arXiv:2603.09388v1 [math.CA] 10 Mar 2026

变指数勒贝格空间上的极大算子：一个 A_∞-刻画

ANDREI K. LERNER

Abstract. 本文为变指数空间 $L^{p(\cdot)}$上的极大算子 M 给出了一个新的有界性判据。该判据以著名加权 A_∞ 条件的变指数类比形式表述。

1. Introduction

设 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty]$ 为可测函数。记 $L^{p(\cdot)}$ 为由 f 上的实值可测函数组成的空间，其中 $\mathbb{R}^n$ 满足

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}}:=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^n}\Big(|f(x)|/\lambda\Big)^{p(x)}dx\le 1\right\}<\infty.$$

给定一个立方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$ 和一个局部可积函数 f，记$\langle f\rangle_Q:=\frac{1}{|Q|}\int_Q f$。考虑由下式定义的 Hardy–Littlewood 极大算子 M:

$$Mf(x):=\sup_{Q\ni x}\langle|f|\rangle_Q,$$

其中，上确界取遍所有包含点 x 的立方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$ 。

令 $\mathcal{P}$ 表示满足下列条件的所有指数 $p(\cdot$: M 在 $L^{p(\cdot)}$上有界。许多文献研究过这一类；例如，近期论文 [1, 11]以及专著 [2, 4],都提供了研究动机和详尽的历史回顾。

给定一族两两不相交的立方体 $\mathcal{F}$ 和一个局部可积函数 f，定义平均算子 $T_{\mathcal{F}}$ 如下:

$$T_{\mathcal{F}}f:=\sum_{Q\in F}\langle f\rangle_Q\chi_Q.$$

我们称指数 $p(\cdot)$ 满足条件 $\mathcal{A}$ ，如果 $T_{\mathcal{F}}$ 在 $L^{p(\cdot)}$ 上对 $\mathcal{F}$ 一致有界。由于 $|T_{\mathcal{F}}f|\le Mf$，我们显然

2020 数学学科分类号。 42B25, 46E30.关键词和短语。极大算子、变指数勒贝格空间、 A_∞条件。作者获得了 ISF 项目资助，项目编号为 1035/21。1

有 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{A}$。一个深刻得多的逆蕴涵由 Diening 建立 [3]，他证明了如下结果。

定理 1.1 ([3])。设 $p_- > 1$ 且 $p_+ < \infty$[1]。那么 $p(\cdot) \in \mathcal{P}$ 当且仅当 $p(\cdot) \in \mathcal{A}$。

我们称 $p(\cdot)$ 满足 $A_{p(\cdot)}$ 条件，若存在常数$C > 0$，使得对每个立方体 Q 及任意局部可积函数 f,

$$\langle f\rangle_Q \|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \le C\|f\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

这个条件比 $\mathcal{A}$ 弱，因为它对应于 $\mathcal{A}$ 的定义中一个族 $\mathcal{F}$ 仅由一个立方体构成的情形。

如果我们考虑加权 $L^p(w)$-范数，而不是 $L^{p(\cdot)}$-范数，那么 $A_{p(\cdot)}$ 条件恰好化为通常的穆肯豪普特 A_p条件[2]，，该条件是M 在 $L^p(w)$ 上的有界性的充要条件。相反，定理 $\mathcal{A}$ 中的条件 1.1 不能替换为 $A_{p(\cdot)}$ 条件；相关反例见 [2,例 4。51], [4, 定理 5.3。4], 以及 [8]。

后来， [7, 9] 注意到， $A_{p(\cdot)}$ 条件决定了 $L^{p(\cdot)}$ 上 M 的局部有界性（即在紧集上的有界性）。这一观察促使人们尝试将定理 1.1 中的条件 $\mathcal{A}$ 替换为形如 $A_{p(\cdot)} \cap B$的条件，其中 B 控制 p（·）在无穷远处的行为。特别地，有一个关于 p（·）$\in \mathcal{P}$ 的充分条件，其形式为 $A_{p(\cdot)}\cap\mathcal{N}$（参见 [2, 定理 4.52]； [1] 则将其推广到了无界指数的情形），其中 $\mathcal{N}$ 是 Nekvinda [13]提出的积分衰减条件。在 [11]中，人们得到了一个必要且充分条件，其中 $\mathcal{N}$ 被一个更复杂的条件 $\mathcal{U}_\infty$所取代。

尽管取得了上述进展，目前已知的刻画类 $\mathcal{P}$的两个条件，即 $\mathcal{A}$ 和 $A_{p(\cdot)}\cap\mathcal{U}_\infty$，都不易验证。因此，人们开始寻求新的、可能更简单的刻画。

我们的主要结果是朝着这一目标迈出的一步。它可以看作是对条件 $\mathcal{A}$ 的某种简化；与此同时，它完全绕过了 $A_{p(\cdot)}$ 条件。

这一结果的灵感源自权重理论中的一个著名事实（例如，参见 [5, Ex. 7.3.3]）：权重 w 属于 A_p，当且仅当 w 和 $\sigma := w^{-\frac{1}{p-1}}$ 都属于 A_∞。注意，$L^{p'}(\sigma)$ 是 $L^p(w)$ 的对偶空间。因此， σ 被称为 w 的对偶权重。

