arXiv:2603.09369v1 [math.GR] 10 Mar 2026

关于交错群情形下 Zappa 问题

RU ZHANG 和 RULIN SHEN

Abstract. 1962 年，Guido Zappa 提出这样一个问题：有限群的 Sylow$_p$-子群的一个非平凡陪集，是否可能只包含阶为 p 的幂的元素？Marston Conder 对于 $p = 5$的情形给出了肯定答案。已知，满足该问题条件的最小群必定是一个非交换单群。本文证明，对于任意素数 p，Zappa 问题中的最小群不可能是交错单群。

1. Introduction引言

设 G是一个有限群， P 是 G 的一个 Sylow p-子群（其中，素数p 整除 G的阶）。在 1962 年的一篇论文中，Guido Zappa [7] 提出了以下两个问题：

一个非平凡陪集 Pg 是否可能只包含阶为 p 的幂的元素？如果可以，Pg 中是否至少有一个元素的阶为 p?

L.J. Paige 提出了一个类似的问题：

Sylow 2-子群的非平凡陪集 Pg 是否总包含一个奇数阶元素？

约翰·汤普森回答了 Paige 的问题。他在 1967 年指出，对于某些素数 q（例如 53），群 $SL(2, q)$ 是一个反例（见 [2]）；换言之，Sylow 2-子群的非平凡陪集有时可能只包含偶数阶元素。2014 年，Daniel Goldstein 和 Robert Guralnick 进一步推进了这项研究，证明对于每个奇素数 p，都存在无穷多个有限单群，其中某个 Sylow p-子群P 的非平凡陪集 Pg 只包含阶被 p 整除的元素（见 [3]）。此外，Daniel Goldstein 和 Robert Guralnick 重提了 Zappa 的第一个问题。

2017年，Marston Conder 对$p = 5$情形给出了肯定答案。他颇令人意外地指出，在若干有限非交换单群中（包括 PSL(3,4)、PSU(5, 2) 和 Janko 群 J_3），某个西罗5-子群（阶为5）的非平凡陪集只包含阶为5的元素（见 [4]）。此外，他证明，对于素数 p，具有给定性质的最小有限群必为非交换单群（见 [4, 引理 4]）。Kundu 和 Mishra

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20C15, 20D06, 20D60.

Key words and phrases. 有限群，Zappa 问题，Sylow p-子群。项目受中国国家自然科学基金（项目编号：12161035）资助。

证明了最小有限群不是交错群 A_{2p} （见 [1]）。本文证明，对于所有素数 p，最小群不可能是交错单群。我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 G 为交错群或对称群， P 为 G的 *Sylow* p-子群。若陪集 $P\alpha$ 中仅含有阶为 p的幂的元素，则 $\alpha \in P$。

对于素数 p，具有给定性质的单群似乎非常罕见。事实上，即将发表的论文表明，若 p是其特征，则经典单群不会出现。大量证据支持 Marston Conder 提出的以下猜想成立，但该猜想仍未解决。

猜想 1.2. 设 S 为单群， P 为 S的 *Sylow* p-子群。若非平凡陪集 Pg 完全由 p-元素构成，则 $|P| = 5$。

2. Some Notations and Lemmas

在本文中，字母 p 始终表示一个素数。我们用 $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ 表示自然数集，用 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ 表示正整数集。用 n_p 表示 n的 p-部分。记 S_Ω 或 S_n （A_Ω 或 A_n）为集合 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$上的对称群（交错群）。用 id表示恒等映射，用 $\alpha|_M$ 表示限制在集合 M上的置换。若 $\Omega' \subseteq \Omega$，则存在将 $S_{\Omega'}$ 嵌入 S_Ω的自然嵌入，因此 $S_{\Omega'}$ 可视为 S_Ω的子群。对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $0 \le i \le p-1$，定义集合：

$$\Omega_{k,i} = \{1 + ip^k,\ 2 + ip^k,\ \dots,\ p^k + ip^k\}.$$

记为 $\Omega_k = \Omega_{k,\,0}$，即 $\Omega_k = \{1, 2, \dots, p^k\}$. 我们在 Ω_k中定义映射 σ_k 如下： $\sigma_0 = id$ 并且对于 $k \ge 1$,

$$\sigma_k : x \mapsto x + p^{k-1} \pmod{p^k}.$$

记号 2.1. 设 $P_k := \langle \sigma_0,\ \sigma_1,\ \dots\dots,\ \sigma_k \rangle$，对 $k \ge 0$。设 $Q_1 = \{\mathrm{id}\}$，并且 $Q_k := \langle Q_{k-1},\ P_{k-1}^{\sigma_k},\ \dots\dots,\ P_{k-1}^{\sigma_k^{p-1}} \rangle$，对 $k > 1$。

引理 2.2. 对于 $k \in \mathbb{Z}^+$，下列结论成立：

(1) $\Omega_k = \bigsqcup_{i=0}^{p-1} \Omega_{k-1,\,i}$。 *(2)* $\sigma_k \in S_{\Omega_k}$ 且 $o(\sigma_k) = p$。 *(3)* $\Omega_{k-1}^{\sigma_k^i} = \Omega_{k-1,\,i}$ 对所有 $0 \le i \le p-1$。

证明。由于 Ω_k 中的元素恰好是从 1 到 p^k 的整数，我们可以将 Ω_k （按递增顺序）划分为 p 个互不相交的子集，每个子集的大小为 p^{k-1}。由此，按照以下规则构造一个 $p \times p^{k-1}$ 矩阵：第一行由整数 1、2、.....、p^{k-1} 组成，之后每一行都由前一行中对应的元素加上 p^{k-1} 得到，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p^{k-1} \\ 1 + p^{k-1} & 2 + p^{k-1} & \dots & 2p^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + (p-1)p^{k-1} & 2 + (p-1)p^{k-1} & \dots & p^k \end{pmatrix}$$

其中，第 i 行的元素集合恰好是 $\Omega_{k-1,\ i-1}$，对于 $1 \le i \le p$。因此，我们有 $\Omega_k = \Omega_{k-1} \sqcup \Omega_{k-1,\ 1} \sqcup \cdots \sqcup \Omega_{k-1,\ p-1}$. 这就证明了 (1)。

对于 $1 \le j \le p^{k-1}$，根据 σ_k 的定义，我们恰好有：

$$\sigma_k : j \to j + p^{k-1} \to \cdots \to j + (p-1)p^{k-1} \to j. \tag{*1}$$

注意，$\{j, j+p^{k-1}, \ldots, j+(p-1)p^{k-1}\}$ 是矩阵的第 j 列。因此，在第 j 列上的限制 σ_k 是一个 p-循环。我们有 σ_k 是 Ω_k 上的一个双射，且 σ_k 的阶为 p，所以 (2) 成立。此外，对于 $1 \le i \le p-1$，(*1) 蕴含 $\Omega_{k-1,\ i-1}^{\sigma_k} = \Omega_{k-1,\ i}$，因此 $\Omega_{k-1}^{\sigma_k^i} = \Omega_{k-1,\ i}$. 这就证明了 (3)。 □

引理 2.3。设 p 是一个素数且 $n \in \mathbb{Z}^+$。将 n 写成以 p 为底的形式：$n = a_0 + a_1^p + \cdots + a_m p^m$，其中对每个 i，都有 $0 \le a_i < p$。设 $v_p(n)$ 为整除 $n!$ 的 p 的最高次幂的指数。则 $v_p(n) = a_1 + a_2 \frac{p^2-1}{p-1} + \cdots + a_m \frac{p^m-1}{p-1}$.

证明。由 [6, p.49] 可得该结论。 □

引理 2.4。设 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $P_k = \langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k \rangle$ 如记号 *2.1* 所述。则 $P_k \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_k})$ 和 $P_k = (P_{k-1} \times P_{k-1}^{\sigma_k} \times P_{k-1}^{\sigma_k^2} \times \cdots \times P_{k-1}^{\sigma_k^{p-1}}) \rtimes \langle \sigma_k \rangle$。

证明。根据 P_k 的定义，有 $P_{k+1} = \langle P_k, \sigma_{k+1} \rangle$。显然，当 $k \le 1$ 时结论成立，因此对 k 使用归纳法，并假设 $P_k \in Syl_p(S_{\Omega_k})$ 成立。我们使用下面的断言来归纳 $k+1$ 的情形。

断言： 对于 $k \ge 0$，若 $Q \in Syl_p(S_{\Omega_k})$，则 $\langle Q, \sigma_{k+1} \rangle \in Syl_p(S_{\Omega_{k+1}})$，且 $\langle Q, \sigma_{k+1} \rangle = (Q \times Q^{\sigma_{k+1}} \times Q^{\sigma_{k+1}^2} \times \cdots \times Q^{\sigma_{k+1}^{p-1}}) \rtimes \langle \sigma_{k+1} \rangle$。

