面向设计问题的对称幺半范畴中的可组合不确定性

Marius Furter*苏黎世大学 苏黎世，瑞士
m
arius.furter@math.uzh.ch

Yujun Huang麻省理工学院 马萨诸塞州剑桥，美国
yujun233@mit.edu

Gioele Zardini麻省理工学院 马萨诸塞州剑桥，美国
gzardini@mit.edu

应用范畴论常研究态射表示开放系统的对称幺半范畴（SMC）。这些结构能够自然地容纳复杂的布线模式，利用（余）幺半结构来拆分和合并导线，或利用紧闭结构实现反馈。一个重要例子是设计问题（DP）的紧闭对称幺半范畴，它使工程中的协同设计能够采用组合式方法。然而在实际中，我们感兴趣的系统可能并不完全已知。近年来，马尔可夫范畴已成为建模不确定过程的强大框架。在这项工作中，我们展示了如何将这一视角融入开放系统的研究，同时保持与底层对称幺半范畴结构的一致性。为此，我们采用富集范畴的基变换构造，将对称幺半 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 的态射替换为马尔可夫范畴中的参数映射 $A \to \mathcal{C}(X, Y)$，该马尔可夫范畴由一个对称幺半单子诱导而来。由此得到一个对称幺半 2-范畴$N_*\mathcal{C}$，其对象与 $\mathcal{C}$ 相同，并带有重新参数化 2-胞。通过选择不同的单子，我们可以刻画多种类型的不确定性。 $\mathcal{C}$ 底下的范畴经由一个严格对称幺半函子嵌入$N_*\mathcal{C}$，从而能够转移（余）幺半结构和紧闭结构。将这一构造应用于设计问题，可得到具有实际意义的范畴，例如用于优化的参数化设计问题，以及用于决策理论和贝叶斯学习的设计问题分布参数化范畴。

1 引言

复杂系统的设计是对社会至关重要、却极具挑战性的任务。其困难源于异构分量之间的相互作用、相互竞争的设计目标、利益各异的利益相关者，以及计算密集型模型。协同设计通过利用一种称为设计问题 [23]的范畴化模型来应对这些挑战。 设计问题 是一个紧闭对称幺半范畴（对称幺半范畴），其对象为偏序集，而其态射是从 $\mathcal{F}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{R}$ 到真值偏序集 $\mathsf{Bool} = \{\bot \leq \top\}$ 的单调映射。它将异构系统建模为提供功能 $f \in \mathcal{F}$ 以换取资源 $r \in \mathcal{R}$的过程。单调性体现了这样一种直觉：如果资源 r 足以提供功能 f，那么它也足以提供任何更差的功能 $f' \leq f$。此外，任何更好的资源 $r' \geq r$ 也应足以提供 f。偏序集清晰呈现设计目标之间的权衡，并为利益相关者的讨论提供共同基础。此外，设计问题 支持函子性查询，可将复杂的设计问题分解为更简单、能够高效求解的问题。

当前的协同设计方法通过上界和下界 [4] 来处理不确定性。这种方法具有鲁棒性，非常适用于安全关键型应用，能够确保系统即使在最坏情况下也能维持性能。此外，该方法通过离散化，可有效近似并求解连续协同设计。然而，这种方法无法提供不确定性的定量度量，例如

*第一作者

A. Hadzihasanovic与J.-S. P. Lemay：应用范畴论2025（ACT 2025）EPTCS 442，2026，第30–44页，doi:
10.4204/EPTCS.442.3

© M. Furter、Y. Huang、G. Zardini
本作品采用知识共享署名许可协议。

在特定资源约束下，系统满足功能需求的概率。理解功能、资源使用与成功概率之间的这种权衡，在许多情况下至关重要。

此外，设计问题通常涉及与设计选择相关的参数化不确定性。例如，在设计软体机器人机械臂时，材料的选择会引入一个服从某种分布的参数——弹性模量。此外，不同分量的最优值也各不相同：较低的弹性模量有利于硬件设计，因为它能降低驱动力要求；较高的弹性模量则有利于控制器设计，因为它能增强对扰动的抵抗能力。这些例子凸显了将定量不确定性纳入协同设计的必要性，且这种纳入方式应取决于设计参数。

我们提出一种通用方案，可将参数化不确定性加入任意对称幺半范畴（SMC）。重要的是，这一过程保留了紧闭结构和（余）幺半结构。我们的方法支持由对称幺半单子建模的任意不确定性语义。这包括区间、子集和分布，其 Kleisli 范畴构成马尔可夫范畴。参数化使得人们能够针对 SMC 中由图表示的任意过程进行决策和学习。

更具体地说，给定一个 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$，我们将其箭头 $\mathcal{C}(X,Y)$ 替换为映射 $A \to \mathrm{M}\mathcal{C}(X,Y)$，其中 $\mathrm{M}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 是一个对称幺半单子。强度 $\nabla\colon \mathrm{M}(-) \otimes \mathrm{M}(=) \to \mathrm{M}(- \otimes =)$ 使我们能够按照下式组合 $f\colon A \to \mathrm{M}\mathcal{C}(X,Y)$ 和 $g\colon B \to \mathrm{M}\mathcal{C}(Y,Z)$：

$$A \otimes B \xrightarrow{f \otimes g} \mathrm{M}\mathcal{C}(X,Y) \otimes \mathrm{M}\mathcal{C}(Y,Z) \xrightarrow{\nabla} \mathrm{M}(\mathcal{C}(X,Y) \otimes \mathcal{C}(Y,Z)) \xrightarrow{\mathrm{M}\fatsemi_{\mathcal{C}}} \mathrm{M}\mathcal{C}(X,Z).$$

此外，任意 $\mathcal{V}$-箭头 $\varphi\colon A' \to \mathrm{M}A$ 都允许我们利用 Kleisli 复合，将 f 重新参数化为 $A' \to \mathrm{M}\mathcal{C}(X,Y)$，从而提供 2-范畴结构。此外，当 $\mathcal{C}$ 是幺半的，我们可以定义一个类似于复合的幺半积。因此，我们的构造有望形成一个幺半 2-范畴。

我们通过基变换来证明这一点：给定一个幺半函子 $N\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$，我们可以将一个 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 转换为一个 $\mathcal{W}$-范畴 $N_*\mathcal{C}$，方法是将其箭头替换为 $N\mathcal{C}(X,Y)$。此外，当 N 是对称的且 $\mathcal{C}$ 是（对称）幺半的，那么 N_*C 也是如此。最后，存在一个底层范畴 $\mathcal{C}_0 \to (N_*\mathcal{C})_0$ 的包含关系，它严格保持幺半积和相干映射。

我们将所提出的构造视为沿 $\mathrm{L}_{\mathrm{M}}\colon \mathcal{V} \to \mathrm{Kl}_{\mathrm{M}}$ 和 $\mathrm{Kl}_{\mathrm{M}}/(-)\colon \mathrm{Kl}_{\mathrm{M}} \to \mathrm{cat}$ 进行的基变换，其中 L_{M} 是一个对象上为恒等的函子，它将 $f \mapsto$ 映至 $f \fatsemi \eta$，而 $\mathrm{Kl}_{\mathrm{M}}/(-)$ 将 X 映至切片范畴 $\mathrm{Kl}_{\mathrm{M}}/X$。然而，$\mathrm{Kl}_{\mathrm{M}}/X$ 仅在可逆 2-胞腔意义下是对称幺半的。尽管如此，当 Kl_{M} 是严格的（可通过严格化假定）时，基变换会产生一个（对称）幺半 2-范畴，其中交换律（以及对称性的自然性）在相干的重新参数化同构意义下成立。

将这一构造应用于设计问题，可得到具有实际意义的范畴。我们证明，设计问题可以视为富集于集合、偏序集和可测空间中的对象。因此，我们可以在这些情形中的任意一种选择单子，从而得到设计问题的参数化子集、区间和分布。在所有情形下，紧闭对称幺半范畴结构都会传递到所得到的 2-范畴。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍富集范畴和基变换所需的背景知识。第3 节介绍不确定性单子和偏切片函子，并在第 3.3 节明确描述所提出的方案。最后，第4 节介绍不确定性设计问题的范畴，并展示其用途。本文的扩展版包含完整定义和详细证明，见 [14]。

致谢。 MF 感谢数字社会倡议资助其博士学位，感谢 Rudge（1948）与 Nancy Allen 讲席支持其访问麻省理工学院的 LIDS，并感谢 SNF 项目 200021_227719 资助差旅费用。

2 背景

本节介绍富集范畴与基变换构造。此外，本节说明基变换是 2-函子性的，并诱导对称幺半结构的转移。后一结果源自 Geoff Cruttwell 的博士论文 [6], ，该论文提供了极为清晰的阐述。我们假定读者熟悉对称幺半范畴 [20], ，通常将其记为 $(\mathcal{V},\otimes,\mathrm{I})$，其相干映射为 α、ρ、λ 和 σ。我们所使用的许多对称幺半范畴是笛卡尔的，包括 Set（集合与函数）、Pos（偏序集与单调函数）、Top（拓扑空间与连续函数）、Meas（可测空间与可测函数）以及 cat（小范畴与函子）。我们的 2-范畴始终是严格的，并且我们使用 $f \fatsemi g := g \circ f$ 来表示按图示顺序的复合。

例 2.1 (设计问题)。 令 $\mathsf{Bool} := \{\bot \leq \top\}$ 为真值偏序集。给定偏序集 $\mathcal{F}$ 和$\mathcal{R}$，可行性关系 $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ 是一个单调映射 $\mathcal{F}^{op} \times \mathcal{R} \to \mathsf{Bool}$。偏序集与可行性关系在下述结构下组成一个设计问题的紧闭对称幺半范畴 DP *[11, 23]* :

$$(\Phi \fatsemi \Psi)(f,q) := \bigvee_{r \in \mathcal{R}} \Phi(f,r) \wedge \Psi(r,q), \qquad (\Phi_1 \otimes \Phi_2)[(f_1,f_2),(r_1,r_2)] := \Phi_1(f_1,r_1) \wedge \Phi_2(f_2,r_1),$$

其中我们定义 $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 为偏序集的笛卡尔积。

鉴于幺半函子在基变换构造中的关键作用，我们在此回顾幺半函子。 .

