arXiv:2603.09407v1 [math.AT] 10 Mar 2026

关于非单连通空间的拓扑复杂度

Yuki Minowa

Abstract. 拓扑复杂度是一种数值型同伦不变量，用于衡量空间中运动规划的不稳定性。为研究非单连通空间的拓扑复杂度，Costa 和 Farber 引入了一种上同调类，其幂零性给出了拓扑复杂度的下界。Farber 和 Mescher 构造了一个谱序列，可以在无需直接计算的情况下求出这种幂零性。我们针对群同态推广了这些结果。作为应用，我们确定了若干基本群非阿贝尔的 3-流形的拓扑复杂度。

1. 引言

拓扑复杂度是 Farber 引入的一种数值型同伦不变量 [11] ，用于描述运动规划问题中的不稳定性。设 $\mathcal{P}X = \{\gamma\colon\ [0,1] \to X\}$ 表示路径空间，并考虑求值映射

$$\Pi\colon \mathcal{P}X \to X^2, \quad \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1))\,.$$

空间 X 的拓扑复杂度记为 TC(X)，定义为满足以下条件的最小整数： X^2 可由 $k+1$ 个具有Π的局部截面的开集覆盖。若这样的整数不存在，则令 TC(X) $= \infty$。

自拓扑复杂度这一概念提出以来，人们在多种背景下对其进行了深入研究，并从多个方向加以推广。其中一个核心研究方向，是根据非单连通空间，尤其是 $K(\pi,1)$-空间的基本群来描述其拓扑复杂度。Costa 和 Farber [8]引入了第一个带局部系数的上同调类，并根据该类的幂零性给出了拓扑复杂度的上下界。这一思想可视为 Berstein [3], ˇSvarc [22], Dranishnikov 和 Rudyak [9]关于 $K(\pi, 1)$-空间的 LS 范畴经典理论的一种类比。然而，这些界在实践中很难应用，因为随着幂零性增加，系数会变得十分复杂。关于基本群为阿贝尔群的空间，已有一些计算结果，参见 [1, 7]。

Farber 和 Mescher [15] 考察了一种无需直接计算即可评估上述幂零性的谱序列。对于离散群 G，他们构造了一个正合对

$$\cdots \xrightarrow{\delta} D_{r,s} \xrightarrow{\varepsilon} E_{r,s} \to D_{r,s+1} \xrightarrow{\delta} D_{r+1,s} \to \cdots$$

使得在第 n 个导出对中 Ker($\varepsilon^{(n)}$) 非平凡

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{(n)}} D^n_{r,s} \xrightarrow{\varepsilon^{(n)}} E^n_{r-n+1,s+n-1} \to D^n_{r-n+1,s+n} \xrightarrow{\delta^{(n)}} D^n_{r-n+2,s+n-1} \to \cdots,$$

这意味着 TC(BG) $\geq n-1$。他们还用群上同调明确描述了 $E_{r,\ s}$。因此，他们对 Gromov 双曲群 G 的 TC(BG) 得出了一个有力的估计。B-laszczyk 等人 [4]以及 Espinosa Baro 等人[10]将这一谱序列推广到运动规划问题的各种变体中。然而，这种方法尚未在拓扑复杂度的计算中得到实际应用。一个可能的原因是，

谱序列的微分并未得到精确描述，因此在一般情况下很难刻画 E^n 的 $n \geq 2$ 。另一种解释是，他们的构造不具函子性，这使我们无法应用群上同调中的大量工具。

本文基于这些进展提出一种新的计算方法；我们运用同调代数的技巧重构了他们的论证。我们研究与群同态相关的一对伴随函子的性质，以及 Ext群的导出同态。我们的主要目的是针对群同态扩展上述正合对，以便于应用群上同调。利用我们的方法，我们确定了某些非单连通 3-流形的拓扑复杂度。如 [19, 定理 2], 中，广义四元数群 Q_{8m} 作用于 S^3 且没有不动点。于是，商 S^3/Q_{8m} 是一个基本群为 Q_{8m}的 3-流形。

定理 1.1. 对于 $m \geq 1$, S^3/Q_{8m} 的拓扑复杂度为6。

注意，Iwase 和 Miyata [18] 通过分析 S^3/Q_8的胞腔结构，计算了 TC(S^3/Q_8)。

本文的结构如下。第2 节回顾关于拓扑复杂度的上同调估计的预备结果。第3 节准备同调代数方面的一些术语和引理。第4 节给出 Farber 和 Mescher 结果的一项推广。第5 节通过我们的方法计算拓扑复杂度(S^3/Q_{8m})，并证明定理1.1。最后，第6 节列出一些可能引发进一步研究的评论和问题。

记号与约定。在本文中，所有群均假定为离散群。我们将群 G 的整数群环记为 $\mathbb{Z}G$，并将左 G-模（即 $\mathbb{Z}G$-模）所成的阿贝尔范畴记为 G-**模**。对于一个（G, H）-双模M和一个左 H-模 N，它们关于 $\mathbb{Z}G$的张量积记为 $M \otimes_G N$，并通过左因子在 M上的左作用视为左 G-模。对于左 G-模 M 和N，它们关于 $\mathbb{Z}$的张量积记为 $M \otimes N$，并赋予对角G-作用

$$g \cdot (m \otimes n) := (g \cdot m) \otimes (g \cdot n) \text{ for } g \in G, m \in M \text{ and } n \in N.$$

致谢。 作者感谢 Daisuke Kishimoto 与 Toshiyuki Akita 提出的宝贵意见。作者得到 JST SPRING 的资助，Grant 编号为 JPMJSP2110。

2. Topological preliminaries

2.1. 截面范畴与 拓扑复杂度-权。 我们首先回顾截面范畴的概念。映射 $f\colon X \to Y$ 的截面范畴 记为 secat(f)，是最小整数 k，使得 Y 被 $k+1$ 个开集覆盖，且在每一个这样的开集上 f 具有右同伦逆。若不存在这样的整数，则令 secat(f) $= \infty$。于是根据定义，存在一个恒等映射

$$\mathsf{TC}(X) = \mathsf{secat}(\Pi\colon \mathcal{P}X \to X^2).$$

设 $\Delta\colon X \to X^2$ 表示对角映射。于是，由于存在一个同伦交换图（参见 [11, 定理 7]）

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}X & \xrightarrow{\Pi} & X^2 \\ {\scriptstyle\simeq}\downarrow & & \| \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X^2, \end{array}$$

我们得到 TC(X) $=$ secat($\Delta\colon X \to X^2$)。

接下来，我们回顾拓扑复杂度的一个上同调下界。Farber 和 Grant [12]引入了上同调类的 TC权重，这是 LS 范畴的范畴权的类似概念 [13]。设 X 为一个基本群为 $G = \pi_1(X)$ 的空间，并设 A 为一个 G^2-模。则对于空间 Y 和映射f: $Y \to X^2$，我们得到一个群同态 $\pi_1(Y) \to \pi_1(X^2) = G^2$。我们将 $U_f(A)$ 记为通过该群同态对 A 的限制，它是一个 $\pi_1(Y)$-模；我们将在第 3.1 节中给出精确定义。

定义 2.1。 ([15, 定义 1]) 拓扑复杂度-权 非平凡上同调类$u \in H^*(X^2;\ A)$，记为 $\mathsf{wgt}(u)$，是满足下式的最大整数 k：

$$f^*(u) = 0 \in H^*(Y; U_f(A)) \text{ for any map } f\colon Y \to X^2 \text{ with } \mathsf{secat}(f^*\Pi) < k.$$