事实上，由引理 2.2，$\Omega_k^{\sigma_{k+1}^i} = \Omega_{k,i}$ 对于 $0 \le i \le p-1$。因此，共轭子群 $Q^{\sigma_{k+1}^i}$ 是 $S_{\Omega_{k,i}}$ 的一个 Sylow p-子群，故它是 S_{Ω_k} 的。由于 $\Omega_k = \sqcup_{i=0}^{p-1} \Omega_{k,i}$，我们有 $QQ^{\sigma_{k+1}} \cdots Q^{\sigma_{k+1}^{p-1}} = Q \times Q^{\sigma_{k+1}} \times \cdots \times Q^{\sigma_{k+1}^{p-1}}$.。由引理 2.2，$o(\sigma_{k+1}) = p$，因此 $\sigma_{k+1} \in N_{S_{\Omega_{k+1}}}(\prod_{i=0}^{p-1} Q^{\sigma_{k+1}^i})$。此外，由 $\Omega_k^{\prod_{i=0}^{p-1} Q^{\sigma_{k+1}^i}} = \Omega_k$ 和 $\Omega_k^{\sigma_{k+1}^i} = \Omega_k$ 对于 $0 \le i \le p-1$，可得 $_i$，进而 $\left(\prod_{i=0}^{p-1} Q^{\sigma_{k+1}^i}\right) \cap \langle \sigma_{k+1} \rangle = 1$。因此，$\langle Q, \sigma_{k+1} \rangle = (Q \times Q^{\sigma_{k+1}} \times \cdots \times Q^{\sigma_{k+1}^{p-1}}) \rtimes \langle \sigma_{k+1} \rangle$.。于是，$|\langle Q, \sigma_{k+1} \rangle| = |Q|^p \cdot p = (|S_{\Omega_k}|_p)^p \cdot p$。另一方面，引理 2.3 蕴含 $|\langle Q, \sigma_{k+1} \rangle| = p^{(\frac{p^k-1}{p-1}) \cdot p + 1} = |S_{p^{k+1}}|_p$.。因此 $\langle Q, \sigma_{k+1} \rangle \in$ 是 $\mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_{k+1}})$。□

利用引理 2.2 和引理 2.4，可以直接得到以下推论。

推论 2.5. 设 $k \in \mathbb{Z}^+$ 和 $0 \le i < p$。则 $P_{k-1}^{\sigma_k^i} \in Syl_p(S_{\Omega_{k-1,\ i}})$。

引理 2.6. 设 $k \in \mathbb{Z}^+, k > 1$。则 $Q_k \le P_k$ 和 $Q_k \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_k \setminus \{1\}})$。

证明。根据 P_k、$P_{k-1}^{\sigma_k^i} \le P_k$ 关于 $k \in \mathbb{Z}^+$ 的定义，可得 $Q_k \le P_k$。因此，由引理 2.4 可知

$$Q_k = Q_{k-1} \times P_{k-1}^{\sigma_k} \times \cdots \times P_{k-1}^{\sigma_k^{p-1}}. \tag{*2}$$

由于 $|\Omega_k| = p^k$ 且 $|\Omega_k \setminus \{1\}| = p^k - 1 = (p-1)(p^{k-1} + \cdots + p + 1)$，由引理 2.3 可得

$$|S_{\Omega_k}|_p = p^{\frac{p^k-1}{p-1}} \tag{*3}$$

and

$$|S_{\Omega_k \setminus \{1\}}|_p = p^{(p-1)\left(1+\frac{p^2-1}{p-1}+\cdots+\frac{p^{k-1}-1}{p-1}\right)}. \tag{*4}$$

我们用归纳法证明 $Q_k \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_k \setminus \{1\}})$。当 $k = 1$ 时，我们有 $Q_1 = \{\mathrm{id}\}$ 和 $|S_{\Omega_1 \setminus \{1\}}|_p = 1$，因此 $Q_1 \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_1 \setminus \{1\}})$ 成立。由于 $P_{k-1}^{\sigma_k^i} \leq S_{\Omega_{k-1}, i}$ 且 $S_{\Omega_{k-1},\, i}$ 中的元素对 $0 < i < p$ 固定 1，由等式（*2）可得 $Q_k \leq S_{\Omega_k \setminus \{1\}}$ 和 $|Q_k| = |Q_{k-1}| \cdot |P_{k-1}|^{p-1}$。根据假设 $Q_{k-1} \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_{k-1} \setminus \{1\}})$，我们有 $|Q_k| = |S_{\Omega_{k-1} \setminus \{1\}}|_p \cdot (|S_{\Omega_{k-1}}|_p)^{p-1}$。等式（*3）和（*4）给出 $|Q_k| = p^{(p-1)\left(1+\frac{p^2-1}{p-1}+\cdots+\frac{p^{k-1}-1}{p-1}\right)} \cdot p^{p^{k-1}-1} = p^{(p-1)\left(1+\frac{p^2-1}{p-1}+\cdots+\frac{p^k-1}{p-1}\right)} = |S_{\Omega_k \setminus \{1\}}|_p$。因此，$Q_k \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_k \setminus \{1\}})$。□

引理 2.7. 设 $\Omega' \subseteq \Omega$ 且 $|\Omega'| = p^k$。将 n 写成以 p 为底的形式：$n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k + \cdots + a_m p^m$，其中 $a_i \in \mathbb{N}$、$0 \leq a_i < p$，且 $a_k \neq 0$。若 $P \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega'})$ 且 $Q \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega \setminus \Omega'})$，则 $P \times Q \in \mathrm{Syl}_p(S_\Omega)$。

证明。由引理 2.3 可知，S_n 的 Sylow p-子群的阶为 $p^{v_p(n)}$，其中 $v_p(n) = a_1 + a_2 \frac{p^2-1}{p-1} + \cdots + a_k \frac{p^k-1}{p-1} + \cdots + a_m \frac{p^m-1}{p-1}$。设 $n' = n - p^k$。则 $|\Omega \setminus \Omega'| = n'$ 且 $n' = a_0 + a_1 p + \cdots + (a_k - 1)p^k + \cdots + a_m p^m$，因此，$v_p(n') = a_1 + a_2 \frac{p^2-1}{p-1} + \cdots + (a_k - 1)\frac{p^k-1}{p-1} \cdots + a_m \frac{p^m-1}{p-1}$。因此，$v_p(n) = v_p(n') + v_p(p^k)$，从而 $|P \times Q| = |S_n|_p$。□

引理 2.8. 设 G 为群，且 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。则下列命题等价：

(1) 对所有 $\alpha \in G$，若陪集 $P\alpha$ 中的每个元素都是 p-元素，则 $\alpha \in P$。*(2)* 对所有 $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 以及所有 $\alpha \in G$，若陪集 $Q\alpha$ 中的每个元素都是 p-元素，则 $\alpha \in Q$。

证明. (2) $\Rightarrow$ (1)显然成立。只需证明(1) $\Rightarrow$ (2)。任取 $\alpha \in G$ 和 $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$。由西洛定理，存在 $g \in G$ 使得 $P = Q^g$。令 $\beta = \alpha^g$。则 $P\beta$ 中的每个元素都是 p-元素，因此由(1)可得 $\beta \in P$，从而 $\alpha \in Q$。□

引理 2.9. 设 $s > 1$ 和 $a > 1$ 为整数，t 和 t_i 为自然数，其中 $1 \leq i \leq s$。若 $a^{t_1} + a^{t_1} + \cdots + a^{t_s} = a^t$，则 $s \geq a$，且等式 $s = a$ 成立当且仅当 $t_1 = t_2 = \cdots = t_s = t - 1$。

证明。令 $t_M := \max\{t_1, t_2, \cdots, t_s\}$。由于 $s > 1$，对所有 $1 \leq i \leq s$ 均有 $a^{t_i} < a^t$，从而 $t_M < t$。由此可知 $a^t = a^{t_1} + a^{t_2} + \cdots + a^{t_s} \leq s \cdot a^{t_M} \leq s \cdot a^{t-1}$，因此我们有 $s \geq a$。此外，若 $s = a$，则 $a^t = a^{t_1} + a^{t_2} + \cdots + a^{t_s} \leq a \cdot a^{t-1} = a^t$，从而对所有 i 有 $a^{t_i} = a^{t_M} = a^{t-1}$。□

3. Symmetric Groups

本节讨论对称群。

引理 3.1. 设 $P \in \mathrm{Syl}_p(S_{p^k})$。那么 P 在 Ω_k 上传递地作用。

证明。设 $\alpha = (1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ p^k)$ 是一个 p^k-轮换。那么 α 是一个 p-元素。根据西洛定理，存在 $x \in P$ 使得 $\alpha^x \in P$。由于 $\langle\alpha\rangle$ 在 Ω_k 上传递地作用，因此 $\langle\alpha^x\rangle$在 Ω_k 上也传递地作用。因此， P 在 Ω_k 上传递地作用。□

引理 3.2。 设 $\alpha \in S_n$ 和 T 是 $\langle\alpha\rangle$的一个轨道。设 $a \in T$ 和 $l \in \mathbb{Z}^+$ 满足$l \mid |T|$。那么：

(1) 设 $T_i = \{a^{\alpha^{i+kl}} :\ \ 0 \le k < \frac{|T|}{l}\}$, $0 \le i < l$。那么 T_i 是 $\langle\alpha^l|_T\rangle$ 在$0 \le i < l$ 和 $T = \sqcup_{i=0}^{l-1} T_i$下的一个轨道。*(2)* 设 $T' = \{a, a^{\alpha^{t_1}}, \ldots, a^{\alpha^{t_s}}\}$，其中 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s < |T|$。若 T' 是 $\langle\alpha^l\rangle$的一个轨道，则 $s = \frac{|T|}{l} - 1$, 且对 $1 \le i \le s$，有 $t_i = il$。—