定义 2.2 (幺半函子)。 设 $(\mathcal{V},\otimes, I)$ 和 $(\mathcal{W},\bullet, J)$ 为幺半范畴。一个(宽松)幺半函子 $N\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 是一个从 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{W}$ 的函子，并带有自然变换，其分量为

$$N_\varepsilon\colon J \to NI, \qquad \widetilde{N}_{A,B}\colon NA \bullet NB \to N(A \otimes B)$$

~满足结合律和幺元条件。如果 N_ε 和 N 是同构，我们称 N 为强；如果它们是恒等态射，则称 N 为严格。如果 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 是对称的，那么当 N 以~ ~意义保持 σ 时，我们称 N 为对称：$N_{A,B} \fatsemi N(\sigma_{\mathcal{V}}) = \sigma_{\mathcal{W}} \fatsemi N_{B,A}$。

正如小范畴、函子和自然变换组合成一个 2-范畴 $\mathbb{C}\mathrm{at}$ 一样，它们的幺半对应物也构成一个称为 $\mathbb{M}\mathrm{oncat}$ 的 2-范畴。

2.1 富集范畴

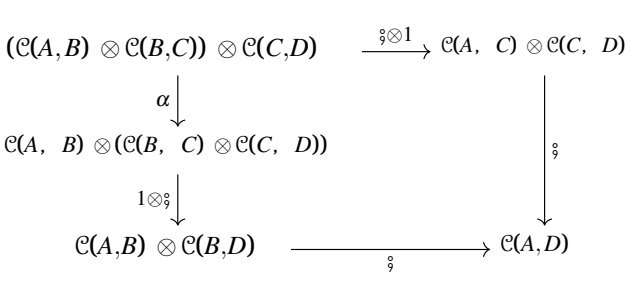
富集范畴 [19] 将同态集替换为更一般的同态对象，而这些对象属于一个幺半范畴$\mathcal{V}$。我们始终假设 $\mathcal{V}$ 是对称的，这样 $\mathcal{V}$-范畴的幺半积便有定义。

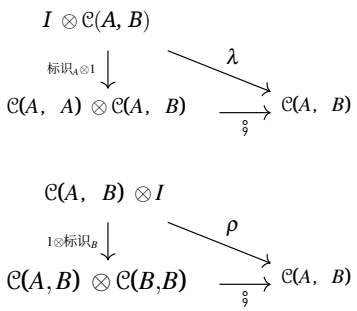
定义 2.3 ($\mathcal{V}$-范畴)。 给定一个对称幺半范畴 $(\mathcal{V},\otimes, I)$，一个 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 由以下内容构成

(i) 一个对象集合 $Ob(\mathcal{C})$，并且对于所有 A、B、$C \in Ob(\mathcal{C})$,

(ii) 一个 $\mathcal{V}$-对象的箭头 $\mathcal{C}(A, B) \in Ob(\mathcal{V})$，*(iii)* 复合态射 $\fatsemi_{A,B,C}$: $\mathcal{C}(A, B) \otimes \mathcal{C}(B,C) \to \mathcal{C}(A,C)$，*(iv)* 以及恒等态射 $id_A : I \to \mathcal{C}(A, A)$,

满足以下幺元律和结合条件:





定义 *2.4*（$\mathcal{V}$-函子）。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{V}$-范畴。一个 $\mathcal{V}$-函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 由函数 $F_{\mathsf{Ob}}\colon Ob(\mathcal{C})\to Ob(\mathcal{D})$以及 $\mathcal{V}$-箭头 $F_{A,B}\colon \mathcal{C}(A,B)\to\mathcal{D}(F_{\mathsf{Ob}}(A),F_{\mathsf{Ob}}(B))$ 构成，这些箭头由对象 A、$B\in Ob(\mathcal{C})$ 索引。这些数据必须保持复合和恒等态射：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}(A,B)\otimes\mathcal{C}(B,C) & \xrightarrow{F_{A,B}\otimes F_{B,C}} & \mathcal{D}(FA,FB)\otimes\mathcal{D}(FB,FC)\\ \downarrow{\scriptstyle ⨟} & & \downarrow{\scriptstyle ⨟}\\ \mathcal{C}(A,C) & \xrightarrow{F_{A,C}} & \mathcal{D}(FA,FC)\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} I & & \\ {\scriptstyle \mathsf{id}_A}\downarrow & \searrow^{\mathsf{id}_{FA}} & \\ \mathcal{C}(A,A) & \xrightarrow{F_{A,A}} & \mathcal{D}(FA,FA)\end{array}$$

给定 $\mathcal{V}$-函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$和 $G\colon\ \mathcal{D}\to\mathcal{E}$，我们将它们的复合 $F⨟G\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{E}$ 定义为：在对象上映射为$(F⨟G)_{\mathsf{Ob}}:=F_{\mathsf{Ob}}⨟G_{\mathsf{Ob}}$，在箭头上映射为 $(F⨟G)_{A,B}:=F_{A,B}⨟G_{FA,FB}$。

定义 2.5 ($\mathcal{V}$-自然变换)。设 $F,G\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{V}$-函子。$\mathcal{V}$-自然变换$\tau\colon\ F\Rightarrow G$ 是一族 $\mathcal{V}$-箭头 $\tau_A\colon\ I\to\mathcal{D}(FA,GA)$，满足 $\mathcal{V}$-自然性条件。它们既可以垂直复合，也可以水平复合。

正如普通范畴的情形一样，$\mathcal{V}$-范畴、$\mathcal{V}$-函子和 $\mathcal{V}$-自然变换组装成一个 2-范畴 $\mathbb{V}\mathsf{cat}$ [7, 定理 10。2]。

例 2.6。Set-范畴是局部小范畴。同样，Set-函子和 Set-自然变换可以视为它们的普通对应物。

例 2.7。一个cat-富集范畴 $\mathbb{C}$ 是一个局部小 *2*-范畴。对于任意对象 A、B，我们都有一个同态范畴 $\mathcal{C}(A,B)$。我们称 $\mathbb{C}$ 0-胞 的对象为 *0*-胞腔，称 $\mathcal{C}(A,B)$ 的对象为1-胞腔，称 $\mathcal{C}(A,B)$ 的箭头为2-胞腔。复合有两个方向：$\mathcal{C}(A,B)$ 中的复合记为 $⨟$，称为纵向复合；而复合函子记为 $\overset{*}{⨟}\colon \mathcal{C}(A,B)\times\mathcal{C}(B,C)\to\mathcal{C}(A,C)$，称为横向复合。更多详情请参阅 *[18, 第 2 章。3]*。

例 2.8。cat-函子是 *2*-函子。具体来说，*2*-函子 $F\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{D}$ 将 *0*-胞腔映射为 F_{Ob}，并通过函子 $F_{A,B}\colon \mathbb{C}(A,B)\to\mathbb{D}(FA,FB)$ 映射 *1*-胞腔和 *2*-胞腔，且严格保持横向复合与恒等态射。因此，F 保持纵向和横向复合结构。

例 2.9. 我们可以将设计问题 视为以Pos为富化范畴：对于偏序集 $\mathcal{F}$、$\mathcal{R}$，可行性关系设计问题$(\mathcal{F},\mathcal{R})$ 的集合具有自然的逐点序。由于 $\wedge$ 和 $\vee$ 都是单调运算，可行性关系的复合相对于此序是单调的。在 Pos 中的结合律和幺元律与Set中的含义相同。Pos-函子是普通函子，其对箭头的映射是单调的。

定义 *2.10*（$\mathcal{V}$-范畴的底层范畴）。我们将 $(-)_0\colon \mathbb{V}cat\to\mathbb{C}at$ 记作可表*2*-函子 $\mathbb{V}cat(I_{\mathbb{V}\mathsf{cat}},-)$，其中 $I_{\mathbb{V}\mathsf{cat}}$是仅有一个对象 $*$和箭头 $I_{\mathbb{V}\mathsf{cat}}(*,*):=I$ 的 $\mathcal{V}$-范畴。该 *2*-函子将一个 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 映射为普通范畴 $\mathcal{C}_0$，其对象与 $\mathcal{C}$的对象相同，而箭头 $f\colon A\to B$ 是形如 $f\colon I\to\mathcal{C}(A,B)$ 的 $\mathcal{V}$-箭头。复合定义如下：

$$I\cong I\otimes I\xrightarrow{f\otimes g}\mathcal{C}(A,B)\otimes\mathcal{C}(B,C)\xrightarrow{⨟}\mathcal{C}(A,C).$$

一个 $\mathcal{V}$-函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 映射为函子 $F_0\colon\ \mathcal{C}_0\to\mathcal{D}_0$，它将 $A\mapsto FA$，将 $f\colon I\to\mathcal{C}(A,B)$ 映射为 $Ff:=f⨟F_{A,B}$。最后，一个 $\mathcal{V}$-自然变换 $\tau\colon F\Rightarrow G$，其分量为 $\tau_A\colon I\to\mathcal{D}(FA,GA)$，映射为自然变换 $\tau_0\colon F_0\Rightarrow G_0$，其分量为 $(\tau_0)_A:=\tau_A$。