我们列出这一不变量的一些基本性质。证明见 [12]。

命题 2.2。 设 X 是如上所述的空间。

（1）对于任意 $u \in H^*(X^2;\ A)$，$\mathsf{wgt}(u) \le |u|$。（2）如果对于某个 $u \in H^*(X^2;\ A)$，有 $\mathsf{wgt}(u) = k$，那么 $\mathsf{TC}(X) \ge k$。（3）对于 $i = 1、\cdots、m$，令 $u_i \in H^*(X^2;\ A_i)$ 为满足下式的上同调类

$$u_1 \smile \cdots \smile u_i \neq 0 \in H^*(X^2; A_1 \otimes \cdots \otimes A_i).$$

Then

$$\mathsf{wgt}(u_1 \smile \cdots \smile u_i) \ge \sum_{i=1}^{m} \mathsf{wgt}(u_i).$$

（4）令 $u \neq 0 \in H^*(X^2;\ A)$ 为一个零因子，即满足$\Delta^*(u) = 0 \in H^*(X; U_\Delta A)$ 的上同调类。则 $\mathsf{wgt}(u) \ge 1$。

2.2. **典范类与谱序列**。 在本节中，我们回顾 Costa 与 Farber 关于第一上同调类的一些先前结果 [8]。设X 是一个基本群为 $G = \pi_1(X)$的空间。我们用 $\mathbb{Z}[G]$ 表示一个以 G为基的自由$\mathbb{Z}$-模，并赋予它 G^2-作用

$$(a, b) \cdot c := acb^{-1} \quad \text{for } a, b, c \in G.$$

设 I_G 表示增广 ε: $\mathbb{Z}[G] \to Z$的核。注意， I_G 作为以 $\{g - 1 \mid g \in G\backslash\{1\}\}$为基的 $\mathbb{Z}$-模是自由的。

定义 2.3 ([8, §2]). 典范类 $\mathfrak{v}_X \in H^1(X^2; I_G)$是由映射 $G^2 \to I_G, (a, b) \mapsto ab^{-1} - 1$所确定的一个上同调类。

该类在如下意义下是典范的：对于与万有覆盖相关联的典范映射 p: $X \to BG$，我们有 $(p^2)^*(\mathfrak{v}_{BG}) = \mathfrak{v}_X$。因此，我们将 $\mathfrak{v}_{BG}$ 简记为 $\mathfrak{v}$。注意，若 X 是单连通的，则 $I_G = 0$，从而 $\mathfrak{v}_X = 0$。还可以验证 $\mathfrak{v}_X$ 是一个零因子；因此，若 $\mathfrak{v}_X^k \neq 0 \in H^k(X^2; I_G^{\otimes k})$，则拓扑复杂度$(X) \ge k$。事实上，他们得到了一个更精细的估计。

定理 2.4 ([8,定理 7])。 设 X 是一个维数为 $n \ge 2$的 *CW*复形。那么，当且仅当 $\mathfrak{v}_X^{2n} = 0 \in H^{2n}(X^2; I_G^{\otimes 2n})$时，拓扑复杂度$(X) < 2n$。

接下来，我们考察 Farber 和 Mescher 引入的一个谱序列 [15]，并对其记号作了少许修改。设 M 是一个 G^2-模，且是 $\mathbb{Z}$-自由的。由 M的平坦性可知，存在一个 G^2-模的短正合列

$$0 \to I_G \otimes M \to \mathbb{Z}[G] \otimes M \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

其中 ε 表示增广；注意 $I_G \otimes M$ 也是 $\mathbb{Z}$-自由的。通过迭代这一过程，我们得到一个 G^2-模的短正合列

$$0 \to I_G^{\otimes s+1} \to \mathbb{Z}[G] \otimes I_G^{\otimes s} \xrightarrow{\varepsilon} I_G^{\otimes s} \to 0.$$

则对于一个 G^2-模 A，存在一个 $\mathbb{Z}$-模的长正合列

(2.1)

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^r_{G^2}(I_G^{\otimes s}, A) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Ext}^r_{G^2}(\mathbb{Z}[G]\otimes I_G^{\otimes s}, A) \to \mathrm{Ext}^r_{G^2}(I_G^{\otimes s+1}, A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{r+1}_{G^2}(I_G^{\otimes s}, A) \xrightarrow{\varepsilon} \cdots,$$

其中 δ 表示 Bockstein同态。令

$$D^1_{r,s} := \mathrm{Ext}^r_{G^2}(I_G^{\otimes s}, A), E^1_{r,s} := \mathrm{Ext}^r_{G^2}(\mathbb{Z}[G]\otimes I_G^{\otimes s}, A), \delta^{(1)} = \delta \text{ and } \varepsilon^{(1)} = \varepsilon$$

并构造 n阶导出对（参见 [17, VIII. 1.]）

(2.2) $$\cdots \xrightarrow{\delta^{(n)}} D^n_{r,s} \xrightarrow{\varepsilon^{(n)}} E^n_{r-n+1,s+n-1} \to D^n_{r-n+1,s+n} \xrightarrow{\delta^{(n)}} D^n_{r-n+2,s+n-1} \to \cdots$$

因此 $E^n_{*,*}$ 是一个同调谱序列，其微分 d^n 的双次数为 $(1-n, n)$。注意，$D^1_{r,0} = \mathrm{Ext}^r_{G^2}(\mathbb{Z}, A) = H^r(G^2; A)$，并且

$$D^n_{r,0} = \mathrm{Im}(\delta\circ\cdots\circ\delta\colon D^1_{r-n+1,n-1} \to D^1_{r,0}).$$

现在我们考虑一个函数

$$\mathbf{ev}\colon I_G^{\otimes n}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n}, A), \quad \mathbf{ev}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n\otimes f) := f(x_n\otimes\cdots\otimes x_1)$$

并回顾：

定理 2.5 ([15, 推论 7。4])。对于上同调类 $z\in H^r(G^2;A) = D^1_{r,0}$和 $n\geq 1$，以下条件等价：

(1) $z\in D^{n+1}_{r\,0}$。(2) $\varepsilon^{(i)}(z) = 0 \in E^i_{r-i+1,\,s+i-1}$对于 $i = 1, \cdots, n$。(3) $z = \mathbf{ev}_*(\mathfrak{v}^n \smile u)$ 对于某个 $u\in H^{r-n}(G^2; \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n}, A))$。

注意，(1)与(3)的等价性对 $n = 0$ 成立。对于 $n = 1$，满足上述条件的上同调类可如下刻画：

命题 2.6 ([15, 推论 7。6])。对于上同调类 $z\in H^r(G^2;A)$，条件 $z\in D^2_{r,0}$ 等价于 z 是一个零因子。

我们还陈述一个补充引理。

引理 2.7. 设 A 是一个具有乘法 $\mu\colon A\otimes A\to A$ 的结合 $\mathbb{Z}G^2$-代数，并假设 $z_1\in D^{n_1+1}_{r_1\,0}$，且 $z_2\in D^{n_2+1}_{r_2\,0}$。则 $z_1\smile z_2\in D^{n_1+n_2+1}_{r_1+r_2\,0}$。

证明。定义映射 $\lambda\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n_1}, A)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n_2}, A)\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n_1+n_2}, A)$ 如下

$$\lambda(f_1\otimes f_2)(x_1\otimes\cdots\otimes x_{n_1}\otimes\cdots\otimes x_{n_1+n_2}) = \mu(f_1(x_{n_1}\otimes\cdots\otimes x_1)\otimes f_2(x_{n_1+n_2}\otimes\cdots\otimes x_{n_1+1})).$$

容易验证 λ 是一个 G^2-同态，并且存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} I_G^{\otimes n_1}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n_1}, A)\otimes I_G^{\otimes n_2}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n_2}, A) & \xrightarrow{\mu\circ(\mathbf{ev}\otimes\mathbf{ev})} & A \\ \downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{ev}} \\ I_G^{\otimes n_1}\otimes I_G^{\otimes n_2}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n_1}, A)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n_2}, A) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\lambda} & I_G^{\otimes n_1+n_2}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G^{\otimes n_1+n_2}, A), \end{array}$$

