arXiv:2603.09406v1 [math.AT] 10 Mar 2026

Szczarba 的扭曲洗牌与有向图的等变路径同调

Xin Fu 和 Shing-Tung Yau

摘要。对于一个标记单纯集合，可以将其与路径链复形联系起来，并将该复形的同调定义为其路径同调，这一做法受到有向图、箭图和带标记范畴的路径同调理论的启发。给定一个带有保持标记和退化 1-单形的单纯群作用的标记单纯集合，以及一个扭曲函数，我们利用盒积定义一个带标记扭曲笛卡尔积。

经典地，Szczarba 扭曲洗牌在扭曲笛卡尔积的链复形与相应的扭曲张量积之间给出一个拟同构。在本文中，我们证明，在带标记的情形下，该映射限制为路径链复形上的链同构。作为应用，对于带有群作用的有向图，我们将一个自然的 Borel 构造作为带标记扭曲笛卡尔积的特例获得。等变路径同调被定义为该构造的同调，并通过一个显式的扭曲张量积进行计算。

1. 引言

近年来，出现了若干种针对有向图的同调理论。Grigor'yan–Lin–Muranov–Yau 提出的 GLMY 路径同调（其上同调方面的前身由 Dimakis–Müller-Hoissen 研究 [2, 3]）是基于容许的有向路径构造的，并且满足同伦不变性、Eilenberg–Steenrod 公理，以及关于盒积的 Künneth 定理（[8, 9, 10]）。另一种理论是 Hepworth 和 Willerton 提出的幅度同调 [13]，它是图不变量幅度的范畴化 [16]。

尽管这两种同调理论是独立发展的，Asao [1] 通过幅度–路径谱序列（或 *MPSS*）将它们联系起来：其 E_1页为幅度同调，而其 E_2页包含路径同调。MPSS 的目标项被 Hepworth 和 Roff [11], 命名为可达性同调，它本身也是一种有向图同调理论。下文中 [12], 将整个 E_2页称为双分次路径同调，并分析其性质。

从标记单纯形的角度来看，Ivanov 和 Pavutnitskiy [15] 通过路径对提出了一种基于路径的同调框架，将 GLMY 路径同调置于更广泛的单纯形背景下，并由此构造出新的同调理论，包括适用于带标记范畴和带标记群的理论。其他进展还包括用于箭图的奇异同调理论 [17]，以及用于有向图的胞腔复形 [21]。

2020 数学主题分类。主要分类：55N35，55U10；次要分类：05C25，55N91。关键词和短语。标记单纯集合、路径同调、Borel 构造、Szczarba 扭曲余链、扭曲笛卡尔积。X. FU 受到国家自然科学基金委员会（项目编号：12501083）和 SIMIS 启动基金的资助。

许多有向图具有非平凡的对称性，因此自然会想到如何构造包含群作用的等变版本同调。在经典代数拓扑中，可以通过 Borel 构造来定义等变同调理论。本文提出一种适用于有向图和 GLMY 路径同调的 Borel 构造类比。我们的方法以标记单纯形观点为基础。标记单纯集合会从单纯集合中选取某些 1-单形并将其“标记”。这一观点自然引出了带标记扭曲笛卡尔积的概念，将扭曲笛卡尔积和 Borel 构造推广到带标记的情形。

具体地说，若 G 作用于 F 且该作用保持 M，则称单纯群 G 作用于标记单纯集合 (F, M)。此外，若对任意 $g \in G_1$ 与 $x \in F_0$，$gs_0(x) \in F_1$ 是退化的，则扭曲函数 $\tau\colon X_{>0} \to G$ 可用于定义带标记扭曲笛卡尔积，记为 $X \backslash\!\square_\tau (F, M)$。其底单纯集合是扭曲笛卡尔积 $X \times_\tau F$，标记边由 $s_0(X_0) \times M \cup X_1 \times s_0(F_0)$给出。详见第4节。

在无标记情形下，Szczarba [20] 给出了扭曲余链的显式公式 $t_{\mathrm{Sz}}\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(G)$ 由扭曲函数 τ给出。由此得到扭曲张量积 $C(X) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \mathsf{C}(F)$。他还进一步构造了一个链映射

$$\psi\colon C(X) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \mathsf{C}(F) \to \mathsf{C}(X \times_\tau F)$$

并证明 ψ 是链同伦等价。该映射 ψ 称为 Szczarba 扭曲洗牌映射（另见第 2.4 小节）。

本文建立了一个标记版本。将 ψ 转至规范化复形后，我们得到以下结果。

定理 A（定理 4.5）。假设 $gs_0(x) \in F_1$ 对任意 $g \in G_1$均为退化的，且 $x \in F_0$。Szczarba 扭曲洗牌映射在规范化链复形上限制为链复形之间的一个同构

$$\mathsf{N}(X) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(F, M) \to \Omega_\bullet(X^\sharp \square_\tau (F, M)).$$

该结果为研究有向图的等变路径同调提供了一个框架。有向图$\mathcal{G} = (V, E)$ 导出一个标记单纯集合

$$(\mathsf{Nrv}(\mathcal{G}), E),$$

其中 $\mathsf{Nrv}(\mathcal{G})$ 是预序 $(V, \leq)$ 的神经，该预序定义为：当且仅当存在一条从 u 到 v 的有向路径时，$u \leq v$ 成立；标记边由有向边给出。$(\mathsf{Nrv}(\mathcal{G}), E)$ 所关联的路径链复形与 Grigor'yan–Lin–Muranov–Yau 引入的路径链复形 $\Omega_\bullet(\mathcal{G})$ 一致。

若群 Γ 作用于 $\mathcal{G}$，则相应的标记单纯集合带有一个诱导作用，该作用保持标记边。在这种情况下，Borel 构造

$$E\underline{\Gamma} \times_{\underline{\Gamma}} \mathsf{Nrv}(\mathcal{G}),$$

其中 $\underline{\Gamma}$表示 Γ上的常值单纯群，它成为一个标记单纯集合，其标记边由 Γ的轨道给出，

$$\big((E\underline{\Gamma})_1 \times E^D\big) \cup \big(s_0((E\underline{\Gamma})_0) \times E\big),$$

其中 $E^D = \{(v, v) \mid v \in V\}$ 且 s_0 是单纯集合 $E\Gamma$ 的退化映射。这个标记博雷尔构造记作 $\mathcal{G}_\Gamma$，其路径同调定义了$\mathcal{G}$ 的 Γ-等变路径同调。

定理A 为有向 Γ-图的等变路径同调提供了一个显式模型。

定理 B（命题 6.5）。设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个有向 Γ图，且 $\Omega_\bullet(\mathcal{G})$ 是其 GLMY 路径链复形。则存在一个拟同构

$$\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G}) \to \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma),$$

该拟同构对于任意 Γ-等变包含映射 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ 的有向图都是自然的。

2. 预备知识

本文中，除非另有说明，$\Bbbk$ 均表示主理想整环，所有张量积和链复形均取在 $\Bbbk$ 上。

2.1. **单纯集合**。一个 单纯集合 X 是一个以非负整数为指标的分次集合 n，并配有映射 $\partial_i\colon X_n \to X_{n-1}$ 和 $s_i\colon X_n \to X_{n+1}$，对于 $0 \le i \le n$，满足单纯恒等式；参见 [19, 定义 1。1]。我们用 sSet 表示单纯集合范畴。若 $x = s_i y$ 对于某个 $y \in X_{n-1}$ 以及某个映射 s_i成立，则称 x为 退化的；否则称 x 为 非退化。

给定 $X \in \mathsf{sSet}$，可以考虑三个链复形 $\mathsf{C}(X)$、$\mathsf{N}(X)$ 和 $\mathsf{D}(X)$。$\mathsf{C}(X)$ 的 n 次分量是由 X_n 生成的自由 $\Bbbk$ 模，其微分

$$\partial\colon \mathsf{C}_n(X) \to \mathsf{C}_{n-1}(X)$$

定义为 $\partial(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \partial_i(x)$，其中 $x \in X_n$。复形 $\mathsf{D}(X)$ 是 $\mathsf{C}(X)$ 的子复形，由退化单形生成。正规化复形或 Moore 复形 $\mathsf{N}(X)$ 的 n 次分量定义为

$$\mathsf{N}_n(X) = \bigcap_{i\neq 0} \ker\left(\partial_i\colon \mathsf{C}_n(X) \to \mathsf{C}_{n-1}(X)\right)$$

微分由 ∂_0.诱导的链复形存在如下分解

$$\mathsf{C}(X) = \mathsf{D}(X) \oplus \mathsf{N}(X).$$

因此，我们通常将 $\mathsf{N}(X)$ 认作 $\mathsf{C}(X)/\mathsf{D}(X)$，并将投影映射记为 $\rho\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{N}(X)$。

2.2. **扭张量积**。设 C 是一个余增广微分分次余代数（dgc），且 A 是一个增广微分分次代数（dga）。复形 $\mathrm{Hom}(C, A)$ 通过下式成为一个微分分次代数：

$$d(f) = d_A \circ f - (-1)^{\deg f} f \circ d_C, \qquad \text{(differential)}$$
$$f \cup g = m_A(f \otimes g)\Delta_C, \qquad \text{(product)}$$

其中，m_A 表示 A上的乘法，而 Δ_C 是 C上的余乘法。

扭曲余链 是 $\mathrm{Hom}(C, A)$ 中的一个次数为 -1 的元素 $t \in$，满足

$$d(t) = t \cup t, \quad t\,\iota_C = 0, \quad \varepsilon_A\, t = 0,$$

其中，$\iota_C\colon \Bbbk \to C$ 是余增广，$\varepsilon_A\colon A \to \Bbbk$ 是增广。

设 M 是一个增广微分分次 A-模，其作用映射为

$$\mu_M\colon A \otimes M \to M.$$

扭曲张量积 $C \otimes_t M$ 是这样一个链复形：其底层分次 $\Bbbk$-模为 $C \otimes M$，其微分定义为

$$d_t = d_C \otimes 1 + 1 \otimes d_M - (1 \otimes \mu_M)(1 \otimes t \otimes 1)(\Delta_C \otimes 1). \tag{2.1}$$

2.3. 扭曲笛卡尔积。 设 X 为一个单纯集合， G 为一个单纯群。扭曲函数 τ：$X \to G$ 是由一系列映射 τ_n：$X_n \to G_{n-1}$（$n \geq 1$）组成，并满足

$$\partial_0 \tau(x) = \tau(\partial_0 x)^{-1} \cdot \tau(\partial_1 x); \tag{2.2}$$
$$\partial_i \tau(x) = \tau(\partial_{i+1} x) \quad \text{for } i > 0; \tag{2.3}$$
$$s_i \tau(x) = \tau(s_{i+1} x) \quad \text{for } i \geq 0; \tag{2.4}$$
$$\tau(s_0(x)) = 1_n. \tag{2.5}$$

这里， ∂_i 和 s_i 分别是面映射和退化映射， 1_n 是 G_n 的群单位元，其中 $x \in X_n$。

设 G 从左侧作用于单纯集合 F。给定一个扭曲函数τ：$X \to G$，扭曲笛卡尔积是单纯集合 $X \times_\tau F$，其第 n个分量为

$$X_n \times F_n,$$

连同由下式给出的面映射和退化映射

$$\begin{aligned}
\partial_0(x, f) &= (\partial_0 x,\, \tau(x) \cdot \partial_0 f);\\
\partial_i(x, f) &= (\partial_i x,\, \partial_i f) \quad \text{for } i > 0;\\
s_i(x, f) &= (s_i x,\, s_i f) \quad \text{for } i \geq 0.
\end{aligned}$$