证明。（1）设 $a^{\alpha^i\langle\alpha^l\rangle} = \{a^{\alpha^i\alpha^j} | \alpha^j \in \langle\alpha^l\rangle\}.$。我们断言 $T_i = a^{\alpha^i\langle\alpha^l\rangle}$。事实上，$T_i \subseteq a^{\alpha^i\langle\alpha^l\rangle}$ 显然。反之，任取 $b \in a^{\alpha^i\langle\alpha^l\rangle}$，存在 $h \in \mathbb{N}$，使得 $b = a^{\alpha^{i+hl}}$。根据带余除法，存在 h_0，$r \in \mathbb{N}$，使得 $0 \le r < \frac{|T|}{l}$，从而 $h = h_0 \cdot \frac{|T|}{l} + r$。因此，$b = a^{\alpha^{i+(h_0 \cdot \frac{|T|}{l} + r)\ l}} = a^{\alpha^{i+rl}} \in T_i$，所以 $a^{\alpha^i\langle\alpha^l\rangle} \subseteq T_i$。于是， T_i 恰好是 $\langle\alpha^l|_T\rangle$ 的一个轨道，进而 $T = \sqcup_{i=0}^{l-1} T_i$。

(2). 根据 (1)，对 $0 \le i < l$， T_i 是 $\langle\alpha^l\rangle$ 的一条轨道。由于 $a \in T_0 \cap T' \neq \emptyset$, 我们有 $T' = T_0$。因此， $s = \frac{|T'|}{l} - 1 = \frac{|T|}{l} - 1$。此外，由于 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s < |T|$，我们有 $t_i = il$，对 $1 \le i \le s$。□

引理 3.3. 设 $H \subseteq \Omega$， α，$\beta \in S_n$，且 $\beta|_{\Omega\setminus H} = \mathrm{id}$。设 T_α 是 $\langle\alpha\rangle$ 的一条轨道，$T_{\beta\alpha}$ 是 $\langle\beta\alpha\rangle$ 的一条轨道。若 $H \subseteq T_{\beta\alpha}$ 且 $H \cap T_\alpha \neq \emptyset$，则 $T_\alpha \subseteq T_{\beta\alpha}$。

证明。任取 $a \in T_\alpha$。由于 $H \cap T_\alpha \neq \emptyset$ 且 $\langle\alpha\rangle$ 在 T_α 上的作用是传递的，对所有 $b \in H \cap T_\alpha$，存在 $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $b^{\alpha^{k_0}} = a.$。我们断言，存在 $b \in H \cap T_\alpha$ 和 $k \in Z^+$，使得 $b^{\alpha^k} = a$，并且对所有$0 < j < k$都有$b^{\alpha^j} \notin H$。事实上，固定 $b \in H \cap T_\alpha$。不妨设存在 i（$0 < i < k_0$），使得 $b^{\alpha^i} \in H$；不失一般性地，令 i 为满足条件的最大 $b^{\alpha^i} \in H$，则对 $i < j < k_0$有 $b^{\alpha^j} \notin H$。令 $b_1 = b^{\alpha^i}$ 和 $k = k_0 - i$。那么对所有 $0 < j < k$，都有 $b_1^{\alpha^k} = a$ 和$b_1^{\alpha^j} \notin H$。由于 $\beta|_{\Omega\setminus H}$ =等于恒等元，因此对所有 $0 < j < k$， β固定 b^{α^j}，也就是说，

$$(b^{\alpha^j})^\beta = b^{\alpha^j}. \tag{$*5$}$$

此外，由于 $\beta|_H \in S_H$，存在 $b_0 \in H$ 使得 $b_0^\beta = b_0$。因此，(*5) 蕴含 $b_0^{(\beta\alpha)^k} = b_0^{\beta\alpha(\beta\alpha)^{k-1}} = b^{\alpha(\beta\alpha)^{k-1}} = ((b^\alpha)^\beta)^{\alpha(\beta\alpha)^{k-2}} = (b^\alpha)^{\alpha(\beta\alpha)^{k-2}} = (b^{\alpha^2})^{(\beta\alpha)^{k-2}} = \cdots = b^{\alpha^k}$，于是 $b_0^{(\beta\alpha)^k} = a$。因此， b_0和 a属于$\langle\beta\alpha\rangle$的同一轨道。由于 $b_0 \in H \subseteq T_{\beta\alpha}$，可得 $a \in T_{\beta\alpha}$。根据我们的假设 $a \in T_\alpha$，有 $T_\alpha \subseteq T_{\beta\alpha}$。□

引理 3.4. 设 $k \in \mathbb{Z}^+$，$\Omega' \subseteq \Omega$ 且 $|\Omega'| = p^k$，并且 $P \in Syl_p(S_{\Omega'})$。设 $\alpha \in S_\Omega$和 T是一个 $\langle\alpha\rangle$-轨道。若 $T \cap \Omega' \neq \emptyset$ 且陪集 $P\alpha$ 中的所有元素都是 p-元素，则 $|T \cap \Omega'| = 1$ 或 $|T \cap \Omega'| \ge p$，并且等号成立当且仅当 $T \cap \Omega'$ 是一个$\langle\alpha^{\frac{|T|}{p}}\rangle$-轨道。

证明。由于 T是 $\langle\alpha\rangle$的一个轨道，取 $a\in T$，可得 $\alpha|_T=(a,a^\alpha,\dots,a^{\alpha^{|T|-1}})$。设 $s=|T\cap\Omega'|>0$。由于 $T\cap\Omega'\subseteq T$，不妨设 $T\cap\Omega'=\{a^{\alpha^{u_1}},\dots,a^{\alpha^{u_s}}\}$和 $0\le u_1<u_2<\cdots<u_s<|T|$。记 $a_i=a^{\alpha^{u_i}}$为 $1\le i\le s$，$l_i=u_{i+1}-u_i$ 为 $1\le i\le s-1$，并且 $l_s=u_1-u_s+|T|$。由此可得$T\cap\Omega'=\{a_1,\dots,a_s\}$，于是可将其改写为

$$\alpha|_T=(a_1,a_1^\alpha,\dots,a_1^{\alpha^{l_1-1}},\dots,a_s,a_s^\alpha,\dots,a_s^{\alpha^{l_s-1}}),\tag{*6}$$

其中，对于 $0<k<l_i$ 和 $1\le i\le s$，$a_i^{\alpha^k}\notin T\cap\Omega'$；对于 $1\le i<s$ 和 $a_s^{\alpha^{l_s}}=a_1$，$a_i^{\alpha^{l_i}}=a_{i+1}$。为方便起见，以下令 $a_{s+1}=a_1$。令 $K_i=\{a_i^\alpha,\dots,a_i^{\alpha^{l_i-1}},a_{i+1}\}$，其中 $1\le i\le s$，则 $|K_i|=l_i$，且 $T=\sqcup_{i=1}^s K_i$。由于$|\Omega'|=|\Omega_k|=p^k$，因此 $S_{\Omega_k}\cong S_{\Omega'}$。由引理 3.1，存在 $\beta_i\in P$，使得对于 $1\le i\le s$，$a_{i+1}^{\beta_i}=a_i$。此外，$\beta_i|_{\Omega\setminus\Omega'}=\mathrm{id}$ 蕴含 β_i 对所有 $0<k<l_i$ 都固定 $a_i^{\alpha^k}$。因此，对于 $0<k\le l_i.$，$a^{(\beta_i\alpha)^k}_{i+1}=a_i^{\alpha^k}$。特别地，(*6) 蕴含 $\alpha_i^{\alpha^{l_i}}=\alpha_{i+1}$。因此，$K_i$ 是 $\langle\beta_i\alpha\rangle$的一个轨道，且 $(\beta_i\alpha)|_{K_i}=(a_{i+1},a_i^\alpha,a_i^{\alpha^2},\dots,a_i^{\alpha^{l_i-1}})$。由于 $P\alpha$ 的所有元素都是 p-元素，$\beta_i\alpha$ 是一个 p-元素。因此，对于某个 $t_i\ge0$，其大小为 $|K_i|=l_i=p^{t_i}$。同理，由于 α 是一个 p-元素，存在 $t\ge0$ 使得 $|T|=p^t$。此外，$T=\sqcup_{i=1}^s K_i$，所以我们有 $|T|=l_1+\cdots+l_s$，即 $p^t=p^{t_1}+\cdots+p^{t_s}.$。若 $s>1$，引理 2.9 蕴含 $s\ge p$；若 $s=p$，则对所有 $1\le i\le s$，都有 $t_i=t-1$。因此 $a_{i+1}=a_i^{\alpha^{l_i}}=a_i^{\alpha^{p^{t-1}}}$，进而 $T\cap\Omega'=\{a_1^{\alpha^{ip^{t-1}}}|0\le i<p\}.$。由引理 3.2，$T\cap\Omega'$ 是 $\langle\alpha^{p^{t-1}}\rangle$的一个轨道，$\langle\alpha^{\frac{|T|}{p}}\rangle$也是如此。反过来，若 $T\cap\Omega'$ 是 $\langle\alpha^{\frac{|T|}{p}}\rangle$的一个轨道，则引理 3.2 的条目 (2) 导出$\dashv k\cap\Omega'|=p$。□

—

推论 3.5. 设 $\alpha\in S_n$，$\beta=(b_1,\dots,b_p)\in S_n$。若 $\langle\beta\rangle\alpha$ 中的所有元素都是p-元素，则以下情况之一成立：

