。受命题5.1.3启发，我们可以预期，在 G 中，相关的Frobenius半单化的Weil–Deligne表示在 x处模共轭同构：

$$\rho^{\mathrm{WD,ss}}_{\mathcal{E},x} \sim_{\check{G}} \rho^{\mathrm{WD,ss}}_{\mathcal{E}',x}. \tag{5.1.12.1}$$

对于 Larsen 意义下的可接受群 [50]，，例如 Sp_{2n}、SO_{2n+1}、G_2 和 SO_4，，根据“逐元素共轭”蕴含“整体共轭”这一事实，这一期望可以无条件地得到验证。

5.2. 上皮 Langlands 参数：等特征情形。

5.2.1. 我们再次采用 4.4 节中的记号。回顾一下， $X = X_1 + X_{1-m}$ 在 $\check{}\mathfrak{g}(K)$ 和 $\check{}\mathfrak{g}(k)$ 中都是正则半单的。我们用 $\check{}\mathfrak{t}_X$ 表示 X 在 $\check{}\mathfrak{g}$ 中的中心化子，并用 Φ 表示 $\check{}\mathfrak{g}$ 相对于 $\check{}\mathfrak{t}_X$的根集。令 $r =$为 $\dim\check{}\mathfrak{t}_X$， $\ell = r + \sharp\Phi$ 为 $\check{}\mathfrak{g}$的维数。

C考虑 θ-联络 (4.4.1.1)，它可以配备一个 Frobenius 结构 e:

$$d + \left(X_1 + (-\pi)^m X_{1-m} x\right)\frac{dx}{x}. \tag{5.2.1.1}$$

设 $t = x^{-1}$ 是 ∞附近的一个坐标。我们可以改写为

$$d - \left(X_1 + (-\pi)^m X_{1-m} t^{-1}\right)\frac{dt}{t}. \tag{5.2.1.2}$$

我们将$\mathcal{A}_{K,t}$ 上的相关微分模记为 $\mathscr{E}$，并滥用记号，将 $\mathscr{E}$视为 Robba 环$\mathcal{R}_K$上的微分模。我们将 $K((t))$上的相关形式联络记为$\mathcal{E}$。对于 s，将环$\mathcal{A},\mathcal{A}_K$ 记为$\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_{K,s}$。

定理 5.2.2。 联络 $\mathscr{E}$ 是 A_t (3.1.4)上的一个 p-进等斜率联络，其斜率为 $\frac{1}{m}$。更确切地说，$[2m]^*\mathscr{E}$ 可以$\check{}G(\mathcal{A}_s)$-规范等价于如下形式：

$$d + \pi X t^{-1/m}\frac{dt}{t}. \tag{5.2.2.1}$$

证明将在 §5.3、§5.4 中给出。

5.2.3. 令 $(\rho\colon W_F \to \check{}G(\overline{K}) \supset N)$ 为与 $\mathscr{E}$(2.1.3) 相关的 Weil–Deligne 表示。它可以视为按照 Genestier–Lafforgue 的局部Langlands对应，与初潮表示相关的 L 参数。

事实上，在等特征情形下，对于取值于 ℓ 的系数，Genestier–Lafforgue 为 $G(F)$ 的不可约容许表示赋予一个取值于 $\check{}\,G$ [32] 的半单朗兹参数。此外，Genestier–Lafforgue 还证明了局部-整体相容性。对于 p 取值的系数，目前尚无类似的 Genestier–Lafforgue 构造；我们将自己的构造视为受局部-整体相容性和注5.1.12 启发的替代方案。根据定理 3

.2 我们验证了 Reeder–Yu 关于 ρ [61 的预测 3 , § 7.[1] (参见. [75, § 2.9]):

推论 5.2.4. (i) 幂零算子 N 消失。令 $\check{}\,T_X$ 为 X 在 $\check{}G$ 中的中心化子 $C_{\check{G}}(X)$，它是一个极大环面。表示 ρ 位于如下交换图中

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & I_F^+ & \longrightarrow & I_F & \longrightarrow & I_F^t & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \check{T}_X & \longrightarrow & N_{\check{G}}(\check{T}_X) & \longrightarrow & \mathbb{W} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

使得温和惯性 I_F^t 的一个生成元被映为魏尔群 $\mathbb{W}$ 中一个阶为 m 的正则椭圆元。

(ii) 我们有 $\check{}\mathfrak{g}^{I_F} = 0$ 和 斯旺($\check{}\mathfrak{g}$) $= \frac{\sharp\Phi}{m}$。

推论 5.2.5。 局部系统 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$ （及其 ℓ-进变体 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$）具有上同调刚性，即以下上同调群消失

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^1_k, j_{!+}(\mathrm{Kl}^{\bullet}_{\check{G}}(\phi)(\check{\mathfrak{g}}))) = 0,$$

其中 $j: \mathbb{G}_{m,\ k} \to \mathbb{P}^1_k$ 是开浸入， $j_{!+}$ 表示中间延拓函子，且$\mathrm{Kl}^{\bullet}_{\check{G}}(\phi)$ （$\check{}\mathfrak{g}$）是与 $\check{}G$ 的伴随表示相关的局部系统，其中 $\bullet \in \{\mathrm{rig}\ \ell\}$。

证明。如 [75, 命题 5.2], 中所述，该断言由 Swan 导子 Swan($\check{}\mathfrak{g}$) $= \frac{\sharp\Phi}{m}$ 的计算以及 $\check{}\mathfrak{g}^{I_F} = 0$这一事实得出。在 p-进情形中，这一点在推论 5.2.4 中得到了证明。在 ℓ-进情形中，它由 p-进结果和命题 5.1.3 得出。□

推论 5.2.6。 *R*上的微分模 $\mathscr{E}$ （分别地，$\check{}G$-过收敛等晶体$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$）至多具有有限多个 *Frobenius* 结构。

证明。我们先证明局部情形。正如 [71, 引理 5.1.1], 中所解释的， $\mathscr{E}$上的任意两个 Frobenius 结构 ϕ_1, ϕ_2之差均为中心化子 $C_{\check{}G}(\rho(I_F))$中的一个元素 $u = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$，这是由坦纳卡范畴等价得出的。由推论 3.2.6(i)，中心化子 $C_{\check{}G}(\rho(I_F)) = \check{}T_X^{\sigma}$是有限的，因此 $\mathscr{E}$ 的断言成立。

令 G_{geo}为 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$的几何单值群。由于 $\rho(I_F) \subset G_{\mathrm{geo}}$，我们有 $C_{\check{}G}(G_{\mathrm{geo}}) \subset C_{\check{}G}(\rho(I_F))$，且它们都是有限的。因此断言得证。□

5.3. $\mathscr{E}$**的** P**进斜率。**

5.3.1. 我们首先回顾 $[2m]^*\mathcal{E}$ 与其在 Babbitt–Varadarajan [6] 意义下的典范形式 (5.2.2.1) 之间的规范变换。然后我们将在命题 5.4.1 中证明该规范变换的 p进收敛性，并由此推出定理 5.2.2。

回忆一下，$\check{}\lambda = mx$ 定义了分次 (4.3.1.1)，其中 $\check{}\lambda: \mathbb{G}_m \to \check{}T$。回忆 $s = t^{1/2m}$。对 $[2m]^*\mathcal{E}$ (5.2.1.2)应用 $\check{}\lambda(-\pi s^{-1})$ 的规范变换，我们得到

$$Y := d + 2m\pi(X_1 + X_{1-m})\frac{ds}{s^2} - \check{\lambda}\frac{ds}{s}, \tag{5.3.1.1}$$

记为 Y。根据引理 3.1.2，在扩大 K 后，存在一个元素 $Q \in {}^{\vee}G(K[\![s]\!])$，使得 Y 可通过 Q 规范变换为 Y 的典范形式 Z (5.2.2.1)：

$$Z := d + 2m\pi(X_1 + X_{1-m})\frac{ds}{s^2}.$$

特别地，Q满足一个微分方程：

$$QYQ^{-1} + sQ'Q^{-1} = Z. \tag{5.3.1.2}$$

在扩大 K之后，我们可以假定 K 包含 X 在${}^{\vee}\mathfrak{g}$上的伴随作用的全部特征值。对 $\alpha \in \Phi$，我们用 ε_α 表示 X 在根子空间${}^{\vee}\mathfrak{g}_\alpha \subset {}^{\vee}\mathfrak{g}$上的作用的特征值；由引理 4.4.2，它是一个 p-进单位。于是，作为 $\mathbb{G}_m$上的一般线性群(${}^{\vee}\mathfrak{g}$)-联络，Z 容许一个分解

$$Z = Z_0 \bigoplus \oplus_{\alpha\in\Phi} Z_\alpha, \tag{5.3.1.3}$$

其中 Z_0 是平凡联络，而 $Z_\alpha = \exp(-2m\pi\varepsilon_\alpha/s)$是指数 $\mathscr{D}$-模 $d + 2m\pi\varepsilon_\alpha \frac{ds}{s^2}$。

特别地，$\mathcal{E}$ 的形式斜率等于 $\frac{1}{m}$。

命题 5.3.2. 存在一个实数 $\beta > 0$，使得 Q 属于${}^{\vee}G(K\langle s/\beta\rangle)$（即它具有$p$-进收敛半径 $\beta > 0$）。

证明。 我们通过伴随作用将 Q 视为 GL(${}^{\vee}\mathfrak{g}[\![s]\!]$) 的一个矩阵。由 (5.3.1.2) 可知，$Q$的每个矩阵元素都满足一个形如 (2.2.0.1) 的线性微分方程，其系数属于 $(\mathbb{Q}\cap K)[s]$。根据定理 2.2.1，存在一个实数 $\beta > 0$，使得 Q 属于 GL(${}^{\vee}\mathfrak{g}\langle s/\beta\rangle$)。□

命题 5.3.3。 通过伴随表示 ${}^{\vee}\mathfrak{g}$，$\mathscr{E}({}^{\vee}\mathfrak{g})$ 的 p-进斜率多重集由 $\sharp\Phi$个 $\frac{1}{m}$ 和 r 个 0组成。

引理 5.3.4。 设 β 为命题 *5.3.2* 中的实数。对于 $\rho \in (0, \beta)$，Y（分别为 Z）在 F_ρ 处的辅助半径多重集由 $\sharp\Phi$ 个 ρ^2 和 r 个 ρ组成。

证明。 根据命题 5.3.2，只需对 Z证明该断言。对于分解 (5.3.1.3) 中的每个 Z_α，其一般半径 $F_1(d + 2m\pi\varepsilon_\alpha \frac{ds}{s^2}, r)$ 是 $(0, \infty)$ 上的线性函数，经过原点 $(0, 0)$，斜率为 2。于是断言得证。□

5.3.5. 命题 *5.3.3* 的证明。只需计算联络 Y 的辅助半径函数 $F_i(Y, r)$。由于联络 Y 具有 Frobenius 结构，它在 1 处可解，且其辅助半径 $R_i(Y, \rho)$ 的极限为 1，这由 $\rho \to 1^-$ [48, 引理 12.6.2] 得出。

令 ℓ 为 ${}^{\vee}\mathfrak{g}$ 的维数。对于每个 $1 \le i \le \ell$，函数 $F_i(Y, r)$ 在 $(0, +\infty)$ 上分段线性且凸。由引理 5.3.4，$F_i(Y, r)$ 在 $(-\log \beta, +\infty)$ 上的限制是一条经过原点 $(0, 0)$ 的直线，其斜率为

$$= \begin{cases} 2i & i \le \sharp\Phi, \\ i + \sharp\Phi & i > \sharp\Phi. \end{cases}$$

于是我们推得，同一性质对 $(0, +\infty)$ 上的 $F_i(Y, r)$ 也成立。于是，Y 的 p-进斜率多重集与将 Y 视为形式联络时的形式斜率多重集相同，命题得证。□

5.4. P-进规范变换 Q。 我们在本小节完成定理 5.2.2 的证明。

我们通过伴随作用将 Y, Z 视为一般线性群($\check{\mathfrak{g}}$)-联络。我们可以将分解 (5.3.1.3) 重新整理如下:

$$Z = \oplus_{b\in k} Z_b,$$

其中， Z_0 与 (5.3.1.3) 中的 Z_0 相同；对于 $b \in k^\times$， Z_b 表示 Z_α 的直和，使得ε_α 模 $\mathfrak{m}_K$同余于 b 。

下面，我们证明 Y 在 $\mathcal{A}_{K,s}$上的一个类似分解。定理 5.2.2 可由命题 5.4.1(iv) 得出。

命题 5.4.1. (i) 存在一个 $A_{K,s}$上的微分模分解:

$$Y = \oplus_{b\in k} Y_b, \tag{5.4.1.1}$$

suc使得 p-进斜率 $Y_b \otimes \exp(-m\pi[b]/s)$ 为零，其中 *Teichmüller*提升 $[b]$ 属于 $b.$ (ii) 在由 Q 定义于 $K\langle s/\beta\rangle$上的同构 $Y \xrightarrow{\sim} Z$ 下， Y_b 与 Z_b同构。(iii) 定义于 $K\langle s/\beta\rangle$上的同构 $Y_b \xrightarrow{\sim} Z_b$ 可延拓至 $A_{K,s}$。(iv) 元素 $Q \in \check{G}(K[\![s]\!])$ 属于 $\check{G}(A_{K,s})$。