其中左列是第二与第三分量的交换映射。因此，根据杯积的定义以及定理 2.5，该命题得证。□

3. Algebraic preliminaries

本节收集后续讨论所需的同调代数预备知识。

3.1. 归纳函子与限制函子。 我们考虑与群同态 $\alpha\colon H \to G$相关联的两个函子；归纳函子 $F_\alpha\colon H$**-模** $\to G$**-模** 以及限制函子 $U_\alpha\colon G$**-模** $\to H$**-模**。为定义归纳函子，我们首先通过左平移和右侧的 H作用，将 $\mathbb{Z}G$ 视为一个 (G,H)-双模

$$a \cdot b = a\alpha(b) \quad \text{for } a \in G \text{ and } b \in H.$$

于是，对于一个左 H-模 M，我们得到一个左 G-模 $F_\alpha M := \mathbb{Z}G \otimes_H M$。我们还赋予左 G-模 N 一个 H-作用

$$a \cdot n := \alpha(a) \cdot n \quad \text{for } a \in H \text{ and } n \in N,$$

并将其记作 $U_\alpha N$。容易验证，这些对应是函子性的，且 F_α 是 U_α 的左伴随。我们将自然同构记作

$$\varphi_\alpha\colon \mathrm{Hom}_G(F_\alpha M, N) \to \mathrm{Hom}_H(M, U_\alpha N),$$

t单位 $\varphi_\alpha(\mathrm{id})\colon M \to U_\alpha F_\alpha M$ 记作 η_α，余单位 $\varphi_\alpha^{-1}(\mathrm{id})\colon F_\alpha U_\alpha N \to N$ 记作 ε_α。现在考虑一个群的交换图

$$\begin{array}{ccc} H' & \xrightarrow{\beta} & G' \\ {\scriptstyle\kappa}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\iota} \\ H & \xrightarrow[\alpha]{} & G. \end{array} \tag{3.1}$$

注意，$F_\iota F_\beta = F_\alpha F_\kappa$ 和 $U_\beta U_\iota = U_\kappa U_\alpha$。于是，对于一个 H'-模 L、G'-模 M 以及 $f \in \mathrm{Hom}_{H'}(L,\ U_\beta M)$，我们得到一个 H'-同态

$$L \xrightarrow{\quad f \quad} U_\beta M \xrightarrow{\quad U_\beta \eta_\iota \quad} U_\beta U_\iota F_\iota M = U_\kappa U_\alpha F_\iota M.$$

为简便起见，我们将同态 $\varphi_\kappa^{-1}(U_\beta \eta_\iota \circ f)\colon F_\kappa L \to U_\alpha F_\iota M$ 记作 $\overline{f}$。关于这一构造，我们列出一些供后续参考的引理。

引理 3.1。 设 f 如上，并令 恒等映射： $U_\beta M \to U_\beta M$ 表示恒等映射。则：

(1) $\varepsilon_\alpha \circ F_\alpha(\overline{\mathrm{id}}) = F_\iota(\varepsilon_\beta)\colon F_\iota F_\beta U_\beta M \to F_\iota M$.
(2) $\overline{f} = \overline{\mathrm{id}} \circ F_\kappa(f)\colon F_\kappa L \to U_\alpha F_\iota M$.

证明。 **(1)** 由 φ_α^{-1} 的自然性可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha \circ F_\alpha(\overline{\mathrm{id}}) &= \varphi_\alpha^{-1}(\overline{\mathrm{id}}) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\kappa^{-1}(U_\beta \eta_\iota)) \\ &= \varphi_\iota^{-1}(\varphi_\beta^{-1}(U_\beta \eta_\iota)) \\ &= \varphi_\iota^{-1}(\eta_\iota \circ \varepsilon_\beta) = F_\iota(\varepsilon_\beta). \end{aligned}$$

因此，由于 φ_α^{-1} 是一个同构，命题得证。

(2) 我们还有

$$\varphi_\kappa(\overline{\mathrm{id}} \circ F_\kappa(f)) = \varphi_\kappa(\overline{\mathrm{id}}) \circ f.$$

命题的证明与上面相同。

□

引理 3.2. 设 L' 是一个 H'-模，M' 是一个 G-模，且 $h \in \mathrm{Hom}_H(L', U_\alpha M')$。则 $U_\kappa h \in \mathrm{Hom}_H(U_\kappa L', U_\beta U_\iota M')$，并且存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} F_\kappa U_\kappa L' & \xrightarrow{\quad \varepsilon_\kappa \quad} & L' \\ {\scriptstyle\overline{U_\kappa h}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ U_\alpha F_\iota U_\iota M' & \xrightarrow[U_\alpha \varepsilon_\iota]{} & U_\alpha M'. \end{array}$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\varphi_\kappa(U_\alpha\varepsilon_\iota\circ\overline{U_\kappa h}) &= U_\kappa U_\alpha\varepsilon_\iota\circ(U_\beta\eta_\iota\circ U_\kappa h)\\ &= U_\beta U_\iota\varepsilon_\iota\circ U_\beta\eta_\iota\circ U_\kappa h\\ &= U_\beta(U_\iota\varepsilon_\iota\circ\eta_\iota)\circ U_\kappa h = U_\kappa h = \varphi_\kappa(h\circ\varepsilon_\kappa),\end{aligned}$$

其中第四个恒等映射由余单位-单位方程得出。因此，由于 φ_κ 是一个同构，证明便完成了。□

3.2. **Ext群同态**。 设 $\alpha\colon H\to G$ 是一个群同态。于是，如 [17, IV. 12.],中的自然同构

$$\varphi_\alpha\colon \mathrm{Hom}_G(F_\alpha M,N)\to\mathrm{Hom}_H(M,U_\alpha N)$$

诱导出一个Ext群的自然同态

$$\Phi_\alpha\colon \mathrm{Ext}^r_G(F_\alpha M,N)\to\mathrm{Ext}^r_H(M,U_\alpha N)\quad\text{for}\quad r\geq 0. \tag{3.2}$$

注意，若 α 是一个包含映射，则 Φ_α 是一个自然同构（参见 [17, VI. 推论 1.4.]）。我们还定义一个自然同态

$$\Theta_\alpha\colon \mathrm{Ext}^r_G(M,N)\xrightarrow{\varepsilon_\alpha^*}\mathrm{Ext}^r_G(F_\alpha U_\alpha M,N)\xrightarrow{\Phi_\alpha}\mathrm{Hom}_H(U_\alpha M,U_\alpha N).$$

现在考虑交换图（ 3.1).

