arXiv:2603.09445v1 [math.DS] 10 Mar 2026

´复 Hénon 映射的乘子刚性

SERGE CANTAT 和 ROMAIN DUJARDIN

摘要。我们研究复数域**复数域**^{2}上多项式自同构的乘子刚性问题。首个结果表明，给定次数的复 H´énon 映射由其乘子谱唯一确定，至多有有限种可能；更一般地，也可由其鞍周期点的不稳定乘子确定。这是 McMullen 关于一维有理映射的经典结果在这一情形下的对应版本。对于 H´énon 映射的复合，只要多重次数和多重雅可比行列式固定，同样的刚性结论仍然成立。与 McMullen 定理一样，这源于相应参数空间中不存在稳定代数族。而这又依赖于沿发散族的最大熵测度的李雅普诺夫指数的精确渐近界。

目录

1. 引言 1 2. 洛克斯德罗米克自同构的稳定性理论 7 3. 周期点与乘子谱 13 4. H´énon 映射与 Huguin 定理 20 5. 定理 E 的一些预备事实 24 6. 李雅普诺夫指数的发散 33 附录 A. 少乘子的映射 48 参考文献 49

1. 引言

1.1. 问题概述。 乘子刚性问题探讨：某一类中的动力系统是否由其周期轨道的乘子（或特征值）所决定。这是谱刚性问题这一更广阔领域的一部分，

日期：2026年3月11日。作者的研究工作部分由欧洲研究委员会（ERC GOAT 101053021）和法国国家研究署资助，资助项目为 DynAtrois（ANR-24- CE40-1163）。

谱刚性问题在几何和动力学中有许多不同的表现形式（参见 Wilkinson 最近的专著 [39]foranoverview ）。

在一维有理函数的动力学中，乘子常被视为模空间上的代数函数，并用于描述其几何；（局部）乘子刚性是指这些函数构成（局部）坐标。这一观点由 Milnor [31, 32] 和 Silverman [36] 推广开来（“乘子谱”一词似乎最早见于 [33]）。在这一框架下，参数空间是有限维的。因此，与动力学中经典的谱刚性问题相比，相关结果和方法更具代数色彩。McMullen [30]在一篇早期论文中解决了局部乘子刚性问题。不过，尽管 Ji 和 Xie [26, 27]以及 Huguin [24], 近期取得了突破，对等谱有理映射对的完整刻画仍未解决。

本文研究复数域$\mathbf{C}^2$上多项式自同构的类似问题。在这一背景下，乘子刚性问题及其若干变体已在 Friedland 和 Milnor [22]的奠基性论文中得到探讨；而关于多项式自同构的全局解析刚性的结果，则于近期在 [7, 10,11]中获得。

1.2. **多项式自同构的分类**。为了陈述我们的结果，我们首先需要回顾一些基本事实。我们用 Aut(**复数域**^{2})表示**复数域**^{2}的多项式自同构群。$f \in$ Aut(**复数域**^{2})的动力次数为

$$\lambda_1(f) := \lim_{n\to\infty} \deg(f^n)^{1/n} \in [1, \infty). \tag{1.1}$$

这个数是一个正整数，并且在共轭下不变。若$\lambda_1(f) = 1$，则称 f为初等 ，其动力学易于分析。当 $\lambda_1(f) > 1$时，我们称 f 为洛克斯德罗米克。一个*H´*农映射 h: **复数域**$^2 \to$ **复数域**^{2} 是如下形式的多项式自同构

$$h(x, y) = (ay + p(x), x) \tag{1.2}$$

对某个 $a \in$ **复数域*** 以及某个 $p \in$ **复数域**$[x]$ ，其次数为 $\geqslant 2$。H´农映射是洛克斯德罗米克自同构的主要例子： $\lambda_1(h) = \deg(p)$。

根据 [22],，如果 f 是洛克斯德罗米克的，则存在整数序列 $(d_k, \ldots, d_1) \in \mathbf{N}^k_{\geqslant 2}$、非零复数序列 $(a_k, \ldots, a_1) \in$ (**复数域***)^k 以及首一中心多项式序列 $p = (p_k, \ldots, p_1) \in$ **复数域**$[x]^k$，其次数分别为 d_i，使得 f 共轭于复合 $g = h_k \circ \cdots \circ h_1$，其中 $h_i(x, y) = (a_i y + p_i(x), x)$。我们将分解 $g = h_k \circ \cdots \circ h_1$称为 f的*Friedland-Milnor* 标准形。f 和 g 的雅可比行列式均等于 Jac$(g) = (-1)^k \prod_{i=1}^k a_i$。 g的次数为 $d = \prod_{i=1}^k d_i$，且 $\deg(g^n) = \deg(g)^n$，因此 $\lambda_1(f) = \lambda_1(g) = d$。特别地，如果$\lambda_1(f)$ 是素数，那么 $k = 1$ ，且 f 共轭于首一中心的 H´énon

映射。根据定义， $=(d_k,\ \ldots,\ d_1)$ 是 g 的多重次数，而 $=(a_k,\ \ldots,\ a_1)$ 是其多重雅可比行列式。我们将 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$ （分别将 $\mathcal{H}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^k$）定义为由 k 个多重次数为 $\mathbf{d}\in\mathbf{N}_{\geqslant 2}^k$ （分别为多重雅可比行列式 $\mathbf{a}$）的首一中心 H´énon 映射复合而成的空间。作为代数簇， $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$ 同构于 (**复数域***)$^k\times$**复数域**$^{d_1-1}\times\ldots$**复数域**$^{d_k-1}$。对于 $k=1$，我们简记为 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^1=\mathcal{H}_d^1$。

标准形并不唯一，但其不唯一性的缺陷已得到充分理解：除因子 h_i 的置换以及群 $\mathbb{U}_{d-1}$的对角作用外，它是唯一的，其中 $(d-1)^{\text{th}}$ 为单位根（详情见 § 5.3 或 [22] ）。因此，回到 f，多重次数和多重雅可比行列式只能在有限群作用下定义共轭不变量。

1.3. 乘子刚性。 若 z 是 f的一个（精确）周期为 n 的周期点：**复数域**$^2\to$ **复数域**^{2},，则 z 的乘子 $\lambda_1(z)$、 $\lambda_2(z)$ 是 Df_z^n的（无序）特征值。编码乘子的一种便捷方式是使用迹$\mathrm{tr}(Df_z^n)$和雅可比行列式 $\mathrm{Jac}(f^n)$，它们满足

$$\lambda_1+\lambda_2=\mathrm{tr}(Df_z^n)\ \text{ and }\ \lambda_1\lambda_2=\mathrm{Jac}(f^n). \tag{1.3}$$

若 z 为鞍型，则特征值可以区分，记为 $\lambda^s(z)$ 和$\lambda^u(z)$，其中 $|\lambda^s(z)|<1<|\lambda^u(z)|$。$f$ 的乘子谱（分别为迹谱）是 f所有周期轨道的全部乘子（分别为迹）的集合，并按周期分类。不稳定乘子谱是鞍型周期轨道的不稳定特征值 λ^u 的集合，并按周期分类。精确定义见 § 3.2。

定理 A。 *一个复H´énon映射 $f(x,y)=(ay+p(x),x)$ 由其迹谱（分别地，其不稳定乘子谱）确定，至多有有限种可能。*

特别地，任意复H´énon映射 $f_0\in\mathcal{H}_d^1$ 都具有如下局部乘子刚性性质：任意与 f_0 充分接近且具有相同迹谱（分别地，不稳定乘子谱）的 f 都等于 f_0。该定理的一个有趣之处在于，这一谱刻画并不需要知道雅可比行列式。

设 $S(f_0)$ 与 f_0具有相同乘子谱（或迹谱）的映射的数量为 $f\in\mathcal{H}_d^1$。定理 A 表明， $S(f_0)$ 是有限的。事实上，对于一般的 f_0， S 在 $\mathcal{H}_d^1$ 和$S(f_0)=1$ 中是一致有界的（见定理 3.7 和定理 4.2）。因此，一个一般的H´énon映射实际上由其乘子谱确定，至多相差一个共轭。对于每个洛克斯德罗米克自同构，这一结论是否成立仍是一个公开问题（参见一维有理映射的 [27, 猜想 1.7]）。

根据诺特性，对于每个 d ，都存在 $P=P(d)$ ，使得复 H´énon 映射 f 在有限多个可能性之内，由其周期不超过 P 的周期点的迹确定（见定理 3.7）。Friedland 和 Milnor 证明，对于 $d=2$ 或 3，固定点的迹与雅可比行列式共同决定

f 的共轭类（见 [22, §7]）。对于通过周期点乘子确定多项式 p：**复数域 $\to$ 复数域**这一类似问题，Huguin 在 [24]证明，$P = 2$ 已足够。我们将在第 4 节给出定理 A 的一个简短证明，适用于雅可比行列式不等于 -1（即 $a \neq 1$）的情形：该证明基于 Huguin 定理，利用定义 H´énon 映射 f的特定公式，并表明对于这些映射，$P = 2$ 也已足够。另一方面，由下式定义的族 $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{C}}$

$$f_\lambda(x, y) = (y + (x^2 - \lambda^2)^2, x) \tag{1.4}$$

是一个非平凡的雅可比行列式为 -1 的 H´énon 映射族，其周期数据在周期 1 和 2 时保持不变（见例 4.3）。这表明 Huguin 的方法不适用于这种情形。我们将给出一个更具概念性（也更复杂）的定理 A 证明，该证明适用于雅可比行列式为 -1 的情形，并得出以下结果。

定理 B。洛克斯德罗米克自同构的共轭类，除有限种可能性外，由以下各项决定：*(a)* 其多重次数；*(b)* 其多重雅可比行列式；*(c)* 其迹谱（或其不稳定乘子谱）。

注意，定理 B 中的多重雅可比行列式是固定的。我们也可以处理 Friedland-Milnor 在 [22, 定理 7.5], 中提出的 C^1刚性问题，以及 [11, 定理 7.1] 中的全局实解析刚性结果。

定理 C. 任意给定次数的复数域 *H´énon* 映射的 C^1 共轭类有限（相应地，任意具有给定多重次数和多重雅可比行列式的 *H´énon* 映射复合 f_0 的共轭类有限）。特别地，在 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_d^1$ 或$\mathcal{H}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^k$ 以下刚性性质成立：对于$f_0 \in \mathcal{H}$，若 $f \in \mathcal{H}$ 在其朱利亚集的某个邻域内与 f_0 共轭，且与 f_0足够接近，则 $f = f_0$。

1.4. 稳定代数族。沿用 McMullen 的一个巧妙思路 [30], ，上述结果将由一个全局结构稳定性结论推出。

定理 D. 任何复数域 *H´énon* 映射的稳定不可约代数族都是平凡的。同样，任何具有固定多重雅可比行列式的 *H´énon* 映射复合构成的稳定不可约代数族也是平凡的。

所谓 H´enon 映射（的复合）的代数族，是指一个代数簇以及一个代数映射 $\Lambda \to \mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$，其中 $k \geqslant 1$且 $\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}^k$。如果该族的像仅为一个点，则称其为平凡的 。大多数时候，一个族可以视为其在 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$中的像。为了从定理 D 推出定理 A、B 和 C，我们按 [30]中的方法论证：给定 f_0 属于 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_d^1$ 或$\mathcal{H}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^k$，我们考虑具有相同迹谱（分别为不稳定乘子谱）的映射集合 $\Lambda(f_0) \subset \mathcal{H}$，并证明它是一个稳定代数族。对于迹谱，$\Lambda(f_0)$ 显然是代数的；困难在于证明其稳定性，因为我们没有指定雅可比行列式。反之，对于不稳定乘子谱，稳定性并非问题；微妙之处在于，$\Lambda(f_0)$ 先验上仅是

半代数子集的可数交。详情见命题 3.3。实际上，对于不稳定乘子，还存在一个额外的有限性问题，只有在定理 E 得到证明之后才能解决（见 § 6.3）。

注意，“稳定性”一词尚未定义。作为初步近似，这指的是Lyubich与第二作者在 [17],中所定义的弱稳定性概念；然而，一个微妙之处在于，我们是否允许一小集周期点发生分岔。该问题在§ 2.2中加以分析。

1.5. **李雅普诺夫指数的发散**。 定理 D 的证明的出发点是：一个非平凡的稳定代数族 Λ在参数空间中无界，因此它应表现出某些退化现象。我们借鉴一元多项式理论来分析这些退化。在该情形下，存在一种基于平衡测度的李雅普诺夫指数的通向定理 D 的简单方法。

事实上，设 $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_d(\textbf{复数域})$ 为次数为 d 的一元复变量多项式的仿射共轭类空间。Branner与Hubbard [9] 首先研究了当 p 在 $\mathcal{P}_d$ 中趋于无穷远时动力学的渐近性质（其他相关文献包括 [12, 24]）。定义多项式 p 的最大逃逸率 为

$$M(p) = \max\{G_p(c)\ ;\ p'(c) = 0\}, \tag{1.5}$$

其中 $G_p(z) = \lim_{n\to\infty} d^{-n}\log^+|p^n(z)|$ 是动力学 Green 函数。量 $M(p)$ 在共轭下保持不变，因此它在 $\mathcal{P}_d$ 上定义了一个函数。文献 [9] 证明了 M 定义了一个适当映射 $\mathcal{P}_d \to \mathbf{R}_+$，并且能够很好地衡量 p 的退化程度。对我们而言，最重要的是 Manning-Przytycki 公式 [29, 35]

$$\chi(\mu_p) = \log d + \sum_{p'(c)=0} G_p(c) \tag{1.6}$$

对于平衡测度 $\mu_p = \Delta G_p$ 的李雅普诺夫指数 $\chi(\mu_p)$，意味着

$$\log d + M(p) \leqslant \chi(\mu_p) \leqslant \log d + (d-1)M(p). \tag{1.7}$$

在稳定族中，排斥点的乘子全纯地变化，且取值于 $\textbf{复数域}\backslash\mathbb{D}$，因此，若该族不可约且代数，则这些乘子必定保持不变。另一方面，根据周期点的等分布理论，当 n 很大时，典型的周期为 n 的点的李雅普诺夫指数 $\frac{1}{n}\log|\lambda^u|$ 接近 $\chi(\mu_p)$。这两个事实以及式 (1.7) 中的下界估计意味着， $M(p)$ 在该族上有界。由于 M 在 $\mathcal{P}_d$ 上是适当的，我们得出稳定代数族必定在仿射簇 $\mathcal{P}_d$ 中有界，因此它是有限集。

注 1.1。 Huguin 在 [24] 中的方法基于一项估计，该估计类似于周期为 1 和 2 的周期点的李雅普诺夫指数下界（见 [24,

推论 A.1]）。这一单变量动力学的估计在第 4 节中发挥重要作用，我们将在该节研究具有 $a \neq 1$ 的 H´énon 映射。例 (1.4) 表明，相应结果在 Aut(**复数域**^{2}) 中并不成立。

在第6节中，我们设计了该论证的二维版本。若 $f = h_k \circ \cdots \circ h_1$是如§1.2中所述的首一且中心化的H´enon映射的复合（可能带有 $k = 1$），我们定义

$$M(f) = \max(M(p_i), i = 1, \ldots, k). \tag{1.8}$$

（由于§1.2中提到的 $\mathbb{U}_{d-1}$作用， $M(f)$在共轭下不是不变的，我们请读者参阅§5.3以了解相关讨论及补救方法。）根据 [4]， f 具有典范平衡测度 μ_f，其李雅普诺夫指数满足

$$\chi^-(\mu_f) \leqslant -\log d < 0 < \log d \leqslant \chi^+(\mu_f). \tag{1.9}$$

在 [5], 中，Bedford与Smillie给出了 $\chi^{\pm}(\mu_f)$ 的精确表达式，该表达式类似于Manning-Przytycki公式(1.6)，并涉及不稳定临界点这一精细概念（见§6.1.5的介绍）。我们利用它得到如下定理。

定理 E。 设 $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^k_{\geqslant 2}$ 为多重次数，且$\mathbf{a} \in (\mathbf{C}^*)^k$ 为多重雅可比行列式，其中 $k \geqslant 1$。存在仅依赖于 $(\mathbf{d}、\mathbf{a})$ 的正常数 C_1 和 C_2，使得

$$C_1 M(f) \leqslant \chi^+(\mu_f) \leqslant C_2 M(f),$$

对于所有 f属于 $\mathcal{H}^k_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}$且满足 $M(f) \geqslant 1$。

由关系式 $\chi^+(\mu_f) + \chi^-(\mu_f) = \log\ |\mathrm{Jac}(f)|$，对 $\chi^-(\mu_f)$同样有类似结果。我们的估计实际上精确得多，并且允许多重雅可比行列式相对于 $M(f)$以受控速率发散：参见命题 6.1 和 6.10。证明本质上是扰动性的（即使我们允许相当大的扰动），最终依赖于 [9], 的一维估计，以及按照 [15]的思路对不稳定临界点进行的几何分析。

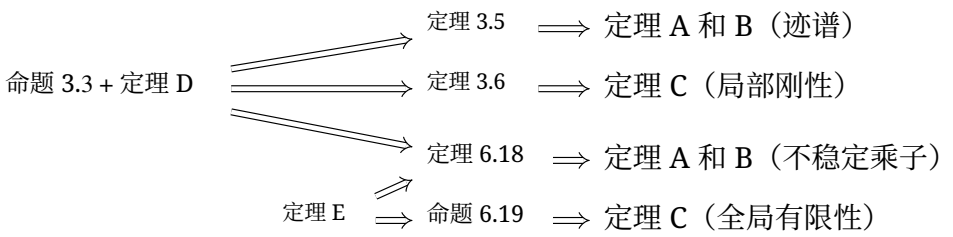
为从定理 E 推出定理 D，考虑一个稳定代数族 Λ。与多项式映射的情形一样，我们观察到，鞍周期点的乘子沿着 Λ的每个分支都必须保持不变。特别地，雅可比行列式也保持不变（这解释了为什么在 H´enon 情形下不需要对雅可比行列式作任何假设）。于是，定理 E 蕴含 $M(f)$沿族 Λ必须有界，从而推出Λ是有限集。

因此，若要在定理 D 中去掉关于多重雅可比行列式的假设，我们应当证明一个定理 E 的版本，其中“多重雅可比行列式为常数”的假设被“雅可比行列式为常数”所取代。我们不清楚这样的论述是否成立。可以确定的是，若没有这样的假设，我们的方法就会失效（见例 6.15）。一个相关问题——在 [9], 中出现的问题——是连通性轨迹的紧致性。

在 $\mathcal{P}_d$ 中，这可由朱利亚集的连通性等价于$M(p) = 0$这一事实推出。同样，定理 E 结合 [6] 和 [14] 的结果，意味着对于固定的 $\mathbf{a}$，连通性轨迹在 $\mathcal{H}^k_{\mathrm{d},\ \mathbf{a}}$ 中是紧致的（见推论 6.20）。另一方面，对于可变雅可比行列式，这一结果并不成立（见 § 2.3）：这体现了一维情形与二维情形之间的差异。

沿代数族（或沿退化序列）的李雅普诺夫指数的渐近行为，是有理函数动力学（例如参见 [18, 28, 21, 19, 20] 及其中的参考文献）以及 M¨obius 变换群（例如参见 [34, 16]）中的一个重要课题。可以利用非阿基米德退化的技术来研究这种渐近行为：目前尚无此类技术可用于**复数域**^{2} 上的自同构，而开发这类技术将是本工作的自然延续。

1.6. **逻辑结构**。 以下图示有助于理解主要结果之间的逻辑关系。



命题 6.1 ~~命题~~ 6.10 定理 ~~E 完~~理 D $\Longrightarrow$

2. 双曲型自同构的稳定性理论

2.1. **双曲型自同构的动力学**。 我们使用与双曲型自同构 f相关联的标准动力学对象：**复数域**$^2 \to$ **复数域**^{2}, , 其概述见 [6, §1]或 [17, §2.1], , 并采用相同记号。特别地，我们将考虑格林函数$G^{\pm}$、平衡测度 μ以及“小朱利亚集” $J^\star = \mathrm{Supp}(\mu)$。我们通常研究族，并强调对 f的依赖：当 f依赖于参数 λ时，我们记作 $G^{\pm}_f$、 μ_f、 K_f、 ...，或 $G^{\pm}_\lambda$、 μ_λ、 K_λ、 ...。

令 $d \geqslant 2$ 为 f的动力次数。我们用 $\mathrm{Fix}(f)$ 表示 f 的不动点集合，用 $\mathrm{Per}_n(f)$ 表示精确周期为 n 的周期点集合。因此，$\mathrm{Fix}(f^n)$ 是所有满足 k 整除 n 的 $\mathrm{Per}_k(f)$ 的集合。文献 [22，定理 3.1] 已证明，所有周期点都是孤立的，并且计重数时 $\#\,\mathrm{Fix}(f^n) = d^n$。利用莫比乌斯反演公式，可以得到 $\#\,\mathrm{Per}_n(f)$ 的精确表达式。由于 $\mathrm{Per}_n(f)$ =、$\mathrm{Fix}(f^n) \backslash \bigcup_{k \leqslant n/2}$、$\mathrm{Fix}(f^k)$，我们得到

$$\#\,\mathrm{Per}_n(f) \sim d^n$$

当 $n \to \infty$ 时。我们用 $\mathrm{SPer}_n(f)$ 表示精确周期为 n 的鞍周期点集合，用 $\mathrm{SPer}(f)$ 表示所有鞍周期点的集合。我们已在 § 1.3 中引入记号 $\lambda^{s/u}(p)$，表示 $p \in \mathrm{SPer}_n(f)$ 的稳定/不稳定乘子。我们将用 $\chi^{s/u}$ 表示相应的李雅普诺夫指数，即

$$\chi^{s/u}(p) = \frac{1}{n} \log \left| \lambda^{s/u}(p) \right|.$$

若 P 是一组周期点，我们记 P_n 为 $\mathrm{P} \cap \mathrm{Per}_n(f)$。若 $\#\mathrm{P}_n \sim d^n$ as $n \to \infty$，则称 P 的渐近密度为 1；若 $\limsup_{n\to\infty} d^{-n}\#\mathrm{P}_n > 0$，则称 P 具有正上密度。