(1) $b_1,\dots,b_p$属于 p 个不同轨道 $\langle\alpha\rangle$，或 *(2)* 存在 $\langle\alpha\rangle$ 的一个轨道 T，使得 $\{b_1,\dots,b_p\}\subseteq T$，且 $\{b_1,\dots,b_p\}$ 是 $\langle\alpha^{|T|/p}\rangle$ 的一个轨道。

证明。设 $\Omega'=\{b_1,\dots,b_p\}$。结论由引理 3.4 得出。□

定理 3.6. 设 $k\in\mathbb{N}$，$\alpha\in S_n$，且 T 是 $\langle\alpha\rangle$ 的一个轨道。设 $\Omega'\subseteq T$ 和$|\Omega'|=p^k$，并设 $P\in Syl_p(S_{\Omega'})$。若陪集 $P\alpha$ 中的所有元素都是 p-元素，则Ω'是 $\langle\alpha^{|T|/p^k}\rangle$ 的一个轨道。

证明。我们对 k 进行归纳。若 $k=0$，结论显然成立，因此假设结论对情形 $k-1$ 成立。由于 $|\Omega'|=|\Omega_k|=p^k$，存在一个双射 $\tau\colon\Omega'\to\Omega_k$。由于 $P\in\mathrm{Syl}_p(S_{\Omega'})$，我们有 $P^\tau\in\mathrm{Syl}_p(S_{p^k})$。此外，由于 $P_k\in\mathrm{Syl}_p(S_{p^k})$，存在 $h\in S_{p^k}$ 使得 $P_k=P^{\tau h}$。令 $\alpha_0=\alpha^{\tau h}$ 和 $H=T^{\tau h}$。由于 $\Omega'\subseteq T$，且 T 是 $\langle\alpha\rangle$的一个轨道，可得 $\Omega_k\subseteq H$，且 H 是 $\langle\alpha_0\rangle$的一个轨道。此外，陪集 $P\alpha$ 中的所有元素都是 p-元素，因此陪集 $P_k\alpha_0$ 中的元素也都是。令 $|H|=p^t$ 和 $l=p^{t-k+1}$。取 $a\in H$，则 $H=\{a^{\alpha_0^i}|0\le i<|H|\}$。对所有 $0\le i<l$，记为 $H_i=\{a^{\alpha_0^{i+jl}}|0\le j<|H|/l\}$。由引理 3.2，$H_0$，.....，$H_{l-1}$ 都是 $\langle\alpha_0^l|_H\rangle$的轨道。此外，对 $0\le i<l$，令 $c_{ij}=a^{\alpha_0^{i+jl}}$，$0\le j<|H|/l$。于是我们有 $H_i=\{c_{i,j}|0\le j<|H|/l\}$，并且

$$\alpha_0|_H=(c_{0,0}\ c_{1,0}\dots c_{l-1,0}\ c_{0,1}\ c_{1,1}\dots c_{l-1,1}\dots c_{0,|H|/l-1}\ c_{1,|H|/l-1}\dots c_{l-1,|H|/l-1}).\tag{*7}$$

由引理 2.4， $P_{k-1} \le P_k$ 且 $\sigma_k \in P_k$，因此对所有 $0 \le s < p$，都有 $P_{k-1}^{\sigma_k^s} \le P_k$。由于 $P_k\alpha_0$ 中的所有元素都是 p-元素，可知 $P_{k-1}^{\sigma_k^s}\alpha_0$ 中的所有元素都是 p-元素。此外，推论 2.5 蕴含 $P_{k-1}^{\sigma_k^s} \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_{k-1,s}})$。由归纳假设，$\Omega_{k-1,s}$ 是 $\langle \alpha_0^l|_H \rangle$ 的一个轨道。不失一般性，假设 $\Omega_{k-1,s} = H_{i_s}$ 且 $0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_{p-1} < l$。因此，由引理 2.2 可得 $\Omega_k = \sqcup_{s=0}^{p-1} H_{i_s}.$。为方便起见，令 $c_{0,|H|/l} = c_{0,0}$。现在，对 $0 \le j \le |H|/l - 1$，记 $K_j = \{c_{1,j}, \ldots, c_{l-1,j}, c_{0,j+1}\}$。于是 $K_j \cap H_0 = \{c_{0,j+1}\}$ 且对 $0 < i < l$ 有 $K_j \cap H_i = \{c_{i,j}\}$。因此，

$$K_j \cap \Omega_k = \sqcup_{s=0}^{p-1}(K_j \cap H_{i_s}) = \{c_{0,j+1}, c_{i_1,j}, \ldots, c_{i_{p-1},j}\}. \tag{*8}$$

由于 $c_{0,0}$,$c_{0,1} \in H_0 = \Omega_{k-1}$，根据引理 3.1，存在 $g \in P_{k-1}$ 使得 $c_{0,1}^g = c_{0,0}$。由于 $g|_{\Omega \setminus \Omega_{k-1}} = \mathrm{id}$ 且 $\{c_{i,0}|0 \le i < l\} \cap \Omega_{k-1} = \{c_{0,0}\}$，可知 g 固定 $c_{i,0}$，其中 $0 < i < l$。因此，(*7) 意味着，对于 $1 \le i < l$，有 $c^{(g\alpha_0)_0}_{i,1} = c_{i,0}$；并且，对于 $c^{(g\alpha_0)_0}_{0,1}$，有 $c^{(g\alpha_0)_0}_{l,1} = c_{0,1}$. 因此， K_0 是 $\langle g\alpha_0 \rangle$ 的一个轨道，并且

$$(g\alpha_0)|_{K_0} = (c_{0,1}, c_{1,0}, \ldots, c_{l-1,0}). \tag{*9}$$

由于 $P_k(g\alpha_0)$ 中的每个元素都是一个 p-元素，且 $|K_0 \cap \Omega_k| = p$，引理 3.4 表明 $K_0 \cap \Omega_k$ 是 $\langle (g\alpha_0)^{|K_0|/p} \rangle$ 的一个轨道。注意，(*8) 和 (*9) 给出 $K_0 \cap \Omega_k = \{c_{0,1}, c_{i_1,0}, \ldots, c_{i_{p-1},0}\} = \{c^{(g\alpha_0)_0}_{s,1} | s = 0, i_1, \ldots, i_{p-1}\}$. 根据引理 3.2，我们有 $i_s = s|K_0|/p = sl/p$，其中 $0 \le s < p$。因此，$\Omega_k = \sqcup_{s=0}^{p-1}\{a^{\alpha_0^{i_s+jl}} | 0 \le j < |H|/l\} = \sqcup_{s=0}^{p-1}\{a^{\alpha_0^{(s+jp)l/p}} | 0 \le j < |H|/l\} = \{a^{\alpha_0^{ip^{t-k}}} | 0 \le i \le p^k - 1\}$. 如引理 3.2 所述，$\Omega_k$ 是 $\langle \alpha_0^{|H|/p^k} \rangle$ 的一个轨道，因此 Ω' 是 $\langle \alpha^{|T|/p^k} \rangle$ 的一个轨道。□

引理 3.7. 设 $p > 2$, $1 < r < p$ 和 $k \in \mathbb{Z}^+$。设 $\alpha \in S_\Omega$, T 是 $\langle \alpha \rangle$的一个轨道，且 $\Omega_k \subseteq \Omega$。假设 $\sqcup_{i=1}^r \Omega_{k-1,t_i} \subseteq T$，其中 $t_1, t_2, \ldots, t_r$ 是 $\{1, \ldots, p\}$中的互不相同元素。若 $P_k\alpha$ 中的每个元素都是 p-元素，则 $T \cap (\Omega_k \setminus \sqcup_{i=1}^r \Omega_{k-1,t_i}) \ne \emptyset$.

证明。由引理 2.4， $P_k = (P_{k-1} \times P_{k-1}^{\sigma_k} \times \cdots \times P_{k-1}^{\sigma_k^{p-1}}) \rtimes \langle \sigma_k \rangle$。记为 $P_{k-1,t} = P_{k-1}^{\sigma_k^t}$，其中 $0 \le t < p$。于是 $P_k = (P_{k-1,0} \times \cdots \times P_{k-1,p-1}) \rtimes \langle \sigma_k \rangle$，且 $P_{k-1,t} \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_{k-1,t}})$。设 $l = |T|/p^{k-1}$。取 $a \in T$ 并定义 $T_s = \{a^{\alpha^{s+jl}} | 0 \le j < |T|/l\}$，其中 $0 \le s < l.$。由引理 3.2， $T_0, \ldots, T_{l-1}$ 都是 $\langle \alpha^l|_T \rangle$的轨道。记为 $c_{s,j} = a^{\alpha^{s+jl}}$，其中 $0 \le s < l$ 且 $0 \le j < |T|/l$。于是当 $0 \le s < l$时， $T_s = \{c_{s,j} | 0 \le j < |T|/l\}$，并且

$$\alpha|_T = (c_{0,0}, \ldots, c_{l-1,0},\ c_{0,1}, \ldots, c_{l-1,1},\ \ldots,\ c_{0,|T|/l-1}, \ldots, c_{l-1,|T|/l-1}). \tag{*10}$$