定义*2.11*（$\mathcal{V}$-范畴的幺半积）。给定 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，它们的幺半积 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 的对象为 $Ob(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}):=Ob(\mathcal{C})\times Ob(\mathcal{D})$，箭头为 $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D})[(A_1,A_2),(B_1,B_2)]:=\mathcal{C}(A_1,B_1)\otimes\mathcal{D}(A_2,B_2)$。复合和恒等态射定义如下：

$$\begin{array}{ccc}[\mathcal{C}(A_1,B_1)\otimes\mathcal{D}(A_2,B_2)]\otimes[\mathcal{C}(B_1,C_1)\otimes\mathcal{D}(B_2,C_2)] & & \\ \downarrow{\scriptstyle m} & \overset{⨟_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}}}{\dashrightarrow} & \\ [\mathcal{C}(A_1,B_1)\otimes\mathcal{C}(B_1,C_1)]\otimes[\mathcal{D}(A_2,B_2)\otimes\mathcal{D}(B_2,C_2)] & \xrightarrow[⨟_{\mathcal{C}}\otimes⨟_{\mathcal{D}}]{} & \mathcal{C}(A_1,C_1)\otimes\mathcal{D}(A_2,C_2)\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c} I\cong I\otimes I\\ {\scriptstyle \mathsf{id}_A\otimes\mathsf{id}_B}\downarrow\\ \mathcal{C}(A,A)\otimes\mathcal{D}(B,B)\end{array}$$

其中 m 是第 由 α和 σ组成的唯一相干同构。这个积以 $I_{\mathbb{V}\mathsf{cat}}$ 作为单位元 *t.*

定义 2.12. 令 $v\colon \mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0\to(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C})_0$ 为对象上为恒等的函子，它将对 $f_i\colon I\to\mathcal{C}(A_i,B_i)$ 映射为 $f_1\otimes f_2$。给定一个 $\mathcal{V}$-函子 $F\colon \mathcal{C}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，我们将 $\bar{F}_0$ 定义为 $v\fatsemi F_0\colon \mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0\to\mathcal{C}_0$。

定义 2.13 (幺半 $\mathcal{V}$-范畴**)**。一个幺半 $\mathcal{V}$-范畴 $(\mathcal{C},\boxtimes,J)$ 由一个 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$、一个$\mathcal{V}$-函子 $\boxtimes\colon \mathcal{C}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{C}$、一个单位对象 $J\in\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$，以及分量为以下映射的 $\mathcal{V}$-自然同构组成

$$a_{A,B,C}\colon I\to\mathcal{C}((A\boxtimes B)\boxtimes C,A\boxtimes(B\boxtimes C)),\qquad r_A\colon I\to\mathcal{C}(A\boxtimes J,A),\qquad l_A\colon I\to\mathcal{C}(J\boxtimes A,A),$$

使 $(\mathcal{C}_0,\bar{\boxtimes}_0,J)$ 成为一个幺半范畴。如果配备了一个$\mathcal{V}$-自然同构 $s_{A,B}\colon I\to\mathcal{C}(A\boxtimes B,B\boxtimes A)$，且该同构使 $(\mathcal{C}_0,\bar{\boxtimes}_0,J)$ 成为对称幺半范畴，我们就称 $(\mathcal{C},\boxtimes,J)$ 为对称的。

例 2.14。一个Set-富集对称幺半范畴可视为一个普通对称幺半范畴。一个Pos-富集对称幺半范畴是一个普通对称幺半范畴，其同态集是偏序集，且复合与幺半积均具有单调性。

例 2.15。DP 中的幺半积是单调的（因为 $\wedge$也是如此）。因此，我们可以将DP 视为一个对称幺半Pos-范畴。

例 *2.16*。幺半 *cat*-范畴是 *[21]* 中所定义的幺半 *2*-范畴的严格实例。它由一个 *2*-范畴 $\mathbb{C}$、一个 *2*-函子 $\boxtimes\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$、单位对象 $J\in Ob(\mathbb{C})$，以及可逆 *1*-胞 $a_{A,B,C}\colon (A\boxtimes C)\boxtimes D\cong A\boxtimes(C\boxtimes D)$、$r_A\colon A\boxtimes J\cong A$ 和 $l_A\colon J\boxtimes A\cong A$ 组成；这些结构关于 A、B、C 是自然的，并满足五边形与三角形恒等式。$\mathbb{C}$上的对称结构由 *1*-胞 $s_{A,B}\colon A\boxtimes B\to B\boxtimes A$ 组成；这些 *1*-胞关于 A、B 是自然的，满足 $s_{A,B}\fatsemi s_{B,A}=id$，以及对称幺半范畴的相干公理。

我们在定理 3.13 中的主要构造几乎产生对称幺半cat-范畴。

定义 *2.17*。近严格幺半群 *2*-范畴是一个幺半 *cat*-范畴，其中 $\boxtimes\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$仅需为拟函子 *[18,* 定义 *4.1*。*2]*。特别地，交换律仅在相差相干可逆 *2*-胞的意义下成立 $\vartheta f_1f_2g_1g_2\colon (f_1\boxtimes f_2)\fatsemi(g_1\boxtimes g_2)\Rightarrow(f_1\fatsemi g_1)\boxtimes(f_2\fatsemi g_2)$，这些胞称为张量*ator*。近严格对称幺半*2*-范畴是一个近严格幺半群 *2*-范畴，并配有一个强 *2*-自然变换 *[18,* 定义 *4.2*。*1]*，其 *1*-胞腔分量为 $s_{A,B}\colon A\boxtimes B\to B\boxtimes A$，且满足 $s_{A,B}\fatsemi s_{B,A}=id$ 以及对称幺半范畴的相干公理。因此，对称相干性仅需在相差可逆 *2*-胞腔的意义下是自然的。近严格（对称）幺半 *2*-范畴仍然是 *[21]*中（对称）幺半 *2*-范畴的特别严格实例。

2.2 基变换

给定一个幺半函子 $N\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$，我们可以沿着 F 映射 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 的同态对象，从而得到一个 $\mathcal{W}$-范畴。这最早在 [7], 中给出，而清晰的证明可见于 [6, 命题 4.2.1-3、定理 4.2.4]。

命题 2.18 (基变换**)**。任何幺半函子 $N\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ 都诱导一个 *2*-函子 $N_*\colon \mathbb{V}\mathsf{cat}\to\mathbb{W}\mathsf{cat}$，由沿 N 的基变换给出。具体而言，N_* 定义如下：

(i) 一个 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 被映射到 $\mathcal{W}$-范畴 $F_*\mathcal{C}$，它与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，箭头由$(N_*\mathcal{C})(A,B):=N\mathcal{C}(A,B)$给出，其复合和恒等态射

$$\fatsemi_{N_*\mathcal{C}}:=N\mathcal{C}(A,B)\otimes_W N\mathcal{C}(B,C)\xrightarrow{\widetilde{N}}N(\mathcal{C}(A,B)\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{C}(B,C))\xrightarrow{N\fatsemi_{\mathcal{C}}}N\mathcal{C}(A,C),$$
$$\mathsf{id}_{*A}:=I_{\mathcal{W}}\xrightarrow{N_\varepsilon}NI_{\mathcal{V}}\xrightarrow{N\mathsf{id}_A}N\mathcal{C}(A,A).$$

(ii) 一个 $\mathcal{V}$-函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 映射到 $\mathcal{W}$-函子 $N_*F\colon N_*\mathcal{C}\to N_*\mathcal{D}$，它在对象上的作用为 $(N_*F)_{\mathsf{Ob}}:=F_{\mathsf{Ob}}$，在箭头上的作用为 $(N_*F)_{A,B}:=NF_{A,B}$。*(iii)* 一个 $\mathcal{V}$-自然变换 $\tau\colon F\Rightarrow G$ 映射到 $\mathcal{W}$-自然变换 $N_*\tau\colon N_*F\Rightarrow N_*G$，其分量为 $(N_*\tau)_A:=I_{\mathcal{W}}\,N\xrightarrow{\varepsilon}NI_{\mathcal{V}}\,N\xrightarrow{\tau_A}N\mathcal{D}(FA,GA)$。

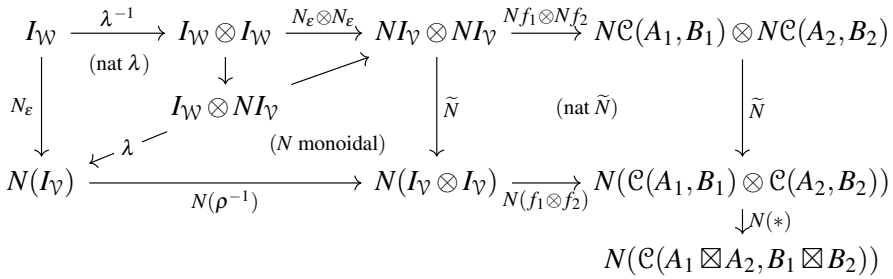
基变换与幺半变换相容。以下内容见 [6, 命题 *4.3.1*、定理 *4.3.2*]。命题 *2.19*。基变换构造诱导出一个 *2*-函子 $(-)_*\colon \mathbb{M}oncat \to \mathbb{2}cat$。它将一个幺半范畴 $\mathcal{V}$ 映射为 *2*-范畴 $\mathbb{V}cat$，将一个幺半函子 $N\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 映射为 *2*-函子 $N_*\colon \mathbb{V}cat \to \mathbb{W}cat$，并将幺半变换 $\tau\colon N \Rightarrow M$ 映射为 *2*-自然变换 $\tau_*\colon N_* \Rightarrow M_*$，其分量 $\tau_{*\mathcal{C}}\colon N_*\mathcal{C} \to M_*\mathcal{C}$ 是满足 $(\tau_{*\mathcal{C}})_{\mathsf{Ob}} = id^{\mathsf{Ob}(\mathcal{C})}$ 和 $(\tau_{*\mathcal{C}})_{A,B} := \tau_{\mathcal{C}(A,B)}$ 的 $\mathcal{W}$- 函子。