Bedford、Lyubich 和 Smillie 在 [2] 得到的等分布定理断言，$\mathrm{SPer}_n(f)$ 的渐近密度为 1，且鞍周期点渐近地等分布于平衡测度 μ_f。在 [11] 中得到了这一结果的以下强化。

定理 2.1. 设 $f \in \mathrm{Aut}(\textbf{复数域}^2)$ 是一个动力次数为 d 的双曲型自同构。存在一组渐近密度为 *1* 的鞍周期点 $\mathrm{SPer}^+(f) \subset \mathrm{SPer}(f)$，使得若 (p_n) 是一列任意的周期点，且满足 $p_n \in \mathrm{Per}_n(f)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(p_n)} = \mu_f \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \chi^u(p_n) = \chi^+(\mu_f). \tag{2.1}$$

因此，如果 P 是一组具有正上密度的鞍周期点，则存在一个序列 $(p_{n_j})_{j\geqslant 0}$ with $p_{n_j} \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Per}_{n_j}(f)$，使得当 p_{n_j} as j 趋于 $+\infty$ 时，(2.1) 中的两个性质成立。

2.2. J^*-稳定性。

设 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是**复数域**^{2} 上动力次数为 d的双曲型自同构的全纯族。本节中我们假设 Λ 是连通的。滥用记号，我们常常将 Λ 中的参数与相应的映射 $f_\lambda \in \mathrm{Aut}(\textbf{复数域}^2)$等同，并简记为“$f \in \Lambda$”。当参数 $\lambda_0 \in \Lambda$ 用作基点时，我们常常令$f_0 = f_{\lambda_0}$。

在 [17]中，为这类族建立了一种稳定性概念。它可以用几种方式来表述，我们现在逐一说明。回顾一下，根据隐函数定理，任何鞍周期点都可以沿着 Λ 全纯地延续，直到其某个乘子达到 1。我们来考察 (f_λ)的以下 6 种不同类型的稳定性：

（I）存在参数 λ_0，使得 f_0 的所有鞍周期点在整个 Λ中持续为鞍点；（II）存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 以及 f_0 的一组渐近密度为1的鞍周期点，它们在整个 Λ中持续为鞍点；

（III）存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 以及 f_0 的一组具有正上密度的鞍周期点，它们在整个 Λ中持续为鞍点；（IV）存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 以及 f_0的一组鞍周期点P_0，使得$\mathrm{P}_0 = J_0^\star$，它们在整个 Λ中持续为鞍点；（V）存在 $J^\star$ 在 Λ上的一个局部定义的分支全纯运动。（关于分支全纯运动的概念，见 [17]。）（VI）对任意 $\lambda \in \Lambda$， f_λ 的任意鞍点都可以在 Λ 上作为周期点被全纯地跟踪（但不一定作为鞍点）。

对这些论断中“persist”（持续）一词的含义，有必要作一说明。这种持续性指的是鞍点或周期点的解析延拓。它意味着给定的周期点可以沿任意路径被跟随；但沿一条非平凡同伦环路，该周期点有可能回到另一个周期点。同样的说明也适用于条件(V)： $J^\star$的分支全纯运动在 Λ上可能具有非平凡的单值化。

命题 2.2. 这些稳定性条件满足 $(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{III}) \Rightarrow (\mathrm{IV}) \Rightarrow (\mathrm{V}) \Rightarrow (\mathrm{VI})$。

注意，对于形如“任一(X)型稳定代数族都是平凡的”的陈述，其蕴含关系取相反方向。

注 2.3. 在 [17], 定义 4.1中，条件(V)被称为弱 $J^\star$稳定性，并且证明了若该族是实质性的，则 $(\mathrm{VI}) \Rightarrow (\mathrm{I})$，因此所有这些条件都是等价的（条件(II)和(III)实际上在该文中并未考虑）。实质性意味着该族要么是耗散的，要么满足如下非退化条件：对任意周期点，形如 $\lambda_1^a \lambda_2^b = c$ 的关系在参数空间中都不持续成立，其中 λ_1、 λ_2 为其特征值， a与 b为某些固定实数（[1]），而 c 为某个模为1的固定复数。若该族不是实质性的，则不能排除如下可能性：即使一组稠密的鞍点全纯地运动（条件(IV)），某些鞍点仍会因其两个乘子都穿过单位圆而发生分岔，同时并不破坏全纯运动。据猜想，这种现象从不发生，因而实质性假设是多余的。

命题 *2.2* 的证明。 蕴含关系 $(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{III})$ 显然。 [2]的等分布定理表明， $(\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{IV})$； 而定理 2.1 表明， $(\mathrm{III}) \Rightarrow (\mathrm{IV})$。

[1]文中不准确地称 a 和 b 在 [17] 中可以是复数，但实际问题涉及实数 a和b。事实上，采用 [17, 引理 4.11], 中的记号，问题在于 θ_i的$\mathbf{R}$-线性无关性。此外，对于 a 和 b的某些特定取值，例如 $a > 0$、 $b < 0$ 和 $c = 1$，仍可验证一般线性化性，参见下文 2.3.2 节。

对于 (IV) ⇒ (V)，我们从上文所述的 P_0 的全纯运动 Λ出发。局部而言，这给出了图像的一个正规族 Λ，因为 f_λ 的周期点包含于 K_λ，并且对于 Λ的任意紧子集 B，都存在一个紧 $K_B \subset$ 复数域^2，使得对任意 $\lambda \in B$，K_λ 均包含于其中。因此，根据 [17], 的引理 3.4，(P_λ)的运动可延拓为 $J_0^\star$的分支全纯运动 (j_λ)。由于 P_λ中的点都是鞍点，我们得到$j_\lambda(J_0^\star) \subset J_\lambda^\star$。为证明反向包含关系，令 $S_0 = \mathrm{SPer}(f_0)$，并注意到根据 [17, 引理 4.10]，(j_λ) 诱导出所有鞍周期点的运动 (S_λ)，因为$S_0 \subset J_0^*$。通过全纯延拓，周期为 n 的周期点仍是周期整除 n 的周期点，因此对每个 $\lambda \in \Lambda$，都有 $S_\lambda \subset \mathrm{Per}(f_\lambda)$。然而，在运动过程中，周期点可能发生碰撞，也可能改变类型。尽管如此，[17] 的引理 4.13 断言，对于任意固定的 λ_1，S_{λ_1} 包含 $J_{\lambda_1}^\star$。这是因为，根据 [2], 的等分布定理，S_0 中同时也必须是 λ_1 处鞍点的那些点，其渐近密度随着周期趋于无穷而趋近于 1。因此，$j_\lambda(J_0^\star) = J_\lambda^\star$，如所要证明的。类似的论证也表明 (V) ⇒ (VI)。□

注2.4。引理4.11的一个稍微更精确的版本 [17] 可以表述如下：若 $\mathcal{P}_\lambda$ 是一个周期点集合，能够在整个 Λ 上全纯地延拓，且在 $J^\star$ 的某个参数 λ_0处稠密，并且 $q(\lambda_0)$ 是任意一个满足非退化假设的鞍点，则 q 会在整个 Λ上持续为鞍点。在这个版本中，实质性假设被关于特定点q的假设取代，但证明相同。特别地，如果我们假设满足非退化假设的鞍点集合具有渐近密度1（分别为正上密度），而不是假设实质性，那么（VI）⇒（II）（分别为（VI）⇒（III））。

注 2.5。每个稳定性条件都有相应的局部版本：若对每个 $\lambda \in \Lambda$，都存在一个邻域 $\mathcal{N}$，使得该族在 $\mathcal{N}$上是类型（X）的稳定族，则称该族在 Λ 上是类型（X）的局部稳定族。条件（I）、（V）和（VI）是局部的，也就是说，局部稳定等价于稳定；然而，对于条件（II）、（III）和（IV），我们先验地得到两种不同的概念，因为持久鞍点集合可能取决于 $\mathcal{N}$。

约定 2.6。在我们需要考虑的情形中，无法保证关注的族具有实质性（例如，雅可比为 1 的自同构族就不具有实质性）。因此，我们不考虑实质性问题，并约定，

除非另有说明，稳定性是指条件（*III*）。

这是因为，我们基于 $\chi^+(\mu_f)$ 的发散来处理定理 D 的方法，自然与类型 (III) 的稳定性相关（见引理 6.16）。不过，其他条件也很有用：我们将多次使用蕴含关系 (III)⇒(VI)，并且在第 4 节中必须研究类型（I）族。

2.3. **一个完整的例子**。考虑族 $f_a(x,\ y) = (ay + x^2,\ x)$。首先注意到，$f_a^{-1}(x,\ y) = (y,\ a^{-1}x - a^{-1}y^2)$ 与 $(x,\ y) \mapsto (a^{-1}y - a^{-1}x^2,\ x)$ 通过 τ 共轭：$(x,\ y) \mapsto (y,\ x)$，随后又通过进一步的对角共轭与 $f_{1/a}$ 共轭，因此只需分析 $|a| \leqslant 1$时的族。令 $J_a = J_{f_a}$, $\mu_a = \mu_{f_a}$，等等。

2.3.1. 分岔的存在。当 $|a|$较小时（因而当 $|a|$较大时也是如此），f_a 是一致双曲的，而 $f_a|_{J_a}$ 与 x^d的自然扩张共轭。特别地，在这个族中，连通轨迹并非紧集（它包含所有足够大的 $a \in$ **复数域**）。根据[4], ，李雅普诺夫指数满足

$$\chi^+(\mu_a) > 0 > \chi^-(\mu_a), \quad \chi^+(\mu_a) + \chi^-(\mu_a) = \log|a|\,, \text{ and } \quad \left|\chi^\pm(\mu_a)\right| \geqslant \log d.$$

此外，由 [6], 可知，当 a较小时，$\chi^+(\mu_a) = \log d$。由对称性可知，当 a较大时，$\chi^-(\mu_a) = -\log\ d$。对于 $|a| \geqslant 1$，我们得到

$$\chi^+(\mu_a) = \log|a| - \chi^-(\mu_a) \geqslant \log d + \log|a|\,, \tag{2.2}$$

当 $|a|$ 较大时，等号成立。因此，函数 $a \in$ **复数域**$^* \mapsto \chi^+(\mu_a) \in$ **实数** 在 $|a|$ 较小时等于$\log(d)$，而在 $|a|$ 较大时等于$\log|a| + \log(d)$，所以它不是调和函数。这种非调和性可视为一种分岔。此外，由于雅可比行列式不是常数，下文的引理4.4和6.16表明，会出现（I）、（II）和（III）型分岔。

不过，这并不能保证会发生（V）型分岔；也就是说，原则上可能出现这样的情况：J_a^* 仍随 a全纯运动。可能发生的情况如下：当 $|a|$ 较小时，由于动力学的双曲性，除（0,0）外的所有周期点都是鞍点；随后，随着 $|a|$ 增大，这些周期点可能仍保持为鞍点，其中一些恰在 $|a| = 1$时发生分岔，此时两个特征值会同时穿过单位圆，而全纯运动并未因此中断。这正是实质性的问题。

2.3.2. 不动点 α_a 与（*V*）型分岔。由于 f_a 是二次的，它有2个不动点和一个周期为2的轨道。不动点为 $\alpha_a = (0,\ 0)$ 和 $\beta_a = (1-a,\ 1-a)$；它们分别是 $f_0 \simeq x^2$中对应不动点的延续。

第一个 α_a 的特征值为 $\lambda_1,\ \lambda_2 = \pm\sqrt{a}$ 因此它对 $|a| < 1$ 是吸引的，对 $|a| > 1$是排斥的。假设 $|a| = 1$，且 a 不是单位根。那么，λ_1 与 λ_2 之间不存在共振，也就是说，不存在形如 $\lambda_i = \lambda_1^k\lambda_2^\ell$ 的关系，其中 $k,\ \ell \in \mathbf{N}$且 $k + \ell \geqslant 2$。此外，

$$\left|\lambda_1^k\lambda_2^\ell - \lambda_i\right| = \left|\lambda_1^{k+\ell} \pm \lambda_1\right| = \left|(\sqrt{a})^{k+\ell-1} \pm 1\right|,$$

因此，对于一般的 $a \in \mathbb{S}^1$，我们得到丢番图型的下界（参见例如 [40]），且不动点 α_a 是可线性化的，从而产生一个西格尔球。由 [17, 引理4.11], ，这些Siegel 球引起（V）型分岔。因此我们已证明：

命题 2.7. 圆 $\{|a|=1\}$包含在（（*V*）型）分岔轨迹中 *s.*

注 2.8. 由于 α_a 的特征值互为相反数，它们满足持久关系 $\lambda_1^2\lambda_2^{-2}=1$。因此，这个族并非本质上的！不过它几乎如此。事实上，假设 γ 是某个鞍型周期点，其特征值满足持久关系 $\lambda_1^s\lambda_2^t=c$ （其中 $|c|=1$ 和 $s,\ t\in\mathbf{R}$ 不同时为 0）。任何这样的周期点都可以在小的 $|a|$ 下全纯延拓；当 a 趋于 0 时，一个特征值趋于 0，而另一个趋于模长为 >1 的复数，这与 $|c|=1$ 矛盾。

2.3.3. 单位圆盘内的分岔。 一个自然的问题是，分岔轨迹是否大于 $\{|a|=1\}$。为此，只需研究 $|a|<1$，并且我们需要找到某个分岔为吸引子的鞍型周期点。

第二个不动点 $\beta_a=(1-a,\ 1-a)$ 是第一个候选点。它的特征值是方程 $\lambda^2-2(1-a)\lambda-a=0$ 的解。如果某个特征值穿过单位圆，那么 $e^{i\theta}$ 必须是该方程的解，这一点很容易看出（事实上，a 必须位于单位圆上一个角度为 $2\pi/3$ 的圆弧上）。因此，对于单位圆补集中的所有 a， β_a 都是鞍点。

由命题 4.5 的计算，尤其是方程 (4.5) 和 (4.7)，可知周期 2 轨道的行为完全相同。事实上，由于 $p(x)=x^2/(1-a)$ 的所有排斥性周期 2 点都具有乘子 d^2（包括排斥性不动点）， f_a 的周期 2 点也具有相同的乘子，除了 α_a （[2]）。因此，我们必须考察至少为 3 的周期，而这似乎无法手工处理。

命题 2.9。 分岔轨迹不包含在圆 $\{|a|=1\}$中。特别地，存在满足 $|a|<1$且具有不连通 *Julia* 集的参数。

证明。 数值计算表明，参数 $a=-0.669+0.73i$ 存在一个包含 $(x,\ y)\simeq(0.111236-0.069787i,\ -0.017098+0.856247i)$的吸引周期 3；参见图 1。注意，由于 $|a|\simeq0.990$，吸引速度非常慢。第二个断言由如下事实得出：稳定连通耗散族是稳定的（见 [17,定理 5.7]）。□

以下是关于这次数值计算的一些说明。我们通过对每个 $|a|$ 值（每次递增 0.01）测试 500 个不同的参数来探索参数空间，寻找切片 $\{y=0\}$ 上既不收敛到 (0,0) 也不逃逸到无穷远的轨道（测试 10,000 个不同的初始条件）。注意，任何吸引盆

[2]一个更微妙的结果是， β_a 和周期 2 轨道恰在 $a=e^{i\rho},\rho\in[-\pi/3,\pi/3]$, 时为中性且非持久共振，因此它们也会在该区间内同时产生西格尔球。

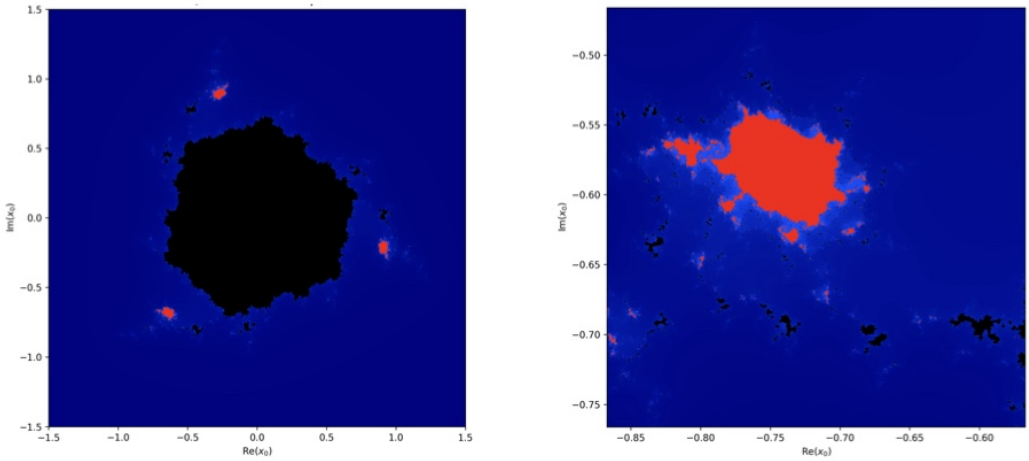


图 1. 沿直线 $\{y = 0\}$ 对 $f_{-0.669+0.73i}$ 的填充朱利亚集所作的切片。(0 的吸引盆以黑色标示，周期为 3 的循环的吸引盆以红色标示。右侧图片的细节。

都必须与该切片相交。第一个例子对应 $|a| = 0.98$ （这是图 1 中那个例子的延续）；对于 $|a| = 0.99$，我们得到了 12 个这样的参数（成共轭对）。这表明包含原点的稳定分支几乎填满了整个单位圆盘。它可以称为该族的“主双曲分支”（根据 [8,定理 C]，它确实是一个双曲分支）。

问题 2.10. 主双曲分支的闭包是否与单位圆相交？

若此问题的答案为肯定，这将提供首个已知的具有连通朱利亚集的保守自同构实例。

3. 周期点与乘子谱

3.1. 周期点的最新进展。 设 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{复数域}^2)$ 为洛克斯德罗米克的。我们对 f 作共轭，使得 f 成为首一中心化 H´énon 映射的复合，其多重次数为$\mathbf{d} = (d_k, \ldots, d_1)$。我们研究参数化族 $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{H}^k_{\mathbf{d}}}$，使得对于某个 λ，有 $f = f_\lambda$，并将映射 f 与相应的参数 λ 等同。定义

$$\widehat{\mathrm{Fix}}_n = \left\{(f, z) \in \mathcal{H}^k_{\mathbf{d}} \times \mathbf{C}^2 \,;\; f^n(z) = z\right\},$$

它是 $\mathcal{H}^k_{\mathbf{d}} \times$**复数域**^{2} 的一个代数子集。投影 $\widehat{\mathrm{Fix}}_n \to \mathcal{H}^k_{\mathbf{d}}$ 是满射且有限对一的。要将相应的 $\mathrm{Per}_n(f)$ 纤维化版本定义为 $\mathcal{H}^k_{\mathbf{d}} \times$**复数域**^{2} 的一个解析子集并不显然，因为周期为 n 的周期点可能退化为

较低周期的点。作为初步说明，假设 $f \in \mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$ 接近参数 $((0,\dots,0),(x^{d_k},\dots,x^{d_1}))$。那么，作为一致双曲性的推论，$\widehat{\ }$ 的所有周期点都是简单的。因此，*Fix* 的所有不可约分支的重数为1。

我们将代数簇 $\widehat{\mathrm{Per}}_n \subset \mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k \times$**复数域**^{2} 定义为

$$\widehat{\mathrm{Per}}_n = \overline{\widehat{\mathrm{Fix}}_n \setminus \bigcup_{k|n,k<n} \widehat{\mathrm{Fix}}_k},$$

它是 $\widehat{\mathrm{Fix}}_n$ ([3])的不可约分支的并。由构造，在 $\widehat{\mathrm{Per}}_n$的一般点 (f,z) 处，z 具有精确周期 n。对每一个 $f \in \mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$，我们令

$$\mathrm{Per}_n^*(f) = \widehat{\mathrm{Per}}_n \cap (\{f\} \times \mathbf{C}^2).$$

按定义，$\mathrm{Per}_n^*(f)$ 是具有形式周期 n的点集，这一术语源于Milnor（注意，一个周期点可以有若干个形式周期）。由构造，$\widehat{\ }$ $\widehat{\mathrm{Per}}_n$ 包含于$\widehat{\mathrm{Fix}}_n$，因此$\mathrm{Per}_n^*(f)$ 由周期整除 n的点组成。每个$z \in \mathrm{Per}_n^*(f)$ 都带有一个重数，即$\widehat{\mathrm{Per}}_n$与 $\{f\}\times$**复数域**^{2}在 z处的交数。$\mathrm{Per}_n^*(f)$中按重数计数的点的数目 p_n是 Per_n 在一般参数处的基数。该序列 (p_n)由 $d^n = \sum_{k|n} p_k$.归纳确定