2.4. **Szczarba 扭曲余链与扭曲洗牌映射。** 我们沿用 [5, 第 5]节中的叙述 [20] ，另可参见 Szczarba 的原始论文 [4, 14]。

对于 $n \geq 1$，令 S_n 为由整数构成的 $n!$ 序列集合

$$S_n = \{\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid 0 \leq i_k \leq n-k \text{ for } 1 \leq k \leq n\}.$$

特别地， $i_n = 0$。若 $n = 0$，令 S_0 为以空序列 $\emptyset$ 作为唯一元素的集合。 $\boldsymbol{i} \in S_n$ 的符号为

$$(-1)^{|\boldsymbol{i}|}, \text{ where } |\boldsymbol{i}| = i_1 + \cdots + i_n.$$

对于 $n \geq 1$、 $\boldsymbol{i} \in S_n$、 $0 \leq k \leq n$ 和 $m \geq n-k$，存在次数为 k 的单纯算子

$$D_{\boldsymbol{i},k} \colon X_m \to X_{m+k} \tag{2.6}$$

递归定义如下

$$D_{\emptyset,0} = \mathrm{id} \quad \text{and} \quad D_{\boldsymbol{i},k} = \begin{cases} D'_{\boldsymbol{i}',k} s_0 \partial_{i_1 - k} & \text{if } k < i_1, \\ D'_{\boldsymbol{i}',k} & \text{if } k = i_1, \\ D'_{\boldsymbol{i}',k-1} s_0 & \text{if } k > i_1, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{i}' = (i_2, \ldots, i_n)$，且 D'是 D的导出单纯映射；定义见 [20, 第 199]页或 [14, 第 1863] 页，其中给出了导出单纯映射的定义。

设 $\tau\colon X \to G$ 是一个扭曲函数。为方便起见，我们将 $\sigma(x) = \tau(x)^{-1}$记作 $x \in X_{>0}$。对于 $n \geq 1$ 和 $\boldsymbol{i} \in S_{n-1}$，*Szczarba* 算子是如下函数

$$\begin{aligned} \mathrm{Sz}_{\boldsymbol{i}}\colon X_n &\to G_{n-1} \\ x &\mapsto D_{\boldsymbol{i},0}\sigma(x)\, D_{\boldsymbol{i},1}\sigma(\partial_0 x) \cdots D_{\boldsymbol{i},n-1}\sigma((\partial_0)^{n-1}x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Szczarba 的扭曲余链 $t_{\mathrm{Sz}}\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(G)$ 定义如下

$$t_{\mathrm{Sz}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0, \\ \mathrm{Sz}_{\emptyset}x - 1_0 = \sigma(x) - 1_0 & \text{if } n = 1, \\ \sum_{\boldsymbol{i}\in S_{n-1}} (-1)^{|\boldsymbol{i}|}\mathrm{Sz}_{\boldsymbol{i}}x & \text{if } n \geq 2, \end{cases} \tag{2.8}$$

其中 $\deg x = n$，且 $1_0 \in G_0$ 是群单位元。

若 G 作用于单纯集合 F，则 $\mathsf{C}(F)$ 成为一个 $\mathsf{C}(G)$-模，其作用映射由以下复合给出

$$\mathsf{C}(G) \otimes \mathsf{C}(F) \xrightarrow{\nabla} \mathsf{C}(G \times F) \xrightarrow{\mu_*} \mathsf{C}(F),$$

其中 ∇ 是洗牌映射，而 μ_* 由 G 对 F的作用诱导。利用扭曲余链（2.8），我们得到一个扭曲张量积，即一个链复形

$$(\mathsf{C}(X) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \mathsf{C}(F), \partial_{t_{\mathrm{Sz}}}).$$

对于 $n \geq 0$ 和 $\boldsymbol{i} \in S_n$，定义

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{Sz}}_{\boldsymbol{i}}\colon X_n &\to (X \times_\tau G)_n = X_n \times G_n \\ x &\mapsto \left(D_{\boldsymbol{i},0}x,\, D_{\boldsymbol{i},1}\sigma(x)\, D_{\boldsymbol{i},2}\sigma(\partial_0 x) \cdots D_{\boldsymbol{i},n}\sigma\big((\partial_0)^{n-1}x\big)\right). \end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{i} = \emptyset$ 和 $n = 0$时，我们有 $\hat{\mathrm{Sz}}_{\emptyset}(x) = (x,\ 1) \in X_0 \times G_0$。*Szczarba* 扭曲洗牌映射定义为

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathsf{C}(X) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \mathsf{C}(F) &\to \mathsf{C}(X \times_\tau F) \\ x \otimes y &\mapsto \sum_{\boldsymbol{i}\in S_n} (-1)^{|\boldsymbol{i}|}(\mathrm{id}_X, \mu)_* \nabla\left(\hat{\mathrm{Sz}}_{\boldsymbol{i}}x \otimes y\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中，n是 x的次数，而 $\nabla\colon \mathsf{C}(X \times_\tau G) \otimes \mathsf{C}(F) \to \mathsf{C}(X \times_\tau G \times F)$ 是洗牌映射，$\mu\colon G \times F \to F$ 是群作用。

定理 2.1 （[20, 定理 2.4]）。映射 ψ 是一个拟同构。特别地，它诱导出一个同构

$$H_*(\mathsf{C}(X) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \mathsf{C}(F)) \cong H_*(X \times_\tau F).$$

注 2.2。在 [5, 推论 B。3]中证明了，Szczarba 扭曲余链和扭曲洗牌映射（2.9）下降到规范化链复形

$$t_{\mathrm{Sz}}\colon \mathsf{N}(X) \to \mathsf{N}(G) \quad \text{and} \quad \mathsf{N}(X) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \mathsf{N}(F) \to \mathsf{N}(C \times_\tau F). \tag{2.10}$$

2.5. 标记单纯集合与路径（上）同调。 一个标记单纯集合是一个对 (X, M)，其中 X是一个单纯集合，M是 1-单形的一个子集，且包含所有退化 1-单形。M 的元素称为标记边。标记单纯集合的态射 是将标记边映到标记边的单纯映射。带标记单纯集合范畴记为 sSet^+。

例 2.3. 将单纯集合视为标记单纯集合有不同的方式。例如，可以将所有 1-单形均加以标记。所得的标记单纯集合记为 $X_\sharp = (X, X_1)$，沿用 [18, 第 147] 页的记号。这给出一个函子 $(-)_\sharp : \mathsf{sSet} \to \mathsf{sSet}^+$，从单纯集合范畴到带标记单纯集合范畴。

给定一个标记单纯集合 (X, M)，若元素 $x \in X_n$ for $n \geq 0$ 满足以下条件，则称其为允许的

$$x_{k-1,k} := \partial_0 \dots \partial_{k-2}\partial_{k+1} \dots \partial_n(x) \in M \quad \text{for all } 1 \leq k \leq n.$$

用 $\mathcal{A}_n(X, M)$ 表示所有允许的 n-单形的集合，并定义

$$\mathsf{A}_n(X, M) = \rho\left(\Bbbk \cdot \mathcal{A}_n(X, M)\right) \tag{2.11}$$

它是 $\mathsf{N}_n(X)$ 的一个子模。

定义 2.4。用 $\mathsf{A}_*(X, M) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathsf{A}_n(X, M)$ 表示。(X, M) 的路径链复形记为 $\mathbf{\Omega}_\bullet(X, M)$，它是包含在 $\mathsf{A}_*(X, M)$ 中的最大子复形。其 n 次分量定义为

$$\Omega_n(X, M) := \{x \in \mathsf{A}_n(X, M) \mid \partial x \in \mathsf{A}_{n-1}(X, M)\}.$$

（$\mathbf{\Omega}_\bullet(X, M)$ ∂）的同调称为（X, M）的路径同调，记为 $\mathbf{PH}_*(X, M)$。有时我们写作 $\mathbf{PH}_*(X, M; \Bbbk)$，以强调系数环 $\Bbbk$。

对偶地，上链复形 $\mathsf{C}^\bullet(X)$ 是 $\mathsf{C}(X)$ 的对偶，其 n次分量为

$$\mathsf{C}^n(X) = \mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathsf{C}_n(X), \Bbbk).$$

类似地，可以定义上链复形 $\mathsf{D}^\bullet(X)$ 和 $\mathsf{N}^\bullet(X)$，它们分别是 $\mathsf{D}(X)$ 和 $\mathsf{N}(X)$ 的对偶复形。此外，对角映射 $X \to X \times X$ 在 $\mathsf{N}^\bullet(X)$ 上诱导出杯积

$$\cup\colon \mathsf{N}^\bullet(X) \otimes \mathsf{N}^\bullet(X) \to \mathsf{N}^\bullet(X)$$

从而使 $\mathsf{N}^\bullet(X)$ 成为微分分次代数。

对于标记单纯集合 (X, M)，记 $\mathsf{A}^n(X, M) = \mathsf{Hom}_\Bbbk(\mathsf{A}_n(X, M), \Bbbk)$ 为 $\mathsf{A}_n(X, M)$ 在 $\Bbbk$ 上的对偶。其核

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathsf{N}^n(X) \to \bigoplus_{n\geq 0} \mathsf{A}^n(X, M)$$

关于杯积 $\cup$，它是 $\mathsf{N}^\bullet(X)$ 的一个双边理想，但未必是微分分次理想。令 $\mathcal{J}(X, M)$ 为包含该核的最小微分分次理想。$\mathcal{J}(X, M)$ 的 n次分量可表示为

$$\ker(\mathsf{N}^n(X) \to \mathsf{A}^n(X, M)) + \partial^\vee\big(\ker(\mathsf{N}^{n-1}(X) \to \mathsf{A}^{n-1}(X, M))\big),$$

其中 $\partial^\vee$ 是 ∂的对偶。

定义 2.5. (X, M) 的路径上链代数定义为商代数

$$\Omega^\bullet(X, M) := \frac{\mathsf{N}^\bullet(X)}{\mathcal{J}(X, M)}.$$

它的上同调称为 (X, M) 的路径上同调，记为 $\mathbf{PH}^*(X, M)$。

一般而言，$\Omega^\bullet(X,M)$ 不必同构于 $\Omega_\bullet(X,M)$ 的对偶。例如，当 $\Bbbk=\mathbb{Z}$ 时，存在例子使得 $\Omega^\bullet(X,M)$ 含有挠，尽管 $\Omega_\bullet(X,M)$ 是无挠的；见 [6, 定理 5.4]。然而，若 $\Bbbk$ 是一个域，则同构确实成立。这一事实的证明见于 [15, 命题 3.16]；为方便读者，我们在下文给出一个证明。

命题 2.6. 若 $\Bbbk=\mathbb{F}$ 是一个域，则存在上链复形的同构

$$\Omega_\bullet(X,M)^\vee \cong \Omega^\bullet(X,M),$$

其中 $\Omega_\bullet(X,M)^\vee=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Omega_\bullet(X,M),\mathbb{F})$ 配备了对偶微分。

证明. 对任意 $n\geq 0$，$\Omega_n(X,M)$ 的定义给出一个正合列

$$0\to \Omega_n(X,M)\xrightarrow{g}\mathsf{N}_n(X)\xrightarrow{f}\frac{\mathsf{N}_n(X)}{A_n(X,M)}\oplus\frac{\mathsf{N}_{n-1}(X)}{A_{n-1}(X,M)} \tag{2.12}$$