命题 3.3。 设 A 是一个带平凡作用的 G-模，并设 $f\in\mathrm{Hom}_{H'}(L,U_\beta M)$。则存在一个由阿贝尔群构成的交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Ext}^r_G(F_\iota M,A) & \xrightarrow{\overline{f}^*\circ\Theta_\alpha} & \mathrm{Ext}^r_H(F_\kappa L,A)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi_\iota} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi_\kappa}\\ \mathrm{Ext}^r_{G'}(M,A) & \xrightarrow[f^*\circ\Theta_\beta]{} & \mathrm{Ext}^r_{H'}(L,A),\end{array}$$

其中 A 被视为平凡的 G'、H 和 H'-模。

证明。 设 $\mathrm{id}\colon U_\beta M\to U_\beta M$ 表示恒等映射。我们首先考虑下图

$$\begin{array}{ccccccc}\mathrm{Ext}^r_G(F_\iota M,A) & \xrightarrow{\varepsilon_\alpha^*} & \mathrm{Ext}^r_G(F_\alpha U_\alpha F_\iota M,A) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \mathrm{Ext}^r_H(U_\alpha F_\iota M,A) & \xrightarrow{\overline{f}^*} & \mathrm{Ext}^r_H(F_\kappa L,A)\\ \| & & \Big\downarrow{\scriptstyle F_\alpha(\overline{\mathrm{id}})^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\overline{\mathrm{id}}^*} & & \| \\ \mathrm{Ext}^r_G(F_\iota M,A) & \xrightarrow[F_\iota(\varepsilon_\beta)^*]{} & \mathrm{Ext}^r_G(F_\alpha F_\kappa U_\beta M,A) & \xrightarrow[\Phi_\alpha]{} & \mathrm{Ext}^r_H(F_\kappa U_\beta M,A) & \xrightarrow[F_\kappa(f)^*]{} & \mathrm{Ext}^r_H(F_\kappa L,A).\end{array}$$

由引理3.1 以及 Φ_α的自然性可知，所有方块均为交换图。接下来我们证明下图是交换图；

$$\begin{array}{ccccccc}\mathrm{Ext}^r_G(F_\iota M,A) & \xrightarrow{F_\iota(\varepsilon_\beta)^*} & \mathrm{Ext}^r_G(F_\iota F_\beta U_\beta M,A) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \mathrm{Ext}^r_H(F_\kappa U_\beta M,A) & \xrightarrow{F_\kappa(f)^*} & \mathrm{Ext}^r_H(F_\kappa L,A)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi_\iota} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi_\iota} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi_\kappa} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi_\kappa}\\ \mathrm{Ext}^r_{G'}(M,A) & \xrightarrow[\varepsilon_\beta{}^*]{} & \mathrm{Ext}^r_{G'}(F_\beta U_\beta M,A) & \xrightarrow[\Phi_\beta]{} & \mathrm{Ext}^r_{H'}(U_\beta M,A) & \xrightarrow[f^*]{} & \mathrm{Ext}^r_{H'}(L,A).\end{array}$$

左右两个方块的交换性源于 Φ_ι和 Φ_κ的自然性。Ext同态（3.2）的构造显然具有函子性，因此中间的方块是交换的。综上这些图，命题得证。□

3.3. **表示**。对于群同态 $\alpha\colon H\to G$，回顾一下，自然同构 $\varphi_\alpha\colon \mathrm{Hom}_G(F_\alpha M,\ N)\to \mathrm{Hom}_H(M,\ U_\alpha N)$ 定义为

$$\varphi_\alpha(g)(m)=g(1\underset{H}{\otimes}m),\quad \varphi_\alpha^{-1}(h)(a\underset{H}{\otimes}m)=a\cdot h(m), \tag{3.3}$$

对于 $g\in\mathrm{Hom}_G(F_\alpha M,N)$，$h\in\mathrm{Hom}_H(M,U_\alpha N)$，以及 $a\in G$。特别地，若 $m\in M$：ι是一个包含映射，则存在一个同构（参见 $G'\hookrightarrow G$ III. 5. [5, ）]

$$F_\iota U_\iota N=\mathbb{Z}G\otimes_{G'}U_\iota N\cong\mathbb{Z}[G/G']\otimes N,\quad a\underset{G'}{\otimes}n\mapsto[a]\otimes(a\cdot n) \tag{3.4}$$

对于 $a\in\mathbb{Z}G$ 和 $n\in N$，其中 $[a]$ 表示 a 在 $\mathbb{Z}[G/G']$ 中的代表元，而 G在右侧对角作用。因此，由（3.3），余单位 $\varepsilon_\iota=\varphi_\alpha^{-1}(\mathrm{id})\colon F_\iota U_\iota N\to N$与增广重合

$$\varepsilon\colon\mathbb{Z}[G/G']\otimes N\to N,\quad [a]\otimes n\mapsto n.$$

我们现在重新概述 通过考察群的交换图 组

$$\begin{array}{ccc} H' & \xrightarrow{\beta} & G' \\ {\scriptstyle\kappa}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\iota} \\ H & \xrightarrow[\alpha]{} & G, \end{array}$$

假设 κ 和 ι 是包含映射。

命题 3.4。对于 $f\in\mathrm{Hom}_{H'}(L,U_\beta M)$，同态 $f\colon F_\kappa L\to U_\alpha F_\iota M$表示为

$$a\underset{H'}{\otimes}m\mapsto\alpha(a)\underset{G'}{\otimes}f(m)\quad \textit{for } a\in\mathbb{Z}H \textit{ and } m\in L.$$

证明。由（3.3），单位 $\eta_\iota=\varphi_\iota(\mathrm{id})\colon M\to U_\iota F_\iota M$ 可写为

$$m\mapsto\mathrm{id}(1\underset{G'}{\otimes}m)=1\underset{G'}{\otimes}m\quad \text{for } m\in M,$$

因此我们有

$$L\xrightarrow{f}U_\beta L\xrightarrow{U_\beta\eta_\iota}U_\beta U_\iota F_\iota M\colon m\mapsto 1\underset{G'}{\otimes}f(m)\text{ for }m\in L.$$

注意，$U_\alpha F_\iota M$ 配备了一个 H-作用

$$a\cdot(b\underset{G'}{\otimes}m)=(\alpha(a)\cdot b)\underset{G'}{\otimes}m\quad \text{for } a\in H,\ b\in\mathbb{Z}G \text{ and } m\in M.$$

因此，由于$\overline{f}=\varphi_\kappa^{-1}(U_\beta\eta_\iota\circ f)$，根据（3.3）即可得到所述描述。 □

推论 3.5。对于 $h\in\mathrm{Hom}_H(L',U_\alpha M')$，该同态

$$\overline{U_\kappa h}\colon F_\kappa U_\kappa L'=\mathbb{Z}[H/H']\otimes L'\to U_\alpha(\mathbb{Z}[G/G'])\otimes U_\alpha M'=U_\alpha F_\iota U_\iota M'$$

在引理*3.2* 表示为

$$[a]\otimes m\mapsto[\alpha(a)]\otimes h(m)\quad \textit{for } a\in\mathbb{Z}H \textit{ and } m\in L'.$$

证明。由于 G在 $\mathbb{Z}[G/G']\otimes M'$上对角作用，我们有 $U_\alpha(\mathbb{Z}[G/G'])\otimes U_\alpha M'=U_\alpha F_\iota U_\iota M'$。现在考虑一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[H/H']\otimes L' & \longrightarrow & U_\alpha(\mathbb{Z}[G/G'])\otimes U_\alpha M' \\ \cong\downarrow & & \uparrow\cong \\ \mathbb{Z}H\underset{H'}{\otimes}U_\kappa L' & \xrightarrow[\overline{U_\kappa h}]{} & U_\alpha(\mathbb{Z}G\underset{G'}{\otimes}U_\iota M') \end{array}$$

其中竖直同构见（3.4）。因此，根据（3.4）和命题 3.4，顶行由下式给出

$$\begin{aligned}[a]\otimes m &\mapsto a \underset{H'}{\otimes} (a^{-1}\cdot m)\\ &\mapsto \alpha(a)\underset{G'}{\otimes}(U_\kappa h(a^{-1}\cdot m)) = \alpha(a)\underset{G'}{\otimes}(\alpha(a))^{-1}\cdot h(m)\\ &\mapsto [\alpha(a)]\otimes h(m)\end{aligned}$$

如上所述。 □

4. Reformulation and extension

本节将用同调代数和群上同调的术语，重述 Farber 和 Mescher 的结果。 [15]