注记 5.4.2. 对于秩为 2 的 Bessel F-等晶体，Dwork 通过显式计算证明了命题 5.4.1(iv) [24], [69, 例 6.2.6]。

证明。(i-ii) 设 $0 < \gamma < \delta < 1$。由命题 5.3.3 和 [48, 定理 12.3.1], , 微分模 Y在 $K\langle\gamma/s, s/\delta\rangle$ 上具有微分模的斜率分解（定义在 $K\langle\gamma/s, s/\delta\rangle$上）：

$$Y = Y^0 \oplus Y^1,$$

使得对于 $\rho \in [\gamma, \delta]$, 分量 $Y^i \otimes F_\rho$在 $i = 0, 1$ 时具有辅助半径 ρ^{i+1}。我们在 (5.4.1.1) 中取 $Y_0 = Y^0$。上述分解对于不同的 γ, δ 彼此相容。

对于 $b \in k^\times$，我们定义 Y_b ，使得 $Y_b \otimes \exp(-2m\pi[b]/s)$ 是微分模 $Y \otimes \exp(-2m\pi[b]/s)$ 的（p-进）斜率零部分。由斜率分解，我们得到微分模在 $K\langle\gamma/s,\ s/\delta\rangle$ 上的一个包含:

$$\oplus_{b\in k} Y_b \subset Y. \tag{5.4.2.1}$$

另一方面，由命题 2.3.6， $Z_b \otimes \exp(-2m\pi[b]/s)$ 是微分模 $Z \otimes \exp(-2m\pi[b]/s)$ 的（p-进）斜率零部分。由命题 5.3.2，通过由 Q 诱导的 Y 与 Z 之间的同构， Y_b 在 $K\langle\gamma/s,\ s/\delta\rangle$ 上与 Z_b 同构，其中 $0 < \gamma < \delta \leq \beta$。这证明了断言 (ii)。特别地，包含 (5.4.2.1) 实际上是一个分解。断言（i）得证。

(iii) 令 Z^1 为 (5.3.1.3) 中 Z_0 的补集。作为 $\mathrm{GL}(\check{\mathfrak{g}}[\![t_n]\!])$ 中的可逆矩阵， Q 可分解为

$$Q = \begin{pmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$$

使得 t hat Q_0 （分别地， Q_1）诱导了 Y_0 （分别地， Y^1）与 Z_0 （分别地， Z^1 之间的同构).

由于 Z_0 具有零 p-进斜率且是平凡的，对$0 < \gamma < \delta \leq \beta$而言， Y_0 在 $K\langle\gamma/s, s/\delta\rangle$ 上同样如此。由 [48, 推论13.6.4], 我们推出， Y_0 经由外半径为1、内半径为0的开圆环上的矩阵 $P(s)$与平凡微分模同构。我们推出 $P(s)Q_0(s)^{-1} \in$ 一般线性群$_r(K)$，其中 r 表示 Z_0的秩。因此，矩阵 $Q_0(s)$ 具有收敛半径 $|s| < 1$ ，这就完成了关于 $Y_0 \xrightarrow{\sim} Z_0$的断言(iii)的证明。

对于 $b\in k^\times$，矩阵 Q 仍然定义了如下两个联络之间的一个同构：

$$Y\otimes\exp(-2m\pi[b]/s),\qquad Z\otimes\exp(-2m\pi[b]/s).$$

子模 $Y_b\otimes\exp(-2m\pi[b]/s)$（分别为 $Z_b\otimes\exp(-2m\pi[b]/s)$）是$Y\otimes\exp(-2m\pi[b]/s)$（分别为 $Z\otimes\exp(-2m\pi[b]/s)$）的（$p$-进）斜率零部分。将上述论证重复应用于这些斜率零部分，我们证明了同构 $Y_b\xrightarrow{\sim}Z_b$ 的断言 (iii)。

(iv) 从上述证明可知，Q 属于 $\check{G}(\mathcal{A}_{K,s})$。 □

5.5. **简单野参数**。本小节中，我们假设 $m=h$ 是考克斯特数，$\nu=\frac{1}{h}$，且 $\check{G}$ 是伴随型几乎单群。设 $k=\mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的有限域。令 $\varphi\colon W_F\to\check{G}(K)$ 是一个连续同态，其像由半单元素构成。按照 [34, § 6]，若 φ 满足以下两个条件，则称其为简单野参数：

$$\check{\mathfrak{g}}^{I_F}=0\quad\text{and}\quad\operatorname{Swan}(\check{\mathfrak{g}})=\operatorname{rank}(\check{G}).$$

定理 5.5.1. 假设 p 不整除魏尔群 $\mathbb{W}$ 的阶，且 G 为伴随群。简单野参数恰有 $Z(q)\cdot(q-1)$ 个等价类，其中 $Z(q)=\sharp Z_G(F)$。

注记 5.5.2. 该断言见 [34, 注记 9.5]。我们根据 [34, 61]给出详细证明，以供第 6 节的应用。

5.5.3. 我们首先根据 [34]回顾简单野参数的一些性质。设 $\varphi:W_F\to\check{G}(K)$ 为一个简单野参数。在假设 p 不整除 $\mathbb{W}$ 的阶的情况下，我们有以下性质 [34, 命题 5.6, 9.4]：

(i) 像 $\varphi(W_F)$ 包含于极大环面 $\check{T}$ 在 $\check{G}$ 中的正规化子 $N(\check{T})$ 内，且其分歧滤过为：

$$D=\varphi(W_F)\geq D_0=\varphi(I_F)\geq D_1=\varphi(I_F^+),\quad D_2=1.$$

(ii) 令 $\sigma\in D_0$ 为 I_F 中驯生成元 s 的像。由于 $\check{G}$ 是伴随型，我们有$D_0=D_1\rtimes\langle\sigma\rangle$，其中 $\sigma\in N(\check{T})$ 的阶为 h，且它是魏尔群 $\mathbb{W}$ 中一个 Coxeter元 的提升。(iii) 群 D_1 的阶为 p^a，其中 a 是 p 在 $(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^\times$ 中的阶。设 $D=\mathrm{Gal}(L/F)$。那么，D_1 是 $\check{T}[p]$ 中包含 σ-特征值的唯一简单 $\mathbb{F}_p[\sigma]$-子模

$$\zeta_h=\frac{s(\varpi)}{\varpi},\tag{5.5.3.1}$$

其中 ϖ 是 $E=L^{D_1}$ 的一致化子，满足 $\varpi^h\in E^{D_0}$。

(iv) 令 d 为 q 在 $(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^*$ 中的阶。那么 D/D_0 是阶为 $f=dc$ 的循环群，其中 c 整除 $\pi_1(\check{G})$ 的指数。由于 D/D_1 是 W_F 的驯商群的像，我们有一个分裂

$$D/D_1\simeq D_0/D_1\rtimes D/D_0.$$

设 $\mathrm{Fr}\in D/D_0$ 是一个生成元，使得 $\mathrm{Fr}\,\sigma\,\mathrm{Fr}^{-1}=\sigma^q$ 属于 D/D_1。由于 D_1 是 $\check{T}[p]$的一个简单 $\mathbb{F}_p[\sigma]$ 子模，$D_1^\sigma=1$。因此由 [34, 引理 6.1]，可得一个分裂

$$D=D_1\rtimes D/D_1.$$

(v) 我们考虑由 Γ 定义的群

$$\Gamma=\langle s,t|s^h=1,t^{dh}=1,tst^{-1}=s^q\rangle=\langle s\rangle\rtimes\langle t\rangle.\tag{5.5.3.2}$$

Γ的中心是$\langle t^d\rangle$。存在一个商群 $\Gamma\to D/D_1$，将 s,t 分别映射到 σ,Fr，并且该商群的核包含于中心中。

(vi) 通过自然映射 $D/D_1 \to \mathbb{W} = N(\check{T})/\check{T}$，Fr 投影为 $\mathbb{W}$ 中的一个元素 τ，使得$\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^q$。$\tau$ 对 $\check{T}^\sigma$ 的作用与 q 次幂映射相同。并且，$\check{G}$ 中 $\varphi(W_F)$ 的中心化子是有限群 $\check{T}^{\sigma,q=1}$，其基数为 $Z(q)$。

引理 5.5.4. (i) 简单野参数的像 $\varphi(I_F) = D_0 \subset \check{G}$ 在 $\check{G}$ 的共轭意义下唯一确定。即，对任意其他简单野参数 φ'，惯性子群的像$D_0' = \varphi'(I_F)$ 与 D_0 共轭。

(ii) Γ 在 D_1 上经由商群 $\Gamma \to D/D_1$ 的作用与简单野参数的选取无关。

证明. (i) 设 φ' 为另一个简单野参数。在共轭意义下，我们可以假设 $D_1' = \varphi(I_F^+)$ 包含于 $\check{T}$ 中。现在，$D_0' = D_1' \rtimes \langle\sigma'\rangle$，其中 $\sigma' \in N(\check{T})$ 是一个 Coxeter元的提升。在共轭意义下，我们可以假设 σ 与 σ' 在魏尔群 $\mathbb{W}$ 中有相同的像，并且它们是驯生成元 s 经由 φ, φ' 的像。由于 $\sigma\check{T}$ 中的元素在 $\check{T}$ 下共轭，我们可以假设 $\sigma = \sigma'$。由于 ζ_h (5.5.3.1) 由 s 唯一确定，我们由 5.5.3(iii) 推出 $D_0 = D_0'$。于是该引理得证。

(ii) Γ的子群 $\langle s\rangle$ 通过 $\Gamma \to D/D_1 \to \mathbb{W}$与由 Coxeter元 σ 在$\mathbb{W}$ 中生成的子群 H 同构，而 t 被映到正规化子 $N_{\mathbb{W}}(H)$中的一个元素。根据 [66, 推论 4.3], ， $\mathbb{W}$ 中 H 的中心化子就是其自身。由 [66,命题 4.7]，我们有同构

$$(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^* \simeq N_{\mathbb{W}}(H)/H \simeq \mathrm{Aut}(H), \qquad a \mod h \mapsto (\sigma \mapsto \sigma^a).$$

通过这个同构，t 被映到 $N_{\mathbb{W}}(H)/H$ 中的 $q \bmod h$，且与简单野参数的选择无关。于是结论成立。□

5.5.5. 设 K 是 F 的 dh 次非分歧扩张，$\mathfrak{F}$ 是 K的剩余域，它与 $\mathbb{F}_{q^{dh}}$同构。设 M/K 是 h次驯分歧扩张。我们选择 M 的一个一致化子ϖ，使得 ϖ^h 是 K的一个一致化子。于是伽罗瓦群 Gal(M/F)与 Γ(5.5.3.2)同构，其伽罗瓦作用为:

$$s(\varpi) = \zeta_h\varpi, \quad t(\varpi) = \varpi,$$

且 s（分别地，t）是 K上的恒等自同构（分别地，q次 Frobenius 自同构）。

设 N/M 是范数群为

$$\mathrm{Nm}(N/M) = \langle\varpi\rangle \times \mathfrak{F}^\times \times U_M^2,$$

从而 Gal(N/M) $\simeq U_M^1/U_M^2$。由于 Nm(N/M) 在 Γ的作用下保持不变，扩张 N/F是 Galois 扩张。选取 ϖ 得到一个 $\mathbb{F}_p$-线性同构:

$$U_M^1/U_M^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}, \quad 1 + \varpi a \mapsto a \mod \varpi.$$

Via 通过上述同构，Γ在 U_M^1/U_M^2上的自然作用在 $\mathfrak{F}$上诱导出一个作用 .