命题 3.1。对于每个 $n \geqslant 1$，我们都有以下性质

(1) $\mathrm{Per}_n(f) \subset \mathrm{Per}_n^*(f)$，即精确周期为 n 蕴含形式周期为 n；(2) $\widehat{\mathrm{Fix}}_n = \bigcup_{k|n} \widehat{\mathrm{Per}}_k$；(3)若 $z \in \mathrm{Per}_n^*(f)$ 是一个简单周期点（作为周期为 n 的点），则 $z \in \mathrm{Per}_n(f)$。

如果 1 是 $z \in \mathrm{Per}_n^*(f)$ 的特征值，那么 z 的周期可以是 n 的一个真除子。多亏动力原子多项式理论，维数为 1 时对应的情形已完全明了（参见 [36]，中的 §4.1，但请注意，我们的记号与 Silverman 采用的记号并不完全一致）。对于 Aut(**复数域**^{2})，具体细节仍有待厘清。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。根据构造，$\mathrm{Per}_n \subset \mathrm{Fix}_n$。若 $z \in \mathrm{Per}_n(f)$，则对任意 $k<n$，$z \notin \mathrm{Fix}_k(f)$，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$因此 $(f,\ z) \in \mathrm{Fix}^n \setminus \bigcup_{k|n,\ k<n} \mathrm{Fix}_k$，特别是 z 属于 $\mathrm{Per}_n^*(f)$。这就证明了 (1)。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于断言 (2)，注意到如果 $k|n$，则 $\mathrm{Per}_k \subset \mathrm{Fix}_k$ 且 $\mathrm{Fix}_k \subset \mathrm{Fix}_n$，这证明了反向包含。我们通过对 n归纳来证明正向包含。根据定义，情形 $n=1$ $\widehat{\ }$成立。现在取 $(f,z) \in \mathrm{Fix}_n$。如果 $z \in \mathrm{Per}_n(f)$，那么由 (1) 可得 $(f,z) \in \mathrm{Per}_n$。

[3]注意，在此定义中，我们可以取欧几里得拓扑或（解析或代数的）扎里斯基拓扑下的闭包。

否则，(f,z) 属于 Fix_k，其中 k 是 n的某个适当除子；由归纳假设可知，对于某个整除 k的 ℓ，有 $(f,z)\in\mathsf{Per}_\ell$，这正是所需。

最后，设 $z\in\mathsf{Per}_n^*(f)$ 是一个简单周期点。由于 z 是简单的，它作为 $f^n(z)=z$ 的解具有唯一的局部延拓，因此在 (z,f) 的欧几里得邻域内，$\widehat{\mathsf{Fix}}_n$ 有唯一分支。如果 z 的周期是 n 的一个真因子 k，那么该分支将包含在 Fix_k 中，而 z 将不属于 $\widehat{\mathsf{Fix}}^n\setminus\bigcup_{k|n,k<n}\mathsf{Fix}_k$ 的闭包。因此 $z\in\mathsf{Per}_n(f)$，证毕。□

3.2. **迹与乘子谱**。设 q 为正整数，并令 **复数域**$^{(q)}$ 表示由 q 个 **复数域** 构成的对称积，即 **复数域**$^q/\mathrm{Sym}^q$，其中对称群通过置换作用。**复数域**$^{(q)}$ 中的点称为多重集（长度为 q）。因此，多重集是一个有限集合 $\{x_1,\dots x_q\}$，其中元素 $x_i\in$ **复数域** 按照其重数重复；等价地，它是一个除子 $\sum_j n_jz_j$，其支集由若干点 $z_j\in$ **复数域** 构成，重数为 $n_j\geqslant 1$，且满足 $\sum_j n_j=q$。初等对称函数给出一个同构 ι: **复数域**$^{(q)}\to$ **复数域**^{q}。

固定一个整数 $n\geqslant 1$。在簇 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k\times$**复数域**^{2}，上，函数

$$\mathrm{tr}_n\colon (f,z)\mapsto \mathrm{tr}(D_zf^n)$$

$\widehat{\ }$ 是正则的。通过限制，它诱导出一个正则函数 tr_n: $\mathsf{Per}_n\to$ **复数域**，进而我们可以定义一个正则映射 Trace_n: $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k\to$ **复数域**$^{(p_n)}$，使得

$$\mathrm{Trace}_n(f)=\{\mathrm{tr}(D_zf^n)\ ;\ z\in\mathrm{Per}_n^*(f)\},$$

视为长度为 p_n 的多重集。我们将 f 的迹谱 和乘子谱定义为

$$\mathrm{Trace}(f)=(\mathrm{Trace}_n(f))_{n\geqslant 1}\in\prod_{n\geqslant 1}\mathbf{C}^{(p_n)} \tag{3.1}$$

$$\mathrm{Mult}(f)=(\mathrm{Jac}(f),\mathrm{Trace}(f))\in\mathbf{C}^*\times\prod_{n\geqslant 1}\mathbf{C}^{(p_n)}. \tag{3.2}$$

由于对于 f^n 的每个不动点，$\mathsf{Jac}(f)^n=\mathsf{det}(D_zf^n)$，因此乘子谱编码了 D_zf^n 的共轭不变量 $(\mathsf{tr},\mathsf{det})$；知道这些不变量等价于知道 $\{\lambda_1,\lambda_2\}\in$ **复数域**$^{(2)}$ 的特征值，它们对应于每个 $n\geqslant 1$ 的所有形式周期为 n 的点。采用形式周期而非精确周期，旨在确保这些量具有良好的解析和代数性质。

对于鞍点，我们直接考察不稳定乘子，并定义

$$\mathrm{SMult}_n^u(f)=\{\lambda^u(z)\ ;\ z\in\mathrm{SPer}_n(f)\}\in\mathbf{C}^{\#\,\mathrm{SPer}_n(f))},$$

$\mathsf{SMult}^u(f)=(\mathsf{SMult}_n^u(f))_{n\geqslant 1}$和 $\mathsf{SMult}(f)=($雅可比行列式$(f),\ \mathsf{SMult}^u(f))$.

（由于 $\#\,\mathsf{SPer}_n(f)$ 对 f 的依赖性非常显著，我们不声称 $\mathsf{SMult}_n^u(f)$ 会以规则或解析的方式依赖于 f。）

注 3.2。 由于周期为 n 的周期点（分别为鞍型周期点）的数量按 d^n 的速度增长，因此，洛克斯德罗米克自同构的动力次数显然由其乘子（分别为不稳定乘子）谱决定。

3.3. 从定理 D到刚性。

命题 3.3. 设 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是**复数域**[2]，上洛克斯德罗米克多项式自同构的一个代数族，其中任一稳定不可约代数子族都是平凡的。对每个 $n \geqslant 1$，考虑一个有限子集 $E_n \subset$ **复数域**。则集合

$$\{f \in \Lambda\ ;\ \forall n \geqslant 1, \mathrm{Trace}_n(f) \subset E_n\}$$

是有限的。同样，集合

$$\{f \in \Lambda\ ;\ \forall n \geqslant 1, \mathrm{SMult}_n^u(f) \subset E_n\}$$

是离散的。

迹谱的证明。对 $n \geqslant 1$，令

$$\Sigma_n = \{\lambda \in \Lambda\ ;\ \mathrm{Trace}_n(f_\lambda) \subset E_n\} \text{ and } \Sigma = \bigcap_{n\geqslant 1} \Sigma_n. \tag{3.3}$$

这些是 Λ 的代数子集，因为每个映射 Trace_n 都是正则的。为了得出 Σ 是有限的这一结论，我们固定 Σ的一个不可约分支，为简便起见仍记作 Σ，并证明 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Sigma}$ 是稳定的。我们采用与 [11,引理 8.5], 相同的策略，只是使用迹而非乘子。

固定 $\lambda_0 \in \Sigma$ 并令$f_0 = f_{\lambda_0}$。固定 $\alpha > 0$，使得$\chi^+(\mu_{f_0}) \geqslant \log^+ |$雅可比行列式$(f_0)| + 2\alpha$。令 $\mathcal{N}$为 λ_0 周围的一个开球，在其中$\log |$雅可比行列式$(f_\lambda)| - \log^+ |$雅可比行列式$(f_0)| < \alpha/4$。定理 2.1 给出一个由鞍点组成的集合 $\mathrm{SPer}^+(f_0)$，其渐近密度为 1，并且对每个 $z_0 \in \mathrm{SPer}^+(f_0)$ 都有$\chi^u(z_0) \geqslant \chi^+(\mu_{f_0}) - \alpha$。下面证明，对于 $\mathcal{N} \cap \Sigma$中的所有参数，$\mathrm{SPer}^+(f_0)$中周期充分大的点都会持续为鞍点。

固定 $z_0 \in \mathrm{SPer}^+(f_0)$，其周期为 $n_\circ$ 我们有

$$|\mathrm{tr}(D_{z_0} f_0^n)| \geqslant |\lambda^u(z_0)| - 1 \geqslant \exp\left(n(\log^+ |\mathrm{Jac}(f_0)| + \alpha)\right) - 1. \tag{3.4}$$

设 z_λ 为 z_0 作为鞍点的解析延拓，其中 λ 位于 Σ 中 λ_0 的某个连通邻域 $\mathcal{N}(z_0)$ 内（该邻域先验地依赖于 z_0）。沿 Σ，迹$_n(f_\lambda)$包含于有限集 E_n中，因此 $\lambda \mapsto \mathrm{tr}(D_{z_\lambda} f_\lambda^n)$ 在 $\mathcal{N}(z_0)$上为常数，等于$\mathrm{tr}(D_{z_0} f_0^n)$。从而对 $\lambda \in \mathcal{N}(z_0)$，我们有 $|\lambda^u(z_\lambda) - \mathrm{tr}(D_{z_0} f_0^n)| < 1$，进而

$$|\lambda^u(z_\lambda)| \geqslant |\mathrm{tr}(D_{z_0} f_0^n)| - 1 \geqslant \exp\left(n(\log^+ |\mathrm{Jac}(f_0)| + \alpha)\right) - 2. \tag{3.5}$$

取 n_0 足够大，使得对于 $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{n} \log\left(\exp\left(n(\log^+ |\mathrm{Jac}(f_0)| + \alpha)\right) - 2\right) \geqslant \log^+ |\mathrm{Jac}(f_0)| + \alpha/2. \tag{3.6}$$

Th对所有周期为 $\geqslant n_0$的 $^+(f_0)$SPer $z_0 \in$ ， 以及 $\mathcal{N}$的定义，给出 s

(3.7) $\chi^s(z_\lambda) = \log$ |雅可比行列式$(f_\lambda)| - \chi^u(z_\lambda) \leqslant \log$ |雅可比行列式$(f_\lambda)| - \log^+$ |雅可比行列式$(f_0)| - \alpha/2 \leqslant -\alpha/4.$

因此，当 $\lambda \in \mathcal{N} \cap \Sigma$时， z_λ 的解析延拓仍是一个鞍周期点，并满足一致估计 $\chi^s(z_\lambda) \leqslant -\alpha/4$和 $\chi^u(z_\lambda) \geqslant \alpha/2$. 因此，不可能发生分岔，我们可以取 $\mathcal{N}(z_0) = \mathcal{N} \cap \Sigma$, 这正是要证明的。

这一论证表明， $(f_\lambda)_{\lambda\in\Sigma}$ 是局部稳定的，属于类型 (II)，因此也属于类型 (III)。为了将其提升为全局稳定性，我们沿用 [11, 命题 8.6]中的一个思路。我们将证明雅可比行列式在 Σ上必须为常数，从而可以选取 $\mathcal{N}$ $=\Sigma$。根据注 2.5， $(f_\lambda)_{\lambda\in\Sigma}$ 是全局稳定的，属于类型 (VI)：所有周期点都可以沿路径延续，但不一定始终是鞍点。反设$\lambda \mapsto$ 雅可比行列式(f_λ) 在 Σ上不是常数，并固定一个参数 $\lambda_1 \in \Sigma$和 $\alpha > 0$，使得 log |雅可比行列式$(f_{\lambda_1})| \geqslant$log |雅可比行列式$(f_{\lambda_0})| + 2\alpha$，以及一条路径 γ，它位于 Σ 中并连接 λ_0 与 λ_1。注意， $\chi^+(\mu_{f_0}) \leqslant$log |雅可比行列式$(f_{\lambda_0})|$，因此 log |雅可比行列式$(f_{\lambda_1})| \geqslant \chi^+(\mu_{f_0}) + 2\alpha$。取一个鞍点集合 SPer$^+(f_0)$，其渐近密度为 1，并且对每个$z_0 \in$ SPer$^+(f_0)$，都有 $\chi^u(z_0) \leqslant \chi^+(\mu_{f_0}) + \alpha$ 。对于这样的一个 z_0 ，我们有

(3.8) $\left|\mathrm{tr}(D_{z_0} f_{\lambda_0}^n)\right| = |\lambda^u(z_0) + \lambda^s(z_0)| \leqslant |\lambda^u(z_0)| + 1 \leqslant \exp\left(n(\chi^+(\mu_{f_0}) + \alpha)\right) + 1.$

沿着路径 γ 追踪 z_0 ，直到某个周期点 z_1。根据假设，迹保持不变，因此 |tr $(D_{z_1} f_{\lambda_1}^n)|$ 满足不等式 (3.8)。如果 z_1 是 f_{λ_1} 的一个鞍点，我们可推出

$$\begin{aligned}(3.9)\qquad |\mathrm{Jac}(f_{\lambda_1})|^n \leqslant |\lambda^u(z_1)| &\leqslant \left|\mathrm{tr}(D_{z_1} f_{\lambda_1}^n)\right| + 1 \\ &= \left|\mathrm{tr}(D_{z_0} f_{\lambda_0}^n)\right| + 1 \leqslant \exp\left(n(\chi^+(\mu_{f_0}) + \alpha)\right) + 2.\end{aligned}$$

但是 log |雅可比行列式$(f_{\lambda_1})| \geqslant \chi^+(\mu_{f_0}) + 2\alpha$，因此如果 n 足够大，就会得到矛盾。因此，当我们沿着 γ 追踪 SPer$^+(f_0)$ 中任意一个周期足够大的点时，会得到 f_1 的一个非鞍点，这与 SPer$^+(f_0)$ 具有渐近密度 1 的事实相矛盾。所以雅可比行列式在 Σ 上是常数，证明完毕。□

不稳定乘子谱的证明。这更加微妙，因为这些集合

$$(3.10)\qquad \Sigma_n^u := \{\lambda \in \Lambda\ ;\ \mathrm{SMult}_n^u(f_\lambda) \subset E_n\} \text{ and } \Sigma^u := \bigcap_{n\geqslant 1} \Sigma_n^u$$

并非天然具有代数性，因为成为鞍点并不是一种代数性质。固定 $f_0 \in \Sigma^u$ ，并假设 f_0 不是 Σ^u 的孤立点。我们将证明， Σ^u 包含一个经过 f_0 的正维稳定代数族，这就产生了矛盾。

令 V_n 为 f_0 在 Λ 中的一个邻域，其中所有周期不超过 n 的鞍点都持续存在。由于 f_0 不是Σ_n^u的孤立点， $\Sigma_n^u \cap V_n$ 是 V_n 中的一个正维解析子集，它是 V_n中某个维数为 $\geqslant 1$的代数子簇在 V_n 上的限制的若干不可约分支（作为解析子集）的并，且该代数子簇位于 f_0处。它在 f_0处可能有若干局部不可约分支，但如有必要缩小 V_n ，我们可以假设

$\Sigma_n^u \cap V_n$ 在 V_n中有唯一的连通分支，其中包含 $\Sigma^u \cap V_n$。令 n_1满足：对于 $n \geqslant n_1$，Σ_n^u 在 f_0 处的芽为常值（即不依赖于 n）。

由于 f_0 属于 Σ^u，Σ^u 非空，因此对于每个 $0 < \alpha < \chi^+(\mu_{f_0})/10$以及充分大的 n，我们都能找到点 $t \in E_n$，使得 $\frac{1}{n}\log|t| \geqslant \chi^+(\mu_{f_0}) - \alpha$。与证明的第一部分一样，固定 $\alpha > 0$，使得 $\chi^+(\mu_{f_0}) \geqslant \log^+|\text{雅可比行列式}(f_0)| + 2\alpha$，并取一个邻域$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\alpha)$，在其中 $\log|\text{雅可比行列式}(f)| < \log^+|\text{雅可比行列式}(f_0)| + \alpha/4$。对于 $f \in \mathcal{N}$，任何具有特征值 t 且满足$\frac{1}{n}\log|t| \geqslant \chi^+(\mu_{f_0}) - \alpha$ 的周期点都自动是鞍点。

定理 2.1 给出了一个鞍点集合 $\mathbf{SPer}^+(f_0)$，其渐近密度为 1，且对于 $z_0 \in \mathbf{SPer}^+(f_0)$，$\chi^u(z_0) \geqslant \chi^+(\mu_{f_0}) - \alpha$。固定 $z_0 \in \mathbf{SPer}_n^+(f_0)$，其中 $n \geqslant n_1$。当 $z = z(f)$ 沿着 $\Sigma_n^u \cap V_n$变化时，它可以全纯地延拓，且 $\lambda^u(z)$ 在该处保持不变。考虑 $\mathcal{N}$的子集，其定义条件为 $\mathbf{Mult}_n(f)$ 包含 $\lambda^u(z_0)$；它是 $\mathcal{N}$ 与如下自同构代数簇的交集：这些自同构 f 满足 $\lambda^u(z_0)$ 是 Df^n 在某个周期为 n的点处的特征值；它在 f_0处包含 Σ_n^u 作为一个芽；我们令$S(z_0)$ 为其中包含$\Sigma_n^u \cap V_n$的不可约分支之并（作为 $\mathcal{N}$中的解析子集）。与证明的第一部分一样，z_0 可以沿着$S(z_0)$全纯地延拓。设$S^+ = \bigcap_{z_0 \in \mathbf{SPer}^+(f_0)} S(z_0)$。这是 $\mathcal{N}$ 中的一个解析子集，对每个 $n \geqslant n_1$都包含 Σ_n^u 的芽，因此它具有正维数（可能大于$\Sigma_n^u \cap V_n$的维数）。根据构造，$\mathbf{SPer}^+(f_0)$ 中的所有点都可以沿着 S^+全纯地延拓为鞍点，因此 $(f_\lambda)_{\lambda \in S^+}$ 是一个 (II) 型稳定族。

现在我们在这个族 S^+ 内进行讨论。根据命题 2.2 的推论 (II)⇒(VI)，f_0 的所有鞍周期点都可以全纯地跟随，作为 $S^+ \cap \mathcal{N}$ 中的周期点，因此我们可以通过以下条件在 $\mathcal{N}$ 中定义一个解析子集 $S \subset S^+$：在 z_0 处对应于不稳定乘子的特征值对每个$z_0 \in \mathbf{SPer}(f_0)$都保持不变。沿着 S，该特征值的模始终大于 1，因此注 2.3 中描述的例外现象不可能发生。由此可知，S 是类型 (I) 的稳定族，且对于任意 $n \geqslant n_1$，它都必须与 $\Sigma^u \cap V_n$ 重合。

至此，我们已经证明 Σ^u 是 Λ 的一个解析子集。设 f_0 是 Σ^u 的一个非孤立点：它包含在 Σ^u 的一个复解析分支 W 中，该分支的维数为 $k \geqslant 1$。我们构造了一个邻域 $\mathcal{N} = \mathcal{N}(f_0)$，使得对于 Λ 中某个维数为 k 的代数子簇 W'，$\Sigma^u \cap \mathcal{N}$ 与 $W' \cap \mathcal{N}$ 的若干分支之并重合。由解析延拓可知，W 是 W' 的一个解析意义下的不可约分支，因此它与 W' 的一个代数分支重合。该分支在 Λ 中确定了一个类型 (I) 的稳定代数子族，这与我们的假设矛盾。因此，Σ^u 是一个离散集，正如前面所述。□

注记 3.4。

(1) 该证明表明，不存在类型 (II)（相应地，类型 (I)）的稳定代数族，就足以得到关于迹谱（相应地，不稳定乘子）的结论。

(2) 另一方面，利用 (III) 型假设的全部强度，我们可以放宽条件 Trace $_n(f) \subset E_n$（相应地，$\mathrm{SMult}_n^u(f) \subset E_n$），只要求该性质沿某个子序列 (n_j) 成立。因此，在谱刚性定理中，只需使用沿子序列(n_j)的周期点信息即可。验证留给读者。

由注记3.2可知，次数由谱自动确定。因此，下述结果包含了定理 A 和 B 中关于迹谱的陈述。

定理 3.5. 若 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}_d^1$ （对某个 $d \geqslant 2$ ）或$\mathcal{H}_{\mathbf{d},\,\mathbf{a}}^k$ （对某个 $a \in$ (**复数域**$^*)^k$ 以及$\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}^k$），则对任意 $f_0 \in \mathcal{H}$，同谱子集 $\{f \in \mathcal{H}\,;\ \text{迹}(f) = \text{迹}(f_0)\}$是有限的。

证明. 只需应用命题 3.3 的第一部分以及定理 D。 □

现在，我们来证明定理 C 中的 C^1 刚性断言。

定理 3.6. 设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}_d^1$ （对某个 $d \geqslant 2$）或$\mathcal{H}_{\mathbf{d},\,\mathbf{a}}^k$ （对某个$\mathbf{a} \in$ (**复数域**$^*)^k$ 以及$\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}^k$）。若 f_0 是 $\mathcal{H}$的一个元素，则存在具有如下性质的离散集 $F \subset \mathcal{H}$ ：若 $f \in \mathcal{H}$ 是 C^1 共轭于 f_0（在 $J^\star$的某个邻域上），则 $f \in F$。