4.1. 对角嵌入。设 G 为一个群，令 $\Delta\colon G\hookrightarrow G^2$ 表示对角嵌入。则商 G^2-模 $\mathbb{Z}[G^2/\Delta(G)]$ 可由 $\mathbb{Z}[G]$ 识别为

$$\mathbb{Z}[G^2/\Delta(G)]\ni[(a,b)]\mapsto ab^{-1}\in\mathbb{Z}[G]\quad \text{for } a,b\in G.$$

现在取一个群同态 $\alpha\colon H\to G$，令 $\alpha^2=(\alpha,\ \alpha)\colon H^2\to G^2$，并考虑一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\alpha} & G\\ {\scriptstyle\Delta_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta_G}\\ H^2 & \xrightarrow[\alpha^2]{} & G^2.\end{array}$$

我们将引理 3.1 应用于一个 H^2-同态 $h\colon M'\to U^2_\alpha M$，得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_H\otimes L' & \longrightarrow & \mathbb{Z}[H]\otimes L' & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{U_{\Delta_H}h}} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & U_{\alpha^2}(I_G)\otimes U_{\alpha^2}M' & \longrightarrow & U_{\alpha^2}(\mathbb{Z}[G])\otimes U_{\alpha^2}M' & \longrightarrow & U_{\alpha^2}M' & \longrightarrow & 0,\end{array}$$

根据推论 3.5，我们有 $U_{\Delta_H}\overline{h(b\otimes m)}=\alpha(b)\otimes h(m)$ 对于 $b\in H$ 和 $m\in L'$。在 $h_0=\mathrm{id}\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 上迭代此构造，可得到交换图 (4.1)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (I_H)^{\otimes s+1} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[H]\otimes(I_H)^{\otimes s} & \xrightarrow{\varepsilon} & (I_H)^{\otimes s} & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow{\scriptstyle h_{s+1}} & & \downarrow{\scriptstyle\overline{U_{\Delta_H}h_s}} & & \downarrow{\scriptstyle h_s} & & \\ 0 & \longrightarrow & (U_{\alpha^2}(I_G))^{\otimes s+1} & \longrightarrow & U_{\alpha^2}(\mathbb{Z}[G])\otimes(U_{\alpha^2}(I_G))^{\otimes s} & \xrightarrow{\varepsilon} & (U_{\alpha^2}(I_G))^{\otimes s} & \longrightarrow & 0,\end{array}$$

得到该图，其中 H^2 对每个模作对角映射作用。注意，

$$h_s((b_1-1)\otimes\cdots\otimes(b_s-1))=((\alpha(b_1)-1)\otimes\cdots\otimes(\alpha(b_s)-1)) \tag{4.2}$$

对于 $b_i\in H\setminus\{1\}$。

引理 4.1. 设 A是一个带平凡作用的 G^2-模，也视为平凡的H^2-模。那么，存在两个长正合列之间的一个同态

$$\begin{array}{ccccccccc} \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Ext}^r_{G^2}(I_G^{\otimes s},A) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathrm{Ext}^r_{G^2}(\mathbb{Z}[G]\otimes I_G^{\otimes s},A) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^r_{G^2}(I_G^{\otimes s+1},A) & \xrightarrow{\delta} & \\ & \downarrow{\scriptstyle {h_{s+1}}^*\circ\Theta_{\alpha^2}} & & \downarrow{\scriptstyle {\overline{U_{\Delta_H}h_s}}^*\circ\Theta_{\alpha^2}} & & \downarrow{\scriptstyle {h_s}^*\circ\Theta_{\alpha^2}} & & \\ \xrightarrow[\delta]{} & \mathrm{Ext}^r_{H^2}(I_H^{\otimes s},A) & \xrightarrow[\varepsilon]{} & \mathrm{Ext}^r_{H^2}(\mathbb{Z}[H]\otimes I_H^{\otimes s},A) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^r_{H^2}(I_H^{\otimes s+1},A) & \xrightarrow[\delta]{} & ,\end{array}$$

其中 δ 表示Ext 长正合列的连接同态。

证明。 与 [17, IV. 12.], 中的同态 Θ_{α^2} 是自然的，并且与连接同态交换。因此，命题得证。 □

中间项 $\mathrm{Ext}^r_{G^2}(\mathbb{Z}[G]\otimes I_G^{\otimes s}, A)$ 和 $\mathrm{Ext}^r_{H^2}(\mathbb{Z}[H]\otimes I_H^{\otimes s}, A)$ 特别值得关注，因为存在一个自然同构

$$\Phi_{\Delta_G}\colon \mathrm{Ext}^r_{G^2}(\mathbb{Z}[G]\otimes I_G^{\otimes s}, A)\cong \mathrm{Ext}^r_G((U_{\Delta_G}I_G)^{\otimes s}, A), \tag{4.3}$$

这与 [15, 引理 5。4]相同。应用命题 3.3 于 $U_{\Delta_H}h_s$，可得上述同构的自然性:

命题 4.2。 对于平凡的 G^2-模 A，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^r_{G^2}(\mathbb{Z}[G]\otimes I_G^{\otimes s}, A) & \xrightarrow{\overline{U_{\Delta_H}h_s}^*\circ\Theta_{\alpha^2}} & \mathrm{Ext}^r_{H^2}(\mathbb{Z}[H]\otimes I_H^{\otimes s}, A)\\
\downarrow{\scriptstyle \Phi_{\Delta_G}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\Delta_H}}\\
\mathrm{Ext}^r_G((U_{\Delta_G}I_G)^{\otimes s}, A) & \xrightarrow[(U_{\Delta_H}h_s)^*\circ\Theta_\alpha]{} & \mathrm{Ext}^r_H((U_{\Delta_H}I_H)^{\otimes s}, A),
\end{array}$$

其中 A 被视为平凡的 G、H 和 H^2-模。

4.2. **中心化子包含**。 我们将 $\mathcal{O}_G$ 表示为 $(G\setminus\{1\})^s$ 在 G的共轭作用下的轨道集，即

$$g\cdot(a_1,\cdots,a_s)=(ga_1g^{-1},\cdots,ga_sg^{-1})$$

对于 $g\in G$ 和 $a_i\in G\setminus\{1\}$。那么，正如 [15, 定理 8。1], 的证明中所述，存在一个 G-模同构

$$(U_{\Delta_G}I_G)^{\otimes s}\cong\bigoplus_{O\in\mathcal{O}_G}\mathbb{Z}[O],\quad (a_1-1)\otimes\cdots\otimes(a_s-1)\mapsto(a_1,\cdots,a_s).$$

对于元组 $a=(a_1,\cdots,a_s)\in(G\setminus\{1\})^s$，令 O_a 表示包含 a 的轨道， $C_G(a)$ 表示 a 的中心化子，并且 ι_a: $C_G(a)\hookrightarrow G$ 为一个包含映射。注意， $C_G(a)$ 是元素 $a_1,\cdots,a_s$ 的中心化子的交集，这些元素均取共轭作用。于是根据轨道-稳定子定理，我们有

$$\mathbb{Z}[O_a]\cong\mathbb{Z}[G/C_a(G)]\cong F_{\iota_a}U_{\iota_a}\mathbb{Z},\quad g\cdot(a_1,\cdots,a_s)\mapsto[g], \tag{4.4}$$

其中， G对 $\mathbb{Z}$ 的作用是平凡的。因此我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^r_G((U_{\Delta_G}I_G)^{\otimes s}, A)&\cong\prod_{O_a\in\mathcal{O}_G}\mathrm{Ext}^r_G(\mathbb{Z}[O_a], A)\\ &\cong\prod_{O_a\in\mathcal{O}_G}\mathrm{Ext}^r_{C_G(a)}(\mathbb{Z}, A)=\prod_{O_a\in\mathcal{O}_G}H^r(C_G(a);A)\end{aligned} \tag{4.5}$$