由于 Gal(M/K) $=\langle s\rangle$在 U_M^1/U_M^2中没有非平凡不变量，由 [34, 引理 6.1] 可知存在一个分裂:

$$\mathrm{Gal}(N/F) \simeq (U_M^1/U_M^2) \rtimes \Gamma \xrightarrow{\varpi} \mathfrak{F}^+ \rtimes \Gamma.$$

5.5.6. 设 φ: $W_F \to \check{G}$ 是一个简单野参数，并再次采用 5.5.3(iii) 的记号。那么 E 是 M 在 F 上的一个子扩张，它诱导出商群 (5.5.3(v)):

$$\Gamma \simeq \mathrm{Gal}(M/F) \to D/D_1 \simeq \mathrm{Gal}(E/F), \quad s \mapsto \sigma,\ t \mapsto \mathrm{Fr}\,.$$

令 $\mathfrak{F}'$ 为 E 的剩余域。则迹映射

$$\mathrm{Tr} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$$

与 Γ 的自然作用相容。

A在 5.5.5 中，我们定义了一个纯野分歧扩张 N'，其范数群 p

$$\mathrm{Nm}(N'/E) = \langle\varpi\rangle \times \mathfrak{F}'^{\times} \times U_E^2.$$

简单野参数 φ： $W_F \to D$ 诱导出一个同构 $\mathrm{Gal}(E/F) \simeq D/D_1$。根据局部类域论， φ 通过上面构造的 $\mathrm{Gal}(N'/F)$ 分解：

$$\varphi : \mathrm{Gal}(N'/F) \simeq \mathfrak{F}' \rtimes \mathrm{Gal}(E/F) \to D_1 \rtimes D/D_1.$$

将 φ 限制到 $\mathfrak{F}'$，并与 Tr 复合，我们得到一个 $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-线性映射：

$$\psi : \mathfrak{F}^+ \to D_1. \tag{5.5.6.1}$$

注意到 D_1 与 $\mathbb{F}_p[\zeta_h]^+$ 作为阿贝尔群同构。由于 ψ 关于 s 的作用是等变的， ψ 是 $\mathbb{F}_p[\zeta_h]$-线性的。特别地，我们推得，对于某个元素 $a \in \mathfrak{F}$， $\psi = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}/\mathbb{F}_p(\zeta_h)}(a\cdot -)$。

命题 5.5.7。 (i) 限制到野惯性子群诱导出一个自然映射

$$\Xi : \{\text{simple wild parameters}\}/\sim \ \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathfrak{F}^+, D_1). \tag{5.5.7.1}$$

其像由非平凡同态组成，基数为 $q-1$。

(ii) 映射 Ξ 诱导一个双射

$$\{\varphi|_{I_F} : I_F \to \check{G} \text{ with simple wild parameters } \varphi\}/\sim \ \xrightarrow{\sim} \ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathfrak{F}^+, D_1) - \{0\}. \tag{5.5.7.2}$$

证明。 (i) 根据引理 5.5.4，该映射是良定义的。接下来证明其满射性。一个野参数φ 诱导一个满射 η： $\Gamma \to D/D_1$ 以及一个 $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-等变映射 ψ： $\mathfrak{F}^+ \to D_1$。设 ψ'： $\mathfrak{F}^+ \to D_1$是另一个非平凡的 $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-等变映射。那么，同态

$$\varphi' = \psi' \rtimes \eta : \mathfrak{F} \rtimes \Gamma \simeq \mathrm{Gal}(N/F) \to D_1 \rtimes D/D_1 \simeq D$$

仍然是一个简单野参数。

根据 5.5.6 中的讨论，任何其他 $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-等变映射 $\psi' : \mathfrak{F}^+ \to D_1$ 都是 $\mathbb{F}_p[\zeta_h]$-线性的，并且可表示为

$$\psi'(-) := \psi(a \cdot -) : \mathfrak{F} \to D_1, \quad \text{for } a \in \mathfrak{F}^{\times}. \tag{5.5.7.3}$$

此外，考虑 ψ'的 t-等变性质，可推出 $a \in \mathbb{F}_q^{\times}$。这表明 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathfrak{F}^+,\ D_1)$ 的基数等于 q。

(ii) 只需证明该映射是单射。设 $\varphi,\ \varphi'$： $I_F \to {}^{\vee}G$ 是左侧的两个同态。根据引理 5.5.4，不妨设它们的像相同，均为 D_0，此时驯生成元在 φ 和 φ'下都映到 σ。若 $\varphi|_{I_F^+} = \varphi'|_{I_F^+}$ 属于右侧，则可得 $\varphi = \varphi'$ 作为从 I_F 到 ${}^{\vee}G$的表示。

□

5.5.8. 定理 *5.5.1* 的证明。设 $\psi : \mathfrak{F}^+ \to D_1$ 为一个非平凡的 Γ-等变同态。只需证明 $\sharp\Xi^{-1}(\psi) = Z(q)$。

设 φ, φ'： $W_F \to {}^{\vee}G$ 为 $\Xi^{-1}(\psi)$ 中的两个简单野参数。则 $\varphi|_{I_F} = \varphi'|_{I_F}$ 作为表示 $I_F \to {}^{\vee}G$。存在元素 $x \in C_{{}^{\vee}G}(\varphi(I_F)) = {}^{\vee}T^{\sigma}$，使得 $\varphi'(\mathrm{Fr}) = x\varphi(\mathrm{Fr})$。

假设存在一个元素 $g \in {}^{\vee}G$，使得 $\varphi' = \mathbf{Ad}g(\varphi)$。那么 $g \in C_{{}^{\vee}G}(\varphi(I_F)) = {}^{\vee}T^{\sigma}$。由于 $\varphi(\mathrm{Fr})$ 在 ${}^{\vee}T^{\sigma}$ 上的作用是 q 次幂映射 [34, § 9.5], ，我们可推得

$$x\varphi(\mathrm{Fr}) = g\varphi(\mathrm{Fr})g^{-1} = gg^{-q}\varphi(\mathrm{Fr}) \Rightarrow x = g^{1-q}.$$

因此， $\Xi^{-1}(\psi)$ 的基数等于 $\check{}\ T^{\sigma}/\sim$ 的基数，其中等价关系 $x\sim y$ 由 $x=g^{1-q}y$ 给出，某个 $g\in\check{}T^{\sigma}$ 满足该关系。后者等于传递作用的轨道数

$$\check{T}^{\sigma}\times\check{T}^{\sigma}\to\check{T}^{\sigma},\quad (g,x)\mapsto g^{1-q}x.$$

此作用的稳定子是由 q 次幂为平凡元的元素组成的子群 $\check{}T^{\sigma,q=1}$ 。因此，轨道数等于 $\sharp\check{}T^{\sigma,q=1}=Z(q)$ [34, § 9.5]。证明至此完成。

5.5.9. 最后，我们证明不同的简单野参数可以通过标量作用相互关联。我们先证明一个一般性结论。

设 $K=\mathfrak{F}((t))$ 是一个局部域。设 K^{sep} 是 K的一个固定可分闭包，并令 $G_K=\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$。设 $\rho\colon G_K\to$ 一般线性群(V) 是一个经由惯性子群$P\subset I_K$ 分解的表示，且其像为阿贝尔群。

元素 $a\in\mathfrak{F}$ 诱导一个自同构 $\sigma_a\colon K\to K, t\mapsto a^{-1}t$。我们固定将 σ_a扩张为可分闭包上的一个自同构，记作 $\tilde{\sigma}_a\in\mathrm{Aut}(K^{\mathrm{sep}})$。于是 σ_a 诱导一个映射$\sigma_{a,*}\colon G_K\to G_K$:

$$\sigma_{a,*}(g)=\tilde{\sigma}_a^{-1}\circ g\circ\tilde{\sigma}_a.$$

令 ρ_a 为 ρ 与自同构 $\sigma_{a,*}$的复合。

命题 5.5.10. 假设 ρ 经由上分歧滤过 $P_{(r)}/P_{(r+1)}$的第 r 个分次层分解。那么，对于 $g\in P_{(r)}$，经由 $P^{(r)}/P_{(r+1)}\simeq\mathfrak{F}$，有 $\rho_a(g)=\rho(a^r\cdot g)$。

注记 5.5.11. 设 $\varphi\colon G_F\to\check{}G$ 是一个简单野参数，且 $a\in\mathbb{F}_q^{\times}$。由 (5.5.7.3) 和命题 5.5.10， φ_a 仍是一个简单野参数，并且双射 (5.5.7.2) 与 $a\in\mathbb{F}_q^{\times}$的自然作用相容。特别地，该作用在 (5.5.7.2) 的两侧都是传递的。

证明。 局部阿廷互反映射 $\theta_K\colon K^{\times}\to G_K^{\mathrm{ab}}$关于连续域同构具有函子性。根据 [63, XIII § 4 命题 11], ，我们有:

$$\tilde{\sigma}_a^{-1}\circ\theta_K(u)\circ\tilde{\sigma}_a=\theta_K(\sigma_a^{-1}(u))\quad\text{for any } u\in K^{\times}.$$

根据局部类域论， θ_K 将主单位滤过 $U_r=1+\mathfrak{m}_K^r=1+t^r\mathfrak{F}[\![t]\!]$映到上分歧子群 $P^{(r)}$上。这诱导出连续商群上的典范群同构:

$$\mathfrak{F}\xrightarrow{\sim}U_r/U_{r+1}\xrightarrow{\sim}P^{(r)}/P^{(r+1)}.$$

第一个同构由 $c\mapsto 1+ct^r$给出。逆自同构 σ_a^{-1}在单位 $u=1+ct^r\in U_r$ 上的作用由 $\sigma_a^{-1}(1+ct^r)=1+ca^rt^r$给出。

设 $g\in P^{(r)}/P^{(r+1)}$ 是一个元素，它通过 θ_K对应于 $u=1+ct^r\in U_r/U_{r+1}$。拉回特征 ρ_a 在 g 上的取值为:

$$\rho_a(g)=\rho_a\big(\theta_K(1+ct^r)\big)=\rho\big(\theta_K(\sigma_a^{-1}(1+ct^r))\big)=\rho\big(\theta_K(1+ca^rt^r)\big).$$

这表明 $\rho_a(g)=\rho(a^r\cdot g)$。 □

5.6. **上皮 Langlands 参数：混合特征情形**。在本小节中，我们首先简要回顾 Deligne–Kazhdan 对应 [21, 31] 及其与 Genestier–Lafforgue [32] 和 Fargues–Scholze [27]的局部朗兰兹对应之间的猜想关系。随后，我们说明如何将这一猜想应用于混合特征下的上皮 L-参数。

设 F 是特征为 p 的局部域，$\mathcal{O}_F$ 是其整数环， $\mathfrak{m}_F$ 是其极大理想， π 是其一致化子， $k=\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F$ 是有限剩余域。设 $F^{\sharp}$ 是另一个混合特征局部域，$\mathcal{O}_{F^{\sharp}}$ 是其整数环， $\mathfrak{m}_{F^{\sharp}}$ 是其极大理想。

定义 5.6.1。设 m 是一个正整数。如果存在一个环同构 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{F^\sharp}/\mathfrak{m}_{F^\sharp}^m$，我们称 F 和 $F^\sharp$ 是 m- 接近的 。

例如，域 $\mathbb{F}_p((t))$ 和 $\mathbb{Q}_p(p^{1/m})$ 是 m-近的。

5.6.2. 设 Gal_F 是 F 的绝对伽罗瓦群，I_F 是 Gal_F 的惯性子群，并赋予上编号的高阶分歧子群 $\{I_F^r\}^{r\in\mathbb{Q}_{\geq 0}}$。假设 $F, F^\sharp$ 是 m-近的。德利涅 [21] 证明存在一个同构

$$\mathrm{Del}_m : \mathrm{Gal}_F / I_F^m \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}_{F^\sharp} / I_{F^\sharp}^m, \tag{5.6.2.1}$$

该同构在相差内自同构的意义下唯一（见 [21, 式 3.5.1]）。特别地，Del_m 在 Gal_F 上平凡于 I_F^m 的表示同构类与 $\mathrm{Gal}_{F^\sharp}$ 上平凡于 $I_{F^\sharp}^m$ 的表示同构类之间诱导一个双射。将 Gal_F 替换为 Weil 群 W_F 时，上述性质仍成立。

5.6.3. 设 G 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的分裂连通约化群，G 是它到 F 或 $F^\sharp$ 的基变换，且 $\check{}$ B 是 G 的一个 Borel 子群。设 ℓ 是不同于 p 的素数，G 是 G 在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的 Langlands 对偶群。我们将半单 ℓ-进同态的等价类集合记为 $\mathcal{G}^{\mathrm{ss}}(G,F)$:

$$\rho : W_F \to \check{G}.$$

令 $\mathcal{G}^{\mathrm{ss},m}(G,F) \subset \mathcal{G}^{\mathrm{ss}}(G,F)$ 表示深度至多为 m 的参数子集 ϕ，即 ϕ 在子群 I_F^m 上平凡。

于是，德利涅的同构 Del_m 诱导出一个双射:

$$\mathcal{G}^{\mathrm{ss},m}(G,F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{\mathrm{ss},m}(G,F^\sharp). \tag{5.6.3.1}$$

5.6.4. 令 I 为 G的标准伊wahori子群，它定义为 $\mathrm{G}(\mathrm{O}_F) \to \mathrm{G}(k)$ 在 $\mathrm{B}(k)$ 下的原像。存在一个定义在 O_F 上、一般纤维为 G 的光滑仿射群概形 I，使得 $I(\mathrm{O}_F) = \mathrm{I}$。对于每个正整数 m，定义 I_m:$= \mathrm{Ker}(I(\mathrm{O}_F) \to I(\mathrm{O}_F/t^m))$。具体而言，我们有 $\mathrm{I}_m = \{U_{\alpha,t^m}, t^m T(\mathrm{O}_F) U_{-\alpha,t^{m+1}} | \alpha \in \Phi^+\}$。令 $H(G(F), \mathrm{I}_m)$表示由 $\mathbb{Q}_\ell$中的系数组成的、定义在 $G(F)$上的 I_m-双不变函数的赫克代数。