所谓“C^1 在 $J^\star$的邻域内共轭”，是指存在一个 C^1 共轭φ，它建立在 f_0 与 f 之间，且其定义域 $\mathcal{U}$ 包含 $J^\star(f_0)$的一个邻域。由 [3], 得到的最大熵测度的唯一性意味着$\varphi_* \mu_{f_0} = \mu_f$，因此$\varphi(J^\star(f_0)) = J^\star(f)$。

证明。 如果 f_0 与 f 在 $J^\star$的邻域内共轭，那么对于 f_0的每个鞍点 z_0， $\varphi(z)$ 都是 f的一个鞍点，其中 $\lambda^u(z) \in \left\{\lambda^u(z_0),\ \ \lambda^u(z_0)\right\}$ 且 $\lambda^s(z) \in \left\{\overline{\lambda^s(z_0)},\ \ \lambda^s(z_0)\right\}$（参见 [22, 定理 7.5]之前的讨论）。因此，若我们定义

$$E_n = \{\lambda^u(z_0)\,;\ z_0 \in \mathrm{SMult}_n^u(f_0)\} \cup \left\{\overline{\lambda^u(z_0)}\,;\ z_0 \in \mathrm{SMult}_n^u(f_0)\right\}, \tag{3.11}$$

我们看到，对每个 $n \geqslant 1$都有 $\mathrm{SMult}_n^u(f) \subset E_n$，由命题 3 即得结论。 3. □

3.4. 进一步结果：一致性与任意域。

定理 3.7。 设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}_d^1$ 或 $\mathcal{H}_{\mathbf{d},\,\mathbf{a}}^k$ 其中某个$\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}^k$，且$\mathbf{a} \in$ (**复数域**$^*)^k$。存在仅依赖于$\mathbf{d}$ 的 P和 N，使得对于每个 $f_0 \in \mathcal{H}$，集合

$$\{f \in \mathcal{H}\,;\ \mathrm{Trace}_n(g) = \mathrm{Trace}_n(f_0) \textit{ for every } n \leqslant P\}$$

基数至多为 N。此外，对任意特征零的代数闭域**域K**，该结果对$\mathbb{A}^2$(**域K**)的多项式自同构成立。

证明。 我们首先在**复数域**上进行。假设 $k \geqslant 2$，并用$\mathbf{a}(f)$ 表示$f \in \mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$的多重雅可比行列式。引入一个代数簇序列

$$S_n = \left\{(f,g) \in \mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k \times \mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k \,;\, \forall \ell \leqslant n,\ \mathrm{Trace}_\ell(f) = \mathrm{Trace}_\ell(g) \text{ and } \mathbf{a}(f) = \mathbf{a}(g)\right\}.$$

由于这个序列是非递增的（$S_{n+1} \subset S_n$），因此存在一个指标 $P \geqslant 1$，使得$S_n = S_P$对所有 $n \geqslant P$均成立。第一投影 $\pi\colon S_P \to \mathcal{H}$ 是一个满态射，根据定理 3.5，它的所有纤维都是有限的。因此，存在一个整数 N，使得 π 的每个纤维至多包含 N 个元素，证毕。

对于 $k = 1$，考虑下式即可用同样的论证

$$S_n = \left\{(f,g) \in \mathcal{H}_d^1 \times \mathcal{H}_d^1 \,;\, \forall \ell \leqslant n,\ \mathrm{Trace}_\ell(f) = \mathrm{Trace}_\ell(g)\right\}.$$

现在我们在域K上进行讨论。Friedland-Milnor分类在这种情况下同样成立，并且我们认为 $\mathcal{H}$(K) 要么是 $\mathcal{H}_d^1$(K)，要么是 $\mathcal{H}_{\mathbf{d},\mathbf{a}}^k$(K)。令 N 和 P 为上一段中定义的整数（针对复数域 C）。取 $f_1, \ldots, f_M$，它们是$\mathcal{H}$(K) 中的互异元素，并满足对所有 $m \leqslant M$ 和 $n \leqslant P$均有 $\mathrm{Trace}_n(f_m) = \mathrm{Trace}_n(f_1)$。令 $\mathrm{L}_0 \subset \mathrm{K}$ 为由定义 f_n 的公式的系数生成的域，并令 $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ 为其代数闭包。由于 L 可数且特征零，存在一个嵌入$\iota\colon \mathrm{L} \to \mathbb{C}$。将 ι应用于 f_m的系数，我们得到互异元素 $f_m^\iota \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$，对每个 $n \leqslant P$均满足 $\mathrm{Trace}_n(f_m^\iota) = \mathrm{Trace}_n(f_1^\iota)$。因此 $M \leqslant N$，证明完成。□

例 3.8. 设**域K**是特征为 $p > 0$的代数闭域，例如$\mathbf{F}_p$。考虑由下式定义的仿射平面$\mathbb{A}^2_{\mathbf{K}}$ 上的加法自同构

$$f(x,y) = (ay + sx^p, x) \tag{3.12}$$

其中，$a \in$ **域K*** 固定，$s \in$ **域K*** 是一个参数。于是，微分$Df_{(x,y)}$ 与 (x,y)无关，其迹为 0，行列式为 $-a$。若 α 是 a的平方根，则 $\mathrm{tr}(Df^n_{(x,y)}) = \alpha^n + (-\alpha)^n$，因此 f 的迹谱与参数 s无关。这表明定理 A 和 B 在特征为 p时不成立。这些例子与 Latt`es 映射有些相似：Latt`es 映射来自阿贝尔群（椭圆曲线）的自同态，而加法自同构则是交换群 $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$的自同构。

4. H ´ENON 映射与 Huguin 定理

本节基于 [24, 定理 A], ，给出下面两个定理的直接证明 .

定理 4.1。 设 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个不可约复 *H´énon* 映射代数族，满足 雅可比行列式$(f_\lambda) \neq -1$。如果它是*(I)*型稳定的，那么它是平凡的。

这实际上是一个关于 (I) 型稳定性的结果，因为正如我们将看到的，它专门处理周期为 1 和 2 的点。因此，即使对于雅可比行列式不同于

-1 的 H$-$1enon 映射，该结果也弱于定理 D（参见命题 2.2 之后关于蕴含链的评注）。另一方面，根据注记 3.4 (1)，对于雅可比行列式不同于 -1 的 H´enon 映射，可以用定理 4.1 代替定理 D 来得到定理 C 以及定理 A 的不稳定乘子版本。一个有趣的推论是：在 $\mathcal{H}_d^1$ 中关于周期1和2的周期点的整体考量会导致局部不稳定乘子刚性（相应地， $J^\star$ 上的 C^1 刚性），即使对于那些周期1和2的点全部为吸引的映射也是如此。

定理 4.2。 给定次数且雅可比行列式不等于-1 的复数亨农映射 f，由其周期为1 和 2 的周期点的乘子唯一确定（或等价地，由雅可比行列式(f)、迹$_1(f)$ 和迹$_2(f)$确定），但有有限种可能。也就是说，对于任意满足雅可比行列式$(f_0) \neq -1$的$f_0 \in \mathcal{H}_d^1$，集合

$$\Sigma_2(f_0) = \{f \in \mathcal{H}_d^1;\ \text{雅可比行列式}(f) = \text{雅可比行列式}(f_0),\ \text{迹}_1(f) = \text{迹}_1(f_0),\ \text{迹}_2(f) = \text{迹}_2(f_0)\}$$

是有限的。此外，对于 f_0，在 $\mathcal{H}_d^1$的一个稠密扎里斯基开子集中， $\Sigma_2(f_0) = \{f_0\}$.

这两个定理源自一个计算奇迹，而这个奇迹对于雅可比行列式 -1并不成立。下面的例子表明，定理 4.2 不适用于这种情况。

例 4.3。 雅可比行列式为 -1 的 H´énon 映射的一般（约化）形式为 $f(x,\ y) = (y + p(x),\ x)$，其中 p 为首一且中心化。关于不动点的方程 $(y_0 + p(x_0),\ x_0) = (x_0, y_0)$ 等价于

$$x_0 = y_0 \ \text{ and } \ p(x_0) = 0 \tag{4.1}$$

并且，在这样的不动点处，微分的迹等于 $p'(x_0)$。对于f^2 的不动点，我们得到

$$\begin{cases} x_0 + p(y_0 + p(x_0)) = x_0 \\ y_0 + p(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{or equivalently} \quad \begin{cases} p(x_0) = 0 \\ p(y_0) = 0 \end{cases} . \tag{4.2}$$

在这些解中，周期2的点满足 $x_0 \neq y_0$。微分的计算给出

$$\operatorname{tr}(D_{(x_0,y_0)} f^2) = p'(x_0)p'(y_0) + 2. \tag{4.3}$$

例如，取 $p_\lambda(x) = (x - \lambda)^2(x + \lambda)^2$。那么 $p_\lambda(x_0) = 0$的所有解都满足 $p'_\lambda(x_0) = 0$，由此我们得出，族 $f_\lambda(x,\ y) = (y + (x^2 - \lambda^2)^2,\ x)$违反了定理 4.2 的结论。注意， [22] 的定理7.1断言，次数为 2 和 3 的 H´énon 映射由其不动点的乘子决定，因此 4 是此类例子的最小可能次数。□

现在开始证明定理 4.1 和 4.2。

引理 4.4。 设 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个洛克斯德罗米克自同构的代数族，且 Λ 不可约。若它是类型 *(I)* 的稳定族，则所有鞍周期点的稳定乘子和不稳定乘子，以及雅可比行列式 雅可比行列式(f_λ)，在 Λ 上均为常数。

证明。 我们可以假设 $\dim(\Lambda) = 1$。我们用 $(f_{\pi(\lambda)})_{\lambda\in\hat{\Lambda}}$ 替换 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，其中 $\hat{}\pi : \hat{\Lambda} \to \Lambda$ 是一个奇点解消，并假设 Λ 光滑： Λ 是一个紧黎曼曲面，去掉有限个点。根据假设，(f_λ) 的所有鞍周期点都可以沿着 Λ 局部全纯延拓。固定 $\lambda_0 \in \Lambda$，并取使 $\mathrm{SPer}_n(f_{\lambda_0})$ 非空的 n。存在 Λ 的一个有限覆盖 Λ'，它也是有限型黎曼曲面，使得 $\mathrm{SPer}_n(f_{\lambda_0})$ 中的所有点都可以沿着 Λ' 全局延拓。对于具有延拓 z_λ 的 $z_{\lambda_0} \in \mathrm{SPer}_n(f_{\lambda_0})$，函数 $\lambda \in \Lambda' \mapsto \lambda^u(z_\lambda)$ 是全纯的，且取值于 **复数域**$\setminus\mathbb{D}$，因此它是常数。同样，稳定乘子也是常数。因此，$\mathrm{Jac}(f_\lambda)$ 在 Λ' 上为常数，进而在 Λ 上也为常数。
□

对于 $f \in \mathrm{Aut}(\textbf{复数域}^2)$，定义 $M_k(f)$ 为

$$M_k(f) = \max_{z\in \mathrm{Per}_k(f)} \left(\frac{1}{k} \log \left| \operatorname{tr} D_z f^k \right| \right). \tag{4.4}$$

命题 4.5. 设 $(f_n) \in (\mathcal{H}_d^1)^{\mathbf{N}}$ 是一个发散的复 *H´énon* 映射序列，其固定雅可比行列式不同于 -1。则

$$\lim_{n\to\infty} \max\left(M_1(f_n), M_2(f_n)\right) = +\infty.$$

证明. 这依赖于一个显式计算。设 $f(x,\ y) = (ay + p(x),\ x)$，其中雅可比行列式为 $(f) = -a \neq -1$。不动点方程为 $(ay_0 + p(x_0),\ x_0) = (x_0,\ y_0)$，等价地

$$\frac{1}{1-a}p(x_0) = x_0 \ \text{ and } \ y_0 = x_0, \tag{4.5}$$

而此类不动点处的迹为

$$\operatorname{tr}(D_{(x_0,y_0)}f) = p'(x_0) = (1-a)\left(\frac{1}{1-a}p\right)'(x_0). \tag{4.6}$$

对于周期2的点，我们得到以下等价系统

$$\begin{cases} ax_0 + p(ay_0 + p(x_0)) = x_0 \\ ay_0 + p(x_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{1}{1-a}p(x_0) \\ x_0 = \frac{1}{1-a}p(y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{1}{1-a}p(x_0) \\ x_0 = \left(\frac{1}{1-a}p\right)^{\circ 2}(x_0) \end{cases}$$

相应的迹满足

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(D_{(x_0,y_0)}f^2\right) &= p'(ay_0+p(x_0))p'(x_0)+2a \\ &= p'\left(\frac{1}{1-a}p(x_0)\right)p'(x_0)+2a \\ &= (1-a)^2\left(\left(\frac{1}{1-a}p\right)^{\circ 2}\right)'(x_0)+2a.\end{aligned} \tag{4.7}$$

现在假设 $a \neq 1$保持不变，并且序列 $f_n\colon\ (x,\ y) \mapsto (ay+p_n(x),\ x)$在 $\mathcal{H}_d^1$ 中当 n 趋于 $+\infty$时发散。那么，(p_n) 在 $\mathcal{P}_d$中发散，$\left(\frac{1}{1-a}p_n\right)$ 也同样发散。根据 [24, 定理 A]，$\frac{1}{1-a}p_n$ 的周期1或周期2的某个乘子必趋于无穷远。上述计算随后表明，f_n 中相应周期点（周期为1或2）的迹也必趋于无穷远，于是结论得证。□

注 4.6。 f 与$\frac{1}{1-a}p$ 的周期点之间的对应关系在更高周期下并不保持，因此很幸运，在 [24]中周期2就足够了。

定理 4.1 的证明。 </style}如果 $(f_\lambda)_{\lambda\in\lambda}$ 是复数H´énon映射的一个不可约稳定（类型 (I)）代数族，那么根据引理 4.4，Jac(f_λ)是常数，鞍点的不稳定乘子也是常数。另一方面，如果 $\dim(\Lambda) \geqslant 1$, Λ 在$\mathcal{H}_d^1$中无界，那么根据命题 4.5，我们可以找到一个周期为 $\leqslant 2$ 且具有任意大迹的周期点。这样的点最终必为鞍点，其不稳定乘子趋于无穷远。矛盾即完成证明。□

定理 *4.2* 的证明。先说明一个准备性观察：由 $f_i(x,y) = (ay+p_i(x),x)$ 定义的两个 H´énon 映射 f_1 和f_2 在 Aut(**复数域**^{2}) 中共轭，当且仅当它们的 p_i 仿射共轭类相同：$[p_1] = [p_2]$。事实上，f_1 和 f_2 必须通过形如 $(x,y)\mapsto(\beta x,\beta y)$ 的对角线性映射共轭，其中 $\beta\in\mathcal{U}_{d-1}$；这对应于（首一、中心化）多项式 p_i 的线性共轭。

为证明定理 4.2，我们写作 $f(x,\ y) = (ay+p(x),\ x)$ 并应用命题 4.5 的证明：该证明表明，给定 $a \neq 1$，$\mathrm{Trace}_1(f)$ 和 $\mathrm{Trace}_2(f)$ 确定了 $\frac{1}{1-a}p$ 的周期至多为 2 的周期点乘子。根据 [24, 定理 C], ，存在一个扎里斯基开集 $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}_d$，使得类 $[q]\in\mathcal{U}$ 在 $\mathcal{P}_d$ 中由其周期为 1 和 2 的点的乘子唯一确定。此外，如果 p_1 和 p_2 是首一且中心化的多项式，且 $\left[\frac{1}{1-a}p_1\right] = \left[\frac{1}{1-a}p_2\right]$，那么 $[p_1] = [p_2]$。因此，如果 p 是首一且中心化的，且 $\left[\frac{1}{1-a}p\right]\in\mathcal{U}$，那么 $[p]$ 由 a、$\mathrm{Trace}_1(f)$ 和 $\mathrm{Trace}_2(f)$ 确定。定义扎里斯基开子集 $\mathcal{V}\subset\mathcal{H}_d^1$ 为 $\mathcal{V} = \left\{(a,\ p)\in\text{**复数域**}^*\times\mathcal{P}_d^{\mathrm{cm}};\ \left[\frac{1}{1-a}p\right]\in\mathcal{U},\ a\neq 1\right\}$（其中上标“cm”表示首一且中心化，见 § 5.2）。初步观察表明，任意 $f\in\mathcal{V}$ 都由 a、$\mathrm{Trace}_1(f)$ 和 $\mathrm{Trace}_2(f)$ 在共轭意义下确定，证明完成。

现在，由于它是代数的，如果 $\Sigma_2(f_0)$ 是无限的，则它必然包含一个维数为 $\geqslant 1$ 的分支，因此它在 $\mathcal{H}_d^1$ 中无界，并且如前所述可得矛盾。□

5. 定理 E的若干预备事实

5.1. 交叉映射与类H´énon映射。

5.1.1. 定义。 在本文中，按定义，双圆盘是一个与标准开双圆盘 $D_1 \times D_2$双全纯的定义域 $\mathbb{B} \subset$ **复数域**^{2} 。它配备有两个投影 $\pi_1 \colon \mathbb{B} \to D_1$ 与 $\pi_2 \colon \mathbb{B} \to D_2$，分别称为垂直投影与水平投影。我们始终假设该双全纯映射，因而这些投影，都能全纯延拓到$\mathbb{B}$ 在**复数域**^{2}中的某个邻域上。垂直边界与水平边界分别为 $\partial^v\mathbb{B} = \pi_1^{-1}(\partial D_1)$与 $\partial^h\mathbb{B} = \pi_2^{-1}(\partial D_2)$。一个对象（子簇、子定义域、流）若与 $\partial^v\mathbb{B}$的某个邻域不相交（相应地，与 $\partial^h\mathbb{B}$的某个邻域不相交），则称为垂直 （相应地，水平）。对于直线，我们采用略有不同的约定：按定义，一条水平直线 （相应地，垂直直线）是 π_2 （相应地， π_1）的一条纤维。由于这些 π_i 通常并非线性的，这些直线在**复数域**^{2}中通常并非通常意义下的直线。

任意水平子流形 V 在 $\mathbb{B}$ 中都有一个次数 $\deg(V)$，定义为分歧覆盖 $\pi_1 \colon V \to D_1$ 的次数。同样，任意水平闭正流T 都有一个切片质量 $\mathrm{sm}(T)$，它是正测度 $T \wedge [L^v]$的质量，其中L^v 是任意一条垂直直线。若 $T = [V]$ 是水平流形上的积分流，则$\mathrm{sm}(T) = \deg(V)$。最后，若 S（分别为 T）是水平（分别为垂直）闭正流，则测度 $T \wedge S$ 定义良好，且其总质量满足 $\|T \wedge S\| = \mathrm{sm}(T)\,\mathrm{sm}(S)$。这些结果参见 [13] 。按照约定，水平圆盘 Δ 是与圆盘双全纯的水平子流形；特别地， $\partial\Delta \subset \partial^v\mathbb{B}$。

若 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{B}'$ 是两个双圆盘，则交叉映射 $(f, \mathbb{B}, \mathbb{B}')$ 是指一个定义在$\mathbb{B}$某个邻域上的单射全纯映射，满足 (i) $f(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}' \neq \varnothing$、(ii)$f(\partial^v\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}' = \varnothing$和 (iii) $f(\mathbb{B}) \cap \partial\mathbb{B}' \subset \partial^v\mathbb{B}'$。为简便起见，我们仍记作$f \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$，尽管按定义， $f(\mathbb{B})$ 并不包含于 $\mathbb{B}'$。交叉映射最早由 [23], 引入，但此处采用的定义出自 [13]。交叉映射的次数是水平曲线 $f(L^h) \cap \mathbb{B}'$的次数，其中 L^h 是$\mathbb{B}$中的任意一条水平直线。若 $\mathbb{B} = \mathbb{B}'$，则称 f 为*H´énon* 型映射。

5.1.2. 非分歧映射。 以下讨论是新的（相关思路见 Ishii [25] ）。

定义 5.1。 交叉映射 $f \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ 在 $\partial^v\mathbb{B}'$ 上非分歧，如果对于 $\mathbb{B}$中的每一条水平直线 L^h，

(i) $f(L^h)$ 与 $\partial^v\mathbb{B}'$横截，且(ii) $f(L^h) \cap \mathbb{B}'$ 是全纯圆盘的不交并。

(i)的等价表述是：存在 $\partial^v\mathbb{B}'$ 的一个邻域 $\mathcal{N}$，使得对于每个 L^h，$\pi_1|_{f(L^h)\cap\mathcal{N}}$ 到其像的覆盖都是非分歧的，因此得名。

注记 5.2. 在 [38] Wermer 构造了一个定义域 $\Omega \subset$ **复数域**^{2}，使得 Ω 与双圆盘双全纯等价，而 $\Omega \cap$ (**复数域** $\times \{0\}$) 不是多项式凸的。这表明可能存在交叉映射 $(f, \mathbb{B}, \mathbb{B}')$，它们具有一条满足 (i) 但不满足 (ii) 的水平直线。以下是一个易于检验的、足以保证 (ii) 成立的条件：自然投影 $\pi_2' : \mathbb{B} \to D_2'$ 可以全纯地延拓到 $f(\mathbb{B})$。对于单位双圆盘，该条件成立；更一般地，当 π_2' 延拓为一个全局定义的全纯映射**复数域** $^2 \to$ **复数域**时，该条件也成立。事实上，在这种情况下，$\left\{z \in L^h,\ \pi_2' \circ f(z) \in D_2'\right\}$ 根据最大值原理是圆盘的并，而 $L^h \cap f^{-1}(\mathbb{B}')$ 则是其中像与$\mathbb{B}'$相交的那些圆盘之并。为完整起见，我们提及一个更内在的版本。

引理 5.3. 设$\Omega \subset$ **复数域**^{2} 是一个 *Runge* 域。若 $D \subset$ **复数域**^{2} 是与 $\partial\Omega$ 和 $D \cap\Omega \Subset D$ 横截的全纯圆盘，则 $D \cap \Omega$ 是若干圆盘的不交并。因此，当 $\mathbb{B}'$ 是 *Runge* 域时，条件 *(i)* 蕴含定义 *5.1* 中的条件 *(ii)*。

证明。写作 $D \cap \partial\Omega = \bigcup\gamma_i$，其中 γ_i 是光滑的若尔当曲线。设 D_i 是 D 中由 γ_i围成的若尔当域。我们断言 D_i 两两不交，且 $D\cap\Omega = \bigcup D_i$。为证明这一点，注意根据 Wermer 定理，[37], 的多项式包 $\hat{\gamma}_i$ 要么等于 γ_i，要么是以 γ_i为边界的黎曼曲面。但 $D_i \subset \hat{\gamma}_i$，所以$\hat{\gamma}_i = D_i$，而 Runge 性质给出 $D_i \subset \Omega$。因此 D_i 两两不交，且 $\bigcup D_i \subset D \cap\Omega$。最后，$D\backslash\bigcup D_i$是连通的，与 $\partial\Omega$不交，并且含有 Ω 外部的点（横截性保证其在 γ_i附近含有这样的点），所以它完全位于 Ω 外部。由此得到 $D \cap \Omega = \bigcup D_i$，证毕。□

命题—定义 5.4. 设 $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ 是一个在 $\partial^v\mathbb{B}'$ 上非分歧的交叉映射。设 Ω 是 $f(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}'$ 的一个分支。任取 $\mathbb{B}$ 中的一条水平直线 L，并令 $V = f(L) \cap \Omega$。那么 V 非空且连通，其水平次数与 L 无关。根据定义，$\deg(V)$ 是分支 Ω 的次数 。

此外，若 W 是包含于 Ω 中的任意水平圆盘，则 $\deg(W)$ 是 $\deg(V)$ 的倍数 .