如 [15, 定理 8.1]所述。对于 $a\in(G\setminus\{1\})^s$，我们分别用 j_a 和 q_a表示相应直和项的包含映射和投影。

我们现在继续考虑一个群同态 α: $H\to G$。取元组$a\in(G\setminus\{1\})^s$ 和 $b\in(H\setminus\{1\})^s$，我们旨在计算复合映射

$$\begin{aligned}\Psi_{a,b}\colon H^r(C_G(a);A)&\xrightarrow{j_a}\mathrm{Ext}^r_G((U_{\Delta_G}I_G)^{\otimes s}, A)\\ &\xrightarrow{(U_{\Delta_H}h_s)^*\circ\Theta_\alpha}\mathrm{Ext}^r_H(U_{\Delta_H}I_H)^{\otimes s}\xrightarrow{q_b}H^r(C_H(b);A),\end{aligned}$$

其中中间同态与定理 4.2 的图中的下方映射相同。我们回顾（4.2），并注意到

$$\psi_{a,b}\colon\mathbb{Z}[O_b]\hookrightarrow(U_{\Delta_H}I_H)^{\otimes s}\xrightarrow{U_{\Delta_H}h_s}U_\alpha(U_{\Delta_G}I_G)^{\otimes s}\twoheadrightarrow U_\alpha\mathbb{Z}[O_a]$$

可表示为 $(b_1,\cdots,b_s)\mapsto(\alpha(b_1)\cdots,\alpha(b_s))$。于是，若 $\alpha(b)\notin\mathcal{O}_a$，则同态 $\psi_{a,b}$ 是平凡的。我们考虑 $\alpha(b)\in\mathcal{O}_a$ 的情形，此时可假设 $\alpha(b)=a_\circ$ 在这种情形下，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} C_H(b) & \xrightarrow{\alpha} & C_G(a) \\ {\scriptstyle \iota_b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_a} \\ H & \xrightarrow[\alpha]{} & G, \end{array}$$

其中，顶行表示限制。

命题 4.3. 对于平凡的 G-模 A，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^r_G(\mathbb{Z}[O_a],A) & \xrightarrow{\psi^*_{a,b}\circ\Theta_\alpha} & \mathrm{Ext}^r_H(\mathbb{Z}[O_b],A) \\ {\scriptstyle \Phi_{\iota_a}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\iota_b}} \\ H^r(C_G(a);A) & \xrightarrow[\alpha^*]{} & H^r(C_H(b);A), \end{array}$$

证明. 由命题 3.5 和（4.4），可得 $\psi_{a,b}=U_{\iota_b}\mathrm{id}\colon\ F_{\iota_b}U_{\iota_b}\mathbb{Z}\to\overline{U_\alpha}F_{\iota_a}U_{\iota_a}\mathbb{Z}_\circ$ 然后应用命题 3.3 得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^r_G(\mathbb{Z}[O_a],A) & \xrightarrow{\psi^*_{a,b}\circ\Theta_\alpha} & \mathrm{Ext}^r_H(\mathbb{Z}[O_b],A) \\ {\scriptstyle \Phi_{\iota_a}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\iota_b}} \\ \mathrm{Ext}^r_{C_G(a)}(\mathbb{Z},A) & \xrightarrow[\mathrm{id}^*\circ\Theta_\alpha]{} & \mathrm{Ext}^r_{C_H(b)}(\mathbb{Z},A). \end{array}$$

因此，由于底行是诱导同态 $\alpha^*\colon\ H^r(C_G(a);A)\to H^r(C_H(b);A)$（参见 [17, VI. (2.11.)]），证明完毕。□

现在我们结合（4.3）、（4.5）以及命题 4.2、4.3 得到：

定理 4.4。设 $\alpha\colon\ H\to G$ 是一个群同态，且 $a\in(G\setminus\{1\})^s$和 $b\in(H\setminus\{1\})^s$ 是元组。若 $\alpha(b)\notin\mathcal{O}_a$，则该同态

$$\begin{aligned}\Psi_{a,b}\colon H^r(C_G(a);A)&\xrightarrow{j_a}\mathrm{Ext}^r_{G^2}(\mathbb{Z}[G]\otimes(I_G)^{\otimes s},A)\\ &\xrightarrow{(\overline{U_{\Delta_H}h_s})^*\circ\Theta_\alpha}\mathrm{Ext}^r_{H^2}(\mathbb{Z}[H]\otimes(I_H)^{\otimes s},A)\xrightarrow{q_b}H^r(C_H(b);A)\end{aligned}$$

是平凡的。若 $\alpha(b)=a$，则 $\Psi_{a,b}$ 与诱导同态 α^*一致。

5. On the topological complexity of S^3/Q_{8m}

本节中，我们将运用所得结果计算 $\mathsf{TC}(S^3/Q_{8m})$。首先给出 $Q=Q_{8m}$的一个表示，

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\mid\mathbf{x}^{4m}=\mathbf{y}^2,\mathbf{y}^4=1,\mathbf{y}\mathbf{x}\mathbf{y}^{-1}=\mathbf{x}^{-1}\rangle. \tag{5.1}$$

为简便起见，我们将 $\mathbf{x}^{4m}=\mathbf{y}^2$ 记作 -1。于是，Q 中的任意元素都可写成 $\pm\mathbf{x}^i\mathbf{y}^j$，其中 $0\le i<4m, j=0,1$。每个元素的中心化子如下所示。

$$C_Q(\pm1)=Q,\ C_Q(\pm\mathbf{x}^i)=\langle\mathbf{x}\rangle\cong\mathbb{Z}/4m,\ C_Q(\pm\mathbf{x}^i\mathbf{y})=\langle\mathbf{x}^i\mathbf{y}\rangle\cong\mathbb{Z}/4. \tag{5.2}$$

我们将商记为 ϖ

$$Q\twoheadrightarrow V=\langle\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}\mid\tilde{\mathbf{x}}^2=\tilde{\mathbf{y}}^2=1,\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}^{-1}=\tilde{\mathbf{x}}^{-1}\rangle\cong(\mathbb{Z}/2)^2,$$

其中，我们令 $\tilde{a}=\pi(a)\in V$为 $a\in Q_\circ$

引理 5.1. 设 $a, b \in Q \setminus$ 核 ϖ。若 $a \notin C_Q(b)$，则该同态

$$\Psi_{(a,b),(\tilde{a},\tilde{b})}\colon H^r(C_V(\tilde{a},\tilde{b});A) \to H^r(C_Q(a,b);A)$$

对于任意 $\mathbb{Z}$-模 A，都是平凡的。

证明。由（5.2），可得 $C_Q(a,\ b) = \langle \pm 1\rangle$ 当且仅当 $a \notin C_Q(b)$。又由于 $\langle \pm 1\rangle \subset \operatorname{Ker}\varpi$，由定理 4.4 可得该结论。□

除非另有说明，本节以下内容仅考虑模 2 上同调，因此令 $A = \mathbb{Z}/2$。接下来回顾 Q_{8m} 的模 2 上同调。令$t \in H^1(\mathbb{Z}/2)$ 表示生成元，并令 $x,\ y \in H^1(V)$ 表示 t 在投影 $V \twoheadrightarrow \langle \tilde{\mathbf{x}}\rangle$ 和 $V \twoheadrightarrow \langle \tilde{\mathbf{y}}\rangle$ 下的像。于是，x 和 y 生成 $H^*(V)$，且 ϖ 给出一个同态

$$\begin{aligned} H^*(V) &\cong A[x,y] \\ &\xrightarrow{\varpi^*} \begin{cases} A[x,y,e]/(x^2+xy+y^2, x^2y+xy^2) & (m \text{ is odd}) \\ A[x,y,e]/(xy, x^3+y^3) & (m \text{ is even}) \end{cases} \\ &\cong H^*(Q), \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $x = \varpi^*(x)$ $y = \varpi^*(y)$ 和 $|e| = 4$ (详情请见 [2, IV. 引理 2.10 和 2.11]以及 [23,§3].)