[1]我们使用标准记号 p_-：$=$本性下确界 p 以及 p_+：$=$本性上确界 p。[2]我们在此不回顾 A_p 权理论中的主要定义，并请读者参阅 [5, 第 7] 章。

现在我们来定义 A_∞ 条件的变指数类比。

定义 1.2. 我们称 $p(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$，如果存在 $\lambda \in (0,1)$ 和$C > 0$，使得对于任意一族 $\mathcal{F}$ 两两不相交的立方体、任意非负序列 $\{t_Q\}_{Q\in\mathcal{F}}$，以及任意子集 $E_Q \subset Q, Q \in \mathcal{F}$，满足$|E_Q| \geq \lambda|Q|$,

$$\|\sum_{Q\in\mathcal{F}} t_Q\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C\|\sum_{Q\in\mathcal{F}} t_Q\chi_{E_Q}\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

Diening 给出了类似的定义 [3]：在 [3]中，假设对每个 $\lambda \in (0,1)$，都存在 $C > 0$ 使上述不等式成立；而这里我们只要求存在 $\lambda \in (0,1)$ 和$C > 0$。

加权对偶关系 $(L^p(w))' = L^{p'}(\sigma)$ 的变指数类比为 $(L^{p(\cdot)})' = L^{p'(\cdot)}$（例如参见 [4, 第 78] 页），其中$p'(x) := \frac{p(x)}{p(x)-1}$。

现在，我们的主要结果如下。

定理 1.3。假设 $p_- > 1$ 和 $p_+ < \infty$。那么 $p(\cdot) \in \mathcal{P}$ 当且仅当 $p(\cdot)$ $p'(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$。

该定理的必要性部分是显然的。事实上，设 $\mathcal{F}$ 是一个两两不相交的立方体族。令 $E_Q \subset Q, |E_Q| \geq \lambda|Q|$对 $Q \in \mathcal{F}$成立。定义 $\varphi := \sum_{Q\in\mathcal{F}} t_Q\chi_{E_Q}$。则

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}} t_Q\chi_Q \leq \frac{1}{\lambda}T_{\mathcal{F}}\varphi.$$

由此，由于 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{A}$，我们得到 $p(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$。由于算子$T_{\mathcal{F}}$ 是自伴的，条件 $\mathcal{A}$ 也意味着 $T_{\mathcal{F}}$ 在 $L^{p'}(\cdot)$上有界，因此 $p'(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$。因此，定理 1.3 中的条件 $p(\cdot)$ $p'(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$可以视为对 $\mathcal{A}$作用于上述形式的初等函数 φ 的检验条件。

定理 1.3 的充分性部分更为复杂，其依据是 [12]中的一项最新结果。为了对其进行表述，我们引入λ-中位数极大算子 m_λ，其定义在 $\lambda \in (0,1)$ 上如下:

$$m_\lambda f(x) := \sup_{Q\ni x}(f\chi_Q)^*(\lambda|Q|),$$

其中，上确界取遍所有包含点 x 的立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$，而 f^* 表示 f 的非增重排。

根据切比雪夫不等式，$(f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \leq \frac{1}{\lambda}\langle|f|\rangle_Q$，这表明一般而言，$m_\lambda f$小于 Mf。然而，我们有以下结果。

定理 1.4 ([12])。 设 X 是一个巴拿赫函数空间，具有以下性质：对每个 $r \geq 1$，*Hardy–Littlewood* 极大算子M 在 $X^{1/r}$ 上有界，当且仅当 M 在 $(X^{1/r})'$上有界。则以下命题等价：

(i) M 在 X 上有界，并且在 X'上有界；*(ii)* 对于某个 $\lambda \in (0, 1)$， m_λ 在 X 上有界，并且在 X' 上有界。

这里， $\|f\|_{X^{1/r}} := \||f|^r\|_X^{1/r}$， X' 表示 X的伴随空间。现在注意到，根据定理 1.1可立即推出：如果 $p_- > 1$ 和 $p_+ < \infty$，那么 M 在 $L^{p(\cdot)}$ 上有界，当且仅当 M 在 $L^{p'(\cdot)}$上有界（因为算子 $T_{\mathcal{F}}$ 是自伴的）。这一结果的另一种证明也可见于 [10]。因此，在定理 1.4 中取 $X = L^{p(\cdot)}$，令 $p_- > 1$且 $p_+ < \infty$，再注意到 $(L^{p(\cdot)})^{1/r} = L^{rp(\cdot)}$，可知定理 1.4的假设得到满足。因此，为了证明 M 在 $L^{p(\cdot)}$ 上有界，只需证明对于某个$\lambda \in (0, 1)$， m_λ 在 $L^{p(\cdot)}$ 上有界，并且在 $L^{p'(\cdot)}$ 上有界。