其中 $f(a)=\big(a+A_n(X,M)\ \partial(a)+A_{n-1}(X,M)\big)$ 且 g 是包含映射。

令 $K_n=\ker\big(\mathsf{N}^n(X)\to A^n(X,M)\big)$。由于 $\mathbb{F}$ 是一个域，存在一个同构

$$K_n\cong\left(\frac{\mathsf{N}_n(X)}{A_n(X,M)}\right)^\vee. \tag{2.13}$$

对正合列（2.12）在 $\mathbb{F}$ 上取对偶，得到正合列

$$\left(\frac{\mathsf{N}_n(X)}{A_n(X,M)}\right)^\vee\oplus\left(\frac{\mathsf{N}_{n-1}(X)}{A_{n-1}(X,M)}\right)^\vee\xrightarrow{f^\vee}\mathsf{N}^n(X)\xrightarrow{g^\vee}\Omega_n(X,M)^\vee\to 0.$$

根据 $\mathcal{J}(X,M)$ 的定义以及识别（2.13），$f^\vee$ 的像恰好等于 $\mathcal{J}(X,M)$。上述正合列的正合性意味着 $\ker g^\vee=\mathcal{J}(X,M)$，因此 $g^\vee$ 诱导出一个同构

$$\Omega^\bullet(X,M)\to\Omega_\bullet(X,M)^\vee.$$

此外，$\ker g^\vee=\mathcal{J}(X,M)$ 是一个微分分次理想，且 $g^\vee$ 是一个上链映射。因此，上述同构是上链复形之间的同构。□

2.6. 标记单纯集合的乘积。设 (X,M_X) 和 (Y,M_Y) 是两个标记单纯集合。强积

$$(X,M_X)\times(Y,M_Y)=(X\times Y,M_X\times M_Y)$$

是一个标记单纯集合，其底层单纯集合为乘积 $X\times Y$，其标记边是分别来自 X 和 Y 的标记边对。盒积

$$(X,M_X)\square(Y,M_Y)=(X\times Y,M_X\square M_Y)$$

具有相同的底层单纯集合 $X\times Y$，但其标记边集合定义为

$$\begin{aligned}M_X\square M_Y&=M_X\times s_0(Y_0)\ \cup\ s_0(X_0)\times M_Y\\&=\{(m,s_0(y))\mid m\in M_X,\ y\in Y_0\}\ \cup\ \{(s_0(x),m')\mid x\in X_0,\ m'\in M_Y\}.\end{aligned}$$

等价地，当且仅当一个分量是退化 1-单纯形，而另一个分量是标记的时，$X\times Y$ 中的边在盒积中被标记。

定理 2.7 ([9, 定理 7。6], [15, 定理 8。6])。 设 $\Bbbk$ 是一个主理想整环。*Eilenberg–Zilber* 映射和 *Alexander–Whitney* 映射

$$EZ\colon\ \mathsf{N}(X)\otimes\mathsf{N}(Y)\to\mathsf{N}(X\times Y),$$
$$AW\colon\ \mathsf{N}(X\times Y)\to\mathsf{N}(X)\otimes\mathsf{N}(Y),$$

诱导链复形的互逆同构

$$\Omega_\bullet(X,M_X)\otimes\Omega_\bullet(Y,M_Y)\cong\Omega_\bullet\big((X,M_X)\square(Y,M_Y)\big).$$

3. Marked twisted Cartesian products

设 G 是一个单纯群。我们研究带有 G 作用的标记单纯集合。

定义 3.1。 若单纯群 G 在标记单纯集合 $(F,\ M)$ 上有左作用，则称

- G 作用于单纯集合 F，也就是说，存在一个单纯映射
$$\Phi\colon G\times F\to F$$
满足通常的结合性和单位条件；
- 该作用保持标记边；换言之， M 是 G_1-不变的：对于任意 $m\in M\subset F_1$ 和 $g\in G_1$，都有 $\Phi(g,\ m)\in M$。

我们将 $\Phi(g,\ x)$记作 gx 。

当（$F,\ M$）是一个带有左 G-作用的标记单纯集合时，我们可以考虑扭曲笛卡尔积 $X\times_\tau F$，并赋予其作为盒积 $X_\sharp\square(F,M)$的特定标记。我们将其称为带标记扭曲笛卡尔积。

定义 3.2。 设 G 从左侧作用于标记单纯集合（$F,\ M$）上，并设$\tau\colon X_{>0}\to G$ 是一个扭曲函数。带标记扭曲笛卡尔积

$$X^\sharp\square_\tau(F,M)$$

定义为扭曲笛卡尔积

$$X\times_\tau F$$

其标记边由下式给出

$$s_0(X_0)\times M\cup X_1\times s_0(F_0).$$

当不会与未标记情形 $X\times_\tau F$混淆时，我们将简记 $X_\sharp\square_\tau(F,M)$ 为 $X\square_\tau F$。

注 3.3. 与 $X\times_\tau F$和 $X\times F$之间的区别类似，带标记扭曲笛卡尔积 $X\square_\tau F$与盒积 $X_\sharp\square(F,M)$的区别仅在于第零面映射。

引理 3.4. 假设 G 从左侧作用于标记单纯集合 (F,M)。

(1) 作用映射 $\Phi\colon\ G\times F\to F$ 诱导出一个带标记单纯集合的态射

$$\widetilde{\Phi}\colon G^\sharp\square(F,M)\to(F,M).$$

(2) 诱导的链级作用映射

$$\mathsf{N}(G)\otimes\mathsf{N}(F)\xrightarrow{\nabla}\mathsf{N}(G\times F)\xrightarrow{\Phi_*}\mathsf{N}(F)$$

限制为一个映射 $\mathsf{N}(G)\otimes\Omega_\bullet(F,M)$，从而得到一个作用映射

$$\mu_{(F,M)}\colon \mathsf{N}(G)\otimes\Omega_\bullet(F,M)\to\Omega_\bullet(F,M).$$

特别地，链复形 $\Omega_\bullet(F,M)$ 成为一个左 $\mathsf{N}(G)$-模。

证明。 第 (1) 部分直接由定义得出3.1。对于第 (2) 部分，定理 2.7表明洗牌映射

$$\nabla\colon \mathsf{N}(G)\otimes\mathsf{N}(F)\to\mathsf{N}(G\times F)$$

限制为一个同构

$$\mathsf{N}(G)\otimes\Omega_\bullet(F,M)=\Omega_\bullet(G^\sharp)\otimes\Omega_\bullet(F,M)\to\Omega_\bullet(G^\sharp\square(F,M)).$$

所需的作用映射 $\mu_{(F,M)}$ 由将此同构与诱导映射 $\widetilde{\Phi}_*\colon\Omega_\bullet(G^\sharp\square(F,M))\to\Omega_\bullet(F,M)$ 复合而得。□

引理 3.5. 假设对于任意的 $g\in G_1$ 和 $m\in F_0$，单形 $gs_0(m)\in F_1$都是退化的。那么单纯映射

$$(\mathrm{id}_X,\Phi)\colon X\times_\tau G\times F\to X\times_\tau F$$

给出一个带标记单纯集合的态射

$$\widetilde{(\mathrm{id}_X,\Phi)}\colon (X\times_\tau G)^\sharp\square(F,M)\to X\square_\tau F.$$

证明。 盒积 $(X\times_\tau G)^\sharp\square(F,M)$ 的标记边有两类：

$$(s_0x,s_0g,m)\ \text{ for }(x,g)\in X_0\times G_0\text{ and }m\in M,$$
$$(x,g,s_0(m))\ \text{ for }(x,g)\in X_1\times G_1\text{ and }m\in F_0.$$

在第一种情况下，我们计算 $(\mathrm{id}_X,\Phi)(s_0x,s_0g,m)=(s_0x,(s_0g)m)\in s_0(X_0)\times M$，因为 $m\in M$，且该作用保持标记。在第二种情况下，我们有 $(\mathrm{id}_X,\Phi)(x,g,s_0(m))=(x,gs_0(m))\in X_1\times s_0(F_0)$，它是标记的，因为根据假设，$gs_0(m)$ 是退化的。

在这两种情况下，标记边在 (id_X,Φ) 下的像仍然是标记边。因此，(id_X,Φ) 诱导出一个带标记单纯集合的态射，正如所要证明的那样。□

4. Szczarba's twisted shuffle map for marked twisted Cartesian products

考虑规范化链复形上的 Szczarba 扭曲余链

$$t_{\mathrm{Sz}}\colon \mathsf{N}(X)\to\mathsf{N}(G).$$

结合引理 $\mu_{(F,M)}$ 中的作用映射 3.4，这给出了一个链复 x

$$\big(\mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M),\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}\big),$$

其中 $\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}=\partial_X\otimes 1+1\otimes\partial_F-(1\otimes\mu_{(F,M)})(1\otimes t_{\mathrm{Sz}}\otimes 1)(\Delta_X\otimes 1)$。

本节的目标是证明，Szczarba 扭曲洗牌映射 ψ 在规范化链复形上限制为一个链映射

$$\big(\mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M),\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}\big)\to(\Omega_\bullet(X\times_\tau F),\partial) \tag{4.1}$$

它在同调上诱导一个同构。

引理 4.1. 假设对于任意 $g \in G_1$ 和 $m \in F_0$，单形 $gs_0(m) \in F_1$ 都是退化的。那么，*Szczarba* 扭曲洗牌映射 ψ 在规范化链复形上可以限制为一个链复形之间的映射

$$\psi_\omega := \psi|_{\mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M)} : \left(\mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M), \partial_{t_{\mathrm{Sz}}}\right) \to (\Omega_\bullet(X\square_\tau F), \partial).$$

证明。 根据定理 2.7，规范化链复形上的（未扭曲）洗牌映射

$$\mathsf{N}(X \times_\tau G)\otimes \mathsf{N}(F) \to \mathsf{N}(X \times_\tau G \times F)$$

限制为一个同构

$$\nabla\colon \mathsf{N}(X\times_\tau G)\otimes\Omega_\bullet(F,M) = \Omega_\bullet((X\times_\tau G)^\sharp)\otimes\Omega_\bullet(F,M) \to \Omega_\bullet\Big((X\times_\tau G)^\sharp\square(F,M)\Big).$$

现在取 $x\otimes y \in \mathsf{N}_n(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F, M)$。对于每个 $i \in S_n$，由于 $\hat{}\mathrm{Sz}_i x \in \mathsf{N}_n(X\times_\tau G)$，$\hat{}$我们将 ∇ 应用于 $\mathrm{Sz}_i x\otimes y$，得到

$$\nabla\Big(\hat{\mathrm{S}}\mathrm{z}_i x\otimes y\Big) \in \Omega_\bullet\Big((X\times_\tau G)^\sharp\square(F,M)\Big).$$

$\widetilde{\quad}$根据 (id_X, Φ)的自然性（已在引理 3.5中证明），我们有

$$(\widetilde{\mathrm{id}_X, \Phi})_*\nabla\Big(\hat{\mathrm{S}}\mathrm{z}_i x\otimes y\Big) \in \Omega_\bullet(X\square_\tau F). \tag{4.2}$$

根据（2.9），扭曲洗牌映射由下式给出

$$\psi(x\otimes y) = \sum_{i\in S_n}(-1)^{|i|}(\widetilde{\mathrm{id}_X, \Phi})_*\nabla\Big(\hat{\mathrm{S}}\mathrm{z}_i x\otimes y\Big). \tag{4.3}$$

因此，方程（4.2）和（4.3）蕴含 ψ（$x\otimes y$）$\in\Omega_\bullet$（$X\square_\tau F$）。由于 ψ是一个链映射，其在子复形（4.3）上的限制定义了一个链映射

$$\psi_\omega\colon \mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M) \longrightarrow \Omega_\bullet(X\square_\tau F),$$