若 $\deg(V) \geqslant 2$，则称分支 Ω 为索列诺伊德的。从证明中可以清楚看出，要使结论成立，只需非分歧性质在 Ω 中成立；也就是说，只需 $\pi_1|_{f(L^h)\cap\Omega}$ 在边界附近是一个覆盖。

证明。首先要证明，对于 $\mathbb{B}$ 中的每一条水平直线 L，$f(L)$ 都与 Ω 相交。事实上，若 L_1^v 是 $\mathbb{B}'$ 中任意一条与 Ω 相交的垂直直线，根据交叉映射性质，$f^{-1}(L_1^v\cap\Omega)$ 是 $\mathbb{B}$ 中的一个垂直子流形，因此必与 L 相交，结论由此得证。

现在，假设 $L^v \subset \mathbb{B}'$ 是一条如此接近 $\partial^v\mathbb{B}'$ 的垂直直线，使得对每一条水平直线 $L \subset \mathbb{B}$，$f(L)$都与 L^v横截。设 $V = f(L) \cap\Omega$且 $k =$deg(V)。则 $V \cap L^v$由 k 个互异点 $a_1(L)$, ..., $a_k(L)$组成，并且由于不存在相切，介于

V与 L^v之间，这些点可以随 L全纯地追踪。若 $a_i(L_1) = a_j(L_2)$，则必有 $L_1 = L_2$，因为 f 是单射，进而有 $i = j$，因为这些 $a_i(L)$之间不会发生碰撞。因此，当 L 遍历 $\mathbb{B}$ 中的水平直线集合（它是一个圆盘 D_2）时，每个 $a_i(L)$ 都描绘出一个拓扑圆盘 Δ_i，并且这些圆盘互不相交。此外，若 Δ 是$\Omega \cap L^v$的一个分支，则 $f^{-1}(\Delta)$ 是 $\mathbb{B}$中的垂直子流形，因而它与 L相交。这表明$\Omega \cap L^v = \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i$，并且 k 与 L无关。

由于 V 是 $f(L) \cap \mathbb{B}'$ 的若干连通分支的并，根据定义 5.1 的性质 (ii)，它是若干全纯圆盘的并。下面证明 V 是连通的。取 V 的一个分支 V'。其原像 $f^{-1}(\partial V')$ 是 L 中的一条若尔当曲线；由于对于每个 L，$f(L)$ 都与 $\partial^v\mathbb{B}$ 横截，这条若尔当曲线可以随 L 全纯地延伸，从而截出一个连通的垂直开子集 U，它是 $f^{-1}(\mathbb{B}') \cap \mathbb{B}$ 的一个分支。因此，$f(U)$ 是 $f(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}'$ 中包含于 Ω 的一个分支，故 $f(U) = \Omega$。这一讨论表明 $f^{-1}(\Omega) \cap L = f^{-1}(V')$，但根据定义 $f^{-1}(\Omega) \cap L = f^{-1}(V)$，因此 $V = V'$，且 V 连通。

如果我们通过绕着 $\partial^v\mathbb{B}'$ 转动来改变 $L^v \subset \mathbb{B}'$，那么点 $a_1(L), \dots, a_k(L)$ 会在整体单值化作用下发生置换。由于 V 是一个拓扑圆盘，它只有一个边界分支，因此整体单值化在 a_i（分别在圆盘 Δ_i）上具有传递性。现在令 W 为包含在 Ω 中的任意水平圆盘（它在边界附近可能有垂直相切）。当在 $\mathbb{B}'$ (4) 中 $\partial^v\mathbb{B}'$ 的一个小邻域 $\mathcal{N}$ 内改变 L^v 时，圆盘 Δ_i 在 $\mathcal{N} \cap V$ 上构成 $\mathcal{N} \cap \Omega$ 的拓扑纤维化。$W \cap \Delta_i$ 中点的重数之和随着 L^v 的变化局部保持不变；又由于整体单值化具有传递性，这个数不依赖于 i。将其记为 ℓ，我们得出 $\deg(W) = k\ell$，证明完毕。□

5.1.3. 迭代与截断迭代。 考虑 H´énon 型映射 $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ 时，在 [13] 中，迭代指的是截断迭代，也就是说，我们考虑的轨道仅限于那些从未离开 $\mathbb{B}$ 的轨道。换言之，我们只迭代 $f|_{f^{-1}(\mathbb{B})}$（通常记作 $f|_{\mathbb{B}}$）。现在假设 H´énon 型映射 f 是全局全纯微分同胚 f 在 ˜ ˜上的限制。**复数域**[2]。那么，f 的某些轨道可能在再次进入 $\mathbb{B}$ 之前离开它。如果对于每个$k \geqslant 0$，都有 $\tilde{f}^k(\tilde{f}(\mathbb{B})\backslash\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} = \varnothing$，我们就称 f是适当迭代的 。这意味着负迭代也具有相应性质。例如，如果 f 是一个 H´énon 映射，且 $\mathbb{B} = \mathbb{D}(0, R)^2$ 是一个充分大的双圆盘，那么离开 $\mathbb{B}$ 的轨道必定逃向无穷远，这一性质成立。

同样地，若 f_1 和 f_2 是 $\mathbb{B}$ 中的两个 H´énon 型映射，它们是全局˜定义的映射 f_i 的限制，则按照 H´énon 型映射的意义，它们的复合为 $f_2|_{\mathbb{B}} \circ f_1|_{\mathbb{B}}$，˜ ˜ ˜ ˜这可能不同于 $(f_2 \circ f_1)|_{\mathbb{B}}$。当且仅当 $f_2(f_1(\mathbb{B})\backslash\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} \neq \varnothing$ 时，才会发生这种情况。˜ ˜如上所述，若 f_2 和 f_1 恰当复合，则称它们恰当复合，如果 $f_2(f_1(\mathbb{B})\backslash\mathbb{B}) \cap \mathbb{B} = \varnothing$，在

[4]我们称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{B}$ 中 $\partial^v\mathbb{B}$ 的一个邻域，如果 $\mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{N}} \cap \mathbb{B}$ 对于复数域**复数域**[2] 中 $\partial^v\mathbb{B}$ 的某个邻域成立。

˜ ˜这种情况下 $f_2|_{\mathbb{B}} \circ f_1|_{\mathbb{B}} = (f_2 \circ f_1)|_{\mathbb{B}}$。该定义可以推广到任意长度的复合。

˜在下文中，当这种延拓存在时，我们将对 f 及其延拓 f使用相同的记号。

5.2. **一元多项式的估计**。 回顾可知， $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_d$(**复数域**)是仿射群作用下次数为 d 的一元复变量多项式的共轭类所成的复簇。我们将其视为由首一中心多项式 $p(z) = z^d + \sum_{j=0}^{d-2} a_j z^j$ 构成的空间 $\mathcal{P}_d^{\mathrm{cm}} \simeq$ **复数域**$^{d-1}$关于 $(d-1)^{\mathrm{th}}$单位根群的商，其作用方式为 $p \mapsto \beta^{-1} p(\beta z)$。对我们而言，在大多数情况下，在 $\mathcal{P}_d^{\mathrm{cm}}$上进行研究就足够了。

5.2.1. 最大逃逸率。 由方程(1.5)可知，最大逃逸率定义为 $M(p) = \max\{G_p(c)\,;\ p'(c) = 0\}$. 我们将关注 $M(p)$ 较大的情形。如 [9], 中所解释的， p 的渐近几何依赖于$M(p)$。为看出这一点，我们定义

$$R_p = e^{M(p)}; \tag{5.1}$$

正如我们将看到的，它为 $p \in \mathcal{P}_d^{\mathrm{cm}}$ 的大小（或范数）以及其朱利亚集的特征尺度提供了一个良好的度量。例如，当且仅当 $t > M(p)$ 时，次水平集 $\{G_p < t\}$ 是连通的。

5.2.2. 博¨特坐标。博¨特坐标 φ_p 定义在开集上

$$\mathcal{U}_p = \{z \in \mathbf{C};\ G_p(z) > M(p)\} \tag{5.2}$$

并给出一个从 $\mathcal{U}_p$ 到 **复数域**$\backslash \mathbb{D}_{R_p}$ 的全纯微分同胚，使得¯

$$G_p(z) = \log|\varphi_p(z)| \quad \forall z \in \mathcal{U}_p. \tag{5.3}$$

其逆微分同胚记为 ψ_p: **复数域**$\backslash \mathbb{D}_{R_p} \to \mathcal{U}_p$。 φ_p 和 $\overline{\psi_p}$ 在无穷远处均与恒等映射相切: $\varphi_p(z) = z + O(1/z)$ 且 $\psi_p(w) = w + O(1/w)$。

回顾 Koebe 的畸变估计: 若 g: $\mathbb{D}_\rho \to$ **复数域** 是一个单叶函数，满足 $g(0) = 0$ 和 $g'(0) = 1$，则

$$\frac{|u|}{(1+|u|/\rho)^2} \leqslant |g(u)| \leqslant \frac{|u|}{(1-|u|/\rho)^2}. \tag{5.4}$$

将这些估计应用于 $u \mapsto 1/\psi_p(1/u)$，并进行变量代换 $\psi_p(w) = z$，我们得到

$$\frac{1}{(1+R_p/|\varphi_p(z)|)^2} \leqslant \frac{|\varphi_p(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{(1-R_p/|\varphi_p(z)|)^2}. \tag{5.5}$$

这就证明了以下引理。

引理 5.5. *B¨ottcher* 坐标 φ_p: $\mathcal{U}_p \to$ **复数域**$\backslash\overline{\mathbb{D}_{R_p}}$满足

$$|z| - 3R_p \leqslant |z| - 2R_p - \frac{R_p^2}{|\varphi_p(z)|} \leqslant |\varphi_p(z)| \leqslant |z| + 2R_p - \frac{R_p^2}{|\varphi_p(z)|} \leqslant |z| + 2R_p.$$

特别地，对于 $r > R_p$，曲线

$$S_r = \{G_p = \log(r)\} = \{|\varphi| = r\} = \{\psi(\partial\mathbb{D}_r)\}$$

*i*包含于 $\{r - 2R_p \leqslant |z| \leqslant r + 3R_p\}$ 中，且当 $r > 2R$ 时，该集合是一个环域 $_p$.

因此，$\{G_p < M(p)\}$ 包含于 $\mathbb{D}_{4R_p}$ 中；事实上，[9] 的命题 3.5 给出 s

$$\{G_p < M(p)\} \subset \overline{\mathbb{D}}_{2R_p}. \tag{5.6}$$

5.2.3. 系数估计。如果 $p(z) = z^d + \sum_{j=0}^{d-2} a_j z^j$ 是一个次数为 d 的首一中心多项式，那么它的导数 p' 也是中心化的，并可写为 $p'(z) = d(z - c_1)\cdots(z - c_{d-1})$, 其中 p 的临界点 c_i 满足 $\sum_i c_i = 0$。对于 $j < d$，我们得到

$$a_{d-j} = (-1)^j \frac{d}{d-j}\sigma_j(c_1, \ldots, c_{d-1}) \tag{5.7}$$

其中 $\sigma_j(c_1$、.....、$c_{d-1}) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_j\leqslant d-1} c_{i_1}\cdots c_{i_j}$ 是第 j 个对称函数，而 $a_0 \in$ **复数域** 并非由 c_i 确定。这给出了估计

$$|a_{d-j}| \leqslant \binom{d}{j} \max\{|c_1|, \ldots, |c_k|\}^j \tag{5.8}$$

对于 $j < d$。由包含关系 (5.6)，我们立即得到

$$|c_j| \leqslant 2R_p, \tag{5.9}$$

这给出 $|a_{d-j}| \leqslant \binom{d}{j}(2R_p)^j$ 对于 $j < d$，而 [9] 的命题 3.6 断言

$$|a_0| \leqslant 2(4R_p)^d. \tag{5.10}$$

此外，在 $\mathcal{P}_d^{\mathrm{cm}}$ 上，函数 M: $p \mapsto M(p)$ 和 R: $p \mapsto R_p$ 都是连续的。因此，M 和 R 都是连续且适当的: $\mathcal{P}_d^{\mathrm{cm}}$ 的子集 $\{p_s;\ s \in S\}$ 有界，当且仅当集合 $\{M(p_s);\ s \in S\}$ 有界。

令 $A =$ max$\{|c_1|$，.....，$|c_{d-1}|$，$|a_0|^{1/d}\}$。由 (5.8)，只要 $|z| \geqslant A$，就有 $|p(z)| \leqslant 2^d|z|^d$；并且根据最大值原理，对于 $|z| \leqslant A$，有 $|p(z)| \leqslant 2^d A^d$。通过归纳，我们得到

$$\frac{1}{d^n}\log^+|p^n(z)| \leqslant (1 + \frac{1}{d} + \cdots + \frac{1}{d^{n-1}})\log(2) + \log^+|z| \tag{5.11}$$

当 $|z|$、..、$|p^{n-1}(z)|$ 均不小于 A 时，并且

$$\frac{1}{d^n}\log^+|p^n(z)| \leqslant (1 + \frac{1}{d} + \cdots + \frac{1}{d^{n-1}})\log(2) + \log^+(A) \tag{5.12}$$

否则。因此， $G_p(z) \leqslant \frac{d}{d-1}\log(2) + \log^+ \max\{A, |z|\}$。这意味着 $M(p) \leqslant \frac{d}{d-1}\log(2) + \log^+(A)$。结合不等式 (5.9) 和 (5.10)，我们得到

$$M(p) - 2\log(2) \leqslant \log^+ \max\{|c_1|, \dots, |c_{d-1}|, |a_0|^{1/d}\} \leqslant M(p) + 3\log(2). \tag{5.13}$$

5.2.4. 渐近估计。

引理 5.6. 如果 $|z| \geqslant R_p$ （分别地， $\geqslant 2R_p$），那么

$$\left|\frac{p(z)}{z^d} - 1\right| \leqslant 4^{d+1}\frac{R_p^2}{|z|^2} \quad \left(\textit{resp.} \quad \leqslant 2^{d+4}\frac{R_p^2}{|z|^2}\right).$$

证明。写作 $p(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_1 z + a_0$，并利用上述估计得到

$$\left|\frac{p(z)}{z^d} - 1\right| \leqslant \binom{d}{2}\left(\frac{2R_p}{|z|}\right)^2 + \cdots + \binom{d}{d-1}\left(\frac{2R_p}{|z|}\right)^{d-1} + 2\left(\frac{4R_p}{|z|}\right)^d.$$

如果 $|z| \geqslant R_p$，我们得到

$$\left|\frac{p(z)}{z^d} - 1\right| \leqslant \left(\frac{R_p}{|z|}\right)^2 \left((1+2)^d + 2\cdot 4^d\right) \leqslant 4^{d+1}\left(\frac{R_p}{|z|}\right)^2.$$

情形 $|z| \geqslant 2R_p$ 类似。 □

这里给出一个更精确的上界，采用另一种证明策略。

引理 5.7。

（1） 对于 $|z| \geqslant 6R_p$，我们有估计 $\left|\frac{\varphi_p(z)}{\overline{z}} - 1\right| \leqslant \frac{6R_p^2}{\overline{|z|^2}}$。

（2） 对于 $|z| \geqslant 6\sqrt{d-1}R_p$，我们有 $\left|\frac{p(z)}{z^d} - 1\right| \leqslant (12d+2)\frac{R^2}{\overline{|z|^2}}$。

证明。我们将 φ_p 记为 φ，并将 φ 的逆映射记为 ψ。由 [9], 的命题 4.1，对 $|w| > R_p$ 我们得到 $|\psi(w)/w - 1| \leqslant 3R_p^2/|w|^2$；因此，对于 $z \in \mathcal{U}_p$，我们有

$$|z - \varphi(z)| \leqslant 3\frac{R_p^2}{|\varphi(z)|}. \tag{5.14}$$

若 $|z| \geqslant 2R_p$，则由引理 5.5 得 $|z| + 2R_p \leqslant 2|z|$ 与 $|\varphi(z)| \leqslant 2|z|$。若 $|z| \geqslant 6R_p$，则 $|z| \leqslant 2(|z| - 3R_p)$，从而 $|z| \leqslant 2|\varphi(z)|$，再次由引理 5.5 得到。因此，对于 $|z| \geqslant 6R_p$，我们有 $|\varphi(z) - z| \leqslant 3R_p^2/|\varphi(z)| \leqslant 6R_p^2/|z|$,，这就证明了第一个不等式。

现在，假设 $|z| \geqslant 6\sqrt{d-1}R_p$，特别是 $|z| \geqslant 6R_p$。注意，$\log(2) > 1/6$。这意味着，只要 $0 \leqslant t \leqslant 6R_p^2/|z|^2$，就有 $\log((1+t)^{d-1}) \leqslant (d-1)t \leqslant \log(2)$。因此，

$[0, 6R_p^2/|z|^2]$ 区间上 $t \mapsto (1+t)^d$ 的导数有上界 $2d$。这意味着

$$\left|\frac{\varphi(z)^d}{z^d} - 1\right| \leqslant 12d\frac{R_p^2}{|z|^2} \tag{5.15}$$

当 $|z| \geqslant 6\sqrt{d-1R_p}$时。现在，若将方程（5.14）应用于 $p(z)$ 并利用 $\varphi \circ p = \varphi^d$，可得

$$\left|\frac{p(z)}{\varphi(z)^d} - 1\right| \leqslant 3\frac{R_p^2}{|\varphi(z)|^{2d}}. \tag{5.16}$$

令 $a = \varphi(z)^d/z^d$ 和 $b = p(z)/\varphi(z)^d$。由（5.15）可得 $|\varphi(z)^d/z^d - 1| \leqslant 2/3$，因此$|\varphi(z)|^d \geqslant |z|^d/3$。将其代入（5.16）并利用 $|z| \geqslant 6$，得到

$$|b-1| \leqslant \frac{3R_p^2}{|\varphi(z)|^{2d}} \leqslant \frac{27R_p^2}{|z|^{2d}} \leqslant \frac{27}{|z|^{2d-2}} \cdot \frac{R_p^2}{|z|^2} \leqslant \frac{3}{4} \cdot \frac{R_p^2}{|z|^2}. \tag{5.17}$$

于是，由初等不等式 $|ab-1| \leqslant |a-1| + |b-1| + |a-1| \cdot |b-1|$ 可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{p(z)}{z^d} - 1\right| &\leqslant 12d\frac{R_p^2}{|z|^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{R_p^2}{|z|^2} + 12d\frac{R_p^2}{|z|^2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{36(d-1)} \\ &\leqslant \left(12d + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{d}{d-1}\right)\frac{R_p^2}{|z|^2} \leqslant (12d+2)\frac{R_p^2}{|z|^2},\end{aligned} \tag{5.18}$$