考虑到上述讨论，定理 1.3 的充分性部分是定理 1.4 及以下结果的推论，下面将证明该结果。

定理 1.5。 假设 $p_- \geq 1$ 和 $p_+ < \infty$。那么 $p(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$ 当且仅当存在 $t \in (0,1)$ 使得 m_t 在 $L^{p(\cdot)}$上有界。

在此陈述中，我们允许 $p_- = 1$ 的可能性。这反映了算子 m_λ 与 M 不同，它在 $L^1(\mathbb{R})$ 上有界。注意， m_λ 在 L^∞ 上也显然有界。然而，在我们的证明方法中，假设 $p_+ < \infty$ 至关重要。

总之，我们注意到，定理 1.1在 [3] 中的证明相当复杂。现在我们看到，也可以用另一种方式得到这一结果。事实上，结合定理 1.4、1.5，以及以下事实： M 在 $L^{p(\cdot)}$ 上有界，当且仅当 M 在 $L^{p'_{(\cdot)}}$上有界。（如上所述，这可由定理 1.1推出，但也可以像 [10]那样独立证明。）我们并不认为这种方法明显更简单；相反，它为定理1.1提供了另一种视角。

本文结构安排如下。第 2 节汇总一些标准结果。第 3 节中，我们证明一个本质上已为人所知的结果，该结果可见于 [10]。由于这是证明定理1.5所需的主要技术工具，为方便读者，我们在此给出大部分论证。定理 1.5 的证明见第 4 节。

2. Preliminaries

本节汇总若干后文将用到的标准结果。

对于立方体 Q 上的可测函数 f 以及 $\lambda \in (0,1)$，非增重排定义为

$$(f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) := \inf\{\alpha > 0 : |\{x \in Q : |f(x)| > \alpha\}| \le \lambda|Q|\}.$$

由此定义可得

$$|\{x \in Q : |f(x)| > f^*(\lambda|Q|)\}| \le \lambda|Q|$$

and

$$|\{x \in Q : |f(x)| \ge f^*(\lambda|Q|)\}| \ge \lambda|Q|.$$

此外，等式

$$\{x \in \mathbb{R}^n : m_\lambda f(x) > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n : M\chi_{\{|f|>\alpha\}}(x) > \lambda\} \tag{2.1}$$

是该定义的直接推论。

对于一个正测度可测集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 以及一个变指数 $p(\cdot)$，记 $p_-(\Omega) := $ 本质下确界$_\Omega\, p$，以及 $p_+(\Omega) := $ 本质上确界$_\Omega\, p$。记 $\varrho(f) := \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx$。以下结论可见 [2, 第 25]页。

命题 2.1。假设 $p_+(\Omega) < \infty$。若 $\|f\chi_\Omega\|_{L^{p(\cdot)}} > 1$，则

$$\varrho(f)^{1/p_+(\Omega)} \le \|f\chi_\Omega\|_{L^{p(\cdot)}} \le \varrho(f)^{1/p_-(\Omega)}.$$

若 $\|f\chi_\Omega\|_{L^{p(\cdot)}} \le 1$，则

$$\varrho(f)^{1/p_-(\Omega)} \le \|f\chi_\Omega\|_{L^{p(\cdot)}} \le \varrho(f)^{1/p_+(\Omega)}.$$

我们将使用以下结果，它是 Besikovitch–Morse 覆盖定理的直接推论（参见 [6, 第 6] 页）。

定理 2.2。设 $r \in (0,1)$，且 $A \subset \mathbb{R}^n$ 有界。对于每个$x \in A$，选取一个立方体 Q_x 使得 $x \in rQ_x$。则可以从覆盖 $\{Q_x\}_{x\in A}$ 中抽取出 A 的一个子覆盖 $\{Q_j\}$，即 $A \subset \cup_j Q_j$，使得存在 $N = N(n,r) \in \mathbb{N}$，令族 $\{Q_j\}$ 可划分为 N 个由两两不相交的立方体构成的子族。

3. 关于 A∞ 条件

用 $\mathcal{Q}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有边平行于坐标轴的立方体的集合。本节将证明以下结果。

定理 3.1. 假设 $p(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$。那么存在 $\eta, \delta \in (0, 1)$ 以及一个函数 $b : Q \to [0, 1]$，使得对于每个立方体 Q 及任意满足 $|E_Q| \geq \eta|Q|$ 的可测子集 $E_Q \subset Q$，对所有 $t \in \big(0, 1/\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}\big]$，我们都有

$$\int_Q t^{p(x)} dx \leq 2\Big(\int_{E_Q} t^{p(x)} dx + t^\delta b(Q)\chi_{(0,1)}(t)\Big), \tag{3.1}$$

而且，对于每一族两两不相交的立方体 $\mathcal{F}$，$\sum_{Q\in\mathcal{F}} b(Q) \leq 1$ 都成立。

这一结果已隐含在 [10, 引理 41]之中。在那里，作者考虑了加权 $L^{p(\cdot)}(w)$ 空间，并在比 $p(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$更强的假设下证明了该结果。不过，稍作修改，同样的方法也适用于 $p(\cdot) \in \mathcal{A}_\infty$。将 $w = 1$ 代入 [10, 引理 41], ，即可轻松从所得结论推出定理 3.1 。由于我们在此讨论的非加权情形使论证更为简单，而且定理3.1 在推导定理1.5时起着关键作用，下面为方便读者概述主要步骤。