我们用$\mathcal{A}(G,F)$表示$G(F)$的不可约容许表示的等价类集合。令$\mathcal{A}^m(G,F) \subset \mathcal{A}(G,F)$表示由在$\mathbf{I}_m$下不变的向量生成的不可约容许表示等价类子集。Ganapathy 改进了卡兹丹定理:

定理 5.6.5 (Ganapathy–Kazhdan, [31])**.** 若 F、$F^\sharp$ 是 m-接近的，则存在一个自然同构

$$H(G(F), \mathbf{I}_m) \xrightarrow{\sim} H(G(F^\sharp), \mathbf{I}_m)$$

有限生成的 $\mathbb{Q}_\ell$-代数的。此外，存在一个双射

$$\mathcal{A}^m(G,F) \simeq \mathcal{A}^m(G,F^\sharp) \tag{5.6.5.1}$$

具有如下性质：若 $\pi \in A^m(G,F)$ 对应于 $\pi^\sharp \in A^m(G,F^\sharp)$，则不变子空间$\pi^{\mathbf{I}_m}$ 与 $\pi^{\sharp,\mathbf{I}_m}$ 作为模关于上述同构是同构的。

5.6.6. 在特征为 p 的局部域 F（相应地，混合特征的 $F^\sharp$）上，Genestier–Lafforgue（相应地，Fargues–Scholze）为 $? \in \{\ \sharp\}$ 构造了 $\mathcal{A}(G,F^?)$ 的半单参数化:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{ss}} : \mathcal{A}(G,F^?) \to \mathcal{G}^{\mathrm{ss}}(G,F^?).$$

猜想 5.6.7 ([30]猜想 11.7)**.** 对于任意正整数 m，下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^m(G,F) & \xrightarrow{\mathcal{L}^{\mathrm{ss}}} & \mathcal{G}^{\mathrm{ss},m}(G,F) \\ {\scriptstyle (5.6.5.1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (5.6.3.1)} \\ \mathcal{A}^m(G,F^\sharp) & \xrightarrow{\mathcal{L}^{\mathrm{ss}}} & \mathcal{G}^{\mathrm{ss},m}(G,F^\sharp) \end{array}$$

Li-Huerta [53] 证明了，对于正特征局部域，Fargues– Scholze 与 Genestier–Lafforgue 的构造是相容的。因此，猜想 5.6.7 还断言，两个 Fargues–Scholze 参数化与 Deligne-Kazhdan 对应相容。最近，Li-Huerta [54] 在另一种设定下证明了这种相容性。

5.6.8. 现在，我们回到极深表示的设定（§ 4.1.1）。当 Kac 坐标 $s_0 = 1$ 时，容易验证 $\mathbf{I}_1 \subset \mathbf{P}(2)$。根据 [57, 定理 B.9], ，Ganapathy–Kazhdan 的双射 (5.6.5.1) 将 F 上的极深表示映到 $F^\sharp$ 上的极深表示，只要 m 足够大。

根据注5.1.12和猜想 5.6.7的预期，可以从等特征情形推出 Fargues-Scholze 所定义的混合特征极深朗兰兹参数满足推论 5.2.4中的性质。

5.7. **Ai 的局部单值**$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}$。 我们沿用 § 4.5 中的记号，并证明 Airy 局部系统的命题 5.3.3 的一个类似结论，从而验证 [38, 猜想 29(i)]。我们还证明了一个特殊 Airy 局部系统满足 [38,猜想 29(ii)] ，这意味着它具有上同调刚性。

命题 5.7.1。 *Ai* p 的 ^{rig} -进斜率多重集（$Ai^{\ell}_{\check{G}}$ 的斜率）由 $\sharp\Phi$ 个 $1+\frac{1}{h}$ 和 r 个 0 组成。特别地，其 p-进不规则性（即 *Swan* 导子）等于 $r(h+1)$。

证明。 由命题 5.1.3，只需对 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\chi)(\check{\mathfrak{g}})$ 证明该命题。令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathrm{Ai}(a,-\pi)$ (4.5.3.1) 在无穷远点处的限制，它是环 $\underline{\mathcal{A}}_t$ 上的一个联络，其中 $t = x^{-1}$。回忆一下， a 是一个 p-进单位。为简化记号，我们可以假设 (4.5.3.1) 中的 $a = 1$ 。回忆 $s = t^{1/2h}$。对 $\mathcal{E}$ 应用 $(-\pi^{-1}s^2)^{\check{\rho}}$ 的规范变换，得到

$$Y := d + 2h\pi(p_{-1}+p_r)s^{-2-2h}\frac{ds}{s} + \sum_{i=1}^{r-1} 2h\pi a_i p_i s^{-2(h-d_i+1)}\frac{ds}{s} - \check{\rho}\frac{ds}{s}, \tag{5.7.1.1}$$

记为 Y。由于 $p_{-1}+p_r$ 是正则半单的，由引理 3.1.2，在扩大 K 之后，存在元素 $Q \in \check{G}(K[\![s]\!])$，使得 Y 可经由 Q 规范变换为 Y 的典范形式 Z：

$$Z := d + h\pi(p_{-1}+p_r)\frac{ds}{s^{2+h}} + \sum_{j\le h+1} Z_j\frac{ds}{s^j}, \tag{5.7.1.2}$$

其中 Z_j 属于 $\check{\mathfrak{g}}$ 中 $X = p_{-1}+p_r$ 的中心化子。

根据 Clark 定理 2.2.1， Q 具有如命题 5.3.2 中所述的正的 p-进收敛半径。此外， Y 具有 Frobenius 结构，因而是可解的。由于 $p > h$，我们可以证明， Y的辅助半径函数 $F_i(Y,r)$ 在 $r \in (0,1)$ 上是线性函数，如命题 5.3.3、引理 5.3.4 的证明中所述。因此， Y 的 p-进斜率的多重集与

Y的形式斜率的多重集相重合，其中将其视为一个形式联络。后者由 $\sharp\Phi$ 个$1+\frac{1}{h}$ 和 r 个 0 组成，命题得证。□

现在我们聚焦于一类特殊的艾里局部系统。回顾 4.5.1 中 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\chi)$ 的构造。特征 $\chi: J\to\mathbb{A}^1$ 延拓了 ϕ 到 $S(1)$。当 h 为偶数时，这个延拓由 $S(1)/S(1+h/2)$的一个诱导特征确定；当 $h=2n+1$为奇数时，则由 $S(1)/S(1)\cap P(1+n)$的一个诱导特征确定。若 χ在 $S(1)/S(1+h/2)$上诱导出平凡特征（分别地，在 $S(1)/S(1)\cap P(1+n)$上诱导出平凡特征），我们就称 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\chi)$ 为简单的 。

引理 5.7.2. 一个简单的艾里局部系统$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\lambda\chi)$，$\lambda\in K^\times\{0\}$ 同构于

$$\mathrm{Ai}(\underline{a},\lambda)=d+(p_{-1}+a\lambda^h x p_r)dx,\quad a\in K^\times. \tag{5.7.2.1}$$

证明。 鉴于定理 4.5.3.(i)，只需证明 (4.5.3.1) 中的 $a_i=0$ 。根据 [73, 定理 36，命题 38]，$a_i=v_{i,2d_i-1}=\chi(S_{i,2d_i-1})$，其中$S_{i,2d_i-1}$ 是李代数 $\mathrm{Lie}(J/I(2+h))$ 的包络代数中一个 Segal-Sugawara 算子的像，χ 可以在其上取值。

根据上述文献中命题 29 的证明，令 $(N,m)=(h+1,h)$，则 $S_{i,2d_i-1}$ 可以写成张量积 $\overline{X_{b_1}\otimes\cdots\otimes X_{b_{d_i}}}$之和，其中 $X_{b_r}\in\mathrm{Lie}(J/I(2+h))$，$\sum_{r=1}^{d_i}b_r=hd_i$，且 $b_1\le\cdots\le b_{d_i}\le h+1$。此外，利用 $\mathrm{Lie}(I(1+h)/I(2+h))$ 在 $\mathrm{Lie}(J/I(2+h))$ 中关于仿射根子空间的分解，只有当 $b_r=1+h$ 时，X_{b_r}才会在 $\mathrm{Lie}(I(1+h)/I(2+h))$ 上有非零投影。因此，对于 $\chi(X_{b_1}\otimes\cdots\otimes X_{b_{d_i}})\neq 0$，我们必须对所有 r 都有 $b_r=1+h$。那么$\sum_{r=1}^{d_i}b_r=(1+h)d_i>hd_i$，这是不可能的。由此得到 $a_i=\chi(S_{i,2d_i-1})=0$。□

命题 5.7.3。 设 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(-\pi\chi)$ 是一个简单的艾里局部系统。令 $\mathscr{E}=\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(-\pi\chi)|_\infty$ 和$(\rho: I_F\to\check{G}(K)\supset N)$ 为与 $\mathscr{E}(2.1.3.1)$相关的表示。

(i) $\mathscr{E}$ 是一个斜率为 $1+\frac{1}{h}$ 的 p-*adic* 等斜率联络，其含义见 3.1.4。

(ii) 幂零算子 N 为零。令 T_X 为 X 在 $\check{G}$中的中心化子 $C_{\check{G}}(X)$，它是一个极大环面。表示 ρ 适合放入一个交换图中

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & I_F^+ & \longrightarrow & I_F & \longrightarrow & I_F^t & \longrightarrow & 1\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \check{T}_X & \longrightarrow & N_{\check{G}}(\check{T}_X) & \longrightarrow & \mathbb{W} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

使得温和惯性 I_F^t 的一个生成元被映射到魏尔群 $\mathbb{W}$的一个 *Coxeter*元。特别地，我们有 $\check{\mathfrak{g}}^{I_F}=0$。

(iii) 局部系统 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\chi)$ （分别为 $\mathrm{Ai}^{\ell}_{\check{G}}(\chi(\check{\mathfrak{g}}))$）是上同调刚性的。

证明。 (i) 根据引理 5.7.2，$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(-\pi\chi)$ 的底层联络 $E^{\check{G}}(\underline{a},-\pi)$ 满足 $a_i=0\,\mathrm{for} i=1,\dots,r-1$。令$\mathcal{E}$为无穷远点处由 $E^{\check{G}}(a,-\pi)$ 定义的形式 $\check{G}$-联络。与命题 5.7.1 的证明相同，$[2m]^*\mathcal{E}$ 规范等价于 (5.7.1.1)

$$Y=d+h\pi(p_{-1}+p_r)s^{-2-2h}\frac{ds}{s}-\check{\rho}\frac{ds}{s}.$$

于是 Y 可经由 $Q\in\check{G}(K[\![s]\!])$规范变换为其典范形式 Z (5.7.1.2)：

$$Z=d+h\pi(p_{-1}+p_r)s^{-2-2h}\frac{ds}{s}.$$

由于 $p > h$，由定理 2.3.5 与引理 4.4.2 可知 Z 具有 Frobenius 结构。然后，根据命题 5.4.1 的同一论证，我们可以证明 $Q \in \check{G}(\mathcal{A}_{K,s})$。于是断言（i）成立。

断言 (ii) follows from 定理 3.2.3。断言 (iii) follows from 断言 (ii)、命题 5.7.1 以及 [38, 6中的讨论3]。 □

注 5.7.4。 我们预计命题 5.7.3 对 4.5.1 中考虑的所有 Airy 局部系统都成立。然而，我们没有 (5.7.1.2) 中次要项 Z_j 的显式描述，因此无法在一般情形下证明命题 5.7.3。

5.8. **Ai$\check{}_G$ 的整体单值化$_G$** 。 我们保留命题 5.7.3 的假设。我们应用上述小节中的局部单值结果来研究 Airy 局部系统的整体单值化。

5.8.1。 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\chi)$ 的底层联络 (5.7.2.1) 对于 $i = 1$、.....、 $r-1$ 满足 $a_i = 0$：

$$\mathrm{Ai}(\underline{a}, \lambda) = d + (p_{-1} + (-\pi)^h x p_r) dx.$$

令 G_{diff} 为上述$\check{G}$-联络的微分伽罗瓦群。在 [45], 中，作者证明了$\check{}$ G_{diff} 是 G 的一个极大次数连通约化子群，即其基本次数$\check{}$等于 G的考克斯特数。更准确地说，若记 Σ 为$\check{G}$ 的外自同构群，并记 Out($\check{\mathfrak{g}}$) 为$\check{\mathfrak{g}}$的外自同构群，则 G_{diff} 由 [45, 定理 12]给出：

- $G_{\text{微分}} \xrightarrow{\sim} \check{}_{G^{\Sigma,}}$ 。，若$\check{G}$ 不是类型 A_{2n} （$n \geq 2$）或 B_3，也不是带有 $\Sigma \neq$Out($\check{\mathfrak{g}}$)的 D_{2n} （$n \geq 2$）。$\check{}\,\check{}$
- $G_{\text{微分}} = G$, 若 G 属于类型 A_2，
- $G_{\text{微分}} \to G_2$, 若 G 属于类型 B_3 或类型 D_4。
- $G_{\text{微分}} \xrightarrow{\sim}$Spin$_{4n-1}$ 若 $\check{G}$ 为类型 D_{2n}，且 $\Sigma \simeq \{1\}$ ($n \geq 3$)。