最后，只要N 是对称的，对称幺半结构便沿基变换传递。**命题 2.20**。 设 $N\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 是一个对称幺半函子，且 $(\mathcal{C}, \boxtimes, J)$ 是一个（对称）幺半$\mathcal{V}$-范畴。那么，$N_*\mathcal{C}$ 是一个（对称）幺半 $\mathcal{W}$-范畴，其 $\mathcal{W}$-函子为 $\boxtimes^N\colon N_*\mathcal{C} \otimes N_*\mathcal{C} \to N_*\mathcal{C}$，它将对象映射为 $(A,B) \mapsto A \boxtimes B$，并按如下方式映射箭头

$$N\mathcal{C}(A_1,B_1) \otimes N\mathcal{C}(A_2,B_2) \xrightarrow{\widetilde{N}} N(\mathcal{C}(A_1,B_1) \otimes \mathcal{C}(A_2,B_2)) \xrightarrow{N\boxtimes} N\mathcal{C}(A_1 \boxtimes A_2, B_1 \boxtimes B_2).$$

单位元由 $J \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) = \mathsf{Ob}(N_*\mathcal{C})$ 给出，相干同构的分量为 N_*a、N_*r、N_*l（以及 N_*s）。此外，N 还诱导出一个严格（对称）幺半函子 $N_*^0\colon \mathcal{C}_0 \to (N_*\mathcal{C})_0$，它作用于底层范畴之间，在对象上为恒等，并将 $f\colon I_{\mathcal{V}} \to \mathcal{C}(A,B)$ 映射为 $N_*f = N_\varepsilon \fatsemi Nf$。

证明。Cruttwell 在 [6, 定理 5.71] 中给出了一个概念性证明，利用幺半 $\mathcal{V}$-范畴是 $\mathbb{V}$cat 中的伪幺半群对象，因此在幺半（–）$_*$下保持不变，从而将幺半结构转移过去。~我们给出一个直接的解释。当 N 是对称的时，$\mathrm{N}\colon \mathrm{N}(-) \bullet \mathrm{N}(=) \to \mathrm{N}(- \otimes =)$ 是一个幺半变换 [6, 命题 5.36]，因此诱导出一个 $\mathcal{W}$-函子（~N）$_*\colon \mathrm{N}_*\mathcal{C} \otimes \mathrm{N}_*\mathcal{C} \to \mathrm{N}_*(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C})$。因此，$\boxtimes^N$~可以表示为 $\mathcal{W}$-函子 $(\mathrm{N})_* \fatsemi (\mathrm{N}_*\boxtimes)$ 的复合。利用 N 是对称幺半的这一事实，可以证明所提出的相干同构具有正确的源函子和目标函子。要证明它们满足对称幺半范畴公理，可以注意到 N_*^0是一个严格幺半函子：对于 $\mathrm{f} \in \mathcal{C}_0(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ 和 $\mathrm{g} \in \mathcal{C}_0(\mathrm{B},\mathrm{C})$，有 $\mathrm{N}_*(\mathrm{f} \fatsemi \mathrm{g}) = (\mathrm{N}_*\mathrm{f}) \fatsemi (\mathrm{N}_*\mathrm{g})$。类似地，对于 $\mathrm{f}_i \in \mathcal{C}_0(\mathrm{A}_i,\mathrm{B}_i)$，有 $\mathrm{N}_*(\mathrm{f}_1 \bar{\boxtimes}_0 \mathrm{f}_2) = (\mathrm{N}_*\mathrm{f}_1) \bar{\boxtimes}_0^N (\mathrm{N}_*\mathrm{f}_1)$。此外，当 $\mathcal{C}$是对称的时，N_*^0也是对称的，因为 $\mathrm{N}_*^0\mathrm{s} = \mathrm{N}_*\mathrm{s}$。这用到了定义、N 是幺半函子的事实，以及对称幺半范畴的性质，



其中（$*$）表示 $\fatsemi$ 或 $\boxtimes$。值得注意的是，这不需要 $\boxtimes^N$ 的 $\mathcal{W}$-函子性。因此，当通过 N_*^0 映射时，$\mathcal{C}_0$ 的相干图表对于 $(N_*\mathcal{C})_0$ 中的 N_*a、N_*r、N_*l 和 N_*s 也成立。 □

3 带外部参数化的不确定性

本节应用第 2 节的基变换技术，为对称幺半范畴赋予参数化不确定性。我们首先说明如何使用对称幺半单子来表示不确定性语义。接着，介绍用于获得外部参数化的部分切片构造。最后，给出我们的主要构造：将对称幺半 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 中的箭头替换为参数映射 $A \to \mathcal{C}(X,Y)$，这些映射位于由不确定性单子生成的马尔可夫范畴中。我们还将说明如何将原始对称幺半范畴的结构传递到所得的 2-范畴中。

3.1 不确定性单子

许多不确定性语义都可以视为确定性对象的广义集合。例如，对象的子集、区间和分布都遵循这一模式。在此类广义集合中的赋值映射为不确定过程提供了一种模型。对称幺半单子将这一思想形式化 [13, 第 3] 节，其 Kleisli 范畴通常构成马尔可夫范畴。马尔可夫范畴公理 [13, 第 2]节描述了此类不确定过程如何复合。

定义 3.1 (对称幺半单子)。 设 $\mathcal{V}$ 是一个对称幺半范畴。范畴 $\mathcal{V}$ 上的单子 $(\mathsf{M}\ \mu,\eta)$，其乘法为 μ，单位元为 η，若附带态射，则称为对称幺半单子：

$$\nabla_{X,Y}\colon \mathsf{M}(X)\otimes\mathsf{M}(Y)\to\mathsf{M}(X\otimes Y)$$

这些态射关于 X 和 Y 是自然的，使M 成为单位元为 η_I 的对称幺半函子，并使 μ 和 η成为幺半变换。若 I 是 $\mathcal{V}$中的终对象，且 $\mathsf{M}I\cong I$，则称M 为仿射的。

对称幺半单子的 Kleisli 范畴是对称幺半范畴。下述结果证明见 [13,命题 3.1、推论 3.2]。

命题 3.2。 给定 $\mathcal{V}$上的对称幺半单子 $(\mathsf{M}\ \eta,\mu,\nabla)$，其 *Kleisli* 范畴$\mathsf{Kl}_{\mathsf{M}}$在如下乘积下构成对称幺半范畴：该乘积将 $f\colon\ A\to\mathsf{M}X$ 和 $g\colon\ B\to\mathsf{M}Y$ 映为

$$A\otimes B\xrightarrow{f\otimes g}\mathsf{M}X\otimes\mathsf{M}Y\xrightarrow{\nabla}\mathsf{M}(X\otimes Y).$$

此外，对象上为恒等的函子 $\mathsf{L}_{\mathsf{M}}\colon\mathcal{V}\to\mathsf{Kl}_{\mathsf{M}}$ 将 $f\mapsto f\fatsemi\eta$ 送出，且是严格对称幺半的。进一步地，若 $\mathcal{V}$ 是马尔可夫范畴且 M 为仿射，则 Kl_{M} 成为一个马尔可夫范畴，其复制映射与删除映射由 $\mathsf{L}_{\mathsf{M}}(\mathsf{cp}_X)$ 与 $\mathsf{L}_{\mathsf{M}}(\mathsf{del}_X)$ 给出。

由于许多常见范畴（例如 Set ）是笛卡尔范畴，因而也是马尔可夫范畴，命题 3.2 提供了一种引入不确定性的便捷方式。此外，根据马尔可夫范畴的严格化定理 [13, 命题 10.16、定理 10.17] 我们将不失一般性地假设：只要方便，Kl_{M} 就是一个严格幺半范畴。现在我们给出若干关键例子。

例 3.3. 协变非空幂集函子 $\mathsf{Pow}_{\varnothing}\colon\mathsf{Set}\to\mathsf{Set}$ 是一个仿射单子，其中 μ由并集给出， η 将元素映射为单元素集。它在 $\nabla_{X,Y}$ 下是对称幺半的，该结构将子集对送至其笛卡尔积。$\mathsf{Kl}_{\mathsf{Pow}_{\varnothing}}$ 由集合与多值函数构成。

例 3.4. *Giry* 单子 $\mathsf{D}\colon\mathsf{Meas}\to\mathsf{Meas}$将可测空间 $(X\ \Sigma_X)$ 映射为其上的概率测度空间（配备适当的 σ-代数），构成一个仿射对称幺半单子 *[13, 第 4]* 节。它的 *Kleisli* 范畴是Stoch，即马尔可夫核范畴。

例3.5. 箭头函子 $\mathsf{Arr}\colon\mathsf{Pos}\to\mathsf{Pos}$将每个偏序集映射为由端点排序的区间集合 $[a,b],:\ \ [a,b]\preceq[c,d]$ 当且仅当 $a\preceq c\wedge b\preceq d$。它构成一个仿射对称幺半单子，其单位元为 $\eta_{\mathcal{P}}\colon a\mapsto[a,a],$，乘法为 $\mu_{\mathcal{P}}\colon[[a,b],[c,d]]\mapsto[a,d],$，且 $\nabla_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}\colon[a,b]\otimes[c,d]\mapsto[a\otimes c,b\otimes d]$。