证明中的一个重要环节是以下反向 H¨older 性质。

定义 3.2. 我们称 $p(\cdot) \in RH$，如果存在 $r > 1$和$C > 0$，使得对于任意由两两不相交的立方体组成的族 $\mathcal{S}$ 以及任意非负序列 $\{t_Q\}_{Q\in\mathcal{S}}$,

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}} \int_Q t_Q^{p(x)} dx \leq 1 \Rightarrow \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t_Q^{rp(x)} dx\right)^{1/r} \leq C.$$

Diening 已证明 [3, 定理 5。6] 见 $\mathcal{A}_\infty \Rightarrow RH$。在 [10, 引理 5。1] 中也可以找到一个略为简化的证明。注意，这两篇论文都使用了 $\mathcal{A}_\infty$ 条件，其中 $\lambda = 1/2$ 但证明对任意 $\lambda \in (0,1)$ 都成立，只需作显而易见的修改，具体如下。

对于 $Q \in \mathcal{S}$，记 $v_Q(x) := t_Q^{p(x)}$, $\alpha_Q := \langle v_Q\rangle_Q$，并令

$$\Omega_k(Q) := \Big\{x \in Q : M_Q^d v_Q > \Big(\frac{2^n}{1-\lambda}\Big)^k \alpha_Q\Big\},$$

其中，M_Q^d 表示限制在 Q上的二进极大算子。根据 Calder´on–Zygmund 分解，可将 $\Omega_k(Q)$ 写为 $= \cup_j P_j^k(Q)$，其中 $P_j^k(Q)$ 是两两不相交的立方体。令 $E_j^k(Q) := P_j^k(Q) \setminus \Omega_{k+1}(Q)$，则有 $|E_j^k(Q)| \geq \lambda|P_j^k(Q)|$。因此，根据 $\mathcal{A}_\infty$

将该条件应用于族 $\mathcal{F}:=\{P_j^k(Q)\ Q\in\mathcal{S}\}$，可得

$$\|\sum_{Q\in\mathcal{S}}\sum_j t_Q\chi_{P_j^k(Q)}\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\|\sum_{Q\in\mathcal{S}}\sum_j t_Q\chi_{E_j^k(Q)}\|_{L^{p(\cdot)}},$$

因此，

$$\|\sum_{Q\in\mathcal{S}} t_Q\chi_{\Omega_k(Q)}\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\|\sum_{Q\in\mathcal{S}} t_Q\chi_{\Omega_k(Q)\setminus\Omega_{k+1}(Q)}\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

从这一点起，证明与 [10,引理 5。1]中的证明相同。

引理 3.3. 设 $p(\cdot)\in RH$。则存在 r、$k>1$ 以及一个函数 $b:\mathcal{Q}\to[0,2]$，使得下述结论成立：若 $\int_Q t^{p(x)}dx\le 1$，则

$$|Q|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{rp(x)}dx\right)^{1/r}\le k\Big(\int_Q t^{p(x)}dx+b(Q)\Big), \tag{3.2}$$

并且，此外，$\sum_{Q\in\mathcal{F}}b(Q)\le 2$ 对每一族两两不相交的立方体 $\mathcal{F}$ 成立。

该引理隐含地包含在 Diening 的工作 [3] 中。其显式形式可见于 [10, 引理 5.2]（在那里只需取$w=1$）。我们说明如何定义函数 b。设 $r>1$ 与$C>0$为 RH-性质中的常数。令 $k:=2^{1+\frac{p_+}{p_-}}C$。现在对每个立方体 Q，定义 t_Q 为所有 $t>0$ 的上确界，使得 $\int_Q t^{p(x)}dx\le 1$ 且

$$|Q|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{rp(x)}dx\right)^{1/r}>k\int_Q t^{p(x)}dx.$$

可以证明，对于 $t=t_Q$，后一个不等式取等号，并令

$$b(Q):=|Q|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t_Q^{rp(x)}dx\right)^{1/r}.$$

更多细节请参见 [10, 引理 5.2]。

引理 3.4. 假设 $p(\cdot)\in\mathcal{A}_\infty$。存在 γ、$C>1$ 和 $\varepsilon>0$，使得若

$$t\in\left[\min\left(1,1/\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{1+\varepsilon}\right),\max\left(1,1/\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{1+\varepsilon}\right)\right],$$

then

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\right)^{1/\gamma}\le C\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{p(x)}dx.$$

这是 [10, 引理 5.3] 的一个类似结果。现在论证需要做一些简单的修改，因此我们在下文给出完整证明。

引理的证明 3.4。 首先考虑 $\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}\ge 1$ 的情形。则$t\le 1$。设 $\lambda\in(0,1)$ 是定义 $\mathcal{A}_\infty$ 中的常数。记

$$p_\lambda := (p\chi_Q)^*(\lambda|Q|).$$

只需证明

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\right)^{1/\gamma}\le Ct^{p_\lambda}. \tag{3.3}$$