正如所断言的。 □

为证明 ψ_ω 是一个同构，我们首先给出一个类似于 [20,引理 5。3] 的陈述，但针对带标记扭曲笛卡尔积的情形。为此，考虑洗牌映射

$$\nabla_{X,F}\colon \mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\mathsf{N}(F) \to \mathsf{N}(X\times_\tau F)$$

以及亚历山大-惠特尼映射

$$AW_{X,F}\colon N(X\times_\tau F) \to \mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\mathsf{N}(F).$$

根据注3.3 和定理2.7，它们诱导出以下同构

$$\nabla_{X,F}\colon \mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M) = \Omega_\bullet(X^\sharp)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M) \rightleftarrows \Omega_\bullet(X\times_\tau F) : AW_{X,F}$$

它们互为逆映射。

注意，$\nabla_{X,\ F}$ 和 $AW_{X,\ F}$ 一般而言不是链映射，但它们保持以下滤过

$$\begin{aligned} A_p &= \bigoplus_{q\le p}\mathsf{N}_q(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M),\\ B_p &= \Omega_\bullet(\mathrm{skel}_p(X)\square_\tau F). \end{aligned} \tag{4.4}$$

这里 $\mathrm{skel}_p(X)$ 是 X 的第 p 骨架，由所有满足 $q\le p$ 的 q-单形生成。因此，我们得到映射

$$\nabla'_{X,F}\colon A_p/A_{p-1} \rightleftarrows B_p/B_{p-1} : AW'_{X,F}. \tag{4.5}$$

引理 4.2（参见 [20, 引理 5.3]）。映射 $\nabla'_{X,\,F}$ 与 $AW'_{X,\,F}$ 是链映射，使得

$$\nabla'_{X,F}AW'_{X,F} = identity \quad and \quad AW'_{X,F}\nabla'_{X,F} = identity.$$

证明。如果 $x \otimes y \in A_p$，那么

$$\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x \otimes y) = (\partial x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial y - \sum \pm x^{(1)} \otimes \mu_{(F,M)}(t_{\mathrm{Sz}}(x^{(2)}) \otimes y), \tag{4.6}$$

其中，右侧的求和遍历分解 $\Delta(x) = \sum x^{(1)} \otimes x^{(2)}$。注意，若 $\deg\, x^{(2)} = 0$，则 $t_{\mathrm{Sz}}(x^{(2)}) = 0$，因此 $(\partial x) \otimes y$ 和 $x^{(1)} \otimes \mu_{(F,M)}(t_{\mathrm{Sz}}(x^{(2)}) \otimes y)$ 属于 A_{p-1}。因此，我们有

$$\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x \otimes y) = (-1)^p x \otimes \partial y \mod A_{p-1}. \tag{4.7}$$

若 $x \in X_p$ 是非退化的，且对于某个 $i_1 > \cdots > i_r$，$s_\mu = s_{i_1} \dots s_{i_r}$，则

$$\partial_0 s_\mu x = \begin{cases} s_{i_1-1} \dots s_{i_{r-1}-1} x & \text{if } i_r = 0, \\ s_{i_1-1} \dots s_{i_r-1} \partial_0 x & \text{if } i_r > 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

注意，第二种情形中 $\partial_0 s_\mu x \in \mathrm{skel}_{p-1} X$，而在第一种情形中，

$$\tau(s_\mu x) = s_{i_1-1} \dots s_{i_{r-1}-1} \tau(s_0 x) = 1_{p+r-1}, \tag{4.9}$$

由（2.4）、（2.5）以及所有 s_i 均为群同态这一事实可得。

对于 $(s_\mu x,\ y) \in B_p$，其中 $y \in F_{p+r}$，方程（4.8）和（4.9）蕴含

$$\partial_0(s_\mu x, y) = (\partial_0 s_\mu x, \tau(s_\mu x) \cdot \partial_0 y) = (\partial_0 s_\mu x, \partial_0 y) \mod B_{p-1}.$$

这意味着

$$\partial(s_\mu x, y) = \sum_{i=0}^{p+r} (-1)^i (\partial_i s_\mu x, \partial_i y) \mod B_{p-1}.$$

因此，A_p/A_{p-1} 与 B_p/B_{p-1} 上的微分与非扭曲积情形一致。由定理2.7，我们得到互为逆的链映射 $\nabla'_{X,\,F}$ 与 $AW'_{X,\,F}$。□

由于 $\psi_\omega(A_p) \subset B_p$，映射 ψ_ω 在商上诱导出一个良定义的映射

$$\psi' \colon A_p/A_{p-1} \to B_p/B_{p-1}.$$

下面我们以显式形式描述 ψ'。

引理 4.3（参见 [20, 推论 5。5]）。对于 $x \in \mathsf{N}^p(X)$ 和 $y \in \Omega^q(F,\ M)$，有

$$\psi'(x \otimes y) = \sum_{(\mu,\nu) \in \mathrm{Sh}(p,q)} (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)} \left(s_\nu x,\ s_\nu [s_0\sigma(x) \cdots s_0^p \sigma(\partial_0^{p-1} x)] \cdot s_\mu y \right),$$

其中，$\mathrm{Sh}(p,\ q)$ 是所有（p、q）-交错排列的集合。

证明。根据 ψ_ω 的定义，我们得到

$$\psi'(x \otimes y) = \sum_{\boldsymbol{i} \in S_p} \sum_{(\mu,\nu) \in \mathrm{Sh}(p,q)} (-1)^{|\boldsymbol{i}| + \mathrm{sgn}(\mu,\nu)} \\ \left(s_\nu D_{\boldsymbol{i},0} x,\ s_\nu \left[D_{\boldsymbol{i},1} \sigma(x)\, D_{\boldsymbol{i},2} \sigma(\partial_0 x) \cdots D_{\boldsymbol{i},p} \sigma((\partial_0)^{p-1} x) \right] \cdot s_\mu y \right).$$

若 $\boldsymbol{i} \neq (0,\ \dots\dots,\ 0)$，算子 $D_{\boldsymbol{i},\,0}$ 包含一个面映射。因此，和中的项 $s_\nu D_{\boldsymbol{i},\,0} x$ 将包含于 B_{p-1} 中，所以它在 B_p/B_{p-1} 中消失。若 $\boldsymbol{i} = (0,\ \dots\dots,\ 0)$，则 $D_{\boldsymbol{i},\,0} =$ 单位元且 $D_{\boldsymbol{i},\,k} = s_0^k$，这就推出了所述公式。□

令 $C_p = \mathsf{N}(\text{骨架}_p(X) \times_\tau F)$。我们回顾 [20, 第 208] 页中的链同构

$$g\colon C_p/C_{p-1} \to C_p/C_{p-1}$$

及其逆映射

$$h\colon C_p/C_{p-1} \to C_p/C_{p-1}.$$

对于任意非退化单形 $x \in X_p$、$y \in F_{p+r}$ 和 $s_\mu = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$，其中 $i_1 > \cdots > i_r$，我们有

$$g(s_\mu x, y) = \big(s_\mu x,\, s_\mu\big[s_0\sigma(x)\cdots(s_0)^p\sigma((\partial_0)^{p-1}x)\big]\cdot y\big);$$
$$h(s_\mu x, y) = \big(s_\mu x,\, s_\mu\big[(s_0)^r\tau((\partial_0)^{r-1}x)\cdots s_0\tau(x)\big]\cdot y\big).$$

由于 $B_{p-1} = B_p \cap C_{p-1}$，存在一个单射

$$B_p/B_{p-1} = B_p/(B_p\cap C_{p-1}) = (B_p + C_{p-1})/C_{p-1} \hookrightarrow C_p/C_{p-1}.$$

将此单射与 g 和 h复合，可得到映射

$$\hat g,\, \hat h\colon B_p/B_{p-1} \to C_p/C_{p-1}.$$

引理 4.4。g 和h 的像包含在 B_p/B_{p-1}中。因此，映射g 和 h 限制为

$$\hat g, \hat h\colon B_p/B_{p-1} \to B_p/B_{p-1},$$

它们互为逆映射。

证明。回顾（4.5）可知，存在一个同构

$$\nabla'_{X,F}\colon A_p/A_{p-1} \to B_p/B_{p-1}.$$

因此，只需证明$g\nabla'_{X,F}(A_p/A_{p-1}) \in B_p/B_{p-1}$。

对于任意非退化单形 $x \in X_p$和 $y \in \Omega_q(F, M)$，我们来计算

$$g\nabla'_{X,F}(x\otimes y) = \sum_{(\mu,\nu)\in \mathrm{Sh}(p,q)} (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)} g(s_\nu x, s_\mu y) \tag{4.10}$$
$$= \sum_{(\mu,\nu)\in \mathrm{Sh}(p,q)} (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)} \underbrace{\big(s_\nu x,\, s_\nu\big[s_0\sigma(x)\cdots(s_0)^p\sigma((\partial_0)^{p-1}x)\big]\cdot(s_\mu y)\big)}_{:=g_{\mu,\nu}(x\otimes y)}.$$

这与 $\psi'(x\otimes y)$相同，而它属于 B_p/B_{p-1}。因此，g限制为一个映射

$$\hat g\colon B_p/B_{p-1} \to B_p/B_{p-1}.$$

对于 h，我们还考虑它与 $\nabla'_{X,\,F}$ 的复合：

$$h\nabla'_{X,F}(x\otimes y) = \sum_{(\mu,\nu)\in \mathrm{Sh}(p,q)} (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)} \underbrace{\Big(s_\nu x,\, s_\nu\big[(s_0)^r\tau((\partial_0)^{r-1}x)\cdots s_0\tau(x)\big]\cdot(s_\mu y)\Big)}_{:=h_{\mu,\nu}(x\otimes y)}.$$

$g\nabla'_{X,\,F}(x\otimes y)$ 和 $h\nabla'_{X,\,F}(x\otimes y)$ 中出现的项都以 $(\mu,\ \nu)$ 为索引。我们分别将它们记为 $g_{\mu,\,\nu}(x\otimes y)$ 和 $h_{\mu,\,\nu}(x\otimes y)$。由于 G_1-作用保持 1-退化和标记边，显然 $g_{\mu,\,\nu}(x\otimes y)$ 允许，当且仅当 $h_{\mu,\,\nu}(x\otimes y)$ 允许。

此外，由于 x 是非退化的，根据 Eilenberg-Zilber 引理，若 $s_\nu x = s_{\nu'}x$，则 $s_\nu = s_{\nu'}$。因此，对于不同的 $(\mu,\ \nu)$，各项 $g_{\mu,\,\nu}$ 互不相同。由于和式 $\sum_{(\mu,\,\nu)}(-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)} g_{\mu,\,\nu}(x\otimes y) = g\nabla'_{X,\,F}(x\otimes y)$ 是允许的，因此每一项 $g_{\mu,\,\nu}(x\otimes y)$ 都是允许的。相应地，每一项 $h_{\mu,\,\nu}(x\otimes y)$ 也都是允许的。因此，整个和式 $h\nabla'_{X,\,F}(x\otimes y)$ 是允许的。

还需证明 $\partial\left(h\nabla'_{X,\,F}(x\otimes y)\right)$ 是允许的。由引理 4.2可知， B_p/B_{p-1} 上的微分与未扭曲情形相同。因此，我们有

$$\partial(g\nabla'_{X,F}(x\otimes y)) = \sum_{(\mu,\nu)\in \mathrm{Sh}(p,q)} \sum_{i=0}^{p+q} (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)} \partial_i g_{\mu,\nu}(x\otimes y),$$

$$\partial(h\nabla'_{X,F}(x\otimes y)) = \sum_{(\mu,\nu)\in \mathrm{Sh}(p,q)} \sum_{i=0}^{p+q} (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)} \partial_i h_{\mu,\nu}(x\otimes y),$$