$\check{}$ 注意，上述结果与 Frenkel–Gross 引入的 Bessel G-联络的微分伽罗瓦群一致 [29]。

另一方面，设 H 为 $\check{G}$ 中 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\chi)$ 的几何单值群。正如[71, § 4.5.1]中所解释的（将 Bessel $\check{G}$-联络替换为艾里 $\check{G}$-联络），存在一个自然嵌入：

$$H \to G_{\mathrm{diff}}. \tag{5.8.1.1}$$

$\check{}$5.8.2. 设 $\check{\mathfrak{g}}$ 为 G的李代数。我们将 n 定义为具有李代数 $\check{\mathfrak{g}}$ 的几乎单群中忠实表示的最小维数。对于每一种单类型（秩为 ℓ），最小维数为：

A_ℓ $(\mathfrak{sl}_{\ell+1})$	$\ell+1$	standard representation
B_ℓ $(\mathfrak{so}_{2\ell+1})$, $\ell \geq 2$	$2\ell+1$	vector representation (faithful on $\mathrm{SO}_{2\ell+1}$)
C_ℓ $(\mathfrak{sp}_{2\ell})$, $\ell \geq 2$	2ℓ	standard representation
D_ℓ $(\mathfrak{so}_{2\ell})$, $\ell \geq 4$	2ℓ	vector representation (faithful on $\mathrm{SO}_{2\ell}$)
G_2	7	minimal representation
F_4	26	minimal representation
E_6	27	minimal representation
E_7	56	minimal representation
E_8	248	adjoint representation

注意， n 大于或等于考克斯特数 h，且大于秩 ℓ。

定理 5.8.3. 保留命题 *5.7.3* 的假设以及 $p > 2n+1$。那么自然态射 $H \to G_{\mathrm{diff}}$ (5.8.1.1) 是一个同构。

注记 5.8.4. 一族秩为 n 的艾里局部系统的几何单值群已由 Katz 和 Šuch [42, 68], 计算，其中包括上述一般线性群$_n$情形的定理。我们的方法受到 Katz 论文的启发。

˘**5.8.5.** 我们假设 G 具有如 5.8.2 中所述的最小维数忠实表示 n 。下面列出几何单值群 H的一些基本性质:

- 对于 $V \in$ **表示范畴(** ˘G**)**，Ai$_{\mathrm{rig}\,\breve{}G}(\chi)(V)$ 是纯局部系统，且几何半单。因此，$H_\circ$ 是 ˘ G [18] 的半单子群。
- 连通分支群 $\pi_0(H)$ 是 $\pi_1(\mathbb{A}^1_k)$ [23, (7.8)] 的有限商群，因此是一个准-p群，也就是说，它没有阶与 p [33, 互素的非平凡有限商群 Exposé XIII, Corollaire 2.12]。
- 鉴于命题 5.7.3 中的无穷远处局部单值， $C_{\breve{}G}(H)$ 是有限群 ˘$G^{I_\infty} =$ ˘T^σ 的子群。根据关于 p 的假设，后者的阶与 p 互素。

˘下面我们给出子群 H of G 的连通性判据

˘ ˘**命题 5.8.6.** 设 G 是一个几乎单群，具有忠实表示 $G \to$一般线性群$_n$ ，并且$H \subset$ ˘G 是一个代数子群。设 $p > 2n+1$ 是一个素数。假设 ***(i)*** $\pi_0(H)$ 是一个拟-p-群，***(ii)*** H° 是半单的，***(iii)*** $C_{\check{G}}(H)$ 有限，且其阶与 p 互素。那么 H 是连通的。

5.8.7. 我们需要用到 Jordan 定理，该定理指出，存在一个定义在 n 上的函数 $c(n)$，使得若Γ 是 GL$_n$ 的有限子群，则存在 Γ的正规阿贝尔子群 Γ_0 ，使得商群 Γ/Γ_0 的阶为 $\le c(n)$。Feit–Thompson 对 Jordan 定理的加强 [28] 指出，若$p > 2n+1$，则 Γ 的 Sylow p-子群是 Γ的阿贝尔正规子群。

证明 命题 *5.8.6* 的(i) H 在 H° 上的共轭作用诱导出一个同态

$$\pi_0(H) \to \mathrm{Out}(H^\circ).$$

$|\mathrm{Out}(H^\circ)|$ 的所有素因子都是 $\le \max\{3, \mathrm{rank}(H)\} \le \max\{3, \mathrm{rank}(\breve{}G)\}$。于是 Out($H^\circ$) 的阶与 p 互素。由于 $\pi_0(H)$ 是一个拟-p-群，上述同态是平凡的。

设 $L = C_{\check{G}}(H^\circ)$。每个元素 $h \in H$ 都通过内自同构 $\mathbf{Ad}^{s(h)}$ 作用于 H° ，其中 $s(h) \in H^\circ$。于是 $\ell(h) = hs(h)^{-1}$ 是 L 的一个元素。该构造定义了一个单同态

$$\pi_0(H) \hookrightarrow \Delta := L/Z(H^\circ), \quad h \mapsto \ell(h).$$

记 K 为 $\pi_0(H)$ 在 Δ 中的像。注意， $Z(H^\circ)$ 是一个有限群，其阶的素因子均小于 p。

(ii) 接下来证明 K 是阿贝尔的。设 $K \subset L$ 是 K 在 π 下的原像： $L \to \Delta$。那么 ˘K 也是有限的。按照 5.8.2，我们取一个忠实表示 $G \to$GL$_n$ 。根据 Feit–Thompson 的结果， K 的一个 Sylow p-子群是阿贝尔且正规的。将其下推到 K， K 也具有相同性质。由于K 是一个拟-p-群，我们推得 K 是一个阿贝尔的 p-群。

(iii) 我们证明 $C_{\check{G}}(H) = K$。对于 $g \in C_{\check{G}}(H)$，我们首先注意到 H 由 H° 和 K 生成，因此 $g \in C_{\check{G}}(H^\circ) = L$。在 L中，每个元素都与 H°对易，因此 $g \in L$ 与 $H = K \cdot H^\circ$ 对易，当且仅当 g 与 K对易。于是我们有 $C_{\check{G}}(H) = C_L(K)$。

（iv）考虑 Δ 中 K 的中心化子的原像：

$$M := \pi^{-1}(C_\Delta(K)) \subset L, \quad \pi : L \to \Delta.$$

根据 M 的定义，元素 $\ell \in L$ 属于 M 当且仅当 $\pi(\ell)$ 与 K 中的每个元素交换，即对于每个 $\hat{k} \in \widehat{K}$，$[\ell,\hat{k}] \in \ker(\pi) = Z(H^\circ)$。因此，对于 $\ell \in M$，我们可以定义一个映射

$$\delta(\ell) : K \to Z(H^\circ), \qquad \delta(\ell)(\pi(\hat{k})) := [\ell, \hat{k}].$$

该映射与 $k \in K$ 在 K 中的提升的选择无关，并且是一个同态。此外，我们得到一个同态：

$$\delta : M \to \mathrm{Hom}(K, Z(H^\circ)), \quad \ell \mapsto [\ell, \hat{k}].$$

其核由与每个$\hat{k} \in \widehat{K}$交换的那些 $\ell \in M$ 组成，即 $\ker(\delta) = C_L(\widehat{K})$。因此$\delta$ 诱导出一个单射

$$M/C_L(\widehat{K}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(K, Z(H^\circ)).$$

根据关于 p的假设，$Z(H^\circ)$的阶和 $C_L(K) = C_{\check{G}}(H)$的阶都与 p互素。于是$\widehat{\mathrm{Hom}}(K, Z(H^\circ)) = 1$，从而我们推得 $|C_\Delta(K)|$ 整除 $|C_L(K)|$，并且也与 p互素。另一方面，由于 K 是一个阿贝尔 p-群，$K \subset C_\Delta(K)$。因此 K 必为平凡群。□

定理 5.8.3 的证明。我们首先假设 G 具有一个如 5.8.2 中所述的、维数 n 最小的忠实表示。一般情形可由此情形以及 $\mathrm{Ai}_{\check{G}}$的平凡函子性推出（见 4.6.3）。

根据命题 5.8.6，$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\chi)$ 的几何单值群 H 是连通半单的。根据塞尔和博雷尔的一个定理，无穷远点处野惯性 $\rho(I_F^+)$ 在 H 中的像是一个有限p-群，因此包含于 H 的极大环面 T_H 的正规化子 $N_H(T_H)$ 中。由于$p > h$，p 不整除魏尔群 $N_H(T_H)/T_H$ 的阶，因此 $\rho(I_F^+)$ 包含于 T_H 中。我们在 G 中有如下包含关系：

$$T_H \subset C_H(\rho(I_F^+)) \subset C_{\check{G}}(\rho(I_F^+)) = \check{T}_X.$$

于是我们推出 $T_H = T_X \cap H$。

根据命题 5.7.3，∞ 处的局部单值可纳入以下图表：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & I_F^+ & \longrightarrow & I_F & \longrightarrow & I_F^t & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & T_H & \longrightarrow & N_H(T_H) & \longrightarrow & \mathbb{W}_H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

使得温和惯性 I_F^t 的一个生成元映射到魏尔群 $\mathbb{W}_H$ 中一个阶为 h 的元素。

于是我们推出，h 整除 H 的一个基本次数。因此，H 是G 的一个极大次数连通约化子群。鉴于 G_{diff}（§ 5.8.1）的计算以及极大次数约化子群的分类，[45, 定理 3'], ，我们得出结论：包含关系 $H \to G_{\mathrm{diff}}$ 是一个同构。□

6. 物理刚性

在本节中，我们假设 $k = \mathbb{F}_q$ and $\sigma = \mathrm{id}_K : K \to K$。我们证明，曲线上一个过收敛等晶体若其底层联络具有物理刚性，则该等晶体也具有物理刚性。特别地，我们推导出猜想中所预言的几乎单群的贝塞尔 F-等晶体（以及 Kloosterman 层）的物理刚性，见 [35, 猜想 7.1]。

6.1. P-进情形。

6.1.1. 设 S 是 $\mathbb{P}^1_k$ 和 $U=\mathbb{P}^1_k-S$的一个适当闭子集。设 $\check{}G$ 是一个在 K上分裂的连通几乎单群。设 $\mathcal{E}$ 是 U/K 上的一个 $\check{}G$-过收敛等晶体 (2.1.1)。若对于任意 $\check{}G$-过收敛等晶体 $\mathcal{E}'$，只要对每个闭点 $x\in|S|$，它们作为 Robba 环$\mathcal{R}$ 上的微分模满足 $\mathcal{E}|_x\simeq\mathcal{E}'|_x$，就有 $\mathcal{E}\simeq\mathcal{E}'$，则称$\mathcal{E}$ 具有物理刚性 。

定理 6.1.2。 设 U、$\to X=\mathbb{P}^1$ 是概形在 O_K 上的一个开浸入，且补集 $S\to X$ 在 O_K 上平坦。设 E 是 U_k/K 上的一个 $\check{}G$-过收敛等晶体。假设存在一个物理刚性的 $\check{}G$-联络 $\overline{E}$ 于 U_K 上，使得 $E^\dagger\simeq E$ (4.2.1.1)。则 E 是物理刚性的。

注 6.1.3。 Crew 对秩为 n 的过收敛等晶体证明了类似的结果 [19, 定理 2]，该等晶体是具有正则奇点的刚性联络的解析化。他的证明将问题归结为上同调刚性（这仅在一般线性群 n 情形下才等价于物理刚性），并基于比较 de Rham 上同调群与刚性上同调群；而这种比较仅在正则奇异性情形下可用。

6.1.4. 我们回顾 4.2.1 中构造的局部图景。令 MC($\mathcal{R}_K$)（分别为 MC($\mathcal{A}_{K,t}$)，以及 MC($K((t))$) 表示如下范畴：前者是具有联络的有限秩自由 $\mathcal{R}_K$-模的范畴（分别地，中者是具有有限阶极点联络的有限秩自由$\mathcal{A}_{K,t}$-模的范畴，后者是带形式联络的自由 $K((t))$-模的范畴）。我们有自然的张量函子，它们由标量扩张（2.1.2.3）定义：

$$\mathrm{MC}(\mathcal{A}_{K,t})\to\mathrm{MC}(\mathcal{R}_K),\quad \mathrm{MC}(\mathcal{A}_{K,t})\to\mathrm{MC}(K(\!(t)\!)). \tag{6.1.4.1}$$

定理 *6.1.2* 的证明。 扩大 K 后，我们可以假设 S 同构于有限个不交并 $\sqcup$Spec($\mathcal{O}_K$)。

$\check{}$设 $\mathcal{L}$ 是 U_k 上的一个 G-过收敛等晶体，其在每个点 $x\in S_k$ 处的局部单值都与 $\mathcal{E}$ 的局部单值同构。扩大 K 后，我们可以假设 $\mathcal{L}$，$\mathcal{E}$ 以及它们之间的局部同构都定义在 K 上。