这正是要证明的。

□

5.3. H´énon 映射的复合及量 $M(f)$。 现在通过描述 Friedland-Milnor 标准形的不唯一性，完成 § 1.2 的讨论。设 $\mathbf{d} = (d_k, \ldots, d_1)$ 为一个多重次数，并令 $d = \prod_{i=1}^k d_i$。 设 $g = h_k \circ \cdots \circ h_1$为首一且中心化的 H´énon 映射 $h_i(x, y) = (a_i y + p_i(x),\ x)$ 的一个复合，其次数分别为 $d_i = \deg(p_i)$。

首先，用 $h_j \circ \cdots \circ h_1$ 共轭 g 会置换因子 h_i，这定义了一个由 $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ 通过循环置换作用于标准形的作用。其次，群 $\mathbb{U}_{d-1} = \{\alpha \in$**复数域**$^* ;\ \alpha^{d-1} = 1\}$ 对标准形的作用如下。对于 $\alpha \in \mathbb{U}_{d-1}$，考虑由 $\alpha_1 = \alpha$ 和 $\alpha_{i+1} = \alpha_i^{d_i}$ 定义的有限序列 $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$（使得 $\alpha_k^{d_k} = \alpha_1$），并令 $s_i(x,\ y) = (\alpha_i x,\ \alpha_{i-1} y)$，其中指标 i 按模 k 取值。然后，定义

$$\alpha \cdot g := s_1^{-1} \circ g \circ s_1 = \tilde{h}_k \circ \cdots \circ \tilde{h}_1, \text{ with } \tilde{h}_i = s_{i+1}^{-1} \circ h_i \circ s_i. \tag{5.19}$$

这是另一个由首一且中心化的 H´enon 映射复合而成、与 g 共轭的映射。在参数 $a_j \in$ **复数域*** 和 $p_j = x^{d_j} + \sum b_{j,\ m} x^m$ 上，$\mathbb{U}_{d-1}$ 的这一作用由下式给出

对角变换

$$\alpha \cdot a_j = (\alpha_{j+1}^{-1}\alpha_{j-1})a_j \text{ and } \alpha \cdot p_j = x^{d_j} + \sum_{m=0}^{d_j-2}(\alpha_{j+1}^{-1}\alpha_j^m)b_{j,m}x^m. \tag{5.20}$$

总之，我们得到一个 $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \ltimes \mathbb{U}_{d-1}$ 在 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$ 上的作用。Friedland 和 Milnor 证明了， g' 中的一个元素 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k \simeq (\mathbf{C}^*)^k \times \mathbf{C}^{d_1-1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{d_k-1}$ 与 g 共轭，当且仅当 g' 在该作用下属于 g 的轨道。

因此， $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$ 的多重次数为 $\mathbf{d}$ 的复数域 $\mathbf{C}^2$ 上多项式自同构的模空间，是 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$ 关于 $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \ltimes \mathbb{U}_{d-1}$ 的商空间。总之，对于一个洛克斯德罗米克自同构 f，可以赋予两个共轭不变量:

$$[\mathbf{d}(f)] \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}^k/\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \text{ and } [\mathbf{a}(f)] \in (\mathbf{C}^*)^k/(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \ltimes \mathbb{U}_{d-1}). \tag{5.21}$$

因此，在谈论自同构的多重次数或多重雅可比行列式时，存在记号上的滥用，因为这个量应当被视为上述商空间中的元素。

如引言中所述，我们定义

$$M(g) = \max(M(p_i)), \quad \text{and} \quad R_g = e^{M(g)} \tag{5.22}$$

半径 R_g （有时简称为 R）将是下文的关键几何尺度 .

注 5.8。 量 $M(g)$ 不是共轭不变量，它会随 $\mathbb{U}_{d-1}$作用而变化。 为说明这一点，对任意整数 $e \geqslant 2$ 和 $c \in$ **复数域**，令 $g_c = h' \circ h_c$，其中$h'(x,\ y) = (y + x^e,\ x)$和 $h_c(x,\ y) = (y + x^2 + c,\ x)$，使得 $d = 2e$。对于 $c \in$ **复数域**，令$p_c(z) = z^2 + c$ 并且

$$G_{\mathcal{M}}(c) = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n}\log^+|p_c^n(c)| = G_{p_c}(c) = M(p_c),$$

它是曼德博集合 $\mathcal{M}$的格林函数，因此

$$M(g) = \max\{M(p_0), M(p_c)\} = M(p_c) \tag{5.23}$$

对每个 $c \in$ **复数域**都成立。现在，固定 $\alpha \in \mathbb{U}_{d-1}$，并反设对任意 c，都有 $M(\alpha \cdot g_c) = M(g_c)$。公式 (5.20) 表明 $\alpha \cdot g_c = h' \circ h_{\alpha^{-2}c}$，因此我们得到 $G_{\mathcal{M}}(c) = G_{\mathcal{M}}(\alpha^{-2}c)$，其中某个单位根，因此 $G_{\mathcal{M}}$ 在一个非平凡旋转下保持不变， $\mathcal{M}$也如此，这便得到了所需的矛盾。

为了得到一个仅依赖于 g 在 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$中的共轭类的函数，我们令

$$\overline{M}(g) := \max(M(\alpha \cdot g),\ \alpha \in \mathbb{U}_{d-1}), \tag{5.24}$$

其中 $\alpha \cdot g$ 如(5.19)所示。然后，当 $f \in$ Aut(**复数域**^{2}) 为洛克斯德罗米克时，我们定义

$$\overline{M}(f) = \overline{M}([f]) = \overline{M}(g), \tag{5.25}$$

其中， g 是 f 的任意 Friedland-Milnor 标准形。下面的引理说明这个定义是良好定义的。

引理 5.9。设 (f_n) 是 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$ 中的一个元素序列。那么

(1) $M(f_n) \to \infty$ 当且仅当 $M(\overline{f_n}) \to \infty$；对于固定的 $\mathbf{a}$，当且仅当 f_n 在 $\mathcal{H}_{\mathbf{d},\mathbf{a}}^k$中趋于无穷远时，这一结论成立；(2) $M(f_n) \sim M(f_n)$ 当 $n \to \infty$时；(3) 此外，若 f_n 的多重雅可比行列式不依赖于 n，则 $M(f_n) \to \infty$ 当且仅当 $M(f_n^{-1}) \to \infty$。

当多重雅可比行列式不是固定的时，第三个断言并不成立：事实上，若$f(x, y) = (ay + x^2 + c, x)$，则 f^{-1}与 $(x$共轭$, y) \mapsto (a^{-1}y + x^2 + ca^{-2}, x)$，因此若 $c \to \infty$且 $|a|^2 \gg |c|$，则 $M(f) \to \infty$，而 $M(f^{-1}) \to 0$。

证明。令$\mathbf{d} = (d_k, \ldots, d_1)$，并取 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^k$中的 $f = h_k \circ \ldots \circ h_1$。那么，采用方程（5.19）中的记号，我们有 $\alpha \cdot f = h_k \circ \cdots \circ h_1$，其中 $h_i(x, y) = (\tilde{a}_i y + \tilde{p}_i(x), x)$，这里 $\tilde{a}_i = \alpha \cdot a_i = \alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{i-1}a_i$ 和 $\tilde{p}_i(x) = \alpha \cdot p_i = \alpha_{i+1}^{-1}p_i(\alpha_i x)$ 如方程（5.20）所示。注意，当 α_i 不是 $(d_i - 1)^{\text{th}}$单位根时，$\tilde{p}_i$ 不与 p_i 共轭。

对于一个序列 (f_n)，$M(f_n)$无界，当且仅当分解$f_n = h_{n,k} \circ \cdots \circ h_{n,1}$中的至少一个因子$h_{n,i}$使得$M(p_{n,i})$无界。而对于任意一对模为1的复数 (α, β)，$M(p_{n,i})$ 无界，当且仅当$M(\beta^{-1}p_{n,i}(\alpha x))$ 无界。因此，$M(f_n)$无界，当且仅当$M(\alpha \cdot f_n)$ 无界。这就证明了第一个断言。

对于第二个断言，我们可以直接应用不等式（5.13）。

对于第三个断言，我们将证明，g_n的 Friedland-Milnor 标准形 f_n^{-1}的多重雅可比行列式由 f_n 的多重雅可比行列式决定（相差一些单位根），并且 $M(g_n) \to \infty$。为此，我们写作 $f^{-1} = h_1^{-1} \circ \cdots \circ h_k^{-1}$，其中 $h_i^{-1}(x,\ y) = (y,\ {a_i}^{-1}(x - p_i(y))$，这样对合 τ：$(x, y) \mapsto (y,\ x)$将 f^{-1}共轭为 $f^- = h_1^- \circ \cdots \circ h_k^-$，其中$h_i^-(x,\ y) = ({a_i}^{-1}y - {a_i}^{-1}p(x),\ x)$。多项式 $-p_i/a_i$不是首一的。为了得到标准形，我们沿用 [22] 的方法，将 f^- 共轭为

$$\ell_k^{-1} \circ f \circ \ell_k = \ell_k^{-1} \circ \tilde{h}_1 \circ \ell_1 \circ \cdots \circ h_{k-1} \circ \ell_{k-1} \circ \ell_{k-1}^{-1} \circ h_k \circ \ell_k \tag{5.26}$$

其中 $\ell_i(x,\ y) = (\gamma_i x,\ \delta_i y)$。必须选择 ℓ_i，使得 $\ell_i^{-1}\tilde{h}_{i+1}\ell_{i+1}$ 是首一且中心化的，这对应于以下方程组：

$$\begin{cases} \delta_{k-1}^{-1}\gamma_k = 1 & , \quad -a_k^{-1}\gamma_k^{d_k} = \gamma_{k-1} \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ \delta_k^{-1}\gamma_1 = 1 & , \quad -a_1^{-1}\gamma_1^{d_1} = \gamma_k \end{cases} \tag{5.27}$$

因此，δ_i 由 γ_i 确定，而 γ_i 由$\mathbf{a}$确定，至多相差某个$(d-1)^{\text{th}}$ 单位根的选择。由此我们得到一个新的自同构 $g = g_1 \circ \cdots \circ g_k$，其中 $g_i(x,\ y) = (b_i y + q_i(x),\ x)$ 满足

$$b_i = \gamma_{i-1}^{-1}\gamma_{i+1}a_i^{-1} \quad \text{and} \quad q_i(x) = -\gamma_{i-1}a_i^{-1}p_i(\gamma_i x). \tag{5.28}$$

我们得出结论： f^{-1} 共轭于一个元素$g \in \overline{\mathcal{H}_{(b_1,\ \ldots b_k),\ (d_1,\ldots,d_k)}}$，其$(b_1,\ \ldots b_k)$固定；并且 $M(f_n) \to \infty$蕴含 $M(g_n) \to \infty$ □

6. 李雅普诺夫指数的发散

本节的首要目标是命题 6.10，它给出H´enon映射之复合的李雅普诺夫指数的精确渐近界。我们首先在§ 6.1中处理H´enon映射，并在§ 6.2中将其用于一般情形。在§ 6.3中，我们推导定理E，随后推导定理D，并完成定理A、B和C的证明。我们还讨论连通性轨迹的紧性。

6.1. **H´enon映射的情形**。 在本节中，我们建立复H´enon映射情形下定理E的如下精确版本。

命题 6.1. 设 $f\colon\ (x,\ y) \mapsto (ay + p(x),\ x)$ 且 $|a| \leqslant R_f^{d-1}$。则

$$\chi^+(\mu_f) \leqslant \log d + dM(f) + d\log(15d). \tag{6.1}$$

此外，如果 $|a| \leqslant R_f^{d-1}/(400d)$和 $M(f)$足够大，那么

$$\chi^+(\mu_f) \geqslant \log d + M(f) - \frac{1}{d}\log\frac{4}{3}. \tag{6.2}$$

6.1.1. 讨论。 对于多项式 p，Manning-Przytycki 公式给出了估计 log $d + M(p) \leqslant \chi(\mu_p) \leqslant$log $d + (d-1)M(p)$，因此自然会想知道估计中的额外常数是否必不可少（证明中并未真正尝试优化这些常数）。

从证明（[5]）可以清楚看出，如果我们将对 a 的假设加强为 $|a| \leqslant h(R^{d-1})$，其中 $h(t) = o(t)$ 适用于 $t \to \infty$，那么下界将变为 $\chi^+(\mu_f) \geqslant$log $d + M + o(1)$。对于上界估计，能否达到界$\chi^+(f) \leqslant$log $d + dM + o(1)$ 仍是一个开放问题，即使 a有界也是如此。注 6.7 给出了估计式 (6.2) 成立所需的 $M(f)$大小的粗略界。

根据方程 (5.13)， p的系数数量级为 $O(R^d)$，因此，对 $|a|$ 的假设意味着雅可比行列式相对于 p的系数并不过大。事实上，在命题 6.1 中允许 $|a|$ 较大并没有太大意义：我们这样做只是因为这在之后的命题 6.10 中会有用。事实上，雅可比行列式较大的 H´énon 映射与雅可比行列式较小的 H´énon 映射的逆映射共轭；结合公式 $\chi^+(\mu_f) + \chi^-(\mu_f) =$log $|a|$，便可得到对 $\chi^+(\mu_f)$的估计。

我们来发展这一思路。首先，关系 $\chi^+(\mu_f)+\chi^-(\mu_f) =$log $|a|$给出 $\chi^+(\mu_f) \geqslant$log $|a|$。若 $|a| \geqslant cR^\beta$且 $\beta > 1$，则可得 $\chi^+(\mu_f) \geqslant \beta$log $M + O(1)$，这优于估计式 (6.2)。

[5]事实上，在引理 6.6 中，我们可以将 $\mathbb{B}_2$ 的水平半径取为 $o(R^d)$，这改进了(6.26)中 G_f 的下界。

接下来，写作 $\chi^+(\mu_f)=\log|a|+|\chi^-(\mu_f)|=\log|a|+\chi^+(\mu_{f^{-1}})$，便可将问题归结为寻找关于 f^{-1} 相对于 $\mu_{f^{-1}}=\mu_f$ 的李雅普诺夫指数 $\chi^+(\mu_{f^{-1}})$ 的良好估计。然而，$f^{-1}(x,y)=(y,\frac{1}{a}(x^-p(y)))$ 与标准形 $(\frac{1}{a}y+q(x),x)$ 共轭，其中 $q(x)=-\frac{1}{a\alpha}p(\alpha x)$ 对于 $\alpha^{d-1}=-a$ 成立。这个自同构 $(x,y)\mapsto(\frac{1}{a}y+q(x),x)$ 是一元映射 $x\mapsto q(x)$ 的一个小的可逆扰动。因此，它适用于 §3] 中的 [15，技术。本文中 q 被视为固定，但这一论证很容易推广到多项式 q 可变的情形，并得出 $\chi^+(f)=\log|a|+\chi^+(q)+o(1)$。根据 $|a|$ 的数量级，q 在 $\mathcal{P}_d$ 中可能发散，也可能不发散。例如，假设 $|a|\geqslant cR_p^\beta$ 且 β 足够大（$\beta>(d-1)^2/2$ 即可）。那么，由界 (5.8) 和 (5.13) 容易看出，当 $R\to\infty$ 时，$q(x)\to x^d$。于是，[15] 中的定理 1.3 蕴含 $\chi^+(\mu_{f^{-1}})\to\log d$，因此 $\chi^+(\mu_f)=\log|a|+\log d+o(1)$。

有了这些要素，我们可以期待完整描述 $\chi^\pm(\mu_f)$ 在 $\mathcal{H}_d^1$无穷远处的行为。

6.1.2. 关于 G_f 和 φ_f的估计。 由于下文只讨论正向 Green 函数和 B¨ottcher 函数 G_f^+ 与 φ_f^+，为简化记号，我们省去上标 $+$。众所周知，当 f 固定、$|x|$足够大且 $|y|\leqslant|x|$时，有$G_f(x,\ y)=\log|x|+O(1)$ 以及 $\varphi_f(x,\ y)=x+O(1)$。我们需要了解，当 f 在 H´énon 映射空间中变化时，x 必须多大才能得到这样的估计。在对雅可比行列式施加适当界限后，结果表明，合适的尺度由 R_f决定。

命题 6.2. 假设 $|a|\leqslant R_f^{d-1}$。则 φ_f 在由 $|y|\leqslant|x|$ 和 $|x|\geqslant 12dR_f$所定义的定义域中是良定义的，并且在该定义域中我们有

$$\left|\frac{\varphi_f(x,y)}{x}-1\right|<2\frac{R_f}{|x|}\quad\textit{and}\quad|G_f(x,y)-\log|x||<2\frac{R_f}{|x|}.$$

证明. 记 $(x_n,\ y_n)=f^n(x,\ y)$。我们回到 φ_f的构造：回忆 $\varphi_f(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}(\pi_1\circ f^n(x,\ y))^{1/d^n}=\lim_{n\to\infty}x_n^{1/d^n}$，当 n趋于 $+\infty$时，其中适当选取 $(d^n)^{\text{th}}$-根。为了在命题 6.12 中后续使用，我们将证明分为两步。

步骤 1.– x_k的估计。

考虑

$$\theta(x,y)=\frac{x_1}{x^d}-1=\frac{\pi_1\circ f(x,y)}{x^d}-1=\frac{p(x)+ay}{x^d}-1. \tag{6.3}$$

由于 $|x| \geqslant 12dR_f$ 和 $|a| \leqslant R_f^{d-1}$，引理 5.7 表明

$$|\theta(x,y)| \leqslant (12d+2)\frac{R_f^2}{|x|^2} + \frac{R_f^{d-1}}{|x|^{d-1}} \leqslant \left((12d+2)\frac{R_f}{|x|}+1\right)\frac{R_f}{|x|} \leqslant \left(2+\frac{1}{6d}\right)\frac{R_f}{|x|}. \tag{6.4}$$

特别地，$|\theta(x,\ y)| \leqslant 1/11$, 从而

$$|x_1| \geqslant (10/11)\,|x|^d \geqslant 10d\,|x| \geqslant 20\,|x|\,. \tag{6.5}$$

这意味着由 $|y| \leqslant |x|$ 和 $|x| \geqslant 12dR_f$ 定义的定义域是稳定的，$|x_k| \geqslant (10d)^k\,|x| \geqslant 20^k\,|x|$，并且对每个 $k \geqslant 0$都有$|\theta(x_k,\ y_k)| \leqslant 1/11$。

步骤 2.– φ_f的估计。从现在起，我们只使用界 $|\theta(x,\ y)| \leqslant 1/6$。

令 $\varphi_0(x,\ y) = x$ 并且对于 $n \geqslant 1$,

$$\varphi_n(x,y) = x\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\theta(f^k(x,y))\right)^{1/d^{k+1}} \tag{6.6}$$

其中，$(\cdot)^{1/d^n}$ 是 (d^n)次根的主值分支。这是有意义的，因为对所有 $k \geqslant 0$都有 $\left|\theta(f^k(x,\ y))\right| \leqslant 1/6$。因此，无穷乘积收敛，且 $\varphi_f(x,\ y) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,\ y)$ 是良定义的。为估计这个乘积，我们将使用以下初等不等式，其中 $\alpha = 1.1$

$$|\exp(v)-1| \leqslant \alpha\,|v| \text{ for } |v| \leqslant 1/6, \tag{6.7}$$

$$|\log(1+u)| \leqslant \alpha\,|u| \text{ for } |u| \leqslant 1/6. \tag{6.8}$$

（要证明这些上界，只需将 $\exp(v)$ 和 $\log(1-u)$ 展开为幂级数）。记

$$\left(1+\theta(f^k(x,y))\right)^{1/d^{k+1}} = 1+u_k.$$

于是，由不等式 (6.7) 和 (6.8) 可得

$$|u_k| = \left|\exp\left(\frac{1}{d^{k+1}}\log\left(1+\theta(f^k(x,y))\right)\right)-1\right| \leqslant \frac{\alpha^2}{d^{k+1}}\left|\theta\circ f^k(x,y)\right|; \tag{6.9}$$

由方程 (6.4) 和下界 $|x_k| \geqslant 20^k\,|x|$，我们可推出

$$|u_k| \leqslant \frac{\alpha^2}{d}\left(2+\frac{1}{6d}\right)\frac{1}{(20d)^k}\frac{R_f}{|x|}. \tag{6.10}$$

现在，$\sum_{k=0}^{n-1}\log(1+u_k)$的模有上界 $\alpha\sum_{k=0}^{n-1}|u_k|$，而由上一个上界可知，它小于 $1/6$。因此，不等式 (6.7) 以及 (6.6) 中 φ_n 的定义

在 (6.6) 中给出

$$\left|\frac{\varphi_n(x,y)}{x}-1\right| = \left|\exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}\log(1+u_k)\right)-1\right| \leqslant \alpha^2\sum_{k=0}^{n-1}|u_k| \tag{6.11}$$

$$\leqslant \frac{\alpha^4}{d}\left(2+\frac{1}{6d}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{(20d)^k}\right)\frac{R_f}{|x|} \leqslant \frac{8}{5}\frac{R_f}{|x|}. \tag{6.12}$$

令 n 趋于 ∞，即可得到所需的 φ_f 上界。通过写出 G_f，相应的估计显然成立

$$|G_f(x,y)-\log|x|| = \left|\log\left|\frac{\varphi_f(x,y)}{x}\right|\right| \leqslant \max(|\log(1+u)|,|\log(1-u)|), \tag{6.13}$$