例3.6。 扭曲箭头函子 $\mathsf{TwiArr}\colon\mathsf{Pos}\to\mathsf{Pos}$ 按包含关系对区间排序：$[a,b]\preceq[c,d]$当且仅当 $c\preceq a\wedge b\preceq d$。尽管它作为一种不确定性语义颇有意义 *[4]*，但无法定义自然变换 μ 和 η，使其成为单子。

利用基变换，我们可以为对称幺半范畴的同态集赋予不确定性。

定理*3.7.* 给定一个 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 以及定义在 $\mathcal{V}$ 上的对称幺半单子 $(M\ \eta,\mu,\nabla)$，存在一个$\mathcal{V}$-范畴 $M_*\mathcal{C}$，其对象与 $\mathcal{C}$ 相同，同态对象为 $M\mathcal{C}(X,Y)$，复合为 $\nabla\fatsemi M(\fatsemi_{\mathcal{C}})$，恒等态射为 $\eta_I\fatsemi M(id_A)$。存在一个对象上为恒等的 $\mathcal{V}$ 函子 $\iota\colon\ \mathcal{C}\to M_*\mathcal{C}$，它通过$\eta_{\mathcal{C}(X,Y)}\colon\ \mathcal{C}(X,Y)\to M\mathcal{C}(X,Y)$ 映射箭头。若 $\mathcal{C}$ 是（对称）幺半的，则 $M_*\mathcal{C}$ 也是如此，且底层函子$\iota_0\colon\ \mathcal{C}_0\to(M\mathcal{C})_0$ 是严格（对称）幺半的。

~证明。 由于 M 是一个具有强度 $\mathsf{M} = \nabla$ 和单位元 $\mathsf{M}_\varepsilon = \eta_I$的对称幺半函子，我们可以直接应用命题 2.18 和 2.20。 $\mathcal{V}$的函子性 ι 成立，因为 η 是一个幺半变换。 □

例 *3.8*（不精确概率论）。不精确概率论在统计建模过程中纳入了关于概率选择的不确定性 *[22, 16]*。一种通用形式考虑概率测度的子集。$\mathit{Pow}_{\varnothing *}\mathit{Stoch}$ 实现了这一思想，其箭头是马尔可夫核的子集，并通过取可能复合的集合来进行复合。严格对称幺半嵌入 $\iota_0 \colon \mathit{Stoch} \to \mathit{Pow}_{\varnothing *}\mathit{Stoch}$ 使我们能够转移余幺半群 *cp* 和 *del* 的结构。由于$\{k : X \to Y\} \fatsemi \iota_0(\mathit{del}_Y) = \{k \fatsemi \mathit{del}_Y\} = \{\mathit{del}_X\} = \iota_0(\mathit{del}_X)$，结果仍是一个马尔可夫范畴。其他常见的不精确形式也可以通过我们的构造来刻画。例如，对次概率测度的 *Pos-* 范畴（按逐点顺序排列）应用 *Arr*，可得到上概率和下概率；而稳健贝叶斯方法则可以用例 *3.16* 中引入的参数化不确定性来建模。

3.2 部分切片函子

本节定义部分切片函子 $\mathcal{U}/(-) \colon \mathcal{W} \to \mathbb{C}\mathsf{at}$，用于对范畴的同态集进行参数化。我们证明，当 $\mathcal{U}$ 为严格时，它是幺半的，并展示对称幺半范畴结构如何沿其传递。

定义 3.9 (部分切片函子)。 给定范畴 $\mathcal{W}$ 及其子范畴 $i \colon \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$，部分切片函子 $\mathcal{U}/(-) \colon \mathcal{W} \to \mathsf{cat}$ 将每个对象 $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{W})$ 映射到逗号范畴$(i \downarrow \Delta_A)$，其对象为

(i) 由二元组$(U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{U})、f \colon i(U) \to A)$给出的对象；*(ii)* 箭头 $\varphi \colon (U、f) \to (V、g)$，由 $\mathcal{U}$- 箭头 $\varphi \colon U \to V$ 给出，并满足$f = i(\varphi) \fatsemi g$。在箭头上，$\mathcal{U}/(-)$ 将每个$f \colon A \to B$ （其中 $\mathcal{W}$）映射为后复合函子 $\mathcal{U}/f \colon \mathcal{U}/A \to \mathcal{U}/B$。

命题 3.10. 设 $(\mathcal{W}, \otimes, I_\mathcal{W})$ 是一个对称幺半范畴，且 $i \colon \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$ 是一个满严格幺半子范畴。则偏切片函子 $\mathcal{U}/(-) \colon \mathcal{W} \to \mathsf{cat}$ 在 *cat* 中关于以下比较箭头构成幺半函子：

(i) 函子 $\mathcal{U}/(-)_\varepsilon \colon 1_{\mathsf{cat}} \to \mathcal{U}/I_\mathcal{W}$ 将唯一对象 $*$ 映射到恒等态射 $\mathit{id}_{I_\mathcal{W}} \colon I_\mathcal{W} \to I_\mathcal{W}$。~*(ii)* 自然变换 $\mathcal{U}/(-)_{A_1, A_2} \colon \mathcal{U}/A_1 \times \mathcal{U}/A_2 \to \mathcal{U}/(A_1 \otimes A_2)$ 将对象 $f_1 \colon U_1 \to A_1$ 和 $f_2 \colon U_2 \to A_2$ 映射为 $f_1 \otimes f_2 \colon U_1 \otimes U_2 \to A_1 \otimes A_2$，，并将箭头 $\varphi \colon f_1 \to g_1$ 和 $\psi \colon f_2 \to g_2$ 映射为 $\varphi \otimes \psi$。此外，$\mathcal{U}/(-)$ 在自然可逆 2-胞 σ_{U_1, U_2} 意义下是对称的。

~证明。 $\mathcal{U}/(-)_\varepsilon$ 显然是一个函子，而 $\mathcal{U}/(-)_{A_1, A_2}$ 从 $\otimes$继承了函子性。对于自然性和对称性，我们要求

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}/A_1 \times \mathcal{U}/A_2 & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{U}/(-)}} & \mathcal{U}/(A_1 \otimes A_2) \\ {\scriptstyle \mathcal{U}/f_1 \times \mathcal{U}/f_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{U}/f_1 \otimes f_2} \\ \mathcal{U}/B_1 \times \mathcal{U}/B_2 & \xrightarrow[\widetilde{\mathcal{U}/(-)}]{} & \mathcal{U}/(B_1 \otimes B_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{U}/A_1 \times \mathcal{U}/A_2 & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{U}/(-)}} & \mathcal{U}/(A_1 \otimes A_2) \\ {\scriptstyle \sigma_{\mathsf{cat}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{U}/\sigma_\mathcal{W}} \\ \mathcal{U}/A_2 \times \mathcal{U}/A_1 & \xrightarrow[\widetilde{\mathcal{U}/(-)}]{} & \mathcal{U}/(A_2 \otimes A_1) \end{array}$$

考虑对象$h_i \colon U_i \to A_i$ 和$k_i \colon V_i \to A_i$，其中 $\mathcal{U}/A_i$中的箭头为 $\varphi_i \colon h_i \to k_i$。自然性源于 $\otimes$的函子性。

$$\begin{array}{ccc} U_1 \otimes U_2 & \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \varphi_2} & V_1 \otimes V_2 \\ {\scriptstyle (h_1 \otimes h_2) \fatsemi (f_1 \otimes f_2)} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle (k_1 \otimes k_2) \fatsemi (f_1 \otimes f_2)} \\ & B_1 \otimes B_2 & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} U_1 \otimes U_2 & \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \varphi_2} & V_1 \otimes V_2 \\ {\scriptstyle (h_1 \fatsemi f_1) \otimes (h_2 \fatsemi f_2)} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle (k_1 \fatsemi f_1) \otimes (k_2 \fatsemi f_2)} \\ & B_1 \otimes B_2 & \end{array}$$

结合律　　幺元律和幺元条件成立，因为 $\mathcal{U}$ 是严格幺半的。对称性条件　　n

$$\begin{array}{ccc} U_1\otimes U_2 & \xrightarrow{\varphi_1\otimes\varphi_2} & V_1\otimes V_2 \\ {\scriptstyle (h_1\otimes h_2)\fatsemi\sigma_{A_1,A_2}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle (k_1\otimes k_2)\fatsemi\sigma_{A_1,A_2}} \\ & A_2\otimes A_1 & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} U_2\otimes U_1 & \xrightarrow{\varphi_2\otimes\varphi_1} & V_2\otimes V_1 \\ {\scriptstyle h_2\otimes h_1}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle k_2\otimes k_1} \\ & A_2\otimes A_1 & \end{array}$$

通过用 $\sigma_{U_1,\ U_2}\colon U_1\otimes U_2\to U_2\otimes U_1$ 和 $\sigma_{V_1,\ V_2}\colon V_1\otimes V_2\to V_2\otimes V_1$ 连接等式两边，形成交换平行四边形，从而得到自然2-胞。 □

注3.11。若 $\mathcal{U}$ 不是严格的，则 $\mathcal{U}/(-)$的结合律和幺元律图也仅在自然可逆*2*-胞意义下交换。在这种情形下，较弱版本的基变换仍然成立（见 *[15,*第 *13]*章），但复合不再严格满足幺元律和结合律，因此得到一个双范畴。