对于 $x\in S_K$，限制 $E|_x$ 作为 MC($K((t_x))$) 中的一个对象（在 x 处取局部坐标t_x ）是代数的，因此来自 MC($\mathcal{A}_{K,\ t_x}$) 中的一个对象，我们滥用记号将其记为 $E|_x$。此外，将 $E|_x$ 标量扩张到 $\mathcal{R}_K$ 后所得对象与 $\mathcal{E}|_x$ 同构，因此也与 $\mathcal{L}|_x$ 同构。

设 $\mathfrak{U},\mathfrak{X}$ 是 U,X 的 p-进完备化。设 V 是 $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ 中 $\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}$ 的一个严格邻域，在该邻域上 $\check{}$L 可以实现为一个带联络的 G-丛。对于每个 $x\in S_K$，L 的限制与 $E|_x$ 的限制在 V 和 $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ 中以 x 为中心的开单位球的交集上同构（4.2.1）。于是，数据 (L, $\{E|_x\}_{x\in S_K}$) 可以粘合成 $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ 上的一个解析 $\check{}G$-丛 L^{an}，以及一个在 $x\in S_K$ 处有有限阶极点的联络。由 GAGA 定理，我们得到 U_K 上一个带联络的代数 $\check{}G$-丛 L，使得 $L^\dagger\simeq$L。此外，作为形式联络，我们有 $L|_x\simeq E|_x$。由 E 的物理刚性可知，扩大 K 后，$L\simeq E$ 属于 Conn(U_K)。接着，通过函子 (–)†，我们得到 L $\simeq$E。□

我们将把上述定理应用于第二作者的以下结果：

定理 6.1.5 ([72] 定理 1, [14]定理 1, [73]定理 41)。 在定理 *4.3.2* 的假设下，$\check{}G$-联络 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\phi)$ (4.1.3)、$\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\chi)$ (4.5.1)是物理刚性的。

证明。 当 $\check{}G$为伴随型时，定理已在同上中得到证明。一般情形下，正如 [71,4.3.6], 所指出的，在同构意义下，存在唯一一个定义在 $\mathbb{G}_{m,K}$ （分别为 $\mathbb{A}^1_K$）上的 de Rham $\check{}G$-局部系统，它诱导出 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\phi)$—（分别为 $\mathrm{Ai}^{\mathrm{dR}}_{\check{G}}(\chi)$），并且在 0 处具有幂零单值化。这使我们能够从伴随情形推出一般情形。□

由定理 6.1.2，我们可得：

推论 6.1.6. 在定理 *4.3.2* 的假设下，$\check{}G$-过收敛等晶体 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)(4.1.3)$、$\mathrm{Ai}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\chi)$ (4.5.1) 具有物理刚性。

6.2. $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$**的整体-局部关系**。

6.2.1. 在本小节中，我们假设 G 在 $\mathcal{O}_K$ 上几乎单且分裂，$m=h$ 是考克斯特数，并且 p 不整除魏尔群的阶。

对于稳定函数 $\phi\in\mathfrak{g}_1^*(k)$，我们可以关联过收敛等晶体 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$。如果 $\widetilde{\phi}$ 是 ϕ 到 $\mathcal{O}_K$ 的一个提升，那么它在 $\mathfrak{g}_1$ 的每个根子空间上的限制都非零，因此 ϕ_K 也稳定。$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$ 的底层联络同构于 $\Theta(X_{-\pi})$，使得 $-\pi\widetilde{\phi}_K$ 和 $X_{-\pi}$ 在同构 $\mathfrak{g}_1^*/\!\!/G_0\simeq{}^{\check{}}\mathfrak{g}_1/\!\!/{}^{\check{}}G_0$ (4.4.1.1) 下相匹配。

引理*6.2.2.* 设 $\phi,\phi'\in\mathfrak{g}_1^*(k)$是两个稳定函数。若 $\phi=\phi'$ 属于*GIT*商$(\mathfrak{g}_1^*/\!\!/G_0)(k)$，则$Kl^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$（分别地，$Kl^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$）与$Kl^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi')$（分别地，$Kl^{\ell}_{\check{G}}(\phi')$）作为$\mathbb{G}_{m,k}/K$ 上的$\check{}G$-过收敛等晶体同构（分别地，作为$\mathbb{G}_{m,k}$上的$\overline{\ell}$-进$\check{}G$-局部系统同构）。

证明。若 $\phi=\phi'$ 属于GIT商，则我们可以取 ϕ,ϕ' 在$\mathcal{O}_K$ 上的提升，使它们在$(\mathfrak{g}_1^*/\!\!/G_0)(\mathcal{O}_K)$中具有相同的像。由定理4.2.2和4.3.2可知，$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$与$\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi')$作为$\check{}G$-过收敛等晶体同构。

ℓ-进情形可由命题 5.1.10 推出，p-进情形亦然。 □

6.2.3. 借助 p-进局部单值定理，根据定理 3.2.3，我们可以为 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)|_{\infty}$ 关联一个简单野参数 $\rho_\phi: W_F\to{}^{\check{}}G$。通过与 ${}^{\check{}}G\to{}^{\check{}}G_{\mathrm{ad}}$ 及 Ξ (5.5.7.1) 复合，结合上述引理，我们得到以下集合映射：

$$\mathfrak{A}:\{\text{过收敛等晶体 }\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)|\text{ 稳定 }\ \phi\in\mathfrak{g}_1^*/\!\!/G_0(k)\}\to\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathfrak{F}^+,D_1)\ -\{0\},(6..3.1)$$

$$\Pi^{\ell}:\{\ell\text{-进 }{}^{\check{}}G\text{-局部系统 }\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)|\text{ 稳定 }\ \phi\in\mathfrak{g}_1^*/\!\!/G_0(k)\}\to\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathfrak{F}^+,D_1)\ -\{0\}.$$

命题 6.2.4。(i) 上述映射 Π （分别为 Π^{ℓ}）是双射。

(ii) 设 $\phi,\phi'\in\mathfrak{g}_1^*(k)$ 是两个稳定函数。那么，作为定义在 $\mathbb{G}_{m,k}/K$ 上的 $\check{}G$-过收敛等晶体，$Kl^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$（分别为 $Kl^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$）与 $Kl^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi')$（分别为 $Kl^{\ell}_{\check{G}}(\phi')$）同构；当且仅当 $\phi=\phi'$ 属于 *GIT* 商 $(\mathfrak{g}_1^*/\!\!/G_0)(k)$。对于定义在 $\mathbb{G}_{m,k}$ 上的 ℓ-进 $\check{}G$-局部系统，结论亦然。

证明。我们在 p-进情形下证明该定理。ℓ-进情形可由命题 5.1.10 得出，而 p-进情形亦然。

(i) 由平凡函子性 [71, § 4.1.7], ，我们可以假设 $\check{}G$ 为伴随型 .

令 $a\in\mathbb{F}_q^\times$、$\tilde{a}$ 为其在 K 和 $[a]$ 中的 Teichmüller提升：$\mathbb{G}_m\to\mathbb{G}_m,\quad x\mapsto a\cdot x$。

令 $X=X_1+X_{1-h}\in{}^{\check{}}\mathfrak{g}(k)$ 在同构 (4.3.2.1) 下对应于 ϕ。鉴于 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$ 的底层联络 (4.4.1.1)，$[a]^*\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)$ 具有一个底层联络：

$$d+(X_1+\tilde{a}(-\pi)^hX_{1-h}x)\frac{dx}{x}.$$

若令 $X_a=X_1+aX_{1-h}$ 和 $\phi_a\in(\mathfrak{g}_1^*/\!\!/G_0)(k)$ 为 X_a 在 (4.3.2.1) 下的像，则有 $[a]^*\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi)\simeq\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{}G}(\phi_a)$。

另一方面， $a \in \mathbb{F}_q^\times$在 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathfrak{F}^+, D_1) - \{0\}$ 上的相应作用已在 (5.5.7.3) 中研究过，且该作用是传递的。回顾注记 5.5.11， Π 关于此作用是等变的。因此， Π是一个满射。由于两边的基数均为 $q-1$，断言得证。

(ii) 假设 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\phi)$ 与 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\phi')$ 同构。通过 Π，相关的局部单值表示同构。注意，断言（i）还表明， Π 的定义域与 $\mathfrak{g}_1^*/\!/G_0(k)$ 的稳定元之间存在自然双射。由此可得， $\phi = \phi'$ 属于 GIT商 $(\mathfrak{g}_1^*/\!/G_0)(k)$。□

推论 6.2.5。 假设 p 不整除魏尔群 $\mathbb{W}$ 的阶，且 G 为伴随型。(i) 映射 Π 诱导出一个双射：

$$\{p\text{-进同构 斜率为 } \tfrac{1}{h}\}/\sim \xrightarrow{\sim} \{\text{的典型联络，以及非平凡的 } \mathbb{F}_p[\Gamma]\text{-线性映射 } \psi\colon \mathfrak{F}^+ \to D_1\}.$$

(ii) 上述映射在以下同构类集合之间诱导出一个双射：

$$\{p\text{-进等斜联络，斜率为 } \tfrac{1}{h} \text{ 且带有 Frobenius}\}/\sim \xrightarrow{\sim} \{\text{简单野参数}\}/\sim .$$

证明。 (i) 范畴等价 $\mathrm{MCF}(\mathcal{R}_K) \simeq$ **表示范畴**$(I_F \times \mathbb{G}_a)$ (2.1.3) 将斜率为 $\frac{1}{h}$ 的 p-进等斜率联络对应到 $\varphi|_{I_F}$：由简单野参数 φ导出的 $I_F \to \check{G}(\overline{K})$。根据命题 6.2.4(ii)，左侧的基数至少为 $q-1$。于是由命题 5.5.7 得到断言。

(ii) 在两侧，Frobenius 结构都可以按照 5.5.8 中的相同方式进行修改。于是我们由 (i) 推出该断言。□

6.3. **ℓ-进情形**。 设 $m = h$ 是考克斯特数。令 ℓ 为不同于 p 的素数。我们将在适当假设下，由其 p-进变体（定理 6.1.2）推出如 [35, 猜想 7.1] 所猜想的 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}$ 的（ℓ-进）物理刚性：

定理 6.3.1。 假设 p 不整除魏尔群 $\mathbb{W}$的阶。设 ϕ 是 $\mathfrak{g}_1^*(k)$ 上的稳定函数，且 E 是定义在$\mathbb{G}_{m,k}$ 上的一个 ℓ-进 $\check{G}$-局部系统，使得 $E|_x \simeq \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)|_x$ 作为惯性子群 I_x 的表示，对 $x \in \{0,\infty\}$成立。那么 $E \simeq \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$ 定义在 $\mathbb{G}_{m,k}$上。

证明。 我们首先证明存在 $\mathfrak{g}_1^*(k)$ 上的稳定函数 ϕ'，使得 $\mathcal{E} \simeq \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi')$ 定义在 $\mathbb{G}_{m,k}$上。

我们取同构 $\mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{C} \cong K$。令 $\mathrm{E}^\dagger$（分别为 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\phi)$）是 E（分别为 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$，命题 5.1.10）的 p-进伴随。由于 $\mathrm{E}|_\infty$ 是一个简单野表示，而 $\mathrm{E}|_0$ 是一个具有幂零单值化的驯表示，对于 $x \in \{0,\infty\}$，与 $\mathrm{E}^\dagger|_x$ 相关的 Weil–Deligne 表示也具有相同性质。由推论 6.2.5，作为 Robba 环上的 $\check{G}_{\mathrm{ad}}$-微分模，$\mathrm{E}^\dagger{}_{\check{G}_{\mathrm{ad}}}|_\infty$ 同构于一个斜率为 $\nu = \frac{1}{h}$ 的 p-进等斜率联络。于是，我们可以应用推论 6.1.6 和 6.2.5，推出对于某个稳定函数 $\phi' \in \mathfrak{g}_1^*(k)$，$\mathrm{E}^\dagger \simeq \mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}_{\mathrm{ad}}}(\phi')$ 作为 $\check{G}_{\mathrm{ad}}$- 值过收敛等晶体成立。作为 $\check{G}$-过收敛等晶体，$\mathrm{E}^\dagger$ 与 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\phi')$ 相差一个定义在 $\mathbb{A}^1_k$上的 $\check{G}$-过收敛等晶体 χ。由于 $Z_{\check{G}}$是有限的， χ配备 Frobenius 结构后，对应于从 $\pi_1(\mathbb{A}^1_k)$ 到 $Z_{\check{G}}$的一个特征。由于 p 不整除 $Z_{\check{G}}$的阶，该特征在 ∞ 处诱导出一个驯特征，因此 χ 作为一个 $Z_{\check{G}}$-过收敛等晶体是平凡的。由此我们推出，$\mathrm{E}^\dagger \simeq \mathrm{Kl}^{\mathrm{rig}}{}_{\check{G}}(\phi')$ 作为 $\check{G}$-过收敛等晶体成立。由命题 5.1.10，$\mathrm{E} \simeq \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi')$ 作为 ℓ-进 G-局部系统成立。

$\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$，$\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi')$的局部单值表示同构。由命题 6.2.4(i)，我们推出 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi) \simeq \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi')$。证明至此完成。□