事实上，令 $E_\lambda := \{x\in Q:\ p(x)\le p_\lambda\}$，则有 $|E_\lambda|\ge(1-\lambda)|Q|$，从而

$$t^{p_\lambda}\le\frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{|Q|}\int_{E_\lambda}t^{p(x)}dx\le\frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{p(x)}dx.$$

我们将用到 $\mathcal{A}_\infty\ \Rightarrow\ RH$。设 $r>1$ 为来自 RH-性质的常数。取 $\gamma\in(1,r)$，并令 $\varepsilon := \frac{r}{\gamma}-1$。我们有

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\right)^{1/\gamma}=\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma(p(x)-p_\lambda)}dx\right)^{1/\gamma}t^{p_\lambda}.$$

其次，由于 $t\in[1/\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{1+\varepsilon},1]$,

$$t^{\gamma(p(x)-p_\lambda)}\le 1+\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{r(p_\lambda-p(x))}, \tag{3.4}$$

这与前面的估计一起蕴含

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\right)^{1/\gamma}\\&\le t^{p_\lambda}\left(1+\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{\frac{r}{\gamma}p_\lambda}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left(\frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}}\right)^{rp(x)}dx\right)^{1/\gamma}\right).\end{aligned}$$

由于 $\int_Q\left(\frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}}\right)^{p(x)}dx\le 1$，$RH$-性质蕴含

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q\left(\frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}}\right)^{rp(x)}dx\le\frac{C}{|Q|^r},$$

因此

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\right)^{1/\gamma}\le Ct^{p_\lambda}\left(1+\left(\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{p_\lambda}/|Q|\right)^{r/\gamma}\right).$$

因此，为了证明（3.3），还需要证明

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{p_\lambda}/|Q|\le C. \tag{3.5}$$

记 $\Omega_\lambda := \{x\in Q:\ p(x)\ge p_\lambda\}$。那么 $|\Omega_\lambda|\ge\lambda|Q|$，因此，由 $\mathcal{A}_\infty$ 条件，

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\|\chi_{\Omega_\lambda}\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

由于 $\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \geq 1$，我们有 $|Q| \geq 1$。若 $|Q| \leq 1/\lambda$，则（3.5）显然成立。假设 $|Q| > 1/\lambda$。那么 $|\Omega_\lambda| \geq 1$，因此 $\|\chi_{\Omega_\lambda}\|_{L^{p(\cdot)}} \geq 1$。由命题2.1，

$$\|\chi_{\Omega_\lambda}\|_{L^{p(\cdot)}} \leq |\Omega_\lambda|^{1/p_-(\Omega_\lambda)} \leq |\Omega_\lambda|^{1/p_\lambda} \leq |Q|^{1/p_\lambda},$$

这就证明了（3.5）。当 $\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \geq 1$ 时，证明完成。

现在假设 $\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1$。那么 $t \geq 1$。证明基本相同，只需将 λ 改为 $1-\lambda$，并交换集合 $E_{1-\lambda}$ 与 $\Omega_{1-\lambda}$ 的角色。

和之前一样，只需证明（3.3），但用 $p_{1-\lambda}$ 代替 p_λ。事实上，由于 $t \geq 1$,

$$t^{p_{1-\lambda}} \leq \frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{|Q|}\int_{\Omega_{1-\lambda}} t^{p(x)}dx \leq \frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{p(x)}dx.$$

接下来，由于 $t \in [1, 1/\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{1+\varepsilon}]$，完全类似于（3.4）的结论（其中 $p_{1-\lambda}$）成立。直到（3.5）为止，证明的其余部分都相同；而我们需要证明的不是（3.5），而是

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{p_{1-\lambda}}/|Q| \leq C. \tag{3.6}$$

由于 $|E_{1-\lambda}| \geq \lambda|Q|$，根据 $\mathcal{A}_\infty$ 条件，

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C\|\chi_{E_{1-\lambda}}\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

接下来，由于 $\|\chi_{E_{1-\lambda}}\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1$，根据命题 2.1，

$$\|\chi_{E_{1-\lambda}}\|_{L^{p(\cdot)}} \leq |E_{1-\lambda}|^{1/p_+(E_{1-\lambda})} \leq |E_{1-\lambda}|^{1/p_{1-\lambda}} \leq |Q|^{1/p_{1-\lambda}},$$

这就证明了（3.6），并完成了证明。 □

定理 *3.1* 的证明。 我们来证明存在 $\gamma > 1$ 和 A，$\delta > 0$使得

$$|Q|\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\Big)^{1/\gamma} \leq A\Big(\int_Q t^{p(x)}dx + t^\delta b(Q)\chi_{(0,1)}(t)\Big) \tag{3.7}$$

对所有 $t \leq 1/\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}$ 均成立。

若 $t \geq 1$，则（3.7）由引理 3.4 得出（因为此时$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1$，因此 $t \in [1, 1/\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}^{1+\varepsilon}]$ 对任意 $\varepsilon > 0$）。因此，假设 $t < 1$。