由于 $P_{k-1,t_i} \le P_k$ 对于 $1 \le i \le r$， $P_{k-1,t_i}\alpha$ 中的每个元素都是一个 p-元素。此外，由于 $\Omega_{k-1,t_i} \subseteq T$，定理 3.6 表明 Ω_{k-1,t_i} 是 $\langle \alpha^l|_T \rangle$的一个轨道。因此，存在 $0 \le u_i < l$ 使得 $\Omega_{k-1,t_i} = T_{u_i}$。不妨设 $0 = u_1 < u_2 < \cdots < u_r < l$。记 $c_{0,|T|/l} := c_{0,0}$。定义 $K_j = \{c_{1,j}, \ldots, c_{l-1,j}, c_{0,j+1}\}$ 对于 $0 \le j < |T|/l$。于是 $T = \sqcup_{j=0}^{|T|/l-1} K_j$， 并且

$$K_j \cap (\sqcup_{i=1}^r \Omega_{k-1,t_i}) = K_j \cap (\sqcup_{i=1}^r T_{u_i}) = \{c_{u_2,j}, \ldots, c_{u_r,j}, c_{0,j+1}\}. \tag{*11}$$

现在我们选择 $j = 0$，等式 (*11) 推出

$$|K_0 \cap \Omega_k| \ge |K_0 \cap (\sqcup_{i=1}^r \Omega_{k-1,t_i})| = r > 1. \tag{*12}$$

由于 $c_{0,0}, c_{0,1} \in T_0 = \Omega_{k-1,t_1}$，根据引理 3.1，存在 $g \in P_{k-1,t_1}$，使得 $c_{0,1}^{g} = c_{0,0}$。由于 $c_{s,0} \in T \setminus T_0$ 对于 $0 < s < l$ 成立，元素 g 固定 $c_{s,0}$。因此，对于 $1 \le s < l$，由 $c_{0,0}^{(g\alpha)^s} = c_{s,0}$ 可得 (*10)，且 $c_{0,0}^{(g\alpha)^l} = c_{0,1}$。于是，$(g\alpha)|_{K_0} = (c_{0,1}, c_{1,0}, \ldots, c_{l-1,0})$。特别地，$K_0$ 是 $\langle g\alpha \rangle$ 的一个轨道。由于 $P_k(g\alpha)$ 中的所有元素都是 p-元素，且 $|K_0 \cap \Omega_k| > 1$，由引理 3.4 可得 $|K_0 \cap \Omega_k| \ge p$。由 (*12)，$|K_0 \cap \Omega_k| = r + |K_0 \cap (\Omega_k \setminus \sqcup_{i=1}^{r} \Omega_{k-1,t_i})|$ 且 $r < p$，因此 $|K_0 \cap (\Omega_k \setminus \sqcup_{i=1}^{r} \Omega_{k-1,t_i})| > 0$。此外，由于 $K_0 \subseteq T$，我们得出 $|T \cap (\Omega_k \setminus \sqcup_{i=1}^{r} \Omega_{k-1,t_i})| > 0$. □

引理 3.8. 设 $\Omega' \subseteq \Omega$ 且 $|\Omega'| = p^k$，设 $P \in Syl_p(S_{\Omega'})$ 且 $\alpha \in S_\Omega$。若陪集 $P\alpha$ 中的每个元素都是一个 p-元素，则存在 $\gamma \in P$ 使得 Ω' 是某个 $\langle \gamma\alpha \rangle$-轨道的子集。

证明。若 $k = 0$，则 $|\Omega'| = 1$。取 $\gamma = \mathrm{id}$，结论显然成立，因此我们假设 $k > 0$，并对 k使用归纳法。

由于 $|\Omega'| = |\Omega_k|$，存在一个双射 $\tau: \Omega' \to \Omega_k$，因此 $P^\tau \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_k})$。注意，$P_k \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_k})$。于是存在 $h \in S_{\Omega_k}$ 使得 $P_k = P^{\tau h}$。令 $\alpha_0 := \alpha^{\tau h}$。因此，$P_k\alpha_0$ 中的每个元素都是一个 p-元素。对于 $0 \le i < p$，我们令 $P_{k-1,i} := P_{k-1}^{\sigma_k^i}$。由引理 2.2 和引理 2.5，$\Omega_k = \sqcup_{i=0}^{p-1} \Omega_{k-1,i}$ 且 $P_{k-1,i} \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_{k-1,i}})$。此外，引理 2.4 给出 $P_{k-1,i} \le P_k$。令 $\delta \in P_k$，则有 $P_{k-1,i} g\alpha_0 \subseteq P_k\alpha_0$，因此 $P_{k-1,i}(\delta\alpha_0)$中的每个元素都是一个 p-元素。对于 $k-1$ 的情形，归纳假设保证

(*H)：对于 $g \in P_k$，存在 $\gamma \in P_{k-1,\,i}$，使得 $\Omega_{k-1,\,i}$ 包含在 $\langle \gamma g \alpha_0 \rangle$ 的某个轨道中。

接下来，我们利用 $(k-1)$-假设 (*H) 证明以下两个断言。

断言 1： 设 t 是小于 p 与 $\gamma \in P_k$ 的正数。设 T 是 $\langle \gamma\alpha_0 \rangle$ 的一个轨道，且 i_1、$\cdots$、i_t 是小于 p 的互不相同的自然数。若 $\sqcup_{j=1}^{t} \Omega_{k-1,\,i_j} \subseteq T$，则存在 $\gamma' \in P_k$ 以及 $\langle \gamma'\alpha_0 \rangle$ 的一个轨道 T'，使得 $\sqcup_{j=1}^{t} \Omega_{k-1,\,i_j} \subseteq T'$ 且 $T' \cap \left(\Omega_k \setminus \sqcup_{j=1}^{t} \Omega_{k-1,\,i_j}\right) \ne \emptyset$。

事实上，若 $t > 1$，令 $\gamma' = \gamma$ 和 $T' = T$，则 $\sqcup_{j=1}^{t} \Omega_{k-1,i_j} \subseteq T'$。此外，由于 $t > 1$ 且 $P_k(\gamma'\alpha_0)$ 中的所有元素都是 p-元素，引理 3.7 推得 $T' \cap \left(\Omega_k \setminus \sqcup_{j=1}^{t} \Omega_{k-1,i_j}\right) \ne \emptyset$。若 $t = 1$，我们可假设 $T_1 \cap (\Omega_k \setminus \Omega_{k-1,i_1}) = \emptyset$。令 $j \ne i_1$ 和 $0 \le j < p$，并选取点 $a \in \Omega_{k-1,i_1}$, $b \in \Omega_{k-1,j}$。根据引理 3.1，存在 $g \in P_k$ 使得 $b^g = a$。由于 T 是 $\langle \gamma\alpha_0 \rangle$ 的一个轨道，且 $\Omega_{k-1,i_1} \subseteq T$，因此有 $a^{\gamma\alpha_0} \in T$。此外，由于 $\Omega_{k-1,i_1} \subseteq T$，存在 $s \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $a^{(\gamma\alpha_0)^s} \in \Omega_{k-1,i_1}$，并且 $a^{(\gamma\alpha_0)^i} \notin \Omega_{k-1,i_1}$ 对 $0 < i < s$成立。因此，$T_1 \cap (\Omega_k \setminus \Omega_{k-1,i_1}) = \emptyset$ 意味着 $a^{(\gamma\alpha_0)^i} \notin \Omega_k$ 对 $0 < i < s$成立。此外，由于$g|_{\Omega \setminus \Omega_k} = \mathrm{id}$，$a^{(\gamma\alpha_0)^i g} = a^{(\gamma\alpha_0)^i}$，$0 < i < s$.。因此，$b^{(g\gamma\alpha_0)^i} = a^{(\gamma\alpha_0)^i}$，$0 < i \le s$.。特别地，$b^{(g\gamma\alpha_0)^s} = a^{(\gamma\alpha_0)^s} \in \Omega_{k-1,i_1}$。因此，$b$ 和 $a^{(\gamma\alpha_0)^s}$ 属于 $\langle g\gamma\alpha_0 \rangle$的同一轨道。由于 $g\gamma \in P_k$，根据假设（*H），存在 $\delta \in P_{k-1,i_1}$以及 $\langle \delta(g\gamma\alpha_0) \rangle$ 的一个轨道 T'，使得 $\Omega_{k-1,i_1} \subseteq T'$。由于 b和 $a^{(\gamma\alpha_0)^s}$属于 $\langle g\gamma\alpha_0 \rangle$的同一轨道，且 $a^{(\gamma\alpha_0)^s} \in \Omega_{k-1,i_1}$，根据引理 3.3 可得 $b \in T'$。因此，$T' \cap (\Omega_k \setminus \Omega_{k-1,i_1}) \ne \emptyset$。令 $\gamma' = \delta g \gamma_1$，则 $\gamma' \in P_k$，且 T'是 $\langle \gamma'\alpha_0 \rangle$的一个轨道。

断言2: 对于 $1 \le t \le p$，存在互不相同的数 $0 \le i_1, \ldots, i_t < p$ *and* $\gamma_t \in P_k$，以及 $\langle \gamma_t\alpha_0 \rangle$ 的一个轨道 T_t，使得 $\sqcup_{j=1}^{t} \Omega_{k-1,\,i_j} \subseteq T_t$。