注记 6.3.2. 对于 $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ for $n \geq 4$ 或 Sp_{2n}，利用文献 [71] 中证明的 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$ 的函子性，可以给出一种关于 ℓ-进物理刚性的另一种论证。

设 $\mathcal{E}$ 是一个 ℓ-进的 $\check{G}$-局部系统，在 0 处 ∞ 具有与 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$ 相同的局部单值。考虑沿 $\check{G}$ 的标准表示 Std 对它们作推出。根据 [71, 定理5.1.4、第§5.2.2节、命题5.2.10]，$\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)(\mathrm{Std})$ 是一个不可约超几何层，已知其具有物理刚性。因此在 k 上，

$$\mathcal{E}_{\overline{k}}(\mathrm{Std}) \simeq \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)_{\overline{k}}(\mathrm{Std}).$$

此外，对于上述 $\check{G}$，$\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$ 的几何单值群等于 $\check{G}$ [35, 定理 3][71, 定理 1.2.7]。上述同构表明，$\mathcal{E}$ 与 $\mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)$ 的几何单值表示被某个 $g \in \mathrm{GL(Std)}$ 中的元素共轭。在特别地，g 正规化几何单值群 $\check{G} \subset \mathrm{GL(Std)}$。由于 SO_{2n+1} 和 Sp_{2n} 在 GL(Std) 中除中心外是自正规化的，我们可以将 g 替换为 $\check{G}$ 中的一个元素，从而得到所需的同构 $\mathcal{E}_k \simeq \mathrm{Kl}^{\ell}_{\check{G}}(\phi)_k$。

附录 A. 代数的与算术 $\mathscr{D}$-模的比较

A.1. 从代数的 $\mathscr{D}$-模到算术 $\mathscr{D}$-模。

A.1.1. 我们遵循 Huyghe–Schmidt 在 [37, § 3] 中的构造。设 X 为光滑 $\mathcal{O}_K$-概形，$\mathfrak{X}$ 为 X 的 p-进完备化。存在环层空间的典范态射：

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{j} X_K.$$

我们可以定义一个函子

$$\overline{(-)} : \mathrm{Qcoh}(X_K) \to \mathbf{Mod}(\overline{\mathscr{O}}_{X_K}), \quad \mathscr{E} \mapsto \overline{\mathscr{E}} := \alpha^{-1}(j_*(\mathscr{E})). \tag{A.1.1.1}$$

注意，我们有 $\mathscr{O}_X[\frac{1}{p}] \simeq j_*(\mathscr{O}_{X_K})$ 与 $\mathscr{D}^{(m)}_X[\frac{1}{p}] \simeq j_*(\mathscr{D}_{X_K})$，其中 $\mathscr{D}^{(m)}_X$ 是 X [9]上有限层 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的（算术）微分算子层。设 $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}$ 为 $\mathfrak{X}$ 上的过收敛算术微分算子层。于是我们得到单射平坦同态[37,引理 3.2.3]：

$$\overline{\mathscr{O}}_{X_K} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \qquad \overline{\mathscr{D}}_{X_K} \to \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}.$$

通过应用 (A.1.1.1) 以及与上述同态的张量积函子，我们得到正合函子 [37, 引理 3.2.4]：

$$\mathbf{Coh}(\mathscr{O}_{X_K}) \to \mathbf{Coh}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]), \quad \widehat{(-)} : \mathbf{Coh}(\mathscr{D}_{X_K}) \to \mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}). \tag{A.1.1.2}$$

命题 A.1.2 ([37] 3.3.2,3.2.6)**.** 设 $f\colon X \to Y$ 是光滑 $\mathcal{O}_K$-概形之间的 $\mathcal{O}_K$-态射，$\widehat{f}\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ 是其 p-进完备化，且 $\mathscr{M} \in \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_{X_K})$。

(i) 存在一个典范态射于 $\mathrm{D}^+(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$ 中：

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\overline{\mathscr{D}}_{Y_K}} \overline{f_{K,+}(\mathscr{M})} \to \widehat{f}_+(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\overline{\mathscr{D}}_{X_K}} \overline{\mathscr{M}}) \tag{A.1.2.1}$$

(ii) 若 f 还是射影的，则上述映射是 $\mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$ 中的一个同构。

注 A.1.3. 在 [37, 3.2.6], 中，作者在假设 X，Y 光滑射影且 f 适当的情况下证明了断言 (ii)。不过，在上述假设下，同样的论证仍然成立。

A.2. **上超全纯算术 $\mathscr{D}$-模与代数的 $\mathscr{D}$-模之间的比较**。对于 k 上的簇 Z，我们用 Hol(Z) 表示上超全纯算术 $\mathscr{D}$-模构成的阿贝尔范畴，该范畴中的对象可以配备 Frobenius 结构（这些对象在 [12] 中也称为 F-可上超全纯 $\mathscr{D}$-模）。最近，Caro-D'Addezio 将 Kedlaya 关于 F-等晶体的全忠实性结果推广到了算术 $\mathscr{D}$-模，见 [12, 定理 8.2.4]。下面的命题是他们结果的一个变体。

命题 A.2.1. 设 Y 是一个定义在 O_K 上的光滑拟射影概形。存在一个全忠实函子

$$\mathrm{Hol}(Y_k) \to \mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}). \tag{A.2.1.1}$$

证明. 设 $Y \hookrightarrow P$ 是到一个光滑 $\mathcal{O}_K$-概形中的闭嵌入，且 $P \to P$ 是到一个光滑射影 $\mathcal{O}_K$-概形中的开嵌入。设 Y_k 是 Y_k 在 P_k 中的闭包，并记为 $\overline{Z} = Y_k - Y_k$。采用 [12, § 8.2],中的记号，有一个等价

$$\mathrm{Hol}(Y_k) \simeq \mathrm{H}_F(\overline{Y}_k, \overline{\mathscr{P}}, Z).$$

由 [12, 定理 8.2.4], 可知，限制到 $\mathscr{P}$ 定义了一个全忠实函子:

$$\mathrm{H}_F(\overline{Y}_k, \overline{\mathscr{P}}, Z) \to \mathrm{H}_F(Y_k, \mathscr{P}).$$

根据 Berthelot–Kashiwara 等价，范畴 $\mathrm{H}_F(Y_k, \mathscr{P})$ 等价于$\mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$ 的一个全子范畴。复合这些函子便得到 (A.2.1.1)，且该函子是全忠实的。

最后，我们证明 (A.2.1.1) 与$Y \hookrightarrow P \hookrightarrow P$ 的选择无关（差一个典范同构）。设 $Y \hookrightarrow P' \hookrightarrow P$，是另一种选择，并令

$$\overline{P}'' := \overline{P} \times_{\mathcal{O}_K} \overline{P}', \qquad P'' := P \times_{\mathcal{O}_K} P' \subset \overline{P}''.$$

于是, $\overline{P}''$ 是K 上的光滑射影概形，而 P'' 是一个光滑开子概形。由这两个浸入诱导的对角映射给出一个闭浸入 $Y \hookrightarrow P''$。令 Y''_k 为 Y_k 在P''_k 中的闭包，并令 $Z'' := Y''_k \setminus Y_k$。投影 $P'' \to P$和 $\overline{P}'' \to P'$ 诱导出框架范畴之间的典范等价

$$\mathrm{H}_F(\overline{Y}_k, \overline{\mathscr{P}}, Z) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}_F(\overline{Y}''_k, \overline{\mathscr{P}}'', Z'') \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_F(\overline{Y}'_k, \overline{\mathscr{P}}', Z'),$$

这些等价与对 $\mathscr{P}, \mathscr{P}', \mathscr{P}''$的限制以及闭子概形 Y 上的 Berthelot–Kashiwara 等价相容。因此，所得函子 $\mathrm{Hol}(Y_k) \to \mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$ 典范地同构。□

定义 A.2.2. 设 Y 是一个定义在$_K$上的光滑拟射影概形。设 E 是$\mathbf{Coh}(\mathscr{D}_{Y_K})$中的一个代数的$\mathscr{D}$-模，且$\mathcal{E}$是 $\mathrm{Hol}(Y_k)$ 中的一个算术 $\mathscr{D}$- 模。若经由函子 (A.1.1.2) 和 (A.2.1.1)，它们在 $\mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$ 中的像同构，则称$(E, \mathcal{E})$相关。

A.2.3. 设 X 是一个光滑的 $\mathcal{O}_K$-概形，其紧化 $j : X \to X$ 嵌入到一个光滑射影的 $\mathcal{O}_K$-概形 X 中，且边界 $Z = X - \overline{X}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 上的横截除子。令 $\widehat{j} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 为开浸入。我们有自然同态

$$\widehat{j}_*(\overline{\mathscr{O}}_{X_K}) \to \mathscr{O}^{\dagger}_{\overline{\mathfrak{X}},\mathbb{Q}}(Z_k) \to \widehat{j}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}), \qquad \widehat{j}_*\overline{\mathscr{D}}_{X_K} \to \mathscr{D}^{\dagger}_{\overline{\mathfrak{X}},\mathbb{Q}}(Z_k) \to \widehat{j}_*(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}).$$

根据 [9, 定理 4.3.10(ii)], $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Q}}(Z_k) \to \widehat{j}_*(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}})$ 是忠实平坦的，并且我们有一个正合函子

$$(-)^{\dagger} : \mathbf{Coh}(\mathscr{D}_{X_K}) \to \mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\overline{\mathfrak{X}},\mathbb{Q}}(Z_k)), \quad M \mapsto \mathscr{D}^{\dagger}_{\overline{\mathfrak{X}},\mathbb{Q}}(Z_k) \otimes_{\widehat{j}_*\overline{\mathscr{D}}_{X_K}} \widehat{j}_*\overline{M}. \tag{A.2.3.1}$$

范畴 $\mathrm{Hol}(X_k)$ 可以实现为$\mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}},\mathbb{Q}(Z_k))$ 的全子范畴。在上述情形下，根据命题 A.2.1，一对 $(E,\mathcal{E})$ 是定义 A.2.2 意义下的相关对象，当且仅当 $E^{\dagger}\simeq\mathcal{E}$ 属于范畴$\mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}},\mathbb{Q}(Z_k))$。

A.2.4. 设 $f\colon X\to S$ 是拟射影光滑 $\mathcal{O}_K$-概形之间的一个 $\mathcal{O}_K$-态射。假设f 容许一个良好紧化，即 f 可延拓为光滑射影 $\mathcal{O}_K$-概形之间的一个 $\mathcal{O}_K$-态射 $f\colon X\to S$，使得 $X-X$与 $\overline{S}-\overline{S}$是 $\overline{\mathcal{O}_K}$ 上的横截除子。设 $(E,\mathcal{E})$ 是 X_K （相应地， X_k）上的一对相关的代数的（相应地，算术的） $\mathscr{D}$-模。

由 $\mathscr{D}$-仿射性（相应地， $\mathscr{D}^{\dagger}$-仿射性），整体截面函子诱导范畴等价$\mathbf{Coh}(\mathscr{D}_{X_K})\simeq\mathbf{Coh}(D_{X_K})$（相应地，$\mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(Z_k))\simeq\mathbf{Coh}(D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(Z_k))$）其中 D表示层 $\mathscr{D}$的整体截面。我们滥用记号，用其整体截面来记 E （相应地，$\mathcal{E}$）。由于 $\mathcal{E}\simeq D^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)\otimes_{D_{X_K}}E$，我们有 D_{S_K}-模复形的自然态射：

$$D_{S_K\leftarrow X_K}\otimes^{L}_{D_{X_K}}E\to D^{\dagger}_{\overline{\mathfrak{S}}\leftarrow\overline{\mathfrak{X}},\mathbb{Q}}(\infty)\otimes^{L}_{D^{\dagger}_{\overline{\mathfrak{X}},\infty}(\infty)}\mathcal{E}.$$

取整体截面函子的逆函子，便得到$\mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{S}}(\infty))$的（相对）专化映射：

$$(\mathrm{R}^i f_{K,+}E)^{\dagger}\to\mathrm{R}^i f_{k,+}\mathcal{E}. \tag{A.2.4.1}$$

上述构造推广了 [71, 2.4.7] 中的相对专化映射。

最后，我们证明相关性在适当推前下保持不变。

命题 A.2.5. 设 $f\colon X\to Y$ 是准射影光滑 O_K-概形之间的适当态射。假设 E、E 在 X 上相关。那么 $\mathrm{R}^i f_{k,+}(E)$ 和$\mathrm{R}^i f_{K,+}(E)$ 在 Y 上相关。

证明。 首先注意到 f 是射影的。事实上，取一个浸入 $X\to\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$，并将其与图 $\Gamma_f\colon X\to X\times_{\mathcal{O}_K}Y$ 复合：

$$X\to\mathbb{P}^n_Y\to Y.$$

上述复合是适当的，且 $\mathbb{P}^n_Y\to Y$ 是分离的。因此我们推得 $X\to\mathbb{P}^n_Y$ 是适当的，故为闭浸入。

我们考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hol}(X_k) & \longrightarrow & \mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) & \longleftarrow & \mathbf{Coh}(\mathscr{D}_{X_K}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{R}^i f_{k,+}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{R}^i \widehat{f}_{+}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{R}^i f_{K,+}} \\
\mathrm{Hol}(Y_k) & \longrightarrow & \mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}) & \longleftarrow & \mathbf{Coh}(\mathscr{D}_{Y_K})
\end{array}$$