设 C，γ，ε 为引理 3.4中的常数。设 $A > C$ 其选取将在后文说明。

考虑如下情形:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{p(x)}dx \leq \frac{1}{A}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\Big)^{1/\gamma}. \tag{3.8}$$

则引理3.4 中所声称的不等式不成立，这意味着 $t^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le \frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}}$。因此，由引理3.3，

$$|Q|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\frac{r}{1+\varepsilon}p(x)}dx\right)^{1/r} \le k\Big(\int_Q t^{\frac{1}{1+\varepsilon}p(x)}dx + b(Q)\Big),$$

利用 H¨older 不等式以及（3.8），

$$\begin{aligned}\int_Q t^{\frac{1}{1+\varepsilon}p(x)}dx &\le |Q|\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{p(x)}dx\Big)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\\ &\le \frac{1}{A^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}|Q|\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\Big)^{1/(1+\varepsilon)\gamma}.\end{aligned}$$

现在取 $A := \max\left((2k)^{1+\varepsilon},\ 2C\right)$。然后利用（$1+\varepsilon$）$\gamma = r$ 并结合前面的估计，得到

$$|Q|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\frac{r}{1+\varepsilon}p(x)}dx\right)^{1/r} \le 2kb(Q) \le A^{\frac{1}{1+\varepsilon}}b(Q),$$

这意味着

$$|Q|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{rp(x)}dx\right)^{1/r} \le A^{\frac{1}{1+\varepsilon}}t^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}p_-}b(Q).$$

另一方面，如果（3.8）不成立，则

$$|Q|\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\Big)^{1/\gamma} \le A\int_Q t^{p(x)}dx.$$

利用 $\gamma < r$，由前面的两个估计以及 H¨older 不等式可得

$$|Q|\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\Big)^{1/\gamma} \le A\int_Q t^{p(x)} + A^{\frac{1}{1+\varepsilon}}t^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}p_-}b(Q),$$

由此可得（3.7）。现在取 $\eta \in (0,1)$，使得 $A(1-\eta)^{1/\gamma'} = 1/2$。设 $E \subset Q$ 且 $|E| \ge \eta|Q|$。由 H¨older 不等式，

$$\int_{Q\setminus E} t^{p(x)}dx \le (1-\eta)^{1/\gamma'}|Q|\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q t^{\gamma p(x)}dx\Big)^{1/\gamma}.$$

结合（3.7），可得

$$\int_Q t^{p(x)}dx \le \int_E t^{p(x)}dx + \frac{1}{2}\Big(\int_Q t^{p(x)}dx + t^{\delta}b(Q)\chi_{(0,1)}(t)\Big),$$

由此可得

$$\int_Q t^{p(x)}dx \le 2\Big(\int_E t^{p(x)}dx + t^{\delta}\frac{b(Q)}{2}\chi_{(0,1)}(t)\Big),$$

证明至此完成。 □

4. Proof of Theorem 1.5

使用以下对 m_t 的修改形式会比较方便。对于 $r,\tau\in(0,1)$，定义

$$m_{\tau,r}f(x):=\sup_{rQ\ni x}(f\chi_Q)^*(\tau|Q|),$$

其中，上确界取遍所有满足 $x\in rQ$ 的立方体 Q。

假设 $x\in Q$。那么 $x\in r(Q/r)$。因此，

$$(f\chi_Q)^*(t|Q|)\le(f\chi_{Q/r})^*(tr^n|Q/r|)\le m_{tr^n,r}f(x),$$

于是，对于每个可测的 f 和 $r\in(0,1)$，

$$m_tf(x)\le m_{tr^n,r}f(x). \tag{4.1}$$

定理 1.5 的证明。该定理的充分性部分很容易。事实上，假设 m_t 在 $L^{p(\cdot)}$ 上有界，其中 $t\in(0,1)$。取$\lambda\in(t,1)$。令 $\mathcal{F}$ 为一族两两不相交的立方体。假设$E_Q\subset Q$，$|E_Q|\ge\lambda|Q|$ 对于 $Q\in\mathcal{F}$。由于 $(\chi_{E_Q})^*(t|Q|)=1$，我们有

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}}t_Q\chi_Q\le m_t\Big(\sum_{Q\in F}t_Q\chi_{E_Q}\Big).$$

由此以及 m_t 的有界性，我们得到 $\mathcal{A}_\infty$ 条件。

现在转向必要性部分。设 $p(\cdot)\in\mathcal{A}_\infty$。令$\lambda\in(0,1)$ 为 $\mathcal{A}_\infty$ 条件中的一个常数。接下来，令 $\eta\in(0,1)$ 为定理 3.1中的一个常数。设 $\nu:=\max(\lambda,\eta)$。取 $t\in(\nu,1)$，下面证明 m_t 在 $L^{p(\cdot)}$上有界。

令 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}}=1$。我们的目标是证明存在一个与 f 无关的 $C>0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\big(m_tf(x)\big)^{p(x)}dx\le C. \tag{4.2}$$