事实上，如果 $t = 1$，这正是假设（*H），那么结论已经成立。我们假设结论对 $t-1$ 的情形成立，也就是说，存在 $t-1$ 个互不相同的整数 $i_1, \cdots, i_{t-1}$, $\gamma_{t-1} \in P_k$，以及 $\langle \gamma_{t-1}\alpha_0 \rangle$ 的一个轨道 T_{t-1}，使得$\sqcup_{j=1}^{t-1} \Omega_{k-1,i_j} \subseteq T_{t-1}$，下面证明结论对 t 的情形也成立。根据断言 1，存在 $\gamma' \in P_k$，以及 $\langle \gamma'\alpha_0 \rangle$ 的一个轨道 T'，使得 $\sqcup_{j=1}^{t-1} \Omega_{k-1,i_j} \subseteq T'$，并且$T' \cap \left(\Omega_k \setminus \sqcup_{j=1}^{t-1} \Omega_{k-1,i_j}\right) \neq \emptyset$。因此，存在 $i_t \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{i_j | 1 \leq j \leq t-1\}$ 使得 $T' \cap \Omega_{k-1,i_t} \neq \emptyset$。由于 $\gamma' \in P_k$，根据归纳假设（*13），存在$\gamma_t' \in P_{k-1,i_t}$，以及 $\langle \gamma_t'(\gamma'\alpha_0) \rangle$ 的一个轨道 T_t，使得 $\Omega_{k-1,i_t} \subseteq T_t$。此外，由于 $\Omega_{k-1,i_t} \cap T' \neq \emptyset$ 且 $\gamma_t'|_{\Omega \setminus \Omega_{k-1,i_t}} = \mathrm{id}$，引理 3.3 蕴含 $T' \subseteq T_t$，因此$\sqcup_{j=1}^{t} \Omega_{k-1,i_j} \subseteq T_t$。令 $\gamma_t = \gamma_t'\gamma'$，则 $\gamma_t \in P_k$，且 T_t 是 $\langle \gamma_t\alpha_0 \rangle$的一个轨道。因此，我们证明了断言2。

特别地，当 $t = p$时，存在 γ_p 以及 $\langle \gamma_t\alpha_0 \rangle$的一条轨道 T_p，使得$\Omega_k = \sqcup_{j=1}^{p} \Omega_{k-1,\ i_j} \subseteq T_p$，这对 k的情形成立。如所要求。□

定理3.9. 设 $\alpha \in S_n$ 与 $P \in$ 为$\mathrm{Syl}_p(S_n)$。若陪集 $P\alpha$ 中的所有元素均为p元，则 $\alpha \in P$。

证明。我们注意到，若 $p \nmid |S_n|$，则平凡子群是一个西罗 p子群。下文中，我们固定素数 p 以及$\Omega := \{1, 2, \cdots, n\}$，$\Omega_m := \{1, 2, \cdots, p^m\}$。$P_m$ 与 Q_m 与记号 2.1中的相同，且 S_Ω 表示 S_n。

若 $n = 1$ 与2，则结论显然成立。我们假设 $n > 2$，并对 n使用归纳法。将 n 按 p进制写出：$n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_m p^m$，其中对所有 i有 $a_m \neq 0$与 $0 \leq a_i < p$。设 $n' = n - p^m$。则 $|\Omega \setminus \Omega_m| = n'$。选取$Q \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega \setminus \Omega_m})$。引理 2.7蕴含 $P_m \times Q \in \mathrm{Syl}_p(S_n)$。由引理 2.8，我们可以假设 $P = P_m \times Q$。

情形 1. $n' = 0$，即 $n = p^m$。那么 $\Omega = \Omega_m$，且 $P = P_m$。由于 1，$1^{\alpha^{-1}} \in \Omega_m$，由引理 3.1 可知，存在 $g \in P$ 使得 $1^g = 1^{\alpha^{-1}}$，因此 $g\alpha \in S_{\Omega_m \setminus \{1\}}$。由引理 2.6 可得 $Q_m \leq P$，所以 $Q_m(g\alpha)$ 中的所有元素都是 p-元素。此外，由引理 2.6$Q_m \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_m \setminus \{1\}})$，进而由归纳假设可得 $g\alpha \in Q_m \leq P$。因此$\alpha \in P$。

情形 2. $n' \neq 0$。由于 $P = P_m \times Q$，不难看出 $\exp(P) = \exp(P_m) = p^m$。由于陪集 $P\alpha$ 中的每个元素都是 p-元素，$P_m\alpha$ 中的每个元素也都是p-元素。由引理 3.8 可知，存在 $\beta \in P_m$ 和 $\langle \beta\alpha \rangle$的一个轨道 T，使得 $\Omega_m \subseteq T$。此外，由于 $\beta\alpha$ 是一个 p-元素，$o(\beta\alpha) \leq p^m$。因此，$p^m = |\Omega_m| \leq |T| \leq o(\beta\alpha) \leq p^m$，这意味着 $|T| = |\Omega_m| = p^m$.。于是 $T = \Omega_m$。令$\alpha_1 = (\beta\alpha)|_{\Omega_m}$ 和 $\alpha_2 = (\beta\alpha)|_{\Omega \setminus \Omega_m}$。那么 $\alpha_1 \in S_{\Omega_m}$、$\alpha_2 \in S_{\Omega \setminus \Omega_m}$ 且 $\beta\alpha = \alpha_1\alpha_2$。由于 $P(\beta\alpha)$ 中的每个元素都是 p-元素，$P_m\alpha_1$ 和 $Q\alpha_2$ 中的每个元素也都是 p-元素。由于 $p^m < n$且 $n' < n$，由归纳假设可得$\alpha_1 \in P_m$、$\alpha_2 \in Q$。因此，$\beta\alpha \in P$，进而 $\alpha \in P$。□

4. 交错群

在本节中，我们讨论交错群的情形。记号与第 3 节相同。

引理 4.1. 设 $c_1, \ldots, c_p$ 为 Ω 中的互异元素，且 $P \in \mathrm{Syl}_p(S_n)$。则存在一个 p-轮换 $\beta \in S_n$，使得 $c_1 \ldots, c_p$ 中至少有一点被β移动。

证明。我们首先证明该结果

(*R): 如果 $k > 0$, $c \in \Omega_k$，且 $P \in \mathrm{Syl}_p(S_{p^k})$，则存在一个 p-循环 $\beta \in P$，使得 c 被 β移动。

事实上，如果 $k = 1$, P 由一个 p-循环生成。引理 3.1 表明 P 在 Ω_1 上传递地作用。因此，存在 $\beta \in P$，使得 c 被 β 移动。我们假设 $k > 1$，并对 k使用归纳法。现在，假设结论对 $k-1$ 成立。由于 Sylow 子群是共轭的，我们可以假设 $P = P_k$。由引理 2.2 和引理 2.4，我们有 $\Omega_k = \sqcup_{i=0}^{p-1} \Omega_{k-1,i}$ 以及 $P_{k-1}^{\sigma_k^i} \leq P_k$ 对所有 $0 \leq i < p$。由于 $c \in \Omega_k$，存在某个 i，使得 $c \in \Omega_{k-1,i}$。此外，引理 2.5 表明 $P_{k-1}^{\sigma_k^i} \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega_{k-1,i}})$。根据归纳假设，存在一个$p$-循环 $\beta \in P_{k-1}^{\sigma_k^i}$，使得 c 被 β 移动。

现在，我们通过归纳法证明该引理。将 n 写成 p进制： $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_m p^m$，其中对于所有 i， $a_m \neq 0$ 且 $0 \leq a_i < p$。

若 $|\Omega| = n = p$，则由上面证明的结果（*R），结论成立。现在假设 $n > p$，并对 n进行归纳。令 $n' = n - p^m$，并令 $Q \in \mathrm{Syl}_p(S_{\Omega \setminus \Omega_m})$。显然， $|\Omega \setminus \Omega_m| = n'$. 根据引理 2.7，我们有 $P_m \times Q \in \mathrm{Syl}_p(S_n)$。再次利用共轭性，不妨设 $P = P_m \times Q$。如果某个 $c_i \in \Omega_m$，则由（*R）可得结论。如果对于所有 $1 \leq i \leq p$都有 $c_i \in \Omega \setminus \Omega_m$，那么关于 n' 的归纳假设表明，存在一个 p-循环 $\beta \in Q$，使得 β 移动集合 $\{c_1, \cdots, c_p\}$中的某个点。□

接下来，我们根据 S_4 考虑交错群的 Sylow 2-子群。按记号 2.1 回忆 $\Omega_1 = \{1, 2\}$、$\Omega_{1,1} = \{3, 4\}$、$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ 以及 $P_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$。容易算出 $P_2 = \{\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$，它恰好是 S_4的一个 Sylow 2-子群。

引理 4.2. 设 $p = 2$、 $\alpha \in A_n$ 与 $P \in \mathrm{Syl}_2(S_n)$ 满足 $P_2 \leq P$。若 $(P \cap A_n)\alpha$ 中的每个元素都是2-元，则 $P_2\alpha$ 中的每个元素都是2-元。