虽然部分切片从表面上看并不对称，但仍可沿其传递对称幺半范畴结构，从而得到一个近严格对称幺半2-范畴（定义2.17）。

命题3.12。设$(\mathcal{C},\boxtimes,J)$是一个（对称）幺半 $\mathcal{W}$-范畴，且 $i\colon\mathcal{U}\hookrightarrow\mathcal{W}$是一个满严格幺半子范畴。那么 $\mathcal{U}/(-)_*\mathcal{C}$ 是一个近严格（对称）幺半*2*-范畴，其幺半积的张量子由 $\mathcal{W}$中的对称同构给出，相容性*1*-胞由 $\mathcal{C}$中的相容性*1*-胞给出。与结合子和单位子不同，对称性仅在*2*-胞$\sigma^{\mathcal{W}}_{U_2,\ U_1}$意义下自然。包含*2*-函子 $\iota\colon\ \mathcal{C}_0\to\mathcal{U}/(-)_*\mathcal{C}$严格保持幺半积和相容性*1*-胞。

证明。记 $\mathcal{U}/(-)$为 N。命题 $\boxtimes^N$ 2.20 中对 的定义仍然有意义。可以验证$\widetilde{\ }$，$(N)_*$ 定义了一个拟函子，其张量器为 2-自然同构

$$\vartheta_{f_1,f_2,g_1,g_2}\colon (f_1\boxtimes^N f_2)\fatsemi(g_1\boxtimes g_2)\Rightarrow(f_1\fatsemi g_1)\boxtimes^N(f_2\fatsemi g_2)$$

由定义 *2.11*中使用的对称性 m给出。相干映射 a、r 和 l 依照命题 2.20中相同的论证，提升为严格 2-自然变换。可以验证，扭曲对称性定义了一个强 2-自然变换。根据定义，$N_*\mathcal{C}$中的复合和幺半积与 $\mathcal{C}_0$中的相应结构一致。因此，提升后的相干映射满足它们在 $\mathcal{C}_0$中满足的公理，这表明 $N_*\mathcal{C}$ 是一个近严格对称幺半 2-范畴。还可推出，ι 严格保持幺半积和相容性1-胞。

□

3.3 主要构造

我们的主要结果将不确定性单子与由部分切片函子导出的参数化结合起来。我们加入一个适配器函子 $F\colon\ \mathcal{V}\to\mathcal{W}$，以应对该单子并不直接作用于 $\mathcal{V}$ 的情况。

定理 3.13. 设 $(\mathsf{M}\ \mu,\eta,\nabla)$ 是 $\mathcal{W}$上的对称幺半单子，且 $F\colon\ \mathcal{V}\to\mathcal{W}$是一个对称幺半函子。给定一个满严格幺半子范畴 $i\colon\ \mathcal{U}\hookrightarrow\mathcal{W}$，记

$$(\mathcal{U}/\mathsf{M}F)\colon\mathcal{V}\xrightarrow{F}\mathcal{W}\xrightarrow{\mathsf{L}_\mathsf{M}}\mathsf{Kl}_\mathsf{M}\xrightarrow{\mathcal{U}/(-)}\mathsf{cat}.$$

对于任意 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$，我们得到一个 *2*-范畴 $(\mathcal{U}/\mathsf{M}F)_*\mathcal{C}$，它为 $\mathcal{C}$添加了参数化的 不确定性 M-不确定性，参数空间取自 $\mathcal{U}$。如果 $\mathcal{C}$ 是（对称）幺半的，那么 $(\mathcal{U}/\mathsf{M}F)_*\mathcal{C}$ 是一个近乎严格的（对称）幺半 *2*-范畴。展开基变换可得到以下显式定义：

（*i*）*0*-胞腔是 $\mathcal{C}$-对象。（*ii*）X 与 Y 之间的 *1*-胞是 Kl_M-箭头 $f\colon U_1\to F\mathcal{C}(X,\ Y)$，其中 U_1 是 $\mathcal{U}$ 中的一个对象；（*iii*）$f\colon U_1\to F\mathcal{C}(X,\ Y)$ 与 $g\colon V_1\to F\mathcal{C}(X,\ Y)$ 之间的 *2*-胞腔是满足 $f=\varphi\fatsemi g$ 的 Kl_M-箭头 $\varphi\colon U_1\to V_1$。它们通过 Kl_M-复合进行垂直复合。

（*iv*）*1*-胞和 *2*-胞腔按照以下方式进行水平复合

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & V_1 \\ & {\scriptstyle f_1}\searrow \quad \downarrow{\scriptstyle g_1} & \\ & F\mathcal{C}(X,Y) & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} U_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & V_2 \\ & {\scriptstyle f_2}\searrow \quad \downarrow{\scriptstyle g_2} & \\ & F\mathcal{C}(Y,Z) & \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} U_1 \otimes U_2 & \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \varphi_2} & V_1 \otimes V_2 \\ & {\scriptstyle f_1 \otimes f_2}\searrow \quad \downarrow{\scriptstyle g_1 \otimes g_2} & \\ & F\mathcal{C}(X,Y) \otimes F\mathcal{C}(Y,Z) \xrightarrow{(*)} F\mathcal{C}(X,Z) & \end{array} \tag{1}$$

其中 $(*) = F\,⨟F(⨟_{\mathcal{C}})⨟\eta$ 表示 $\mathcal{C}$ 的提升的复合。恒等态射由 *1*-胞 $\mathrm{id}_X := F_\varepsilon ⨟ F(\mathrm{id}_X) ⨟ \eta : I_{\mathcal{W}} \to F\mathcal{C}(X,X)$ 给出。

(v) *1*-胞和 *2*-胞的幺半积由 $\mathcal{C}$ 的提升的幺半积的图式给出，其中 $(*)$ 交换律仅在自然可逆 $\widetilde{2}$-胞 $\vartheta f_1 f_2, g_1 g_2 : (f_1 \boxtimes f_2) ⨟ (g_1 \boxtimes g_2) \Rightarrow (f_1 ⨟ g_1) \boxtimes (f_2 ⨟ g_2)$ 的意义下成立，称为张量*ator*，由定义 *2.11* 中的映射 m 给出，该映射重排参数空间。相干映射由 $\mathcal{C}$ 中的相应映射提升而来。例如，左单位约束的分量为 $l_A = F_\varepsilon ⨟ F(l^{\mathcal{C}}_A) ⨟ \eta : I_{\mathcal{W}} \to F\mathcal{C}(I_{\mathcal{C}} \boxtimes X, X)$。对称性仅在一个交换参数空间的 *2*-胞意义下具有自然性。

证明。使用命题 2.18 与 2.20 作用于对称幺半函子 $F ⨟ \mathsf{L}_{\mathsf{M}}$。然后应用命题 3.12 于（对称）幺半$\mathsf{KI}_{\mathsf{M}}$-范畴 $(F ⨟ \mathsf{L}_{\mathsf{M}})_* \mathcal{C}$，同时假设 KI_{M} 是严格的。 □

接下来，我们证明 $(\mathcal{U}/\mathsf{M}F)_* \mathcal{C}$ 扩张了 $\mathcal{C}$，从而使我们能够传递额外的结构。

命题3.14。存在一个对象恒等的*2*-函子 $\iota\colon \mathcal{C}_0 \to (\mathcal{U}/\mathsf{M}F)_* \mathcal{C}$，它严格保持幺半积与相干映射。若 F^0_* 以及由 η 进行的后复合是忠实的，则 ι亦然。

证明。由命题 2.20，基变换诱导一个严格对称幺半函子 $(\mathrm{MF})^0_* : \mathcal{C}_0 \to ((\mathrm{MF})_* \mathcal{C})_0$。命题3.12给出一个严格保持幺半积的2-函子 $((\mathrm{MF})_* \mathcal{C})_0 \to (\mathcal{U}/\mathrm{MF})$。该复合将 $\mathrm{f} : \mathrm{I}_{\mathcal{V}} \to \mathcal{C}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 映到 $\delta(\mathrm{f}) : \mathrm{I}_{\mathcal{W}} \mathrm{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{FI}_{\mathcal{V}} \mathrm{F}\,\mathrm{f} \longrightarrow \mathrm{F}\,\mathcal{C}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \xrightarrow{\eta} \mathrm{MF}\,\mathcal{C}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$，从而证明了关于忠实性的断言。此外，相干映射恰好具有这种形式。 □

备注 3.15。根据命题 *3.14*，我们可以将 $\mathcal{C}_0$ 中任何以满足涉及复合、幺半积和相干映射之方程的箭头定义的结构转移到$(\mathcal{U}/\mathsf{M}F)_* \mathcal{C}$。这包括紧闭结构、（交换）（余）幺半群，以及 *[12]*, 中定义的那些沿本质满的严格对称幺半函子转移的供给 *[12*, 命题 *3*。*24]*。

现在我们展示如何利用定理3.13 得到有用的 2-范畴。

例 3.16（外部参数化）。给定一个对称幺半函子 $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 和全幺半子范畴 $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$，我们可以用$(\mathcal{U}/F)_* \mathcal{C}$来参数化一个 $\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$，其 $\mathcal{U}$-箭头 $A \to \mathcal{C}(X, Y)$；这里的记号省略了恒等单子。同样地，当 $F = \mathsf{Id}$时，我们也会省略 F。

注 3.17. 引入参数映射的一种常见方式是 **Para** 构造 *[9, 3]*。在最简单的表述中，**Para**$(\mathcal{C}, \boxtimes, J)$ 中的 *1*- 胞是 $\mathcal{C}$ 中从 $A \boxtimes X \to Y$ 的映射，其中 A 被视为参数空间。因此，**Para** 会生成 $\mathcal{C}$ 内部的参数映射。当 $\mathcal{C}$ 是闭的时，这些映射等价于从 $A \to [X,Y]$, 的映射，其中 $[X,Y]$ 表示内部 *hom*。对于我们的应用，外部表示更有用。特别是，它将参数化问题与 $\mathcal{C}$ 的性质分离开来。