不失一般性，可以假设 f 有界且具有紧支撑（否则，我们将下述论证应用于 $\min(|f|,R)\chi_{\{|x|\le R\}}$，然后令 $R\to\infty$）。

取 $r\in(0,1)$，使得 $\nu<tr^n-(1-r^n)$。根据（4.1），只需证明以 $m_{tr^n,r}f$ 代替 m_tf 时的（4.2）。

注意到

$$\|m_{tr^n,r}f\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^\infty}$$

并且，由（2.1），

$$\operatorname{supp}(m_{tr^n,r}f)\subset\{M\chi_{\{\operatorname{supp}(f)\}}>tr^n\}.$$

因此，$m_{tr^n,r}f$ 是有界且紧支撑的。

对于稍后将选定的 $\gamma\in(0,1)$，并令 $k\in\mathbb{Z}$ 表示

$$\Omega_k:=\{x\in\mathbb{R}^n:m_{tr^n,r}f(x)>\gamma^k\}.$$

Then

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_{tr^n,r}f(x)^{p(x)}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_{k+1}\setminus\Omega_k} m_{tr^n,r}f(x)^{p(x)}dx \tag{4.3}$$
$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_{k+1}} \gamma^{kp(x)}dx \le (1/\gamma)^{p_+}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx.$$

因此，要完成证明，只需证明

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx \le C \tag{4.4}$$

对某个万有的 $C>0$。我们首先证明该级数收敛。事实上，（4.3）中的论证可以反过来，并且由于 $m_{tr^n,\ r}f$ 有界且紧支撑，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx \le C\int_{\mathbb{R}^n} m_{tr^n,r}f(x)^{p(x)}dx<\infty. \tag{4.5}$$

为证明（4.5），注意到对每一个 $k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx &\le \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}\gamma^{kp(x)}dx+\gamma^{p_-}\int_{\Omega_{k-1}}\gamma^{(k-1)p(x)}dx\\ &\le \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}} m_{tr^n,r}f(x)^{p(x)}dx+\gamma^{p_-}\int_{\Omega_{k-1}}\gamma^{(k-1)p(x)}dx.\end{aligned}$$

由此，对每一个 $M\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(1-\gamma^{p_-})\sum_{k=-M}^{M-1}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx &\le \sum_{k=-M}^{M}\int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}} m_{tr^n,r}f(x)^{p(x)}dx\\ &+\ \gamma^{p_-}\int_{\Omega_{-M-1}}\gamma^{(-M-1)p(x)}dx.\end{aligned}$$

由于 $m_{tr^n,\ r}f$ 有界，$\Omega_k=\emptyset$ 对所有 $k\le -M_0$，对某个 $M_0\in\mathbb{N}$。因此，令 $M\to\infty$ 代入上述估计即得（4.5）。

现在转而证明（4.4）。对每一个 $x\in\Omega_k$，存在一个立方体Q_x 使得 $x\in rQ_x$ 且 $(f\chi_{Q_x})^*(tr^n|Q_x|)>\gamma_k$。将定理 2.2 应用于立方体族 $\{Q_x\}_{x\in\Omega_k}$，我们得到存在$N=N(n,\ r)$ 族两两不相交的立方体 $\{Q^i_{j,k}\}$, $i=1,\ \ldots\ldots,\ N$使得 $\Omega_k\subset\cup_{i=1}^N\cup_j Q^i_{j,\ k}$且 $(f\chi_{Q^i_{j,\ k}})^*(tr^n|Q^i_{j,\ k}|)>\gamma^k$。

记

$$A^i_{k,j}:=\{x\in Q^i_{j,k}:|f(x)|\ge (f\chi_{Q^i_{j,k}})^*(tr^n|Q^i_{j,k}|)\}.$$

于是$|A^i_{k,\ j}| \geq tr^n|Q^i_{j,\ k}| \geq \lambda|Q^i_{j,\ k}|$。因此，根据 $\mathcal{A}_\infty$ 条件，

$$\begin{aligned}&\gamma^k\|\chi_{Q^i_{j,k}}\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C\gamma^k\|\chi_{A^i_{k,j}}\|_{L^{p(\cdot)}}\\&\leq C\|(f\chi_{Q^i_{j,k}})^*(tr^n|Q^i_{j,k}|)\chi_{A^i_{k,j}}\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C\|f\chi_{A^i_{k,j}}\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C.\end{aligned}$$

因此，$\gamma^k/C \in (0, 1/\|\chi_{Q^i_{j,k}}\|_{L^{p(\cdot)}}]$。

接下来,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx &\leq \sum_{i=1}^N\sum_j\int_{Q^i_{j,k}}\gamma^{kp(x)}dx\\&\leq C^{p_+}\sum_{i=1}^N\sum_j\int_{Q^i_{j,k}}(\gamma^k/C)^{p(x)}dx.\end{aligned}$$