引理 5.2. 对于 $a \in Q \setminus \langle \pm 1\rangle$，复合映射 $C_Q(a) \hookrightarrow Q \xrightarrow{\varpi} V$ 诱导一个同态

$$H^*(V) \cong A[x,y] \to A[u,v]/(u^2) \cong H^*(C_Q(a)), x \mapsto iu, y \mapsto ju \ \ for\ a = \pm \mathbf{x}^i\mathbf{y}^j.$$

其中 $|u| = 1$ 和 $|v| = 2$。

证明。对于整数 $n \geq 1$，众所周知，商 $\mathbb{Z}/4n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ 诱导一个同态 $H^1(\mathbb{Z}/2) = \langle t\rangle \to \langle u\rangle = H^1(\mathbb{Z}/4n)$，且 $t \mapsto u$。因此由 (5.2)，我们得到所述的同态。□

现在我们开始证明定理 1.1。对于 $z \in H^*(G)$，记作$\tau(z) = z\otimes 1 + 1\otimes z \in H^*(G^2)$，它是一个零因子。我们考虑 $H^3(V^2)$ 中的三个上同调类，

$$\begin{aligned} v_1 &:= \tau(x)^2(1\otimes y) + \tau(x)\tau(y)(x\otimes 1) \\ v_2 &:= \tau(x)^2(1\otimes y) + \tau(x)\tau(y)(1\otimes y) \\ v_3 &:= \tau(x)^2(y\otimes 1) + \tau(y)^2(x\otimes 1). \end{aligned}$$

我们回顾导出对（2.2），并将其项分别记为 $D_{p,\ q}^n(G)$ 和 $E_{p,\ q}^n(G$，以资区分。注意，由引理 4.1可知，序列（2.2）关于群同态 $\alpha\colon H \to G$ 是自然的。

引理 5.3。 存在恒等式 $E_{1,\ 2}^3(\mathbb{Z}/2) = E_{1,\ 2}^1(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$。

证明。由于（$\mathbb{Z}/2 \setminus \{1\}$）^{2} 只包含一个元组，由（4.5）可得第二个恒等式。注意，由 [15, 定理 6.1], 可知，存在一个元素 $z \in D_{3,\ 0}^3(\mathbb{Z}/2)$，它不属于 $D_{3,\ 0}^4(\mathbb{Z}/2)$，这意味着 $E_{1,\ 2}^3(\mathbb{Z}/2) \neq 0$。因此可得第一个恒等式。□

引理 5.4。 对于 $i = 1$、2、3、 $\varpi^*(v_i) \in D_{3,\ 0}^4(Q)$。

证明。由定理 2.5、命题 2.6 和引理 2.7，我们有 $v_i \in D_{3,\ 0}^3(V)$，其中 $i = 1,\ 2,\ 3$。根据自然性，可推出 $\varpi^*(v_i) \in D_{3,\ 0}^3(Q)$。对于每个$i$，我们取一个代表元 $z_i \in E_{1,\ 2}^1(V)$，使其满足 $\varepsilon^{(3)}(v_i) = [z_i] \in E_{1,\ 2}^3(V)$。

由于 V 是阿贝尔的，因此对于任意 $c \in V$，中心化子 $C_V(c)$ 等于 V。我们旨在确定每个 $c \in V \setminus \{1\}$ 和 i 的像 $q_{(c,c)}(z_i) \in H^1(V)$。作为

例，考虑 $c = \tilde{\mathbf{x}}$ 和 $i = 1$ 的情形。于是，根据定理 4.4，包含映射$\iota\colon \mathbb{Z}/2 = \langle \tilde{\mathbf{x}} \rangle \hookrightarrow V$诱导出一个同态

$$\Phi = \Phi_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{x}}),(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{x}})}\colon H^1(V) \to H^1(\mathbb{Z}/2), \quad x \mapsto t \text{ and } y \mapsto 0.$$

注意到 $\iota(z_1) = 0 \in D_{3,\,0}^4(\mathbb{Z}/2) \subset H^3(\mathbb{Z}/2)$。由引理 5.3，我们得到$\Phi^*(q_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{x}})}(z_1)) = 0$，因此 $q_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{x}})}(z_1) = ky$，其中 k 为 0 或 1。用类似的论证可得

$$q_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{x}})}(z_i) = k_{i,1}y, \quad q_{(\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{y}})}(z_i) = k_{i,2}x, \quad q_{(\tilde{\mathbf{x}\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{x}\mathbf{y}})}(z_i) = k_{i,3}x + k_{i,3}y,$$

其中 $k_{i,\,j}$ 对于 $1 \le i,\ j \le 3$为 0 或 1。然后由定理 4.4 和引理 5.2，

$$\Phi_{(a,b),(c,c)}(q_{(\tilde{a},\tilde{a})}(z_i)) = 0 \quad \text{for any } a, b \in Q \text{ with } \tilde{a} = \tilde{b} = c.$$

由定理 4.4 和引理5.1，同态 $\Phi_{(a,b),\ (c,d)}$ 对 el-˜ements $a,\ b \in Q$ 以及 $c,\ d \in V$是平凡的，其中 $c \neq d$、$\tilde{a} \neq b$或 $\tilde{a} \neq c$。于是得到$\varpi^*(z_i) = 0 \in E_{1,\ 2}^1(Q)$，并且根据导出序列的自然性，

$$\varepsilon^{(3)}(\varpi^*(v_i)) = \varpi^*[z_i] = [\varpi^*(z_i)] = 0 \in E_{1,2}^3(Q).$$

因此，命题得证。 □

现在我们可以证明定理1.1。

定理*1.1*的证明。典范映射 $p\colon X = S^3/Q \to BQ$ 在模 2 上同调 $p^*\colon H^n(Q) \xrightarrow{\cong} H^n(X)$ 上诱导同构，对于 $n \le 3$，显然$H^n(X) = 0$ 对于 $n \ge 4$成立。然后由（5.3），可得

$$\begin{aligned}(p^2)^*(\varpi^*(v_1) \smile \varpi^*(v_3)) &= (p^2)^*(\varpi^*(v_1))(p^2)^*(\varpi^*(v_3)) \\ &= (1 \otimes x^2y + x^2y \otimes 1 + xy \otimes x + x \otimes xy)(y \otimes x^2 + x \otimes y^2) \\ &= x^2y \otimes xy^2 \neq 0 \in H^6(X^2)\end{aligned}$$

对于 m 奇数，且

$$\begin{aligned}(p^2)^*(\varpi^*(v_2) \smile \varpi^*(v_3)) &= (p^2)^*(\varpi^*(v_2))(p^2)^*(\varpi^*(v_3)) \\ &= (x^2 \otimes y + x \otimes y^2)(y \otimes x^2 + x \otimes y^2) \\ &= x^3 \otimes y^3 \neq 0 \in H^6(X^2)\end{aligned}$$