其中 $u = |\varphi_f(x,\ y)/x-1|$ 由 (6.12) 可知有 $(8/5)(1/12d) \leqslant 1/15$ 界，因此 $\max(|\log(1\pm u)|) \leqslant \alpha u$，而不等式 $8\alpha/5<2$ 完成了证明。□

命题 6.3. 沿用上述记号，并仍假设 $|a| \leqslant R_f^{d-1}$ 。 *Let*

$$V^+ = \{(x,y)\ ;\ |x| > \max(|y|,12dR_f)+4R_f\}.$$

那么对任意 $(x_0、\ y_0)\in V^+$，子簇 $\{\varphi_f(x,y)=\varphi_f(x_0,y_0)\}$ 是 V^+ 中的垂直图像，其在圆盘 $\{|y|\leqslant|x_0|/2\}$ 上的斜率有界于 $\frac{5R_f}{|x_0|}$。此外，$\Phi:\ \ (x,y)\in V^+\mapsto(\varphi_f(x,y),y)$ 是一个双全纯映射，映至其像，该像包含 $\{(x,y)\ ;\ \ |x|>\max(|y|,12dR_f)+6R_f\}$。

证明。根据命题 6.2，我们有 $|\varphi_f(x,y)-x|<2R_f$ 当 $|x|\geqslant\max(|y|,12dR_f)$。令 (x_0,y_0) 为 V^+ 中的一个元素，并设 $x^\star=\varphi_f(x_0,y_0)$，它满足 $|x^\star|\geqslant|x_0|-2R_f>(12d+2)R_f$。设 $R^\star=|x^\star|-2R_f$。圆盘 $\mathbb{D}(0,R^\star)$ 包含 $\mathbb{D}(0,12dR_f)$。固定 y_1 于 $\mathbb{D}(0,R^\star)$，并考虑函数 $z\mapsto\varphi_f(z,y_1)-z$，其中 $z\in\mathbb{D}(x^\star,2R_f)$。对于这样的 z，我们有 $|z|\geqslant|y_1|$ 和 $|z|\geqslant12dR_f$，因此可以将命题 6.2 应用于(z,y_1)。函数 $h(z)=\varphi_f(z,y_1)-x^\star$ 和 $g(z)=z-x^\star$ 在$\mathbb{D}(x^\star,2R_f)$ 上全纯，且在 $\partial\mathbb{D}(x^\star,2R_f)$ 上满足 $|h-g|=|\varphi_f(z,y_1)-z|<2R_f=|g(z)|$。根据鲁歇定理，存在唯一的 $x_1\in\mathbb{D}(x^\star,2R_f)$，使得 $\varphi_f(x_1,y_1)=x^\star$。因此，$\{\varphi_f(x,y)=\varphi_f(x_0,y_0)\}$是一个垂直图像 $y\mapsto(\gamma(y),y)$，其中某个定义在 $\mathbb{D}(0,R^\star)$ 上的全纯函数 γ满足 $\gamma-x^\star$的取值属于 $\mathbb{D}(0,2R_f)$。施瓦茨-皮克引理保证，对于 $y\in\mathbb{D}(0,(2/3)R^\star)$,

$$|\gamma'(y)| \leqslant \frac{1}{1-(2/3)^2}\frac{2R_f}{R^\star} = \frac{18}{5}\frac{R_f}{R^\star}.$$

由 $R^\star\geqslant|x_0|-4R_f$，我们得到 $R^\star\geqslant(6/7)|x_0|,$，因此也有 $(2/3)R^\star\geqslant(1/2)|x_0|$。由于 $(18/5)(7/6)<5,$，我们得到 $|\gamma'(y)|<5\frac{R_f}{|x_0|}$，其中 y 属于 $\mathbb{D}(0,\ |x_0|/2)$。

同样的论证表明，$\varphi_f(\cdot,y_1)$ 对于 $|x|>\max(|y|,12dR_f)+4R_f$是单射的，这与命题 6.2 的估计合在一起蕴含了最后的断言。□

6.1.3. 交叉映射。 设$\mathbb{B}_1 = \mathbb{D}(0, 10R_f)^2$。由引理 5.5 容易得出，对于$|a| \leqslant R_f^{d-1}$，$f$是$\mathbb{B}_1$中的一个 H´enon 型映射。下面是一个更精细的结果：

引理 6.4。 采用上述记号，若 $|a| \leqslant R_f^{d-1}$，则 f是一个从 $\mathbb{B}_1$到 $\mathbb{B}_3$、次数为 d的交叉映射：$= \mathbb{D}(0, 6^d R_f^d) \times \mathbb{D}(0, 10R_f)$。

注 6.5。 正如证明所示，若将 R_f替换为任意更大的半径 R，该引理的结论仍然成立。这将在命题 6.10 中使用。

证明。 我们需要证明：(i) $f(\partial^v \mathbb{B}_1) \cap \mathbb{B}_3 = \varnothing$；(ii) $f(\mathbb{B}_1) \cap \partial\mathbb{B}_3 \subset \partial^v(\mathbb{B}_3)$；以及 (iii) $f(\mathbb{B}_1) \cap \mathbb{B}_3 \neq \varnothing$。回忆 $R_f = R_p$。

对于第一个条件，我们注意到，$(x,\ y) \in \partial^v \mathbb{B}_1$ 意味着 $|y| \leqslant 10R_f = |x|$。引理 5.5 的下界给出 $|\varphi_p(x)| \geqslant 7R_f$，因此 $|\varphi_p(p(x))| \geqslant (7R_f)^d$；随后，上界给出 $|p(x)| \geqslant (7R_f)^d - 2R_f$。因此

$$|p(x) + ay| \geqslant (7R_f)^d - 2R_f - 10R_f^d \geqslant (7^d - 12)R_f^d > 6^d R_f^d. \tag{6.14}$$

为证明性质 (ii)，假设 $(x, y) \in \mathbb{B}_1$满足 $f(x, y) \in \partial\mathbb{B}_3$。性质 (i) 表明 $|x| < 10R_f$，因此 $|\pi_2 \circ f(x, y)| = |x| < 10R_f$，也就是说，$f(x, y) \in \partial^v \mathbb{B}_3$。

对于性质 (iii)，考虑水平直线 $L = \{(x, 0)\,;\ \ |x| \leqslant 10R_f\} \subset \mathbb{B}_1$。它在 f下的像可参数化为 $x \mapsto (p(x), x)$，而上述在证明 (i) 时对 $p(x)$得到的估计表明，第一投影 $x \mapsto p(x)$实现了一个从 $\mathbb{D}(0, 10R_f)$到包含 $\mathbb{D}(0, 6^d R_f^d)$的定义域的、次数为 d的分歧覆盖。这就证明了 (iii)，并说明交叉映射 f的次数为 d。□

上界估计的证明 (6.1)。 [15, 定理 A.2] 证明，若 φ_f在 $K^- \cap \{G_f > t\}$的某个邻域上定义良好，则 $\chi^+(\mu_f) \leqslant \log\, d + dt$（此类 t的下确界按定义即为最快逃逸率 $G_{\max}(f)$）。我们将证明，对于 $|a| \leqslant R_f^{d-1}$，$t = M(f) + \log(15d)$也满足这一结论。

令 $\mathbb{B}_0 = \mathbb{D}(0,\ 12dR_f)^2$且 $V_0^+ = \{(x,\ y)\,;\ \ |y| \leqslant |x|\,,\ \ |x| \geqslant 12dR_f\}$。引理 6.4 和注 6.5 表明，$f$是 $\mathbb{B}_0$中的一个次数为 d 的 H´énon 型映射。特别地，$K^- \cap \mathbb{B}_0$水平包含于这个双圆盘中。此外，由于 $\pi_2 \circ f(x,\ y) = x$，我们可知 $f(\mathbb{B}_0) \subset \mathbb{B}_0 \cup V_0^+$，也就是说，每个逃离 $\mathbb{B}_0$的点都经由 V_0^+逃逸。因此，若 $(x,\ y) \notin \mathbb{B}_0 \cup V_0^+$，则不可能有 $f^{-n}(x,\ y) \in \mathbb{B}_0$，这意味着 $K^- \subset \mathbb{B}_0 \cup V_0^+$。

命题 6.2 给出了 $G_f \leqslant \log(12dR_f) + 1/(6d)$在 $\mathbb{B}_0$的垂直边界上的估计。在水平直线上应用最大值原理，我们在 $\mathbb{B}_0$中得到相同的估计。由此可知，若 $(x,\ y)$属于 $K^- \cap \{G_f > \log(12dR_f) + 1/(6d)\},$，则它属于 V_0^+，因此命题 6.2 适用，且 φ_f在 $(x,\ y)$附近有定义。于是，不等式 $\log(12) + 1/(6d) \leqslant \log(15)$ 完成了证明。□

6.1.4. 折叠。 我们现在研究 p的一个主导临界点如何在 $\mathbb{B}_3$中折叠 $f(\mathbb{B}_1)$。设c 为 p 的一个满足 $G_p(c) = M(p)$ 的临界点，并设 $v = p(c)$ 为相应的

临界值。注意， v 可以是若干个临界点的像。下一陈述采用§ 5.1中引入的术语。

引理 6.6。 假设 $|a| \leqslant R_f^{d-1}/(400d)$。那么，如果相对于 d 而言， $M(f)$ 足够大，就存在 $s \in [1、 2]$ ，使得集合

$$\mathbb{B}_2 := \varphi_f^{-1}(\mathbb{D}(v, sR_f^d/8)) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{D}(0, 10R_f))$$

在 $\mathbb{B}_3$ 的 $(\varphi_f、\ y)$ 坐标中是一个竖直子双圆盘，并且 f 实现了一个从 $\mathbb{B}_1$ 到 $\mathbb{B}_2$ 、次数为 d 的交叉映射；该映射在 $\partial^v\mathbb{B}_2$ 上非分歧，并且具有一个螺旋分量（相对于投影 φ_f）。

证明。 为简化记号，我们记作 $R = R_f = R_p$。首先假设 R 满足命题 6.2 的要求，并在必要时进一步增大它。

步骤 1.– 在 (x, y) 坐标中构造双圆盘 $\mathbb{B}_2'$。

按重数计， p 有 $(d-1)$ 个临界值，其中一个是 v。当 y 在 $\mathbb{D}(0, 10R)$ 中变化时， $x \mapsto p(x) + ay$ 的临界值描绘出圆盘 Δ_j，每个圆盘的半径均为 $10R\,|a| \leqslant R^d/(40d)$。将区间 $\left[R^d/8, R^d/4\right]$ 划分为 $2d$ 个形如 $\left[s_{k-1}R^d/8, s_kR^d/8\right]$, 的子区间，其中 $s_k = 1 + k/(2d), 1 \leqslant k \leqslant 2d,$ ，并考虑相应的 $2d$ 个同心圆环族 A_k: $= \mathbb{D}(v, s_kR^d/8)\backslash\mathbb{D}(v, s_{k-1}R^d/8)$。由于圆盘 Δ_j 至多与两个相邻圆环相交，且其中一个以 v 为中心，因此存在 $k^\star$ ，使得 $A_{k^\star}$ 与所有 Δ_j 都不相交。

我们定义 $\mathbb{B}_2' = \mathbb{D}(v,\ s^\star R^d/8) \times \mathbb{D}(0, 10R)$, 其中 $s^\star = \frac{1}{2}(s_{k^\star-1} + s_{k^\star})$。我们想证明，交叉映射 $f\colon\ \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2'$ 在 $\partial^v\mathbb{B}_2'$上是非分歧的。为此，我们引入环域 $A' \subset A_{k^\star}$ ，其定义为

$$A' = \mathbb{D}(v, s^\star R^d/8)\backslash\mathbb{D}(v, (s^\star - 1/10d)R^d/8),$$

从而 $A' \times \mathbb{D}(0,\ 10R)$ 是 $\mathbb{B}_2'$中 $\partial^v\mathbb{B}_2'$ 的一个邻域。

对于 $|y| \leqslant 10R$，我们估计 $f(\mathbb{D}(0,\ 10R) \times \{y\})$ 在 A'上的斜率。这个圆盘由 $t \mapsto (ay+p(t),\ t)$参数化，其中 $|t| \leqslant 10R$。因此，我们固定 t使得 $ay+p(t) \in A'$，我们的目标是从下方估计导数 $|p'(t)|$。

令 $\delta = \mathrm{dist}(t,\ \mathrm{Crit}(p))$。写成 $p'(t) = d\prod_{j=1}^{d-1}(t - c_j)$ 后，我们看到 $|p'(t)| \geqslant d\delta^{d-1}$。另一方面，$\mathrm{dist}(p(t),\ p(\mathrm{Crit}(p))) \leqslant \delta\|p'\|_{\mathbb{D}(0,\ 10R)}$，并且由于根据 (5.6)， p 的所有临界点都包含在 $\mathbb{D}(0,\ 2R)$ 中，我们看到 $\|p'\|_{\mathbb{D}(0,\ 10R)} \leqslant d(12R)^{d-1}$。由于$ay + p(t) \in A'$ 且 $A_{k^\star}$ 与圆盘 Δ_j不相交， $p(t)$ 与$p(\mathrm{Crit}(p))$ 之间的距离为 $\geqslant (1/10d)R^d/8$。因此我们得到

$$\frac{R^d}{80d} \leqslant \mathrm{dist}(p(t), p(\mathrm{Crit}(p))) \leqslant \delta d(12R)^{d-1}, \tag{6.15}$$

因此 $\delta \geqslant c_dR$ 具有

$$c_d = \frac{1}{80d^2(12)^{d-1}}, \tag{6.16}$$

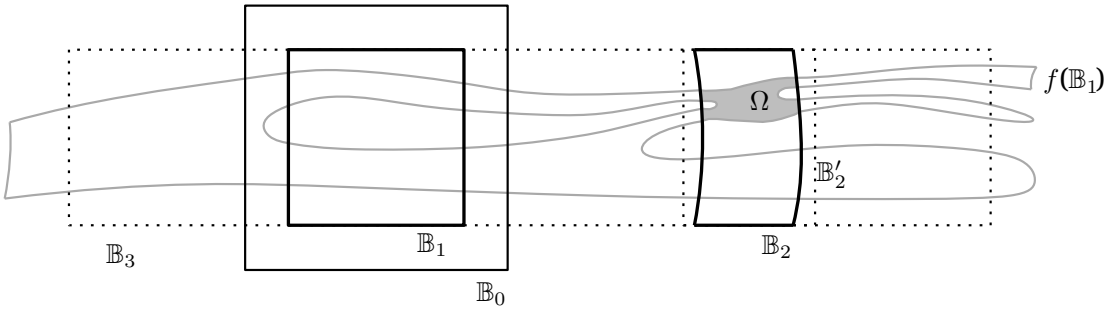


图 2. 引理 6.6 的证明。双圆盘 $\mathbb{B}_2'$ 与 $\mathbb{B}_3$ 的边界以虚线标出， $f(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_2$ 的螺旋分量以阴影标出。

由此我们得出结论：

$$|p'(t)|\geqslant dc_d^{d-1}R^{d-1}. \tag{6.17}$$

因此， $f(\mathbb{D}(0,10R)\times\{y\})$ 在 $f(t,y)$ 处的复切向量 $(p'(t),1)$ 远离垂直方向，从而满足定义 5.1 的条件 (i)。由注记 5.2，由于 $\mathbb{B}_2'$ 是**复数域**^{2}, 中的真正双圆盘，条件 (ii) 自动满足，由此可得 $f\colon\ \mathbb{B}_1\to\mathbb{B}_2'$ 在 $\partial\mathbb{B}_2'$上非分歧。

步骤 2.– 到 (φ_f,y) 坐标的扰动，以及 $\mathbb{B}_2$的构造。

我们令 $s=s^\star-1/(100d)$ 与 $\mathbb{B}_2=\Phi^{-1}(\mathbb{D}(v,sR^d/8)\times\mathbb{D}(0,10R)),$，其中 $\Phi(x,y)=(\varphi_f(x,y),y)$。此处，我们希望 $\mathbb{D}(v,sR^d/8)\times\mathbb{D}(0,10R)$ 包含于Φ的像中，即包含于命题 6.3 中的开集 $\{(x,y)\,;\ \ |x|>\max(|y|,12dR_f)+6R_f\}$。为得到这一包含关系，我们依赖引理 5.5 的估计：只需 $R^d\geqslant 40dR$。于是，由构造， $\mathbb{B}_2$ 是 (φ_f,y) 坐标下的一个双圆盘。此外，它是 $\mathbb{B}_3$的竖直子双圆盘，其含义是恒等映射定义了从 $\mathbb{B}_3$ 到 $\mathbb{B}_2$ 的次数为 1 的交叉映射（见图 2）。然后，通过复合， $(f,\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)$ 定义了一个次数为 d的交叉映射。

根据我们对 R 的假设，命题 6.2 和命题 6.3 的结论在 $\mathbb{B}_2$中成立。因此，如果进一步有 $4R<|s-s^\star|\,R^d/8,$，即 $R^{d-1}>3200d$，我们得到

$$\mathbb{D}(v,(s^\star-2/(100d))R^d/8)\times\mathbb{D}(0,10R)\subset\mathbb{B}_2\subset\mathbb{B}_2'. \tag{6.18}$$

同样，如果我们定义

$$A=\mathbb{D}(v,sR^d/8)\backslash\mathbb{D}(v,(s-98/(100d))R^d/8), \tag{6.19}$$

则 $\Phi^{-1}(A\times\mathbb{D}(0,10R))$ 是 $\partial^v\mathbb{B}_2$ 的一个邻域，且包含在 $A'\times\mathbb{D}(0,10R)$中。

现在我们可以证明，交叉映射 $f\colon\ \mathbb{B}_1\to\mathbb{B}_2$ 在 $\partial^v\mathbb{B}_2$上是非分歧的。 A' 中的 x坐标以下界 $R^d/2,$ 为界，因此根据命题 6.3， $\Phi^{-1}(A\times\mathbb{D}(0$中第二坐标上方的 φ_f纤维的斜率，$10R))$ 有界于$5R/(R^d/2)=10/R^{d-1}$。由下界 (6.17) 可知，如果 $10/R^{d-1}<$

$dc_d^{d-1}R^{d-1}$（因此 $R > 30d(12)^{(d-1)/2}$ 就足够了），则$\mathbb{B}_1$ 中的任意水平直线 L 在 $\partial^v\mathbb{B}_2$上都是非分歧的，也就是说，定义 5.1 的条件 (i) 成立。下面检验条件 (ii)。由于非分歧性质延拓到 $\mathbb{B}_2'$，$f(L)\cap\mathbb{B}_2'$的任意分支 Δ' 都具有 $\Delta\cap\mathbb{B}_2'$的形式，其中 $f(L)\cap\mathbb{B}_2$是 Δ的一个分支。正如步骤 1 中所观察到的，Δ 是一个全纯圆盘，因为 $\mathbb{B}_2'$ 由全局投影定义。此外，φ_f 在 $\mathbb{B}_2$的一个邻域中定义，因此 $\Delta'=\Delta\cap\varphi_f^{-1}(\mathbb{D}(v,\ sR^d/8))$, 根据最大值原理是一个圆盘。从而我们得到，$(f,\ \mathbb{B}_1,\ \mathbb{B}_2)$ 在$\partial^v\mathbb{B}_2$上是非分歧的。

最后，我们来证明 $f(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_2$存在一个螺旋分量Ω。事实上，考察包含 c 的分支 $U\subset\mathbf{C}$ of $p^{-1}(\mathbb{D}(v,s^\star R^d/8))$（它可能包含其他临界点（[6]））。根据非分歧性质，若 $|y|\leqslant 10R$，则 $x\mapsto\varphi_f\circ f(x,y)$在 ∂U的某个邻域内没有临界点。设Ω为包含 $f(U\times\{0\})\cap\mathbb{B}_2$的 $f(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_2$的分支。由于 $p\colon\ U\to\mathbb{D}(v,s^\star R^d/8)$ 是一个次数为 $q\geqslant 2$的分歧覆盖，上述分析表明，$\varphi_f\circ f(\cdot,0)$ 在 $U\cap(\varphi_f\circ f)^{-1}(\mathbb{D}(v,sR^d/8)$中的次数也为 q。这证明Ω的次数为 q，因此它是索列诺伊德的。□

注 6.7. 证明需要 $R_f\geqslant\max((3200d)^{1/(d-1)},30d(12)^{(d-1)/2}),$，这也保证了对任意给定的 $|a|\leqslant 1$，假设 $|a|\leqslant R_f^{d-1}/(400d)$ 都成立。例如，对于 $d\leqslant 4$，一个充分条件是 $M(f)\geqslant 9$。

引理 6.8. 在引理 *6.6* 的假设下，$f(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_1$ 是不连通的，f 具有不连通的朱利亚集，而 f 是不稳定不连通的。

证明. 等价地，我们来证明 $f^{-1}(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_1$ 是不连通的。为此，我们断言，对 $\{G_p<M(f)\}$ 的每个分支 U，$f^{-1}(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_1$ 都含有一个垂直分量，该分量包含于 $U\times\mathbb{D}(0,\ 10R_f)$ 中。事实上，p 将 ∂U 映到若尔当曲线 $\{G_p=dM(f)\}$ 上。因此，完全沿用引理 6.4 中的估计，我们看到 f 定义了一个从 $U\times\mathbb{D}(0,\ 10R_f)$ 到 $\mathbb{B}_1$（甚至是 $\mathbb{B}_3$）的交叉映射，断言得证。