例 3.18（可能性不确定性）。若 $\mathcal{C}$ 是一个普通范畴，$(\mathcal{U}/\mathsf{Pow}_\varnothing)_* \mathcal{C}$ 会给出箭头的参数化子集。若 $\mathcal{C}$ 是一个Pos-范畴 $\mathcal{C}$，$(\mathcal{U}/\mathsf{Arr})_* \mathcal{C}$ 包含箭头的参数化区间。

例 3.19 （概率不确定性）。要利用分布单子赋予范畴概率不确定性，我们需要将其视为Meas-富集范畴。关键在于，我们的赋值必须保留复合映射和幺半积映射的可测性。若 $\mathcal{C}$ 是一个普通范畴，可以为每个集合 $\mathcal{C}(X,Y)$ 赋予离散的 σ-代数$\mathsf{Pow}(\mathcal{C}(X,Y))$。这对有限集和可数集效果良好。然而，对于像 $\mathbb{R}$这样的不可数集，离散的 σ-代数通常过于庞大，难以发挥作用。如何继续取决于具体应用。有时，可以手动构造一个Meas-富集版本的 $\mathcal{C}$，并为其配备理想的 σ-代数。另一些情况下，也许可以通过构造一个对称幺半函子 $F\colon \mathcal{V} \to \mathsf{Meas}$，以统一的方式实现这一点。

示例 3.20. 对于设计问题，似乎很难为偏序集设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$配备非平凡的 σ-代数，并使得复合可测。例如，为设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ 赋予由其上集生成的σ-代数这一自然选择会失败，原因在于存在诸如 $\mathbb{R}^2$ 这样具有不可数宽度的偏序集。

我们可以通过为设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$赋予离散 σ-代数来绕过可测性问题。当分布由样本表示时，实践中就会出现这类离散化。为了在所得空间上定义分布，我们可以沿可测映射 $f\colon A \to$设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$，将分布从更熟悉的空间 A 前推。此类映射可由任意函数 $g\colon A \to$设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ 通过如下离散化过程得到：固定将 A 划分为有限多个可测集的划分 $P := \{p_j\}_{j=1}^{N}$。我们可以用 $g_P\colon P \to$ 设计问题 $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ 来逼近 g，其中对某个 $x_j \in p_j$，有 $g_P(p_j) := g(x_j)$。这对于 P 上的离散 σ-代数是可测的。此外，存在可测映射 $i\colon A \to P$，它将每个点对应到包含该点的集合。因此，复合 $f := i \fatsemi g_P\colon A \to$设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ 是 g 的一个可测逼近，且当 P 变得更细时其保真度提高。此类 f 也可通过与核 $k\colon B \to A$ 复合，用来定义马尔可夫核 $B \to$设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$。我们目前正在研究如何以与复合相容的方式看待设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$上的连续分布。

例*3.21*（学习反应网络）。装饰余跨与结构化余跨 *[8, 1]* 提供了一种构造开放系统的超图范畴 *[10]* 的系统方法。该框架已被广泛应用，例如应用于开放化学反应网络 *[2]*。这些可视为*Petri*网范畴*Petri*中的结构化余跨*Csp(Petri)* *[1,* 第 *6]*节。对于有限*Petri*网，我们可以将所得超图范畴视为有限集范畴充实的。我们构造对称幺半*2*-范畴$(\mathcal{U}/D\Sigma)_*Csp(Petri)$，其中 Σ：有限集范畴 $\to Meas$将每个集合映到离散可测空间。该范畴的*1*-胞是马尔可夫核$A \to Csp(Petri)(X,Y)$，它们将每个$a \in A$送到具有界面X、Y的开放反应网络的一个离散分布。*Csp(Petri)*上的超图结构沿包含关系传递。因此，$(\mathcal{U}/D\Sigma)_*Csp(Petri)$可以表示关于开放网络的假设，这些假设可通过实验数据上的贝叶斯推断加以更新。此外，它纳入了网络的复合结构，从而能够对实验干预进行因果推理。

4 协同设计的应用

本节将通过将参数化不确定性应用于设计问题范畴，展示其用途。基于这些思想的计算案例研究见 [17]。我们采用 [23],中的协同设计图，并以图1 所示系统作为贯穿示例。

4.1 表示参数化和不确定性设计问题

如例 2.9 和例2.15所述，我们可以将紧闭对称幺半范畴 设计问题 视为Pos-富集的，此时记作 设计问题$_{\leq}$。通过应用基变换构造，我们得到

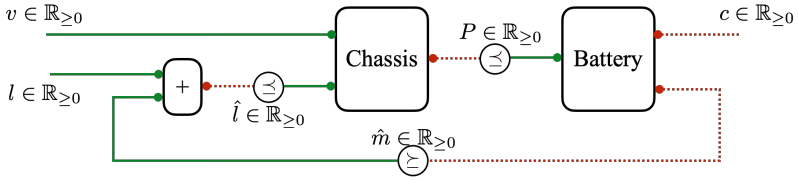


图 1：由底盘和电池组件构成的电动汽车设计问题 ts.

具有所选不确定性语义的参数化设计问题。由于基变换具有函子性，传统的协同设计概念可以扩展到新的情境中。

例 4.1。*2*-范畴 $(\mathcal{U}/\mathsf{Id})_*$设计问题表示由函数参数化的设计问题，其中 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{Q}$ 之间的 *1*-胞是函数 $A \to$ 设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$。类似地，$(\mathcal{U}/\mathsf{Id})_*$设计问题$_{\leq}$ 表示单调参数化设计问题，其中参数空间带有序关系，且函数是单调的。

例 4.2。*2*-范畴 $(\mathcal{U}/\mathsf{Pow}_{\varnothing})_*$设计问题表示由函数参数化的鲁棒设计问题。其 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{Q}$ 之间的 *1*-胞是函数 $A \to \mathsf{Pow}_{\varnothing}$设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$，它为每个参数分配一个从 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{Q}$的设计问题的非空子集 $\in A$。类似的构造 $(\mathcal{U}/\mathsf{Arr})_*$ 设计问题 $\leq$ 给出设计问题的参数化区间。

例 4.3。使用分布单子D 和函子 Σ: $\mathsf{Set} \to \mathsf{Meas}$ 将每个集合映射到离散可测空间，由此得到一个由设计问题的$(\mathcal{U}/\mathsf{D}\Sigma)_*$设计问题范畴，其中包含设计问题的参数化分布。其 *1*-胞为马尔可夫核 $A \to$设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$，其中设计问题$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ 带有离散 σ-代数。此类核可通过例*3.20*中描述的过程构造。

现在，我们通过一个具体示例来演示这些范畴的用法。

示例 4.4 （电动汽车）。 图 *1* 中的设计问题对一辆由两个分量——底盘和电池——组成的电动汽车进行建模。方块表示 设计问题中的箭头，连线则表示作为资源（红色）和功能（绿色）的对象。电池 B 提供 功率 P，作为回报，它需要付出 成本 c 和^电池质量 ^m。底盘 C 提供 速度 v 和 总载荷 l，同时需要 功率 P。功能 l 是该设计所提供的额外有效载荷。我们采用 $\leq$上的通常序 $\mathbb{R}$，并记$\mathbb{R}^n$ 为偏序集的 n 重积。根据紧闭对称幺半范畴的图形语言，该图指定了 紧闭对称幺半范畴中的一个箭头，表示复合设计问题。实际中，底盘和电池的设计问题可能是 参数化的。例如，底盘 C 可以表示为：

$$C((v,\hat{l}),P;\theta) = \top \iff \varphi(v,\hat{l};\theta) \leq P,$$

^其中 φ 是关于 v 和 l 的单调函数，参数为 θ。这类依赖关系可以在$(\mathcal{U}/\mathsf{Id})_*$设计问题中捕捉。这里，$\theta$ 可以表示我们无法控制、但必须纳入考虑的因素。或者，我们也可以引入 θ，以评估设计问题的解对问题规格的敏感程度。最后，我们可以用 θ 使设计问题拟合经验数据。

组件性能的不确定性可以借助不确定性单子来建模。例如，假设我们要从电池模型 B_M 中进行选择，其中每个模型都提供性能的上界和下界。这可以形式化为一个 *1*-胞腔 B： $B_M \to \mathsf{ArrDP}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$，位于 $(\mathcal{U}/\mathsf{Arr})_*\mathsf{DP}_{\leq}$ 中。类似地，我们也可以对 C_M 中底盘的性能设定界限 C：$C_M \to \mathsf{ArrDP}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$。$(\mathcal{U}/\mathsf{Arr})_*\mathsf{DP}_{\leq}$ 中的复合通过对 $B_M \times C_M$ 中每一对取最坏和最好情形界，将这些界限组合起来。如果我们对组件性能有更详细的了解，也可以改用分布来表示。分布还有助于捕捉对性能产生影响的随机影响。

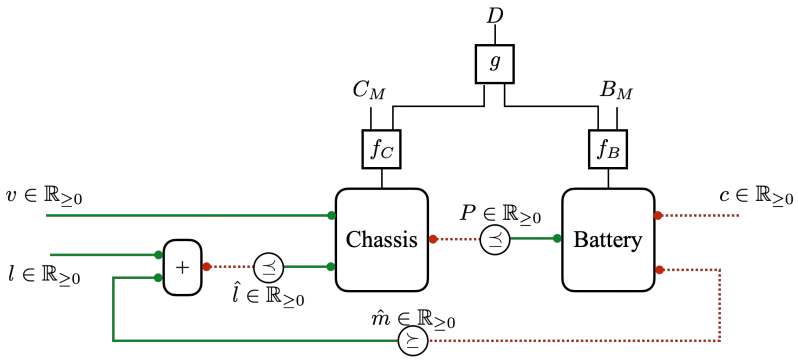


图2： 电动汽车设计问题的参数化版本。圆角矩形表示 1-胞腔$A \to \mathrm{M}\mathcal{F}\mathrm{DP}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$，而矩形表示由 Kl_{M} 中的箭头给出的重参数化 2-胞腔。