其中

$$\partial_i g_{\mu,\nu}(x\otimes y) = (-1)^i\Big(\partial_i s_\nu x,\, \partial_i s_\nu\big[s_0\sigma(x)\cdots(s_0)^p\sigma((\partial_0)^{p-1}x)\big]\cdot(\partial_i s_\mu y)\Big),$$

$$\partial_i h_{\mu,\nu}(x\otimes y) = (-1)^i\Big(\partial_i s_\nu x,\, \partial_i s_\nu\big[(s_0)^r\tau((\partial_0)^{r-1}x)\cdots s_0\tau(x)\big]\cdot(\partial_i s_\mu y)\Big).$$

再次，在假设 G_1 作用保持退化的 1-单形的条件下，$\partial_i h_{\mu,\,\nu}(x\otimes y)$ 被允许，当且仅当 $\partial_i g_{\mu,\,\nu}(x\otimes y)$ 被允许。令

$$\begin{aligned} I &= \{(\mu,\nu,i)\mid \partial_i g_{\mu,\nu}(x\otimes y) \text{ is not allowed}\} \\ &= \{(\mu,\nu,i)\mid \partial_i h_{\mu,\nu}(x\otimes y) \text{ is not allowed}\}. \end{aligned}$$

我们定义 $\sim$ 上的等价关系 I，如下：

$$(\mu,\nu,i)\sim(\mu',\nu',i')$$

当且仅当 $\partial_i s_\nu$ 和 $\partial_{i'} s_{\nu'}$ 的范式相等。令 $[\mu,\nu,i]\in I/\sim$ 表示一个等价类，并定义

$$g_{[\mu,\nu,i]} := \sum_{(\mu,\nu,i)\in[\mu,\nu,i]} (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)}\partial_i g_{\mu,\nu}(x\otimes y).$$

若 $(\mu_0,\nu_0,i_0)\notin[\mu,\nu,i]$，则 $\partial_{i_0}s_{\nu_0}x\neq\partial_i s_{\nu_i}x$。因此，其他等价类中的项无法抵消 $g_{[\mu,\nu,i]}$。因此，由于不允许 $g_{[\mu,\nu,i]}$，它必为零（否则 $\partial g\nabla'_X(x\otimes y)$ 将不被允许，矛盾）。

此外，每个 $g_{[\mu,\nu,i]}$ 都可写为

$$\begin{aligned}(\partial_i s_\nu x,\, \partial_i s_\nu\big[s_0\sigma(x)\cdots(s_0)^p\sigma((\partial_0)^{p-1}x)\big]\cdot y^+_{[\mu,\nu,i]})- \\ (\partial_i s_\nu x,\, \partial_i s_\nu\big[s_0\sigma(x)\cdots(s_0)^p\sigma((\partial_0)^{p-1}x)\big]\cdot y^-_{[\mu,\nu,i]}),\end{aligned}$$

其中

$$y^+_{[\mu,\nu,i]} = \sum_{\substack{(\mu,\nu,i)\in[\mu,\nu,i]\\ (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)+i}=1}} \partial_i s_\mu y \quad\text{and}\quad y^-_{[\mu,\nu,i]} = \sum_{\substack{(\mu,\nu,i)\in[\mu,\nu,i]\\ (-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)+i}=-1}} \partial_i s_\mu y.$$

由于 $g_{[\mu,\nu,i]}=0$，我们得出 $y^+_{[\mu,\nu,i]}-y^-_{[\mu,\nu,i]}=0$。因此，

$$h_{[\mu,\nu,i]} = \Big(\partial_i s_\nu x,\, \partial_i s_\nu\big[(s_0)^r\tau((\partial_0)^{r-1}x)\cdots s_0\tau(x)\big]\cdot\big(y^+_{[\mu,\nu,i]}-y^-_{[\mu,\nu,i]}\big)\Big)=0.$$

最后，$\partial(h\nabla'_{X,\,F}(x\otimes y))$ 中不允许项的总贡献为

$$\sum_{(\mu,\nu,i)\in I}(-1)^{\mathrm{sgn}(\mu,\nu)}\partial_i h_{\mu,\nu}(x\otimes y) = \sum_{[\mu,\nu,i]\in I/\sim} h_{[\mu,\nu,i]} = 0.$$

因此， $\partial(h\nabla'_{X,\,F}(x\otimes y))$ 是允许的，因此

$$h\nabla'_{X,F}(x\otimes y)\in B_p/B_{p-1}.$$

$\hat{}$ 声称 $\hat{}g$ 和 h 互为逆映射，直接源于 g 和 h 互为逆映射这一事实。□

定理 4.5. 在引理 *4.1* 的假设下，*Szczarba* 扭曲洗牌映射的限制

$$\psi_\omega := \psi|_{\mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M)} : (\mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M),\partial_{t_{\mathrm{Sz}}})\to(\Omega_\bullet(X\square_\tau F),\partial)$$

是链复形之间的同构。特别地，它诱导出同调上的同构。此外，该构造关于 G-不变标记单纯子集是自然的。换言之，若 $(F,M')\subset(F,M)$ 是一个 G-不变标记单纯子集，则包含映射诱导出如下链复形的交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F',M) & \xrightarrow{\psi_\omega} & \Omega_\bullet(X\square_\tau F') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{N}(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M) & \xrightarrow{\psi_\omega} & \Omega_\bullet(X\square_\tau F),
\end{array}$$

因此，所诱导的同构关于此类包含映射是自然的。

证明。 回顾一下， $A_p=\bigoplus_{q\le p}\mathsf{N}q(X)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(F,M)$ 和 $B_p=\Omega_\bullet(\mathrm{skel}_p(X)\square_\tau F)$ 是链复形的递增滤过。由于 $\psi'=\hat{}g\nabla'_{X,F}$ 根据（4.10），且 $\hat{}g$ 和 $\nabla'_{X,F}$ 都是同构，可得 ψ': $A_p/A_{p-1}\to B_p/B_{p-1}$ 是一个同构。

现在我们通过对 p 进行归纳，证明 ψ_ω的限制

$$\psi_\omega\colon A_p\to B_p$$

是一个同构。对于 $p=0$的情形，注意到 A_0 由 $x\otimes f$生成，其中 $x\in X_0$和 $f\in\Omega_\bullet(F,\ M)$；而 B_0由配对 $(s_0^r x,\ f)$ 生成，其中$x\in X_0$和 $f\in\Omega_r(F,\ M)$。于是 ψ_ω将 $(x,\ f)$ 映射到 $(s_0^r x,\ f)$，这显然是一个同构。

假设 ψ_ω: $A_{p-1}\to B_{p-1}$ 是一个同构。考虑以下由短正合列构成的图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_{p-1} & \longrightarrow & A_p & \longrightarrow & A_p/A_{p-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\psi_\omega} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_\omega} & & \downarrow{\scriptstyle\psi'} & & \\
0 & \longrightarrow & B_{p-1} & \longrightarrow & B_p & \longrightarrow & B_p/B_{p-1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

根据归纳假设，左侧的垂直映射是一个同构。我们已经证明，右侧的垂直映射 ψ' 也是一个同构。因此，根据五引理，中间的垂直映射也是一个同构。由此， ψ_ω 是一个同构。特别地，它在同调上诱导出一个同构。

关于 G-不变标记单纯子集的自然性，直接由 Szczarba 扭曲余链的函子性以及扭曲洗牌映射 ψ 的定义得出。□

5. 等变路径（上）同调

5.1. **Borel 构造**。令 G为一个单纯群。考虑其万有G-丛 $EG \to BG$；例如参见 [19, §21]。若 G 从左侧作用于单纯集合 X，则 X 的 Borel 构造定义为商空间

$$EG \times_G X := (EG \times X)/G,$$

其中 G 对 $EG \times X$ 的作用由下式给出

$$h(g_n, g_{n-1}, \dots, g_0, x) = (g_n h, g_{n-1}, \dots, g_0, h^{-1}x)$$

对于 $h \in G_n$、$g_i \in G_i$ 和 $x \in X_n$。Borel 构造也记作 X_G。

引理 5.1。设(X, M) 是一个标记单纯 G集合。假设对所有的 $x \in X_0$和 $g \in G_1$，$gs_0(x)$ 这个 1-单形都是退化的。那么这一对

$$(EG \times_G X, ((EG)_1 \square M)/G_1)$$

是一个标记单纯集合。

证明。只需证明 G在 $EG \times X$上的作用保留 $(EG)_1 \square M$中的标记边。注意，$(EG)_1 \square M$ 中的标记边有两种类型：

$$(g_1, g_0, s_0(m)) \quad \text{for } g_i \in G_i \text{ and } m \in X_0,$$
$$(s_0(g_0), 1, m) \quad \text{for } g_0 \in G_0 \text{ and } m \in M.$$

设 $h \in G_1$。在第一种情况下，我们有

$$h(g_1, g_0, s_0(m)) = (g_1 h, g_0, h^{-1}s_0(m))).$$

由于根据假设，$h^{-1}s_0(m)$是退化的，因此这个单形在 $(EG)_1 \square M$中是标记的。在第二种情况下，我们计算得

$$h(s_0(g_0), 1, m) = (s_0(g_0)h, 1, h^{-1}m).$$

这里，$(s_0(g_0)h, 1)$在 EG中仍然是退化的，并且由于 $m \in M$ 且 M中的标记边是 G-不变的，因此有 $h^{-1}m \in M$。所以单形 $h(s_0(g_0)\,1, m)$ 同样是标记的。

因此，标记边在 G-作用下保持不变，从而在商单纯集合上诱导出一个标记。□

定义 5.2。设 (X, M) 是一个标记单纯 G-集合，并满足上述引理的条件。(X, M) 的 Borel 构造是标记单纯集合

$$(X, M)_G := (EG \times_G X, ((EG)_1 \square M)/G_1)\,.$$

(X, M) 的路径同调（分别地，上同调）$_G$ 称为 (X, M) 的等变路径同调（分别地，上同调）。

另一方面，回顾一下，存在一个扭曲函数

$$\tau_G \colon (BG)_{n+1} = G_n \times \cdots \times G_0 \to G_n$$

由投影到第一个因子给出。设 G 从左侧作用于标记单纯集合 (X, M)。我们得到一个带标记扭曲笛卡尔积

$$(BG)^\sharp \square_{\tau_G} (X, M).$$

命题 5.3. 在引理 *5.1*的假设下，存在标记单纯集合的同构

$$(X, M)_G \cong (BG)^\sharp \square_{\tau_G} (X, M).$$

证明. 记 $[g,b,x]$ 为 $(g,b,x)\in EG_n\times X_n$ 的等价类。定义映射

$$\varphi\colon EG\times_G X\to BG\times_{\tau_G} X\quad \varphi[g,b,x]=(b,gx)$$

and

$$\psi\colon BG\times_{\tau_G} X\to EG\times_G X,\quad \psi(b,x)=\big[1_n,b,x\big],$$

其中 1_n 是 G_n的群单位元。经快速检验可知， φ， ψ 是单纯映射，且互为逆映射。

为证明 φ 和 ψ 保持标记边，我们分几种情况讨论。若 $(g,\ b)$ 在 EG_1和 $x\in M$中是退化的，则 b在 BG_1和 $gx\in M$中是退化的。若 x在 X_1中是退化的，则根据假设， gx 也退化。因此， φ 保持标记。反过来，若 x 退化，则 $[1_n,b,x]$ 在 $EG\times_G X$中是标记的。若 b在 BG_1和 $x\in M$中是退化的，则 $(1_1,$ $b)$ 在 EG_1中是退化的。因此 $\psi(b,\ x)$ 是标记的。所以 ψ 也保持标记边。□