证明。用 $i^{\langle \alpha \rangle}$ 表示包含 i 的一个 $\langle \alpha \rangle$-轨道。设 $T = \cup_{i=1}^{4} i^{\langle \alpha \rangle}$。则$\alpha|_T \in S_T$、$\alpha|_{\Omega \setminus T} \in S_{\Omega \setminus T}$ 与 $\alpha = \alpha|_T \cdot \alpha|_{\Omega \setminus T}$。任取 $g \in P_2$，我们有$g\alpha = (g\alpha|_T) \cdot (\alpha|_{\Omega \setminus T})$。由于 $\alpha|_{\Omega \setminus T}$是 2-元， $g\alpha$ 是 2-元当且仅当$g\alpha|_T$ 是 2-元。因此，只需证明 $P_2(\alpha|_T)$ 的每个元素都是 2-元。显然， $P_2 \cap A_n = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 在 Ω_2 上传递地作用。注意， T 是至多 4 个互异的 $\langle \alpha \rangle$-轨道的并。

情形 1. Ω_2 中的每个元素都分别属于 $\langle \alpha \rangle$-轨道，即 T 有 4 个轨道。

设 $i \in \Omega_2$ 和 $|i^{\langle \alpha \rangle}| = l_i$。由于 α 是一个 2-元，我们不妨设 $l_i = 2^{t_i}$，其中 $t_i \in \mathbb{N}$。注意 $i^{\langle \alpha \rangle} = \{i, i^\alpha, \ldots, i^{\alpha^{l_i - 1}}\}$。由于对所有 $i \in \Omega_2$，(12)(34) 固定集合 $i^{\langle \alpha \rangle} \setminus \{i\}$ 中的任意点，因此有 $(12)(34)\alpha|_T = (1^\alpha, \ldots, 1^{\alpha^{l_1 - 1}}, 1, 2^\alpha, \ldots, 2^{\alpha^{l_2 - 1}}, 2)(3^\alpha, \ldots, 3^{\alpha^{l_3 - 1}}, 3, 4^\alpha, \ldots, 4^{\alpha^{l_4 - 1}}, 4)$。因此， $1^{\langle \alpha \rangle} \sqcup 2^{\langle \alpha \rangle}$和 $3^{\langle \alpha \rangle} \sqcup 4^{\langle \alpha \rangle}$ 是 $\langle (12)(34)\alpha \rangle$的轨道。由于 $(12)(34)\alpha \in (P_2 \cap A_n)\alpha$，$(12)(34)\alpha$是一个 2-元，因此 $l_1 + l_2 = 2^t$ 和 $l_3 + l_4 = 2^{t'}$，其中 $t, t' \in \mathbb{Z}^+$。它

可得 $2^{t_1}+2^{t_2}=2^t$ 和 $2^{t_3}+2^{t_4}=2^{t'}$。由引理 2.9，$l_1=l_2$ 和$l_3=l_4$。对 (13)(24)α 作类似讨论，可得 $l_1=l_3$ 和 $l_2=l_4$。因此，$l_1=l_2=l_3=l_4$是 2 的幂，设为 2^t。注意 $P_2=$ {id、(12)、(34)、(12)(34)、(13)(24)、(14)(23)、(1324)、(1423)}。容易验证，对每个 $g\in P_2$，$\langle g\alpha|_T\rangle$ 的轨道大小为 2^t、2^{t+1}或 2^{t+2}，因此 $P_2(\alpha|_T)$ 的所有元素都是 2-元。

情形 2. Ω 中恰有三个点属于同一个 $\langle\alpha\rangle$-轨道。

设 T_1 和 T_2 是两个 $\langle\alpha\rangle$-轨道，满足 $|T_1\cap\Omega_2|=3$ 和 $|T_2\cap\Omega_2|=1$。现在令 $T_1\cap\Omega_2=\{i_1,i_2,i_3\}$ 和 $T_2\cap\Omega_2=\{i_4\}$。于是 $\Omega_2=\{i_1,i_2,i_3,i_4\}$。存在正整数 k_1, k_2，满足 $0<k_1,k_2<|T_1|$，使得 $i_1^{\alpha^{k_1}}=i_2$ 和 $i_1^{\alpha^{k_2}}=i_3$。不失一般性，假设 $k_2>k_1$。令 $l_1=k_1$、$l_2=k_2-k_1$、$l_3=|T_1|-k_2$ 和 $l_4=|T_2|$。于是我们有

$$\alpha|_T=(i_1\ i_1^{\alpha},\dots,i_1^{\alpha^{l_1-1}}\ i_2\ i_2^{\alpha}\ \dots\ i_2^{\alpha^{l_2-1}}\ i_3\ i_3^{\alpha}\ \dots\ i_3^{\alpha^{l_3-1}})(i_4\ i_4^{\alpha}\ \dots\ i_4^{\alpha^{l_4-1}}).$$

由此可得

$$(i_1i_2)(i_3i_4)\alpha|_T=(i_4\ i_3^{\alpha}\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}}\ i_1\ i_2^{\alpha}\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}}\ i_3\ i_4^{\alpha}\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}})(i_2\ i_1^{\alpha}\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}}),$$

$$(i_1i_3)(i_2i_4)\alpha|_T=(i_3\ i_1^{\alpha}\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}}\ i_2\ i_4^{\alpha}\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}}\ i_4\ i_2^{\alpha}\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}})(i_1\ i_3^{\alpha}\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}}),$$

$$(i_1i_4)(i_2i_3)\alpha|_T=(i_1\ i_4^{\alpha}\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}}\ i_4\ i_1^{\alpha}\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}}\ i_2\ i_3^{\alpha}\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}})(i_3\ i_2^{\alpha}\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}}).$$

由于 $(P_2\cap A_n)\alpha$ 中的每个元素都是一个 2-元，因此 $(P_2\cap A_n)\alpha$ 中每个元素的轨道长度都是 2 的幂。根据上述四个置换的循环结构，可得方程

$$\text{(E1)}\qquad l_1+l_2+l_3=2^{s_4},\ l_4=2^{t_4},$$

$$\text{(E2)}\qquad l_2+l_3+l_4=2^{s_1},\ l_1=2^{t_1},$$

$$\text{(E3)}\qquad l_1+l_2+l_4=2^{s_3},\ l_3=2^{t_3},$$

$$\text{(E4)}\qquad l_1+l_3+l_4=2^{s_2},\ l_2=2^{t_2},$$

对于某些 $s_i\in\mathbb{Z}^+$、$t_i\in\mathbb{N}$，其中 $1\le i\le 4$。由方程 (E1)、(E2) 可得 $l_1-l_4=2^{s_4}-2^{s_1}=2^{t_1}-2^{t_4}$，这意味着 $2^{s_1}(2^{s_4-s_1}-1)=2^{t_4}(2^{t_1-t_4}-1)$。如果 $s_4\neq s_1$，那么 $s_1=t_4$。因此方程 (E2) 变为 $l_2+l_3+l_4=l_4$，从而$l_2=l_3=0$，矛盾。如果 $s_4=s_1$，同理，由方程 (E1)、(E3) 以及 (E1)、(E4)，我们分别得到 $s_4=s_3$ 和 $s_4=s_2$。因此 $s_1=s_2=s_3=s_4$。分别计算从 (E1) 到 (E4) 左边和右边的和，得到 $3(l_1+l_2+l_3+l_4)=4\cdot 2^{s_4}$，这产生矛盾。因此，情形 2 不可能成立。

情形 3. Ω_2 中的四个元素位于三个不同的 $\langle\alpha\rangle$-轨道中，即 T 有 3 个轨道。

设 T_1、T_2和 T_3 是三个不同的 $\langle\alpha\rangle$-轨道，并设 $T_1\cap\Omega_2=\{i_1,i_2\}$、$T_2\cap\Omega_2=\{i_3\}$ 和 $T_3\cap\Omega_2=\{i_4\}$。与情形 2 一样，我们可以得到

$$\text{(*13)}\qquad \alpha|_T=(i_1\ i_1^{\alpha}\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}}\ i_2\ i_2^{\alpha}\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}})(\ i_3\ i_3^{\alpha}\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}})(i_4\ i_4^{\alpha}\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}}).$$

其中 $l_1+l_2=|T_1|$、$l_3=|T_2|$ 和 $l_4=|T_3|$。于是

(*14)

$$(i_1i_2)(i_3i_4)\alpha|_T=(i_1i_2^{\alpha}\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}})(i_2i_1^{\alpha}\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}})(i_3i_4^{\alpha}\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}}i_4\ i_3^{\alpha}\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}}),$$

$$(i_1i_3)(i_2i_4)\alpha|_T=(i_3\ i_1^{\alpha}\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}}\ i_2\ i_4^{\alpha}\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}}\ i_4\ i_2^{\alpha}\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}}\ i_1\ i_3^{\alpha}\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}}).$$

由于 $(P_2\cap A_n)\alpha$ 中的每个元素都是一个 2-元，我们得到方程 $l_1+l_2=2^{s_1}$，$l_3+l_4=2^{s_2}$，$l_i=2^{t_i}$ $(1\le i\le 4)$ 以及 $l_1+l_2+l_3+l_4=2^s$，其中 s_1，s_2，$s\in\mathbb{Z}^+$，且 $t_i\in\mathbb{N}$ 满足 $1\le i\le 4$。由引理 2.9，我们得到 $l_1=l_2=l_3=l_4.$。记 $l:=l_1$，并对 $j=1$，2 记 $K_j:=\{i_j^{\alpha^k}|1\le k\le l\}$，$K_3:=T_2$，$K_4:=T_3$。注意到 $(T_1\cap\Omega_2)\sqcup(T_2\cap\Omega_2)\sqcup(T_3\cap\Omega_2)=\Omega_2=\Omega_1\sqcup\Omega_{1,1}$。我们断言

(*C): $T_1\cap\Omega_2=\Omega_1$ or $T_1\cap\Omega_2=\Omega_{1,1}$.