由命题 A.1.2(ii)，右方块是交换的。并且只需证明左方块是交换的。

根据上述分解 $f=\pi\circ i$ 以及推前的函子性，只需处理如下情形：(i) f 是闭浸入，且 (ii) $f\colon\mathbb{P}^n_Y\to Y$ 是投影。

(i) 若 f 是闭浸入，则由 Berthelot–Kashiwara 等价以及命题 A.2.1 的证明中全忠实函子 (A.2.1.1) 的构造可得结论：经过 $\mathscr{D}^{\dagger}$ 后，算术推前和代数推前都由同一个传递双模描述，因此左侧方块交换。

(ii) 对于 $f=\pi\colon \mathbb{P}^n_Y\to Y$，如命题 A.2.1 的证明中所述，选取闭浸入 $Y\hookrightarrow P$，将其嵌入一个光滑的 $\mathcal{O}_K$-概形中，并选取一个光滑适当紧化 $P\hookrightarrow \overline{P}$。于是 $\mathbb{P}^n_{\overline{P}}\to\overline{P}$ 是光滑射影态射，算术推前 $f_{k,+}$ 由传递双模 $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{P}\leftarrow\mathbb{P}^n}$ 计算。从 P 限制到 $\overline{P}$ 后，函子 $f_{k,+}$ 与 $\mathscr{P}\mathbf{Hol}(\mathbb{P}^n_{Y,k})$ 在 $\mathbf{Coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathbb{P}^n_{\mathscr{P}},\mathbb{Q}})$ 中的实现相容，也与 $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{P},\mathbb{Q}}$-模上的 $\widehat{\pi}_+$ 相容。这证明了此情形下左侧方块的交换性。□

参考文献

[1] T. Abe, 等晶体的朗兰兹对应与曲线上晶体伴随对象的存在性, 美国数学会杂志 31 (2018), 921–1057. [2] T. Abe,„, D. Caro, p-进上同调中的权理论, 美国数学杂志 140 (2018), no. 4, pp. 879–975. [3] J. Adler, 精细各向异性 K 型与超尖点表示, 太平洋数学杂志 185 (1998), no. 1, 1–32. [4] Y. André, 伽罗瓦表示与 p-进贝塞尔算子, 傅里叶研究所年刊 (Grenoble) 52 (2002) no. 3, pp. 779–808. [5] Y. André, Hasse-Arf 型滤过与 p-进单值, 数学发明 148 (2002), 285–317. [6] D. Babbitt, V. S. Varadarajan. 亚纯微分方程的形式约化理论：群论视角, 太平洋数学杂志 109 (1983), no. 1, 1–80. [7] P. Berthelot, 刚性上同调与 Dwork 理论：指数和情形, 载于 P-进上同调. Astérisque No. 119-120 (1984), 3, 17–49. [8] P. Berthelot, 刚性上同调与带紧支撑的刚性上同调，第一部分, 预印本 (1996). [9] P. Berthelot, 算术 $\mathscr{D}$-模. I. 有限阶微分算子, Ann. Sci. École Norm. Sup. 29 (1996), no. 2, 18–272. [10] P. Berthelot, 算术 $\mathscr{D}$-模理论导论, 载于 p-进上同调及其算术应用 II (编 P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie, K. Kato, M. Rapoport), Astérique 279 (2002), 1–80. [11] S. Bloch, H. Esnault,

$\mathscr{D}$ 8 2004 4, -模

587 605

的局部傅里叶变换与刚性. 亚洲数学杂志 ( ), no. – .

[12] 2025 D. Caro, M. D'Addezio, 晶

[13] θ

体比较中的单射性失效, 预印本, T.-H. Chen, Vinberg 的 -群与刚性联络, 国际数学研究通知 IMRN 23 (2017), 7321–7343. [14] T.-H. Chen, L. Yi. 不规则 Theta 联络与极深表示的几何朗兰兹, 预印本 (2024). [15] G. Christol, Z. Mebkhout, 关于 p-进微分方程指标定理. III, 数学年刊 (2) 151 (2000), no. 2, 385–457. [16] G. Christol, Z. Mebkhout, 关于 p-进微分方程指标定理. IV, 数学发明 143 2001 3, 629 672 ( ), no. – D. N. Clark. 关于线性微分方程解的

[17]

p-进收敛性的注记, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 262-269. [18] R. Crew, F-等晶体及其单值群. Ann. Sci. École Norm. Sup. 25 (1992), no. 4, 429–464. [19] R. Crew, 刚性与 Frobenius 结构. 《Doc. Math.》 22 (2017), 287–296. [20] P. Deligne, L 函数函数方程的常数. 单变量模函数, II (国际暑期学校会议录, 安特卫普大学, 安特卫普, 1972), pp. 501–597, 数学讲义, Vol. 349, Springer, Berlin-New York, 1973. [21] P. Deligne, 特征 p 的局部域，作为特征 0 局部域的极限. 载于局部域上约化群的表示, 《Travaux en Cours》, pages 119–157. Hermann, Paris, 1984. [22] P. Deligne, J. S. Milne, 坦纳范畴, 霍奇循环、动机与志村簇, 数学讲义, vol. 900, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1982), 101–228. [23] V. Drinfeld, 有限域上光滑簇基本群的原半单完备化. 数学进展 327, (2018), 708–788. [24] B. Dwork, 作为自变量的 p 进函数的贝塞尔函数, Duke Math. J. 41 (1974), 711–738. [25] H. Esnault, M. Groechenig, 刚性联络与 F-等晶体, 《数学学报》 225 (2020), no. 1, 103–158. [26] H. Esnault, M. Groechenig, 再论刚性平坦联络的晶体性. 《数学选刊》 (N.S.) 31 (2025), no. 1, Paper No. 2, 38 pp.

[27] L. Fargues, P. Scholze, 局部Langlands对应的几何化, Astérisque, 待发表. [28] W. Feit, J. Thompson, 关于具有次数小于 (p-1)/2 的忠实表示的群, 太平洋数学杂志 4 (1961), 1257-1262. [29] E. Frenkel, B. Gross, 射影直线上的刚性不规则联络, 数学年刊 170 (2009), 1469–1512. [30] W. T. Gan, M. Harris, W. Sawin, R. Beuzart-Plessis, 超尖点表示的局部参数. Forum Math. Pi 12 (2024), Paper No. e13, 41 pp. [31] R. Ganapathy, 局部函数域上 GSp_4 的局部Langlands对应. 美国数学杂志 137 (2015), no. 6, 1441–1534. [32] A. Genestier, V. Lafforgue, 约化群的受限切拓与局部朗兰兹参数化, 预印本 (2018). [33] A. Grothendieck, 平展覆叠与基本群, SGA 1, Springer-Verlag, LNM 224, (1971). [34] B. Gross, M. Reeder, 离散朗兰兹参数的算术不变量, Duke Math. J. 154 (2010), 431–508. [35] J. Heinloth, B-C Ngô, Z. Yun, 约化群的 Kloosterman 层. 数学年刊 177 (2013), no. 1, 241–310. [36] A. Hohl, K. Jakob, Kloosterman 与艾里联络的斯托克斯现象, 预印本, https://arxiv.org/abs/2404.09582v2. [37] C. Huyghe, T. Schmidt, 中间延拓与晶体分布代数, 预印本 , https://arxiv.org/abs/2005.05231. [38] K. Jakob, M. Kamgarpour, L. Yi, 约化群的艾里层 , Proc. Lond. Math. Soc. (3 1, 390 126 2023 428) ( ), no. – .[39] K. Jakob, Z. Yun, $\mathbb{P}^1$ 上不规则 G-联络的 Deligne-Simpson 问题 (2023), 预印本. [40] T. Kaletha, 极深朗兰兹包与修正特征, 数学发明 202 (2015), no. 1, 1–89. [41] T. Kaletha, 正则超尖点表示, 美国数学会杂志 32 (2019), no. 4, 1071–1170. [42] N. Katz, 关于与某些指数和族相关的单值群. Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 41–56. [43] N. Katz, 高斯和、Kloosterman 和与单值群, Ann. Math. Studies 116, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1988. [44] N. Katz, 刚性局部系统, 数学研究年刊, 139, Pinceton University Press (1996). [45] M. Kamgarpour, D. Sage, 具有考克斯特奇点的 G-联络的微分伽罗瓦群, 预印本, https://arxiv.org/abs/2309.11742. [46] M. Kamgarpour, G. Nam, A. Puskás, 具有正则单值的特征簇的算术几何, 将发表于 Representation Theory.
[47] p 2 **160** 2004 1, 93 184 2119719
[48] 199

K. S. Kedlaya, -进局部单值定理, 数学年刊 ( ) ( ), no. – ; MR K. S. Kedlaya. p 进微分方程. 第二版. 剑桥高等数学研究, . 剑桥大学出版社, Cambridge, 2022. xx+496 pp. [49] M. Kisin, R. Zhou, 与半稳定阿贝尔簇相关的强相容系, 预印本 (2025) https://arxiv.org/abs/ 2505 02165 1 . v M. Larsen, 关于逐元素共轭同态的共轭性,
[50]
Israel J, of Math. 88 (1994) 253-277. [51] L. Lafforgue, Drinfeld 切拓与朗兰兹对应, 数学发明 147 (1) (2002) 1–241. [52] G. Laumon, 傅里叶变换、函数方程常数与 Weil 猜想. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 65 (1987), 131–210. [53] S. D. Li-Huerta, 函数域上的局部-整体相容性, 预印本, 2023, https://arxiv.org/abs/2301.09711. [54] S. D. Li-Heurta, 关于近域与局部Langlands对应, 预印本 (2024). [55] A. Marmora, p-进 epsilon 因子, Compos. Math. 144 (2008), 439–483. [56] Z. Mebkhout, Turrittin 定理的 p-进类比与 p-进单值定理, 数学发明
148 2002 2, 319 351 1906152 ( ), no. – ; MR M. Mishra, 局部Langlands对应中的深度保持与近
[57]
域迁移, 预印本 (2025), https://arxiv.org/abs/2509.04997v2. [58] A. Pulita, 秩一 p-adic 微分方程的 Frobenius 结构. 超度量泛函分析, 247–258, Contemp. Math., 384, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. [59] A. Pulita, 经由 Lubin–Tate 群的秩一可解 p-adic 微分方程与有限阿贝尔特征, Math. Annalen, Vol. 337, p.489-555, (2007). [60] Y. Qin, Kloosterman 层的 L-函数, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 129 (2024), no. 5, Paper No. e70003, 60 pp. [61] M. Reeder, J. Yu, 极深表示与不变量理论, 美国数学会杂志 27 (2014), no. 2, 437–477.

[62] M. Reeder, P. Levy, J. Yu, B. Gross，单李代数上的正秩分次，Transform. Groups 17 (2012)，第 4 期，1123–1190。[63] J.-P. Serre，局部域，Springer，2013。[64] M. Setoyanagi，关于 *p* 进收敛的 *Clark* 定理的注记。Proc. Amer. Math. Soc. 125 3，717 1997 721 ( )，第 – 期。[65] S. Sperber， p-*adic* 超几何函数及其上同调，Duke Math. J. 44 (1977)，第 3 期，535–589。[66] T.A. Springer，有限反射群中的正则元素，Inv. Math.，25 (1974)，第 159–198 页。[67] R. Steinberg，约化群中的挠元，Adv. Math. 15 (1975)，63–92。[68] O. Šuch，艾里层和 *Kloosterman* 层的单值。Duke Math. J. 103 (2000)，第 3 期，397–444。[69] N. Tsuzuki，拟幺正过收敛 *F*-等晶体的斜率过滤，Annales de l'Institut Fourier，第 48 卷 (1998) 第 2 期，第 379-412 页。[70] N. Tsuzuki，局部指标与 *Swan* 导子，Comp. Math. 111(3) (1998) 245–288。[71] D. Xu, X. Zhu， $Bessel$ F约化群的-等晶体。Invent. math. 227，997–1092 (2022)。[72] L. Yi，关于 *Frenkel-Gross* 联络的物理刚性。《数学选刊》(新系列) 30 41，23 2024 3，( )，第 论文编号 页。[73] L. Yi，超尖点表示的显式局部几何朗兰兹：环面情形，预印本 (2025) https://arxiv.org/abs/2506.13179。[74] Z. Yun，具有例外伽罗瓦群的动机与逆伽罗瓦问题，Invent. Math. 196，267–337 (2014)。[75] Z. Yun，极深表示与刚性局部系统，《数学选刊》(新系列) 22 (2016)，1195–1243。[76] X. Zhu，*Frenkel-Gross* 非正则联络与 *Heinloth-Ngô-Yun* 的联络相同。《数学选刊》(新系列) 23 (2017)，第 1 期，245–274。