推论 5.4。 存在一个链复形的同构

$$\mathsf{N}(BG)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(X,M)\to\Omega_\bullet\big((X,M)_G\big),$$

它关于 G-不变标记单纯子集 X'、 M'） $\to$（X、 M） 的包含映射是自然的。

证明。 应用定理 4.5 于带标记扭曲笛卡尔积

$$(BG)^\sharp\square_{\tau_G}(X,M)$$

可得一个同构

$$\mathsf{N}(BG)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(X,M)\to\Omega_\bullet((BG)^\sharp\square_{\tau_G}(X,M)).$$

那么，该断言由命题 5.3得证。 □

6. Borel construction of directed graphs

有向图 $\mathsf{G}=(V,E)$ 由一个顶点集合 V和一个有向边集合 $E\subset V\times V$构成。本文遵循 [15]，假设 $E^D=\{(v,v)\mid v\in V\}\subset E$，这与图论中的通常约定不同。边 (v,v) 是退化的。非退化边 $(u,v)\in E$ 表示为 $u\to v$，而退化边不予绘出（可以将它们看作“幽灵环”）。

6.1. GLMY路径链回顾。 考虑由所有满足每一对相邻顶点互不相同的 $(n+1)$ 元顶点组生成的自由 $\Bbbk$-模 $\mathcal{R}_n(V)$。与元组 $(v_0,v_1,\dots,v_n)$ 对应的 $\mathcal{R}_n(V)$ 的基元素记为 $e_{v_0,v_1,\dots,v_n}$。边界算子 $\partial\colon\mathcal{R}_n(V)\to\mathcal{R}_{n-1}(V)$ 定义为

$$\partial e_{v_0,v_1,\dots,v_n}=\sum_{\substack{0\le i\le n\\ v_{i-1}\neq v_{i+1}}}(-1)^i e_{v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n}. \tag{6.1}$$

对于 $n\ge 0$，-路径 在$\mathcal{G}$中是一个 $(n+1)$ 元组 $(v_0,\ v_1,\ \dots,\ v_n)$，满足

$$(v_{i-1},v_i)\in E\text{ and }v_{i-1}\neq v_i\text{ for all }1\le i\le n.$$

记 $\mathcal{A}_n(\mathcal{G})\subset\mathcal{R}_n(V)$ 为由 n-路径生成的 $\mathcal{G}$ 的子模。一般来说， ∂ 在 (6.1) 中的算子不保持 $\mathcal{A}_n(\mathcal{G})$。

为得到一个链复形，定义 $\Omega_n(\mathcal{G})\subset\mathcal{A}_n(\mathcal{G})$，它由边界属于 $\mathcal{A}_{n-1}(\mathcal{G})$ 的那些元素构成，即:

$$\Omega_n(\mathcal{G})=\{x\in\mathcal{A}_n(\mathcal{G})\mid\partial x\in\mathcal{A}_{n-1}(\mathcal{G})\}.$$

∂ 在 $\Omega_n(\mathcal{G})$ 上的限制给出一个链复形

$$(\Omega_\bullet(\mathcal{G}), \partial).$$

其同调即$\mathcal{G}$的*GLMY* 路径同调，记作 $\mathrm{PH}_*(\mathcal{G})$。

GLMY 路径同调可以用标记单纯集合的路径同调语言自然地解释。对于有向图$\mathcal{G} = (V, E)$，我们关联一个标记单纯集合

$$\mathfrak{X}(\mathcal{G}) = (\mathsf{Nrv}(\mathcal{G}), E).$$

这里，$\mathsf{Nrv}(\mathcal{G})$ 是$\mathcal{G}$的神经，这是一个单纯集合，其 n-单形是由顶点组成的 $(n+1)$-元组（$v_0, v_1, \ldots, v_n$），其中对于所有 $1 \le k \le n$，都存在一条从 v_{k-1} 到 v_k 的路径。对于 $0 \le i \le n$，面算子

$$\partial_i \colon \mathsf{Nrv}_n(\mathcal{G}) \to \mathsf{Nrv}_{n-1}(\mathcal{G})$$

删除第 i 个顶点，而退化算子

$$s_i \colon \mathsf{Nrv}_n(\mathcal{G}) \to \mathsf{Nrv}_{n+1}(\mathcal{G})$$

将第 i 个顶点复制；参见 [11, 定义 3。2]。标记边集合为 E，由所有非退化边 $u \to v$ 和退化边 (v, v)组成。

备注 6.1. 根据定义， $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$ 的允许单形对应于$\mathcal{G}$中的路径，因此 $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$ 的路径同调与$\mathcal{G}$的 GLMY 路径同调一致。相应的上同调也同样如此。

6.2. **Borel 构造**。 若离散群 Γ 以保留有向边的方式从左作用于顶点集 V，则称其从左作用于有向图 $\mathcal{G} = (V, E)$。也就是说，对于任意的 $(u, v) \in E$ 和 $\gamma \in \Gamma$，有 $\gamma(u, v) = (\gamma u, \gamma v) \in E$. 这样的图称为有向 Γ-图。

例 6.2. 可以如下从一个单纯 Γ-复形得到有向 Γ-图。如 [7], 中所述，可以将有向图 $\mathcal{G}_K$ 赋予单纯复形 K：令$\mathcal{G}_K$ 的顶点为 K的单形，并在 σ 与 τ 之间连一条有向边，当且仅当 τ 是 σ的余维一面。若 K 是一个单纯Γ-复形（换言之， Γ 作用于 K 的顶点集，并且保持其单形不变），那么在单形上诱导出的作用便使$\mathcal{G}_K$ 成为一个有向 Γ-图。

设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个有向 Γ-图。将 Γ 视为常值单纯群 Γ，其中对任意 $n \ge 0$，有 $(\Gamma)_n = \Gamma$，且所有面映射和退化映射都是恒等映射。于是，标记单纯集合 $\mathfrak{X}(\mathcal{G}) = (\mathsf{Nrv}(\mathcal{G}) \ E)$ 继承了自然的Γ-作用。具体而言，对于任意单形 $(v_0, \ldots, v_n) \in \mathsf{Nrv}_n(\mathcal{G})$ 以及任意 $\gamma \in (\Gamma)_n = \Gamma$， Γ 在 $\mathsf{Nrv}(\mathcal{G})$ 上的作用定义为

$$\gamma(v_0, \ldots, v_n) = (\gamma v_0, \ldots, \gamma v_n).$$

此外，若 $(v_0, v_1) \in E$，也就是说， $v_0 = v_1$ ，或者存在一条从 v_0 到 v_1 的有向边，则对于任意 $\gamma \in (\Gamma)_1 = \Gamma$，有

$$\gamma(v_0, v_1) = (\gamma v_0, \gamma v_1) \in E,$$

因为 $\gamma v_0 = \gamma v_1$ ，或者存在一条从 γv_0 到 γv_1 的有向边。

设 $E\Gamma \to B\Gamma$ 为万有 Γ-丛。为简便起见，我们将用 $E\Gamma \to B\Gamma$表示下文中的此单纯纤维丛。我们将验证标记单纯集合的盒积$(E\Gamma)_\sharp$ 与$(\mathsf{Nrv}(\mathcal{G}) \ E)$ 满足引理5.1的条件。

引理 6.3. 若 $v \in V$ 与 $\gamma \in (\Gamma)_1 = \underline{\Gamma}$，则 $\gamma s_0(v)$ 是退化的。因此，该对

$$(E\Gamma \times_\Gamma \mathsf{Nrv}(\mathcal{G}), ((E\Gamma)_1 \square E)/\Gamma)$$

是一个标记单纯集合。

证明。显然，$\gamma s_0(v) = \gamma(v,v) = (\partial_0\gamma v, \partial_0\gamma v) = s_0(\partial_0\gamma v)$。因此，引理 5.1 表明 $(E\Gamma \times_\Gamma \mathsf{Nrv}(\mathcal{G}), ((E\Gamma)_1 \square E)/\Gamma)$ 是一个标记单纯集合。□

定义 6.4。 设 $\mathcal{G}$ 是一个有向 Γ-图。$\mathcal{G}$ 的 *Borel* 构造 定义为标记单纯集合

$$\mathcal{G}_\Gamma := (E\Gamma \times_\Gamma \mathsf{Nrv}(\mathcal{G}), ((E\Gamma)_1 \square E)/\Gamma).$$

定义 G 的（*Borel* 型）等变路径同调和上同调为

$$\mathrm{PH}_*^\Gamma(\mathcal{G}) := \mathrm{PH}_*(\mathcal{G}_\Gamma) \text{ and } \mathrm{PH}^*_\Gamma(\mathcal{G}) := \mathrm{PH}^*(\mathcal{G}_\Gamma).$$

推论5.4 给出了链复形的自然同构

$$\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G}) \to \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma).$$

在描述 $\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G})$ 的微分之前，我们先固定路径链上诱导的 Γ-作用的记号。

$\mathcal{G}$ 上的 Γ-作用按如下方式诱导路径链复形 $\Omega_\bullet(\mathcal{G})$ 上的一个左作用

$$\gamma \cdot \left(\sum_{\mathsf{p}} \alpha_{\mathsf{p}} e_{\mathsf{p}}\right) = \sum_{\mathsf{p}} \alpha_{\mathsf{p}} e_{\gamma\cdot\mathsf{p}} \tag{6.2}$$

其中 $\gamma \in \Gamma$ 与 $\sum_{\mathsf{p}} \alpha_{\mathsf{p}} e_{\mathsf{p}} \in \Omega_\bullet(\mathcal{G})$，且 $\alpha_{\mathsf{p}} \in \Bbbk$ 与 p 取遍 $\mathcal{G}$ 的路径。

命题 6.5. 存在链复形的同构

$$(\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G}), \partial_{t_{\mathrm{Sz}}}) \to (\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma), \partial),$$

该同构关于任意 Γ-等变包含 $G' \subset G$ 是自然的。此外，微分 $\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}$ 具有如下形式

$$\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x \otimes w) = \begin{cases} [\,] \otimes (\partial w) & \text{if } x = [\,] \in (B\Gamma)_0; \\ (\partial x) \otimes w + (-1)^n x \otimes (\partial w) & \\ \quad +(-1)^n (x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes (x_n^{-1} \cdot w - w) & \text{if } n \geq 1, \end{cases} \tag{6.3}$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in (B\Gamma)_n$, $w \in \Omega_\bullet(\mathcal{G})$ 且 $x_n^{-1} \cdot w$ 定义于 (6.2)。

证明。由于 $\underline{\Gamma}$是常值单纯群，定义于（$\mathrm{Sz}_{\boldsymbol{i}}$ 2.7）中的算子可化为

$$\mathrm{Sz}_{\boldsymbol{i}}(x) = \sigma(x)\,\sigma(\partial_0 x) \cdots \sigma((\partial_0)^{n-1} x), \quad \text{for } x \in (B\Gamma)_n,\ n \geq 1. \tag{6.4}$$

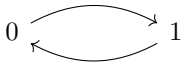
因此，Szczarba 扭曲余链 $t_{\mathrm{Sz}}\colon \mathsf{N}_n(B\Gamma) \to \mathsf{N}_{n-1}(\Gamma)$ 具有如下形式

$$t_{\mathrm{Sz}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0; \\ x_1^{-1} - 1 & \text{if } n = 1; \\ \sum_{\boldsymbol{i} \in S_{n-1}} (-1)^{|\boldsymbol{i}|} \mathrm{Sz}_{\boldsymbol{i}}(x) = 0 & \text{if } n \geq 2. \end{cases} \tag{6.5}$$