记

$$E^i_{k,j} := A^i_{k,j} \cap rQ^i_{j,k}.$$

于是$|E^i_{k,j}| \geq \big(tr^n - (1-r^n)\big)|Q^i_{j,k}| \geq \eta|Q^i_{j,k}|$。接下来，若$x \in E^i_{k,j}$，则 $x \in rQ^i_{j,k}$且$(f\chi_{Q^i_{j,k}})^*(tr^n|Q^i_{j,k}|) > \gamma^k$，这意味着$m_{tr^n,r}f(x) > \gamma^k$。由此，$E^i_{k,j} \subset \Omega_k$。

应用定理3.1 可得

$$\sum_j\int_{Q^i_{j,k}}(\gamma^k/C)^{p(x)}dx \leq 2\Big(\sum_j\int_{E^i_{j,k}}(\gamma^k/C)^{p(x)}dx + (\gamma^k/C)^\delta\chi_{(0,1)}(\gamma^k/C)\Big).$$

此外,

$$\begin{aligned}&\sum_j\int_{E^i_{j,k}}(\gamma^k/C)^{p(x)}dx\\&\leq (1/C)^{p_-}\Big(\int_{\cup_j E^i_{j,k}\setminus\Omega_{k-1}}\gamma^{kp(x)}dx + \int_{\Omega_{k-1}}\gamma^{kp(x)}dx\Big)\\&\leq (1/C)^{p_-}\Big(\int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}|f(x)|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_{k-1}}\gamma^{kp(x)}dx\Big).\end{aligned}$$

结合前面的估计可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx &\leq 2NC^{p_+-p_-}\Big(\int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}|f(x)|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_{k-1}}\gamma^{kp(x)}dx\Big)\\&+ 2NC^{p_+-\delta}\gamma^{k\delta}\chi_{(0,1)}(\gamma^k/C).\end{aligned}$$

最后，我们取 $\gamma \in (0,1)$，使得 $2NC^{p_+-p_-}\gamma^{p_-} = \frac{1}{2}$。于是

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx &\leq 2NC^{p_+-p_-}\int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}|f(x)|^{p(x)}dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_{k-1}}\gamma^{(k-1)p(x)}dx\\&+ 2NC^{p_+-\delta}\gamma^{k\delta}\chi_{(0,1)}(\gamma^k/C).\end{aligned}$$

由此，由于 $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx=1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx &\le 2NC^{p_+-p_-}+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx\\ &+ 2NC^{p_+-\delta}\sum_{k=-k_0}^{\infty}\gamma^{k\delta},\end{aligned}$$

其中 $k_0\in\mathbb{N}$ 仅依赖于 γ 与 C。由于$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k}^{k=-k_0}\gamma^{kp(x)}dx<\infty$，由此可得

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k}\gamma^{kp(x)}dx\le 2\Big(2NC^{p_+-p_-}+2NC^{p_+-\delta}\sum_{k=-k_0}^{\infty}\gamma^{k\delta}\Big),$$

这就证明了（4.4），因此证明完成。 □

References

[1] D. Adamadze、L. Diening与T. Kopaliani，变指数空间上的极大算子，《数学分析及其应用杂志》554（2026），第2期，论文编号129972，21页。[2] D. Cruz-Uribe与A. Fiorenza，变指数勒贝格空间：基础与调和分析。Birkh¨auser/施普林格，海德堡，2013。[3]L. Diening，Musielak–Orlicz空间与广义勒贝格空间上的极大函数，《数学科学通报》129（2005），第8期，657–700。[4] L. Diening、P. Harjulehto、P. H¨ast¨o与M. R˚u˘zi˘cka，具有变指数的勒贝格空间与索伯列夫空间，《数学讲义》第2017卷。施普林格，海德堡，2011。[5] L. Grafakos，经典傅里叶分析。第三版。数学研究生教材，249。施普林格，纽约，2014。xviii+638 页。[6] M. de Guzman，$\mathbb{R}^n$中积分的微分，《数学讲义》481，施普林格出版社，1975。[7] T. Kopaliani，变L^p 空间中的下确界卷积与 Muckenhoupt $A_{p(\cdot)}$ 条件，《数学档案》89（2007），第2期，185–192。[8] T. Kopaliani，关于变指数勒贝格空间中的Muckenhoupt条件，《A. Razmadze数学研究所论文集》148（2008），29—33。[9] A.K. Lerner，关于变 L^p 空间上极大算子的若干问题，《美国数学会会刊》362（2010），第8期，4229–4242。[10] A.K. Lerner，关于加权变L^p 空间上极大算子的一个对偶性质，《当代数学》，693（2017），288–300。[11]A.K. Lerner，变指数勒贝格空间上极大算子的有界性判据，《分析与数学》，待发表。见 https://arxiv.org/abs/2302.02475[12] A.K. Lerner，关于极大算子的一个改进的受限反向弱型估计，预印本。见https://arxiv.org/abs/2601.19272[13] A. Nekvinda，$L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$上的Hardy-Littlewood极大算子，《数学不等式及其应用》7（2004），第2期，255–265。

(A.K.Lerner) Department of Mathematics, Bar-Ilan University, 5290002Ramat Gan, Israel电子邮箱地址: lernera@math.biu.ac.il