我们可以将设计问题的图形语言扩展到参数化情形，这也是 **Para** 构造中常用的做法。图 2 扩展了电动汽车。1-胞表示为圆角方框，输入箭头表示参数依赖关系。尖角矩形表示重参数化 2-胞腔，由 Kl_{M} 中的箭头给出。由于 1-胞所在的 2-范畴几乎是严格对称幺半的，因此该图的解释是明确的，至多相差参数空间的唯一置换。

例 4.5。 图 2展示了通过由 f_C、f_B 和 g 组成的 2-胞腔，对电动汽车问题进行重参数化的过程。这在各个分量之间引入了依赖关系。对于概率不确定性，这使我们能够以图形方式对影响设计的复杂随机过程建模。

4.2 做出决策

在协同设计中，我们 查询 问题以辅助决策。例如，查询 *FixFunMinRes* 将设计问题 $d \in \mathsf{DP}(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ 和功能 $f \in \mathcal{F}$ 映射到使f 可行的最小资源集合。参数化设计问题还支持更多查询，帮助我们找到能够使设计上的某个效用函数最大化的决策参数。

例 *4.6*。将图2视为确定性参数化设计问题的图表，可得到映射 $f : C_M \otimes D \otimes B_M \to DP(\mathbb{R}^2_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$。我们将定义域视为决策变量的空间。假设我们要求设计产生固定的速度和载荷 (v, l)。对于每一种可能的决策，*FixFunMinRes* 查询 q 都会返回满足设计约束所需的最小成本 c。因此，最优决策是使 $f \fatsemi q : C_M \otimes D \otimes B_M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 最小化的决策。如果分量存在概率不确定性，我们可以将 q 提升到 Kl_{D}，并将 $f \fatsemi q$ 作为马尔可夫核进行复合，从而利用贝叶斯决策理论。例如，我们可以最小化期望成本，或采用某种风险敏感度量。类似的方法也适用于其他类型的不确定性。例如，对于性能界，我们可以优化最坏情况。

4.3 学习设计问题

除了基于已知模型做出决策外，我们通常还需要从数据中学习模型。下面通过一个例子说明，我们的构造如何处理这类情况。

示例 4.7 （优化）。 假设底盘的形式为 $\varphi(v,l;\ \theta) \leq P$，其中 φ 关于（v,l）单调，且我们有一个包含观测到的可行三元组 $y_i := (v_i, l_i, P_i)$ 的数据集。如果 y_i 是带噪声的经验数据，那么

^对 θ 进行简单的最小二乘拟合 可能是合适的。然而，由此得到的 θ 很可能会违反某些 y_i。因此，如果 y_i 是有保证的，例如它们来自精确模拟，那么我们可以根据一种兼顾拟合度与复杂性的度量来选择^ $\theta \in \{\theta : \varphi(v_i, l_i; \theta) \leq P_i\}$。

示例*4.8*（贝叶斯推断）。使用概率语义查看图*2*会得到一个马尔可夫核$k : C_M \otimes D \otimes B_M \to DP(\mathbb{R}^2_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$。此处，$C_M$和$B_M$可能表示设计决策，而$D$是影响性能的未知制造商特定参数。此外，假设我们观测到一个由可行三元组组成的数据集$y_i := (v_i, l_i, c_i)$，每个三元组都与输入决策$x_i := (c_{M,i}, b_{M,i})$相关联。给定先验分布$p(d) : I_{\text{Meas}} \to D$，我们可以对数据进行条件化，从而得到后验分布$\hat{p}(d \mid x_{1:n}, y_{1:n}) : I_{\text{Meas}} \to D$。该过程可以在*Stoch* *[5, 13]*中以图示方式表达。

示例4.9（主动学习）。 在实践中，分量往往通过某种代价高昂的过程隐式定义，例如模拟或优化问题。为了高效地近似这些分量，主动学习 利用替代模型。从初始替代模型出发，我们选择模拟设置，用结果更新替代模型，并重复这一过程。替代模型有助于识别可能提供信息丰富结果的设置。可以使用任何不确定性语义，表达能力更强的选项能提供更好的控制，但计算成本更高。我们的方法允许组合各个分量的替代模型，以便在系统层面预测信息并更新信念。

参考文献

[1] John C. Baez与Kenny Courser（2020）：结构化余跨，doi:10.48550/arXiv.1911.04630。可获取于http://arxiv.org/abs/1911.04630。ArXiv:1911.04630。[2] John C. Baez与Blake S. Pollard（2017）：反应网络的组合框架。《数学物理评论》29(09)，第1750028页，doi:10.1142/S0129055X17500283。可获取于https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0129055X17500283。ArXiv:1704.02051。[3] Matteo Capucci、Bruno Gavranovi´c、Jules Hedges与Eigil Fjeldgren Rischel（2022）：迈向范畴控制论的基础。《理论计算机科学电子会议录》372，第235–248页，doi:10.4204/EPTCS.372.17。可获取于http://arxiv.org/abs/2105.06332v2。[4] Andrea Censi（2017）：单调协同设计问题中的不确定性，doi:10.48550/arXiv.1609.03103。可获取于http://arxiv.org/abs/1609.03103。ArXiv:1609.03103。[5] Kenta Cho与Bart Jacobs（2019）：经由弦图的解体与贝叶斯逆变换，doi:10.48550/arXiv.1709.00322。可获取于http://arxiv.org/abs/1709.00322。ArXiv:1709.00322。[6] Geoff S.H. Cruttwell（2008）：赋范空间与富集范畴的基变换。博士论文，达尔豪斯大学，哈利法克斯，新斯科舍。可获取于https://www.reluctantm.com/gcruttw/ publications/thesis4.pdf。[7] Samuel Eilenberg与G. Max Kelly（1966）：闭范畴。载于S. Eilenberg、D. K. Harrison、S. MacLane与H. Röhrl编：《范畴代数会议论文集》，施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，第421–562页，doi:10.1007/978-3-642-99902-4_22。[8] Brendan Fong（2016）：开放互联系统的代数，doi:10.48550/arXiv.1609.05382。可获取于http://arxiv.org/abs/1609.05382。ArXiv:1609.05382。[9] Brendan Fong、David Spivak与Remy Tuyeras（2019）：作为函子的反向传播：监督学习的组合视角。载于：2019年第34届ACM/IEEE计算机科学逻辑年度研讨会（LICS），IEEE，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，第1–13页，doi:10.1109/LICS.2019.8785665。[10] Brendan Fong与David I. Spivak（2019）：超图范畴，doi:10.48550/arXiv.1806.08304。可获取于http://arxiv.org/abs/1806.08304。ArXiv:1806.08304。

[11] Brendan Fong与David I. Spivak（2019）：应用范畴论导引：可组合性七幅素描，第1版。剑桥大学出版社，doi:10.1017/9781108668804。可获取于https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9781108668804/type/book。ArXiv:1803.05316。[12] Brendan Fong与David I. Spivak（2020）：为对称幺半范畴配备各种附加功能，doi:10.48550/arXiv.1908.02633。可获取于http://arxiv.org/abs/1908.02633。ArXiv:1908.02633。[13] Tobias Fritz（2020）：马尔可夫核、条件独立性与充分统计量定理的一种综合方法，doi:10.48550/arXiv.1908.07021。可获取于http://arxiv.org/abs/1908.07021。ArXiv:1908.07021。[14] Marius Furter、Yujun Huang与Gioele Zardini（2025）：面向设计问题的对称幺半范畴中的可组合不确定性（扩展版），doi:10.48550/arXiv.2503.17274。可获取于http: //arxiv.org/abs/2503.17274。ArXiv:2503.17274。[15]Richard Garner与Michael Shulman（2015）：作为自由余完备化的富集范畴，doi:10.48550/arXiv.1301.3191。可获取于http://arxiv.org/abs/1301.3191。ArXiv:1301.3191。[16] Joseph Y. Halpern（2017）：关于不确定性的推理，第二版。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，doi:10.7551/mitpress/10951.001.0001。[17] Yujun Huang、Marius Furter与Gioele Zardini（2025）：论系统协同设计中的可组合不确定性与参数化不确定性，doi:10.48550/arXiv.2504.02766。可获取于http://arxiv.org/abs/2504.02766。ArXiv:2504.02766。[18] Niles Johnson与Donald Yau（2020）：二维范畴，doi:10.48550/arXiv.2002.06055。可获取于http://arxiv.org/abs/2002.06055。ArXiv:2002.06055。[19] Gregory M. Kelly（1982）：富集范畴论的基本概念。伦敦数学学会讲义丛书第64卷，剑桥大学出版社，剑桥。[20] Saunders Mac Lane（1998）：工作数学家的范畴论，第二版。数学研究生教材第5卷，施普林格科学+商业媒体有限责任公司，纽约，doi:10.1007/978-1-4757-4721-8。[21] Michael Stay（2016）：紧闭双范畴。《范畴论及其应用》31(26)，第755–798页。可获取于http://arxiv.org/abs/1301.1053。ArXiv:1301.1053。[22] Peter Walley（1991）：基于不精确概率的统计推理。统计学与应用概率专著，施普林格美国，马萨诸塞州波士顿 s.l，doi:10.1007/978-1-4899-3472-7。[23] Gioele Zardini（2023）：复杂系统协同设计：从自主性到未来移动系统。博士论文，苏黎世联邦理工学院，doi:10.3929/ETHZ-B-000648075。