这里，对于 $n = 1$，单形 $x = (x_1) \in (B\Gamma)_1$ 是非退化的（即 $x_1 \neq 1$，Γ的单位元）。对于 $n \geq 2$，$t_{\mathrm{Sz}}(x)$ 由（6.4）以及等式$\sum_{\boldsymbol{i} \in S_{n-1}} (-1)^{|\boldsymbol{i}|} = 0$（当 $n \geq 2$时）可知其为零。

将式（2.1）应用于扭曲余链（6.5），即可得到微分的所述公式 $\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}$。□

例6.6。 假设 $\Bbbk = \mathbb{Z}$。令$\mathcal{G}$ 为顶点集为$\{0,1\}$且有向边为 $0 \to 1, 1 \to 0.$ 的有向图



假设 $\Gamma = \mathbb{Z}/2 = \langle\alpha\rangle$ 通过 $\alpha \cdot 0 = 1$ 和 $\alpha \cdot 1 = 0.$ 作用于 $\mathcal{G}$。此作用保持有向边，因此在$\mathcal{G}$上定义了一个作用。

对于每个 $n \geq 0$， $B\mathbb{Z}_2$ 中都存在唯一的非退化 n-单形，即

$$x_0 = [\,], \qquad x_n = (\alpha, \ldots, \alpha) \in (B\mathbb{Z}_2)_n \text{ with } n \geq 1. \tag{6.6}$$

对于 $k \geq 0$，令 p_k 和 q_k 分别表示从顶点 $\mathsf{0}$ 和顶点 $\mathsf{1}$ 出发的长度为 k 的路径。特别地，$\mathsf{p}_0 = (\mathsf{0})$ 和 $\mathsf{q}_0 = (\mathsf{1})$。 $\mathbb{Z}/2$ 作用交换 p_k 和 q_k。

路径微分 (6.1) 满足

$$\begin{aligned} \partial e_{\mathsf{p}_0} &= 0, & \partial e_{\mathsf{q}_0} &= 0, \\ \partial e_{\mathsf{p}_k} &= e_{\mathsf{q}_{k-1}} + (-1)^k e_{\mathsf{p}_{k-1}}, & \partial e_{\mathsf{q}_k} &= e_{\mathsf{p}_{k-1}} + (-1)^k e_{\mathsf{q}_{k-1}}. \end{aligned}$$

因此，对于每个 $k \geq 0$，我们有 $\Omega_k(\mathcal{G}) = \mathbb{Z} \cdot \{e_{\mathsf{p}_k}, e_{\mathsf{q}_k}\}$。 $\mathcal{G}$ 的等变路径同调由以下链复形计算得出

$$\mathsf{N}_n(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_k(\mathcal{G}),$$

其微分由命题6.5给出。

若 $n = 0$ 且 $k \geq 1$，则

$$\begin{aligned} \partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_0 \otimes e_{\mathsf{p}_0}) = 0, \quad \partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_0 \otimes e_{\mathsf{q}_0}) = 0, \\ \partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_0 \otimes e_{\mathsf{p}_k}) = x_0 \otimes (e_{\mathsf{q}_{k-1}} + (-1)^k e_{\mathsf{p}_{k-1}}), \\ \partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_0 \otimes e_{\mathsf{q}_k}) = x_0 \otimes (e_{\mathsf{p}_{k-1}} + (-1)^k e_{\mathsf{q}_{k-1}}). \end{aligned}$$

若 $n,\ k \geq 1$，则

$$\begin{aligned} &\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_n \otimes e_{\mathsf{p}_0}) = x_{n-1} \otimes (e_{\mathsf{p}_0} + (-1)^n e_{\mathsf{q}_0}), \\ &\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_n \otimes e_{\mathsf{q}_0}) = x_{n-1} \otimes ((-1)^n e_{\mathsf{p}_0} + e_{\mathsf{q}_0}), \\ &\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_n \otimes e_{\mathsf{p}_k}) = (-1)^n x_n \otimes ((-1)^k e_{\mathsf{p}_{k-1}} + e_{\mathsf{q}_{k-1}}) + x_{n-1} \otimes (e_{\mathsf{p}_k} + (-1)^n e_{\mathsf{q}_k}), \\ &\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_n \otimes e_{\mathsf{q}_k}) = (-1)^n x_n \otimes (e_{\mathsf{p}_{k-1}} + (-1)^k e_{\mathsf{q}_{k-1}}) + x_{n-1} \otimes ((-1)^n e_{\mathsf{p}_k} + e_{\mathsf{q}_k}). \end{aligned}$$

固定 $i \geq 1$。按如下顺序排列 i 次分量 $(\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes \Omega(\mathcal{G}))_i$ 的基:

$$\{x_0 \otimes e_{\mathsf{p}_i}, x_0 \otimes e_{\mathsf{q}_i}, x_1 \otimes e_{\mathsf{p}_{i-1}}, x_1 \otimes e_{\mathsf{q}_{i-1}}, \ldots, x_i \otimes e_{\mathsf{p}_0}, x_i \otimes e_{\mathsf{q}_0}\}.$$

按照此顺序，微分

$$\partial_{t_{\mathrm{Sz}}} \colon (\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes \Omega(\mathcal{G}))_i \to (\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes \Omega(\mathcal{G}))_{i-1}$$

由矩阵（6.7）表示，若 i 为奇数，并由（6.8）表示，若 i 为偶数。这里这两类矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & -B_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & -A_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 & -B_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_i & -A_i \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

and

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & A_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 & A_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{i-1} & B_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_i & A_i \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

其中

$$A_\ell = \begin{pmatrix} (-1)^i & 1 \\ 1 & (-1)^i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_\ell = \begin{pmatrix} (-1)^i & -1 \\ -1 & (-1)^i \end{pmatrix}, \ 1 \le \ell \le i.$$

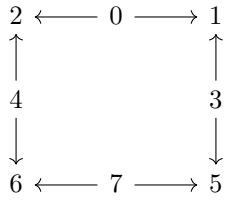
直接计算可得，(6.7) 和 (6.8) 的史密斯范数形为

$$\begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} I_i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 I_i 是秩为 i. 的单位矩阵。因此，我们得出

$$\mathrm{PH}_i^\Gamma(\mathcal{G};\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } i = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } i > 0 \text{ is odd}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例6.7。 我们考虑下图所示的有向图 $\mathcal{G} = (V, E)$。



令 $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \langle\alpha\rangle$。 α 在 V 上的作用是交换顶点

$$0 \leftrightarrow 7, \qquad 1 \leftrightarrow 6, \qquad 2 \leftrightarrow 5, \qquad 3 \leftrightarrow 4.$$

此作用保持有向边，因此 $\mathcal{G}$ 是一个有向 $\mathbb{Z}_2$-图。

由于$\mathcal{G}$ 不存在长度为 ≥ 2 的有向路径，因此

$$\Omega_i(\mathcal{G}) = 0 \quad \text{for } i \ge 2.$$

因此，对于 $n \ge 0$，有

$$\begin{aligned} &\mathsf{N}_n(B\mathbb{Z}_2) \otimes \Omega_0(\mathcal{G}) = \Bbbk \cdot \{\, x_n \otimes e_v \mid v \in V \,\}, \\ &\mathsf{N}_n(B\mathbb{Z}_2) \otimes \Omega_1(\mathcal{G}) = \Bbbk \cdot \{\, x_n \otimes e_{vw} \mid (v,w) \in E,\ v \ne w \,\}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

我们将对上述基元素应用（6.3）。

若 $n = 0$，则微分为

$$\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_0 \otimes e_v) = 0, \qquad \partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_0 \otimes e_{vw}) = x_0 \otimes (e_w - e_v).$$

因此 $\mathrm{PH}_0^\Gamma(\mathcal{G};\, \Bbbk) = \Bbbk$.

如果 $n \ge 1$，则对于 $v \in V$，我们有

$$\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_n \otimes e_v) = x_{n-1} \otimes (e_v + (-1)^n e_{\alpha\cdot v}) \tag{6.10}$$

并且对于 $(v,w)\in E$ 且 $v\neq w$，我们有

$$\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}(x_n\otimes e_{vw})=(-1)^n x_n\otimes(e_w-e_v)+x_{n-1}\otimes(e_{vw}+(-1)^n e_{\alpha\cdot v,\alpha\cdot w}).$$

1 次圈由以下元素张成

$$e_{02}-e_{42}+e_{46}-e_{76}+e_{75}-e_{35}+e_{31}-e_{01},$$
$$x_1\otimes(e_0+e_7),\ x_1\otimes(e_1+e_6),\ x_1\otimes(e_2+e_5),\ x_1\otimes(e_3+e_4).$$

根据（6.10），后四个圈 $x_1\otimes(x_v+x_{\alpha\cdot v})$ 是边界，因此第一个圈生成同调。因此 $\mathrm{PH}_1^{\Gamma}(\mathcal{G};\ \Bbbk)\cong\Bbbk$。

当 $n\geq 2$ 时，微分

$$\partial_{t_{\mathrm{Sz}}}\colon \mathsf{N}_{n-i}(B\mathbb{Z}_2)\otimes\Omega_i(\mathcal{G})\to\mathsf{N}_{n-i-1}(B\mathbb{Z}_2)\otimes\Omega_i(\mathcal{G})\oplus\mathsf{N}_{n-i}(B\mathbb{Z}_2)\otimes\Omega_{i-1}(\mathcal{G})$$

由一个 16×16 整数矩阵相对于基（6.9）表示。其史密斯标准形为

$$\begin{pmatrix} I_8 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此，我们得出

$$\mathrm{PH}_n^{\Gamma}(\mathcal{G};\Bbbk)=\begin{cases}\Bbbk & \text{if } n=0,1;\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

6.3. **对偶情形。** 在本小节中，我们在域 $\mathbb{F}$上工作，并假设$\mathcal{G}$ 是一个有限有向 Γ-图，其中 Γ 是有限的。设 $\Omega^\bullet(\mathcal{G})$与 $\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)$为系数在 $\mathbb{F}$上的路径上链代数。则命题 2.6蕴含

$$\Omega^\bullet(\mathcal{G})\cong\Omega_\bullet(\mathcal{G})^\vee\quad\text{and}\quad\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)\cong\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)^\vee \tag{6.11}$$

其中 $\Omega_\bullet(\mathcal{G})^\vee=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Omega_\bullet(\mathcal{G})\ \mathbb{F})$ 且 $\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)^\vee=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)\ \mathbb{F})$。

由于每个 $\mathsf{N}_k(B\Gamma)$ 与 $\Omega_\ell(\mathcal{G})$ 均为有限生成（这是由于假设 Γ与 $\mathcal{G}$ 均为有限），$\mathsf{N}(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(\mathcal{G})$ 的对偶等同于这些对偶的张量积，即

$$\big(\mathsf{N}(B\Gamma)\otimes\Omega_\bullet(\mathcal{G})\big)^\vee\cong\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma)\otimes\Omega_\bullet(\mathcal{G})^\vee.$$

结合等同（6.11），我们得到一个同构

$$\big(\mathsf{N}(B\Gamma)\otimes\Omega_\bullet(\mathcal{G})\big)^\vee\cong\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma)\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{G}). \tag{6.12}$$