对于 m 偶数。于是，对于典范类 $\mathfrak{v}_X \in H^1(X^2; I_Q)$，由定理 $\mathfrak{v}_X^6 \neq 0 \in H^6(X^2; I_Q^{\otimes 6})$，我们得到2.5 和引理2.7、5.4，这意味着

$$\mathsf{TC}(S^3/Q) \ge \mathsf{wgt}(\mathfrak{v}_X) \ge 6.$$

因此，由于拓扑复杂度 $\mathsf{TC}(S^3/Q) \le$维数$(S^3/Q) = 6$，证明完成。 □

6. Final remarks

本文最后，我们对研究结果作一些评论，并提出若干关于非单连通空间拓扑复杂度的开放问题。我们希望这些问题能够推动进一步的研究。

首先，我们承认尚未明确描述 E^n的微分。尽管引理5.3的陈述意味着微分为零，但这仅仅是因为群 $G = \mathbb{Z}/2$ 和元组集合 $(G \setminus \langle 1 \rangle)^{\,s}$ 足够简单。B-laszczyk 等人 [4] 在更一般的情形下提到了第一个微分 d^1，但他们的描述并不便于计算。因此，研究 E^n项以及 $n \ge 2$的微分至关重要。我们认为这与 Farrell 上同调理论有关，因为 [5, X. (4.1)] 中的谱序列与（4.5）有些相似。

接下来，我们讨论如何确定每个自由作用拓扑复杂度（S^n/G）。Madsen 等人 $G \curvearrowright S^n$完全刻画了在球面上自由作用的有限群 [20]。特别是，Milnor [19] 分类了在 G 上自由作用的有限群 S^3。

问题 6.1。对于每个在 S^3 上自由作用的有限群 G，确定 TC(S^3/G)。更一般地，对于每个在球面上自由作用的有限群 G，确定 TC(S^n/G)。

第一个问题似乎难以解决，因为庞加莱球面´ $S^3/(2I)$与 S^3 具有相同的整系数上同调。第二个问题更加棘手；甚至透镜空间 $L_p^{2n+1} = S^{2n+1}/(\mathbb{Z}/p)$ 的拓扑复杂度也尚未完全确定。我们预计，我们的方法将有助于进一步研究这一问题。

最后，我们提及一些进一步的推广，以处理各种类型的运动规划问题。人们已经考虑了许多拓扑复杂度的类似概念。其中最重要的是 Rudyak [21]，引入的序列（或高阶）拓扑复杂度，它源于机器人运动规划需要经过若干个中间点；对于空间 X 和整数 $r \geq 2$，该不变量可重新表述为 $\mathrm{TC}_r(X) := \mathrm{secat}(\Delta\colon X \to X^r)$，其中 Δ 表示对角映射。Farber 和 Oprea [16] 提出了问题：

问题 6.2. 对于哪个空间 X，形式级数 $\sum_{r=1}^{\infty}$拓扑复杂度$_{r+1}(X)z^r$ 是一个有理函数 $P(z)/(1-z)^2$，使得 $P(z)$ 是一个多项式，且满足 $P(1) = \mathrm{cat}(X)$?

注意，存在一族不满足上述条件的空间 [14]。作为近期进展，[1] 汇集了基本群为有限循环群的空间的肯定结果。现在我们提出一个猜想：

猜想 6.3. 对于 $m \geq 1$，r 阶序贯拓扑复杂度 S^3/Q_{8m}等于 $3r$，这支持问题6.2。

我们还预计，我们的方法可应用于其他变体，例如 Cohen 等人提出的参数化拓扑复杂度 [6]。

References

[1] N. Cadavid-Aguilar、D. Cohen、J. Gonz´alez、S. Hughes 和 L. Vandembroucq，《关于具有阿贝尔基本群的流形的高阶拓扑复杂度》，《应用与计算拓扑杂志》 **10**, 4 2026 1, 13 ( )。

[2] A. Adem 和 R. J. Milgram，《有限群上同调》，Grundlehren Math. Wiss.，309，Springer-Verlag，柏林，2004。viii+324 页。11[3] I. Berstein，《关于格拉斯曼流形的 Lusternik–Schnirelmann 类别》，《剑桥哲学学会数学学报》 **79** 1976 1, 129 134 1 ( )，第 – 号。Z.

[4] Blaszczyk、J. G. Carrasquel-Vera 和 A. Espinosa Baro，《关于子群包含的截面范畴与 Adamson 上同调理论》，《纯粹与应用代数杂志》226（2022），第 6 号，论文编号 106959，18 页。1, 12[5] K. S. Brown，《群上同调》，G.T.M. 87，Springer-Verlag，纽约–柏林，1982。x+306页。7, 12[6] D. C. Cohen、M. Farber 和 S. Weinberger，《参数化运动规划算法的拓扑学》，《SIAM 应用代数与几何杂志》 **5** 2021 2, 229 249 13 ( )，第 – 号。D. C. Cohen 和

[7] L. Vandembroucq，《关于具有阿贝尔基本群的流形的拓扑复杂度》，《 Forum Math. 》 **33** 2021 6, 1403 1421 1 ( )，第 – 号。A. Costa 和 M.

[8] Farber，《小基本群空间中的运动规划》，《当代数学通讯》 **12** 2010 1, 107 119 1, 3 ( )，第 – 号。A. Dranishnikov 和 Y. B. Rudyak,

[9] 《关于二维中的 Berstein–Svarc 定理》，《剑桥哲学学会数学学报》 **146** 2009 2, 407 413 1 ( )，第 – 号。A. Espinosa Baro、M.

[10] Farber、S. Mescher 和 J. Oprea，《非球面空间的序贯拓扑复杂度与子群包含的截面范畴》，《数学年刊》391（2025），第 3 号，4555–4605。1[11] M. Farber，《运动规划的拓扑复杂度》，《离散与计算几何》29（2003），第 2 号，211–221。1, 2

[12] M. Farber 和 M. Grant，《机器人运动规划、上同调类的权与上同调运算》，《美国数学学会会刊》 **136** 2008 9, 3339 3349 3 ( )，第 – 号。E. Fadell 和 [13] S. Husseini，《范畴权与 Steenrod 运算》，《墨西哥数学学会公报》（ 2 **37** 1992 1 2, 151 161 3 ）( )，第 - 号–。M. Farber、D. Kishimoto 和 D. Stanley，《生成函数与拓扑复杂度》，《拓扑学及其应用》 [14] **278** 2020 107235, 5 13 ( )，第 页。M. Farber 和 S. Mescher，《关于非球面空间的拓扑复杂度》，《拓扑学与分析杂志》 [15] **12** 2020 2, 293 319 1, 3, 4, 8, 9, 11 ( )，第 – 号。M. Farber 和 J. Oprea，《非球面空间的高阶拓扑复杂度》，《拓扑学及其应用》 [16] **258** 2019 142 160 13 ( )，–。P. J. Hilton 和 U. Stammbach，《同调代数教程》，G.T.M. 4，Springer-Verlag，纽约–柏林，1971。ix+338 页。4, 6, 9, 10[17] N. Iwase 和 Y. Miyata，《 S^3/Q_8 作为纤维化 L-S 范畴的拓扑复杂度》，《拓扑学、非线性分析方法》 **62** 2023 1, 239 265 2 ( )，第 – 号。J. Milnor，《无不动点作用于其上的群》，《美国数学杂志》79（1957），623–630。2, 13[18] I. Madsen、C. B. Thomas 和 C. T. C. Wall，《拓扑球面空间形式问题。II. 自由作用的存在性》，《Topology》 [19] S^n **15** 1976 4, 375 382 13 ( )，第 – 号。Y. B. Rudyak，《拓扑复杂度的高阶类比》，《拓扑学及其应用》157（2010），第 5 号，916–920。13 [20] **10** 1961 217 272 1 A. S. ˇ Svarc，《纤维空间的亏格》，《莫斯科数学学会学报》( )，第 - 号。S. Tomoda 和 P. Zvengrowski，《关于 3-流形有限基本群的上同调的评注》，《Zieschang 纪念文集》，519–556，Geom. Topol. Monogr.，14，Geometry & Topology Publications，考文垂，2008。11 [21] [22] [23]

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan
Email address: minowa.yuki.48z@st.kyoto-u.ac.jp