否则，$|T_1\cap\Omega_1|=1$ 且 $|T_1\cap\Omega_{1,1}|=1$. 不失一般性，我们可以假设 $T_1\cap\Omega_1=\{i_1\}$, $T_1\cap\Omega_{1,1}=\{i_2\}$, $T_2\cap\Omega_1=\{i_3\}$，且 $T_3\cap\Omega_{1,1}=\{i_4\}$。于是 $(i_1i_3)=(1\ 2)\in P_2$ 且 $(i_2i_4)=(3\ 4)\in P_2.$。由于 α 是偶置换，而 $\alpha|_T$ 是奇置换，因此 $\alpha|_{\Omega\setminus T}\neq\mathrm{id}$，进而 $|\Omega\setminus T|>1$。根据引理 4.1，存在一个 2-循环 $\beta\in P$，使得 β 在 $\Omega\setminus T$ 中移动某个点。令 $\beta=(j_1j_2)$，其中 $j_1\in\Omega\setminus T$。因此，

$$(i_1i_3)(j_1j_2),\ (i_2i_4)(j_1j_2)\in P\cap A_n. \tag{*15}$$

由于 $T=\sqcup_{i=1}^4K_j$，我们有 $j_2\notin T$ 或 j_2 属于某个 K_j，因此 $j_2\notin K_1\sqcup K_2$ 或 $j_2\notin K_3\sqcup K_4$。现在据此分两种情形讨论。

(I). $j_2\notin K_1\sqcup K_2$。那么存在 $u\in\{3,4\}$ 使得 $j_2\notin K_u$。若 $u=3$，则有 $(i_1i_3)(j_1j_2)\alpha|_{\bigsqcup_{i=1}^3K_i}=(i_3i_1^\alpha\dots i_1^{\alpha^{l-1}}i_2i_2^\alpha\dots i_2^{\alpha^{l-1}}i_1i_3^\alpha\dots i_3^{\alpha^{l-1}})$。因此，$\sqcup_{i=1}^3K_i$ 是 $\langle(i_1i_3)(j_1j_2)\alpha\rangle$ 的一个轨道，且 $|(\sqcup_{i=1}^3K_i)\cap\Omega_2|=3$。注意，$(P\cap A_n)(i_1i_3)(j_1j_2)\alpha$ 中的所有元素都是 2-元，因为由 (*15) 得 $(i_1i_3)(j_1j_2)\in P\cap A_n$。根据情形 2，这是不可能的。同理，若 $u=4$，则 $(i_2i_4)(j_1j_2)\alpha|_{K_1\sqcup K_2\sqcup K_4}=(i_1i_1^\alpha\dots i_1^{\alpha^{l-1}}i_2i_4^\alpha\dots i_4^{\alpha^{l-1}}i_4i_2^\alpha\dots i_2^{\alpha^{l-1}})$，因此 $K_1\sqcup K_2\sqcup K_4$ 是 $\langle(i_2i_4)(j_1j_2)\alpha\rangle$的一个轨道，根据情形 2，这也不可能。

(II). $j_2\notin K_3\sqcup K_4$. 令 $\alpha_0=(i_1,i_2)(i_3,i_4)\alpha$。由于 $(i_1i_2)(i_3i_4)\in P_2\cap A_n\subseteq P\cap A_n$，因此 $(P\cap A_n)\alpha_0$ 中的所有元素都是 2-元。根据 (*14) 中 α_0 的循环结构，我们有 K_1、K_2 和 $K_3\sqcup K_4$ 是 $\langle\alpha_0\rangle$ 的轨道。注意，$|(K_3\sqcup K_4)\cap\Omega_1|=1$，$|(K_3\sqcup K_4)\cap\Omega_{1,1}|=1$，以及 $j_2\notin K_3\sqcup K_4$。令 $T_1':=K_3\sqcup K_4$、$K_1':=K_3$ 和 $K_2':=K_4$。条件 $|T_1'\cap\Omega_1|=|T_1'\cap\Omega_{1,1}|=1$ 以及 $j_2\notin K_1'\sqcup K_2'$ 迫使我们回到情形 (I)，这是不可能的。因此，(*C) 得证。

因此，(*C) 蕴含 $T_1\cap\Omega_2=\{i_1,i_2\}=\Omega_1$ 或 $\Omega_{1,1}$，并且根据 (*13) 直接计算可知，陪集 $P_2(\alpha|_T)$ 中的每个元素都是 2-元。

情形 4. Ω_2 的四个元素分成两对，每一对都位于一个 $\langle\alpha\rangle$-轨道中。

T_1 和 T_2 是 $\langle\alpha\rangle$的两个不同轨道，且令 $T_1\cap\Omega_2=\{i_1,i_2\}$ 和 $T_2\cap\Omega_2=\{i_3,i_4\}$。与前几种情形一样，假设 $\alpha|_T=(i_1i_1^\alpha\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}}i_2i_2^\alpha\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}})(i_3i_3^\alpha\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}}i_4i_4^\alpha\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}})$，其中 $l_1+l_2=|T_1|$ 和 $l_3+l_4=|T_2|$。则 $(i_1i_2)(i_3i_4)\alpha|_T=(i_2i_1^\alpha\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}})(i_1i_2^\alpha\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}})(i_4i_3^\alpha\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}})(i_3i_4^\alpha\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}})$。注意，$(P\cap A_n)(i_1i_2)(i_3i_4)\alpha$ 中的所有元素都是 2-元，并且 Ω_2 的每个元素都属于 $\langle(i_1i_2)(i_3i_4)\alpha\rangle$的不同轨道。因此，这实际上是情形 1，故结论成立。

情形 5. Ω_2 中的所有元素都位于同一个 $\langle\alpha\rangle$-轨道中。

设 T 是 $\langle\alpha\rangle$ 与 $\Omega_2\subseteq T$ 的一条轨道，并设 $\alpha|_T=(i_1i_1^\alpha\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}}i_2i_2^\alpha\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}}i_3i_3^\alpha\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}}i_4i_4^\alpha\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}})$，其中 $\{i_1,i_2,i_3,i_4\}=\Omega_2$。于是，$(i_1i_4)(i_2i_3)\alpha|_T=(i_4i_1^\alpha\dots i_1^{\alpha^{l_1-1}}i_2i_3^\alpha\dots i_3^{\alpha^{l_3-1}})(i_3i_2^\alpha\dots i_2^{\alpha^{l_2-1}})(i_1i_4^\alpha\dots i_4^{\alpha^{l_4-1}})$。因此，这一情形实际上就是情形 3，从而结论成立。 □

引理4.3。设 $\alpha \in A_n$ 与 $P \in$ 西罗$_p(S_n)$。若 $(P \cap A_n)\alpha$ 的每个元素都是 p-元素，则 $P\alpha$ 的每个元素都是 p-元素。

证明。若 $p > 2$，则 $P \cap A_n = P$。因此，结论立即由定理3.9得出。接下来，我们考虑 $p = 2$ 的情形。只需证明 $(P \setminus (P \cap A_n))\alpha$ 中的每个元素都是一个 2-元。由引理 2.8，我们不妨设 $P_2 \leq P$。任取一个奇置换 $g \in P$。由于 (1 2) $\in P_2$，我们有 (1 2)$g \in P \cap A_n$。因此，$(P \cap A_n)$(1 2)$g\alpha$ 中的每个元素都是一个 2-元。引理 4.2 表明，P_2(1,2)$g\alpha$ 中的所有元素都是 2-元，因此 $g\alpha$ 是一个 2-元。由于 g 是 P 中任意一个奇置换，$(P\setminus(P\cap A_n))\alpha$ 中的每个元素都是一个 2-元。□

最后，我们应用定理3.9和引理4.3，即可立即得到以下结果。

定理4.4。设 $\alpha \in A_n$ 和 $P \in \mathrm{Syl}_p(A_n)$。如果 $P\alpha$ 中的所有元素都是 p-元素，那么 $\alpha \in P$。

References

[1] Kundu R., Mishra S.C., 关于 M. Pellegrini 和 P. Shumyatsky 猜想的反例。Ricerche mat，73 (2024)，2541–2547。

[2] 99 1967 26 27 Thompson J.G.，关

[3] 于 L.J. Paige 的一个问题，Math. Z.，( )，– Goldstein D., Guralnick R.，Sylow p-子群陪集与 Richard Taylor 的一个问题，J. Algebra，398 (2014)，569–573。[4] Conder, M. D. E.，对 Zappa 于 1962 年提出的关于 Sylow 子群陪集的问题的回答。Adv. Math.，313 (2017)，167–175。[5] Gorenstein D.，*Finite Groups*，第2版，Chelsea Publishing Company，纽约，1980。[6] Dixon J.D., Mortimer B.，*Permutation Groups*，数学研究生教材，第163卷，Springer-Verlag，柏林，1996。[7] Zappa G.，有限群的 Sylow 子群陪集问题，Arch. Math.，13 (1962)，169–173。

Ru Zhang. Department of Mathematics, Hubei Minzu University, Enshi, Hubei Province, 445000, P. R. China.

Email address: ruzhang2024@hotmail.com

Rulin Shen. Department of Mathematics, Hubei Minzu University, Enshi, Hubei Province, 445000, P. R. China.

Email address: shenrulin@hotmail.com