为了描述 $\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma)\otimes\Omega^\bullet(\mathsf{G})$ 上的对偶微分，我们首先定义 (6.2) 中给出的 $\Omega_\bullet(\mathsf{G})$ 上 Γ-作用的对偶。令 $\theta\colon\Omega^\bullet(\mathsf{G})\to\Omega_\bullet(\mathsf{G})^\vee$ 表示 (6.11) 中的第一个同构。对于 $\gamma\in\Gamma$ 和 $u\in\Omega^\bullet(\mathsf{G})$，用公式定义 $\gamma\wedge u\in\Omega^\bullet(\mathsf{G})$：

$$\theta(\gamma\wedge u)(w)=\theta(u)(\gamma\cdot w),\quad w\in\Omega_\bullet(\mathcal{G}).$$

对于一个非退化的 k-单形 $x=(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_k)$，令 $x^*\in\mathsf{N}^k(B\Gamma)$ 为对应于 x 的对偶基元素。(6.3) 的对偶具有如下形式

$$\begin{aligned}\delta_{t_{\mathrm{Sz}}}(x^*\otimes u)&=\delta(x^*)\otimes u+(-1)^k x\otimes\partial(u)\\ &\quad+\sum_{h\in\Gamma\setminus\{1\}}(-1)^k(x_1,\ldots,x_k,h)^*\otimes(h^{-1}\wedge u-u).\end{aligned} \tag{6.13}$$

我们将配备微分 $\delta_{t_{\mathrm{Sz}}}$ 的上链复形 $\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma)\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{G})$ 记作 $\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega^\bullet(\mathcal{G})$。

命题 6.8。设 G 是一个有限有向 Γ-图，其中 Γ 是有限的。在域 $\mathbb{F}$ 上，存在上链复形的同构

$$\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma) \to \mathsf{N}^\bullet(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega^\bullet(\mathcal{G}),$$

它关于有向图的 Γ-等变包含映射具有自然性。

证明。根据命题 6.5，存在一个链复形的同构

$$\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma). \tag{6.14}$$

由于 $\mathbb{F}$ 是一个域，线性同构的对偶仍是线性同构，其逆由逆映射的对偶化给出。因此，应用反变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(-, \mathbb{F})$ 可得一个上链复形的同构

$$\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)^\vee \xrightarrow{\cong} \big(\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G})\big)^\vee.$$

右侧可通过同构 $\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega^\bullet(\mathcal{G})$ 识别，其中依据的是（6.12），在该同构下，对偶微分 $\delta_{t_{\mathrm{Sz}}}$ 由（6.13）描述。左侧同构于 $\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)$，证明至此完成。

关于 Γ-等变有向图包含映射的自然性，源于（6.14）及其对偶化的自然性。□

6.4. **相对情形**。设$\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ 是一个 Γ-不变子有向图。定义成对对象 $(\mathcal{G},\mathcal{G}')$ 的相对Borel型等变路径同调为商复形的同调

$$\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma, \mathcal{G}'_\Gamma) := \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)/\Omega_\bullet(\mathcal{G}'_\Gamma), \tag{6.15}$$

并记为 $\mathrm{PH}^\Gamma_*(\mathcal{G},\mathcal{G}')$。

命题6.5有如下相对版本。

命题 6.9。设 $\Bbbk$ 是一个主理想整环。存在链复形的一个同构

$$\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}') \longrightarrow \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma, \mathcal{G}'_\Gamma).$$

证明。包含映射 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ 诱导出链复形的一个短正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_\bullet(\mathcal{G}') \longrightarrow \Omega_\bullet(\mathcal{G}) \longrightarrow \Omega_\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}') \longrightarrow 0.$$

每个 $\mathsf{N}_n(B\Gamma)$ 都是自由 $\Bbbk$-模，而 $\mathsf{N}(B\Gamma)$ 是 $\mathsf{N}_n(B\Gamma)$'s 的一个直和项。因此，普通张量积函子 $\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes (-)$ 是正合的。将其应用于上述序列，可得一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathsf{N}(B\Gamma) \otimes \Omega_\bullet(\mathcal{G}') \longrightarrow \mathsf{N}(B\Gamma) \otimes \Omega_\bullet(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathsf{N}(B\Gamma) \otimes \Omega_\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}') \longrightarrow 0. \tag{6.16}$$

另一方面，Borel 构造给出了一个短正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_\bullet(\mathcal{G}'_\Gamma) \longrightarrow \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma) \longrightarrow \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma, \mathcal{G}'_\Gamma) \longrightarrow 0. \tag{6.17}$$

根据命题 6.5，同构

$$\mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G}) \to \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)$$

在有向图的 Γ-等变包含映射下是自然的。将此应用于包含映射 $G' \to G$，我们得到一个链复形的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G}') & \longrightarrow & \Omega_\bullet(\mathcal{G}'_\Gamma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{N}(B\Gamma) \otimes_{t_{\mathrm{Sz}}} \Omega_\bullet(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma), \end{array}$$

其中水平映射是拟同构，垂直映射由包含映射诱导。取商后，我们得到一个诱导态射

$$\mathsf{N}(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\big(\Omega_\bullet(\mathcal{G})/\Omega_\bullet(\mathcal{G}')\big)\to\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)/\Omega_\bullet(\mathcal{G}'_\Gamma),$$

这就是所声称的映射

$$\mathsf{N}(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}')\to\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma). \tag{6.18}$$

由（6.16）和（6.17）关联的同调长正合列表明，诱导映射（6.18）也是一个拟同构。□

设 $\mathcal{G}'\subset\mathcal{G}$ 是一个 Γ-不变有向子图，并设 $\Bbbk=\mathbb{F}$ 是一个域。定义相对上链复形如下：

$$\Omega^\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}')=\ker(\Omega_\bullet(\mathcal{G})^\vee\to\Omega_\bullet(\mathcal{G}')^\vee),$$
$$\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma)=\ker(\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma)^\vee\to\Omega_\bullet(\mathcal{G}'_\Gamma)^\vee),$$

其中 $(-)^\vee$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 Hom 对偶。由于 $\mathbb{F}$ 是一个域，这些复形典范地同构于对偶复形

$$\Omega^\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}')\cong\Omega_\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}')^\vee\text{ and }\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma)\cong\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma)^\vee.$$

命题 6.10. 在与命题 *6.8*相同的假设下，存在上链复形的同构

$$\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma)\to\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega^\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}'),$$

其中右端表示张量积 $\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma)\otimes\Omega^\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}')$ 配备由 (6.13)诱导的微分。

证明. 由命题 6.9，存在链复形的同构

$$\mathsf{N}(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}')\to\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma).$$

应用 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(-,\mathbb{F})$ 并利用域上的正合性，得到一个同构

$$\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma)^\vee\to\big(\mathsf{N}(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega_\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}')\big)^\vee.$$

由于 Γ 与 $\mathcal{G}$ 按假设是有限的，每个 $\mathsf{N}_k(B\Gamma)$ 与 $\Omega_\ell(\mathcal{G},\mathcal{G}')$ 都是有限生成的。因此，张量积的对偶被等同于对偶的张量积。再结合等同 $\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma)\cong\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma)^\vee$，即得该结果。□

假设从 $U=V_{\mathcal{G}}\setminus V_{\mathcal{G}'}$ 中的任意顶点到$\mathcal{G}'$的任意顶点都没有有向边。那么 [8,引理 3.10] 表明存在一个同构

$$\Omega_\bullet(\mathcal{G},\mathcal{G}')\cong\Omega^U_\bullet(\mathcal{G}) \tag{6.19}$$

其中 $\Omega^U_\bullet(\mathcal{G})=\Omega_\bullet(\mathcal{G})\cap\mathsf{A}^U(\mathcal{G})$，而 $\mathsf{A}^U(\mathcal{G})$ 表示由所有满足至少有一个顶点 v_i 属于 U 的路径（v_0，……，v_n）生成的 $\Bbbk$-模。

将（6.19）代入命题6.9，得到以下结果。

推论 6.11。设 G、G' 和 U 如上所述。

(1) 若 $\Bbbk$ 是主理想整环，则存在链复形的同构

$$\mathsf{N}(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega^U_\bullet(\mathcal{G})\to\Omega_\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma).$$

(2) 如果 $\Bbbk=\mathbb{F}$ 是一个域，那么存在一个上链复形的同构

$$\Omega^\bullet(\mathcal{G}_\Gamma,\mathcal{G}'_\Gamma)\to\mathsf{N}^\bullet(B\Gamma)\otimes_{t_{\mathrm{Sz}}}\Omega^U_\bullet(\mathcal{G})^\vee.$$

证明。 这直接由命题6.9、识别（6.19）及其对偶得出。 □

参考文献

[1] Y. Asao。幅度同调与路径同调。伦敦数学会公报，55 398，2023 1 375( ): – 。[2] A. Dimakis 和 F. Müller-Hoissen。离散微分演算：图、拓扑与规范理论。数学物理杂志，35(12):6703–6735，1994。[3] A. Dimakis 和 F. Müller-Hoissen。有限集上的微分演算与规范理论。物理学杂志 A，27(9):3159–3178，1994。[4] M. Franz。Szczarba 扭曲余链与 Eilenberg–Zilber 映射。Collectanea mathematica，72(3):569–586，2021。[5] M. Franz。Szczarba 扭曲余链是余乘的。同调与同伦应用，26:287–317，2024。[6] X. Fu 和 S. O. Ivanov。无多重方格有向图的路径同调及其与空间同调的比较。已被同调与同伦应用接收，arXiv:2407.17001，2024。[7] A. Grigor’yan、Y. Muranov 和 丘成桐。与单纯复形相关的图。同调与同伦应用，16(1):295–311，2014。[8] A. Grigor’yan、R. Jimenez、Y. Muranov 和 丘成桐。有向图的路径同调理论与 Eilenberg–Steenrod 公理。同调与同伦应用，20(2):179–205，2018。[9] A. Grigor’yan、Y. Lin、Y. Muranov 和 丘成桐。路径复形与有向图的同调。arXiv:1207.2834，2012。[10] A. Grigor’yan、Y. Lin、Y. Muranov 和 丘成桐。有向图的同伦理论。纯粹与应用数学季刊，10(4):619–674，2014。[11] R. Hepworth 和 E. Roff。有向图的可达性同调。国际数学研究通知，2025(3):rnae280，2025。[12] R. Hepworth 和 E. Roff。双分次路径同调与幅度-路径谱序列。arXiv:2404.06689，2024。[13] R. Hepworth 和 S. Willerton。图的幅度范畴化。同调与同伦应用，19:31–60，2017。[14] K. Hess 和 A. Tonks。环群与 cobar 构造。美国数学学会会刊，138(5):1861–1876，2010。[15] S. O. Ivanov 和 F. Pavutnitskiy。箭图、带标记范畴、群与代数的路径同调的单纯方法。伦敦数学学会杂志，109(1):e12812，2024。[16] T. Leinster。图的幅度。剑桥哲学学会数学学报，166(2):247–264，2019。[17] J. Li、Y. Muranov、J. Wu 和 丘成桐。有向图与箭图的奇异同调理论。已被组合学杂志接收，2025。[18] J. Lurie。高阶拓扑斯理论。普林斯顿大学出版社，2009。[19] J. P. May。代数拓扑中的单纯对象。芝加哥大学出版社，芝加哥，1992。[20] R. H. Szczarba。扭曲笛卡尔积的同调。美国数学学会汇刊，100(2):197–216，1961。[21] X. Tang 和 丘成桐。有向图的胞腔同调。已被亚洲数学杂志接收，arXiv:2402.05682v2，2024。上海数学与跨学科科学研究院（SIMIS），上海 200433，中国 电子邮件地址： x.fu@simis.cn丘成桐数学科学中心，清华大学，北京 100084，中国

电子邮件地址： styau@tsinghua.edu.cn