要证明 J_f 是不连通的，只需证明 $f(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_1$ 的每个分支都与 J_f 相交（更确切地说，与 $J_f^\star$ 相交）。事实上，$f(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_1$ 的一个分支 Ω 是 $\mathbb{B}_1$的水平开子集。若 L^v 是任意一条与 Ω 相交的垂直直线，则 $f^{-1}(\Omega\cap L^v)$ 是 $\mathbb{B}_1$中的垂直子流形，因此它与每个水平正闭流相交，特别是与 T^- 相交。通过 f 推前，并利用不变关系 $f_*T^-=dT^-$，我们推出 T^- 与 $\Omega\cap L^v$ 相交。因此，T^- 在 Ω 中有一个正质量分支，该分支必与 T^+ 相交；最后，$T^+\wedge T^-$ 为 Ω 赋予正质量，正如所需。

最后，如果 $|a|\leqslant 1$，[6] 中的定理 0.2 蕴含 f 是不稳定不连通的；而如果 $|a|>1$，这一点则自动成立（见 [6, 推论 7.4]）。□

[6]我们的证明的一个特点是，对于 f，我们无法将 v 与位于距其 $o(R^d)$ 距离处的任何其他临界值区分开来。

6.1.5. 命题 *6.1* 的证明结尾。论证基于 [5], 中给出的 χ^+ 公式，并运用了 [15] 中的思路。 [5]中的临界测度 μ_c^-是这样构造的：在“非稳定层状结构”与由 **复数域**$^2\backslash K^+$中 φ_f 的纤维所诱导的叶状结构之间的每个相切点处放置一个点质量，并对横截测度积分（正式表述见 [5] 或 [15, §2.4] ）。正测度 $G_f\mu_c^-$是不变的，其公式 [5] 为

$$\chi^+(\mu_f) = \log d + \int_{\{A\leqslant G_f<dA\}} G_f\mu_c^-, \tag{6.20}$$

其中 $A>0$是任意的。

根据引理 6.8， f是不稳定非连通的，我们将利用这一性质来控制临界测度。根据 [14, 定理 2.4], , 在每个双圆盘 $\mathbb{B}$ 中，只要 T^- 是水平的， $T^-|_{\mathbb{B}}$ 就具有如下分解

$$T^-|_{\mathbb{B}} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^-, \tag{6.21}$$

其中 T_k^- 是次数为 k的水平圆盘的积分。此外，如果 $\mathbb{B}$ 是坐标为 $(\varphi_f,\ y)$的双圆盘，则临界点是垂直方向（即 φ_f的纤维）与 T_k^- 的叶片之间的相切点。根据黎曼-赫尔维茨公式，任何次数为 k 的水平圆盘都具有 $k-1$ 个垂直相切点。此外， T_k^- 的总横截测度是 $1/k$乘以 T_k^- 的垂直切片质量：事实上，直观地说，一个次数为 k 的水平圆盘对切片质量的贡献是一个局部叶片横截测度的 k 倍。由此我们得到了以下结果（详见 [15, 命题 2.15]）

引理 6.9。 假设 f是不稳定不连通的，并令 $\mathbb{B}$ 为 (φ_f, y)坐标中的一个双圆盘，其中 $T^-|_{\mathbb{B}}$是水平的。按上文所述写出分解 $T^-|_{\mathbb{B}} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^-$ 。那么

$$\mu_c^-(\mathbb{B}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k}\,\mathrm{sm}(T_k^-),$$

其中 $\mathrm{sm}(\cdot)$ 是切片质量。

现在我们可以证明下界估计式 (6.2) 了。我们沿用 § 6.1.3–6.1.4 中的记号，特别是双圆盘 $\mathbb{B}_1$、 $\mathbb{B}_2$。由于根据引理 6.8 f 是不稳定不连通的， $T^-|_{\mathbb{B}_2}$ 可分解为形式 (6.21) 的分解。令 Ω 为引理 6.6 中构造的 $f(\mathbb{B}_1)\cap\mathbb{B}_2$ 的索列诺伊德分支，并令 $q\geqslant 2$ 为其次数。根据命题 5.4， $T^-|_{\mathbb{B}_2}$ 分解中的每个水平圆盘的次数都是 q 的倍数，因此我们可以写成 $T^-|_{\Omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} T_{q\ell}^-$。我们断言，水平流 $T^-|_{\Omega}$ 的切片质量等于 q/d。确实，若 L^v 是 $\mathbb{B}_2$ 中任意一条垂直直线（也就是说，一条

属于 φ_f 的纤维），

$$\big\|(T^-|_\Omega)\wedge[L^v]\big\| = \big\|(T^-\wedge[L^v])|_\Omega\big\| = \big\|T^-\wedge[L^v\cap\Omega]\big\| \tag{6.22}$$

与 L^v 无关（其中 $\|\cdot\|$ 表示某个正测度的质量），并且恰好等于 $T^-|_\Omega$ 的切片质量。根据螺旋分量次数的定义，$f^{-1}(L^v\cap\Omega)$ 是次数为 q 的垂直子流形：事实上，对于 $\mathbb{B}_1$ 中的任意一条水平直线 L^h，

$$\#(L^h\cap f^{-1}(L^v\cap\Omega)) = \#(f(L^h)|_\Omega\cap L^v) = q.$$

因此，由不变性可得

$$\big\|T^-\wedge[L^v\cap\Omega]\big\| = \big\|f^*(T^-\wedge[L^v\cap\Omega])\big\| = \left\|\left(\frac{1}{d}T^-\wedge[f^{-1}(L^v\cap\Omega)]\right)\right\| = \frac{q}{d}. \tag{6.23}$$

将引理 6.9 应用于 $T^-|_\Omega$，我们估计 Ω 的临界质量：

$$\begin{aligned}\mu_c^-(\Omega) &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{q\ell-1}{q\ell}\,\mathrm{sm}(T^-_{q\ell}) \geqslant \frac{q-1}{q}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathrm{sm}(T^-_{q\ell})\\ &= \frac{q-1}{q}\,\mathrm{sm}(T^-|_\Omega) = \frac{q-1}{d} \geqslant \frac{1}{d}.\end{aligned} \tag{6.24}$$

我们断言，若 R_f 取足够大，使得引理 6.6 适用，则

$$\frac{3}{4}R_f^d \leqslant |\varphi_f| \leqslant \frac{5}{4}R_f^d \tag{6.25}$$

在 $\mathbb{B}_2$ 上。事实上，在这个区域中，我们有 $|\varphi_f(x,\ y)-x|\leqslant 2R_f$ 并且对于 $(x,\ y)\in\mathbb{B}_2$，有 $\varphi_f(x,\ y)\in\mathbb{D}(v,\ sR^d/8)$, 其中 $s\leqslant 2-1/(100d)$。我们将条件 $R^{d-1}\geqslant 3200d$ 足以保证所需估计这一点留给读者验证。

令 $A = dM(f)+\log 34$。于是，只要 $(d^2-d)M(f) > d\log(4/3)+\log(5/4)$，基本域 $\{A\leqslant G_f < dA\}$ 就包含$\mathbb{B}_2$。因此，由 Bedford-Smillie 公式 (6.20) 和界 (6.23)，我们得到

$$\chi^+(\mu_f) \geqslant \log d + \int_\Omega G_f\mu_c^- \geqslant \log d + \frac{A}{d} = \log d + M(f) + \frac{1}{d}\log\frac{3}{4}, \tag{6.26}$$

由此完成证明。 □

6.2. Hénon 映射的复合´。回顾一下，对于复合，我们定义了 maxmax。

命题 6.10. 设 $f = h_k\circ\cdots\circ h_1$，其中 $h_i(x,y) = (a_iy+p_i(x),x)$ 是首一且中心化的 *H´énon* 映射的复合，并且对每个 i 都有 $|a_i|\leqslant R_f^{d_i-1}$。那么

$$\chi^+(\mu_f) \leqslant \log d + dM(f) + d\log(15d). \tag{6.27}$$

此外，若对每个 i 都有 $|a_i| \leqslant R_f^{d_i-1}/(400d_i)$，且 $M(f)$ 足够大，则有如下估计

$$\chi^+(\mu_f) \geqslant \log d + M(f) - \frac{1}{\min(d_i)} \log \frac{4}{3}. \tag{6.28}$$

注 6.11. 对于 H´énon 映射，我们可以使用 f^{-1} 得到一个估计，而无需对 $|a|$ 施加任何界（见 § 6.1.1）；但对于 H´énon 映射的复合，无法使用这一技巧，因此考虑 a_i 可能很大的情况是有意义的。此外，如果去掉对 a_i 的假设，我们的方法就会失效：关于一个具体例子的讨论，见下文例 6.15。与 § 6.1.1 中的讨论相比，我们因此发现，在 H´énon 映射复合所构成的空间中，有一个很大的区域，在此区域内可以理解 μ_f 的李雅普诺夫指数；但对于 $k \geqslant 2$，参数空间仍有一部分笼罩在阴影之中。

证明的主要部分已经包含在命题 6.1 的证明中，我们将把它应用于复合中使 $M(p_i)$ 最大的因子 h_i。首先，我们需要为 G_f 和 φ_f 得到良好的估计。（同样，我们不打算优化常数。）

命题 6.12. 设 $f = h_k \circ \cdots \circ h_1$ 如上所述，且对每个 i都有 $|a_i| \leqslant R_f^{d_i-1}$。那么，$\varphi_f$ 在由 $|y| \leqslant |x|$ 和 $|x| \geqslant 12dR_f$定义的定义域中有良好定义，并且在此定义域中有

$$\left|\frac{\varphi_f(x,y)}{x} - 1\right| \leqslant 2\frac{R_f}{|x|} \text{ and } |G_f(x,y) - \log|x|| \leqslant 2\frac{R_f}{|x|}.$$

证明. 和之前一样，我们用 V_0^+表示定义域 $\{|x| > 12dR_f,\ |y| < |x|\}$，并定义$(x_1, y_1) = f(x,y)$和 $\theta(x,y) = x_1/x^d - 1$。由命题 6.2 可知，不妨设$k \geqslant 2$，因此 $d \geqslant 4$。

假设我们可以证明

$$|\theta(x,y)| \leqslant 4\frac{R_f}{|x|} \quad \forall (x,y) \in V_0^+, \tag{6.29}$$

因此，特别地，$|\theta| \leqslant 1/6$ 属于 V_0^+。于是，我们可以沿用命题 6.2 的证明。首先，对界（6.5）作直接调整（使用 $d \geqslant 4$）可知，V_0^+在 f下是稳定的。接着，证明的第二步表明，在 V_0^+中，以下两个估计$|\varphi_f(x,y) - x| \leqslant 2R_f$和 $|G_f(x,y) - \log|x|| \leqslant 2^{\frac{R_f}{|x|}}$成立。

—

为得到界（6.29），我们对 $1 \leqslant i \leqslant k$ 令 $(x_0', y_0') = (x,y)$ 以及 $(x_i', y_i') = h_i \circ \cdots \circ h_1(x,y)$，从而有 $(x_k', y_k') = (x_1, y_1)$。由于假设 $|x| \geqslant 12dR_f$，对于每个 i，都有$|x| \geqslant 12d_iR_{h_i}$。定义

$$\theta_{i+1}' = \frac{x_{i+1}'}{(x_i')^{d_{i+1}}} - 1 = \frac{\pi_1 \circ h_{i+1}(x_i', y_i')}{(x_i')^{d_{i+1}}} - 1 \tag{6.30}$$

并记

$$x_1 = x'_k = \frac{x'_k}{(x'_{k-1})^{d_k}} \left(\frac{x'_{k-1}}{(x'_{k-2})^{d_{k-1}}} \right)^{d_k} \cdots \left(\frac{x'_1}{(x'_0)^{d_1}} \right)^{d_k \cdots d_2} x^d$$

$$= x^d (1+\theta'_k) \prod_{i=1}^{k-1} (1+\theta'_i)^{d_k \cdots d_{i+1}} . \tag{6.31}$$

由于 $|x| \geqslant 12dR_f \geqslant 12d_1 R_{h_1}$，按照（6.4）中的推理，我们得到 $|\theta'_1| \leqslant 1/11$，进而得到 $|x'_1| \geqslant 10d\,|x|$。这也给出 $|y'_1| = |x| \leqslant |x'_1|$。因此，我们可以重复这一推理，并推断出 $|x'_{i+1}| \geqslant 10d\,|x'_i|$ 和 $|y'_{i+1}| < |x'_{i+1}|$，从而对于 $1 \leqslant i \leqslant k$有 $|x'_i| \geqslant (10d)^i\,|x|$。再次利用（6.4）以及界 $R_f \geqslant R_{h_i}$，对于 $i \geqslant 1$ 我们得到

$$|\theta'_{i+1}| \leqslant \left(2 + \frac{1}{6d}\right) \frac{R_f}{|x'_i|} \leqslant \frac{25}{12(10d)^i} \frac{R_f}{|x|} \leqslant \frac{2}{(10d)^{i+1}}, \tag{6.32}$$

因为 $|x| \geqslant 12dR_f$。结合 (6.31) 和 (6.32)，我们得到

$$|\theta(x,y)| = \left| \frac{x_1}{x^d} - 1 \right| \leqslant |\theta'_k| \prod_{i=1}^{k-1} (1+|\theta'_i|)^d \leqslant \frac{25}{12(10d)^{k-1}} \frac{R_f}{|x|} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + \frac{2}{(10d)^i}\right)^d .$$

利用界 (6.8) 和 $d \geqslant 4$，容易验证右侧最后一个乘积不超过 2。由于 $k \geqslant 2$，我们得到界 $|\theta(x,\ y)| \leqslant \frac{R_f}{|x|}$。这就证明了 (6.29)，从而也证明了该命题。□

命题 *6.10* 的证明。由于对每个 i，$R_{h_i} \leqslant R_f$，由引理 6.4 和注 6.5 可知，h_i 是 $\mathbb{B}_1 = \mathbb{D}(0,\ 10R_f)^2$ 中的 H´énon 类映射。此外，用于证明引理 6.4 和命题 6.12 的估计表明，在 h_i 下离开 $\mathbb{B}_1$ 的点，在对 h_j 进行复合后将永远不会重新进入，因此任何复合 $h_{i_n} \circ \cdots \circ h_{i_1}$ 在 $\mathbb{B}_1$ 中都是适当的，意义见 § 5.1.3。

命题 6.3 并不依赖于 f 是一个 H´ 映射这一事实（而不是 H´ 映射的复合），因此在我们的情形下原样成立，数值常数也相同。于是，$\chi^+(\mu_f)$ 上界的证明与命题 6.1 中相应的证明完全相同。

对 h_i 进行循环置换后（这不会影响李雅普诺夫指数），不妨设 $R_f = R_{h_k}$。令 c 为 p_k 的一个临界点，使得 $G_{p_k}(c) = M(f)$ 且 $v = p_k(c)$。

引理 6.13. 假设 $|a_k| \leqslant R_f^{d_k - 1}/(400d_k)$。那么，如果 $M(f)$ 足够大，就存在 $s \in [1,2]$，使得 $\mathbb{B}_2 := \varphi_f^{-1}(\mathbb{D}(v,\, sR_f^{d_k}/8)) \cap \pi_2^{-1}\mathbb{D}(0, 10R_f)$ 是 $\mathbb{B}_3 := \mathbb{D}(0, 6^{d_k}R_f^{d_k}) \times \mathbb{D}(0, 10R_f)$ 在 (φ_f, y) 坐标下的一个垂直子双圆盘，并且 h_k 实现了从 $\mathbb{B}_1$ 到 $\mathbb{B}_2$ 的次数为 d 的交叉映射，该映射在 $\partial^v\mathbb{B}_2$上非分歧，并且具有一个索列诺伊德分量（相对于投影 φ_f）。

证明。 这是将引理 6.6 应用于 h_k，唯一的区别是，对于 $\mathbb{B}_2$ 中的垂直投影，我们使用 φ_f 而不是 φ_{h_k}。因此，证明中我们可以不加修改地将步骤 1 应用于 h_k；而在步骤 2 中，我们只需纳入这样一个事实：由于 $|x| \geqslant R_f^{d_k}/2$ 在 $\mathbb{B}_2$的某个邻域内，垂直纤维 $\{\varphi_f = \mathsf{C}^{\mathrm{st}}\}$ 的斜率被 $10R_f^{1-d_k}$所界定，接着完全按相同方式进行。□

引理 6.14. 在引理 *6.13*的假设下， $f(\mathbb{B}_1) \cap \mathbb{B}_1$ 是不连通的，朱利亚集 J_f 是不连通的，且 f 是不稳定不连通的。

证明. 事实上，我们观察到引理 6.8可应用于 h_k，因此 $h_k(\mathbb{B}_1) \cap \mathbb{B}_1$ 是不连通的。设 $\mathcal{L}_i = d_i^{-1} 1_{\mathbb{B}_1}(h_i)_*$ 为 $\mathbb{B}_1$中与H´énon型映射 h_i 相关联的流的图变换算子。 h_i 被恰当复合这一事实保证了 $\mathcal{L}_k \cdots \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} = d^{-1} 1_{\mathbb{B}_1} f_*$，特别是 $\mathcal{L}_k(\mathcal{L}_{k-1} \cdots \mathcal{L}_1(T^-|_{\mathbb{B}_1})) = T^-|_{\mathbb{B}_1}$（其中 $T^- = T_f^-$），并且

$$d_k^{-1}(h_k)_* \left(\mathcal{L}_{k-1} \cdots \mathcal{L}_1(T^-|_{\mathbb{B}_1})\right)|_{\mathbb{B}_3} = T^-|_{\mathbb{B}_3}. \tag{6.33}$$

按照引理 6.8 中的论证，我们推断 $T^- = \mathcal{L}_k(\mathcal{L}_{k-1} \cdots \mathcal{L}_1(T^-|_{\mathbb{B}_1}))$ 在 $h_k(\mathbb{B}_1) \cap \mathbb{B}_1$ 的每个分支中都具有正质量的分支，因此必与T^+相交。于是， $J_f^\star$与 $h_k(\mathbb{B}_1) \cap \mathbb{B}_1$ 的每个分支都相交，结论得证。□

由于 f 是不稳定不连通的，$T^-|_{\mathbb{B}_3}$ 可分解为 $\mathbb{B}_3$中的有限次数水平圆盘的积分，因此限制后在 $\mathbb{B}_2$ 中同样成立。根据引理 6.13， $h_k(\mathbb{B}_1) \cap \mathbb{B}_2$ 具有某个次数为 $q \geqslant 2$的索列诺伊德分量 Ω，因此 Ω 中任意水平子流形的次数都是 q的倍数。我们声称， $T^-|_\Omega$ 的切片质量等于 q/d_k。为此，我们取 $\mathbb{B}_2$中 φ_f 的一个垂直纤维 L，完全按照公式 (6.22) 附近的论证可知， $T^- \wedge [L \cap \Omega]$ 的质量与 L无关，并且 $h_k^{-1}(L \cap \Omega)$ 是 $\mathbb{B}_1$ 中次数为 q的垂直流形。利用恒等式 (6.33)，我们得到

$$\begin{aligned} \left\|T^- \wedge [L \cap \Omega]\right\| &= \left\|h_k^*(T^- \wedge [L \cap \Omega])\right\| \\ &= \left\| \left(\frac{1}{d_k} \mathcal{L}_{k-1} \cdots \mathcal{L}_1(T^-|_{\mathbb{B}_1}) \wedge [h_k^{-1}(L \cap \Omega)] \right) \right\| = \frac{q}{d_k}, \end{aligned} \tag{6.34}$$

我们的断言由此得证。于是，与 (6.23) 中一样，Ω 的临界质量为 $\geqslant 1/d_k$。

对于最后一个估计，我们按命题 6.1 中的方法论证：由于当 $M(f)$ 较大时

$$\Omega \subset \left\{ \frac{3}{4} R_f^{d_k} \leqslant |\varphi_f| \leqslant \frac{5}{4} R_f^{d_k} \right\} \subset \{A \leqslant G_f < dA\} \tag{6.35}$$

且 $A = d_k M(f) + \log 34$，利用 $\mu_c(\Omega) \geqslant 1/d_k$可得

$$\chi^+(\mu_f) \geqslant \log d + \int_\Omega G_f \mu_c^- \geqslant \log d + \frac{A}{d_k} \geqslant \log d + M(f) + \frac{1}{d_k} \log \frac{3}{4}, \tag{6.36}$$

由此完成证明。 □

例 6.15。当 p 固定且 $a \in \mathbb{C}^*$ 趋于无穷远时，族 $f_a(x, y) = (y/a + p(x), x) \circ (ay + p(x), x)$，是命题 6.10 的假设不成立的一种典型情形。此时，雅可比行列式恒等于 1，但多重雅可比行列式发散。我们取 $p(x) = x^2$，并研究 $|a|$ 较大的情形。我们断言，若 $R \geqslant 1$ 使得 f_a 是双圆盘 $\mathbb{B} = \mathbb{D}(0, R)^2$ 中的一个次数为 d^2 的 H´énon 型映射，那么 $f(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}$ 是连通的。事实上，考察水平直线 $L = \{y = 0\}$ 的像。若以 $t \mapsto (t, 0)$, $t \in \mathbb{D}(0, R)$ 为参数来参数化 L，那么 $f_a(L)$ 可由 $t \mapsto f_a(t, 0) = (t/a + t^4, t^2)$ 参数化。$\pi_1 \circ f_a(t, 0)$ 的临界点是立方根 $(4a)^{-1/3}$，因此临界值的形式为 $ca^{-4/3}$，且都接近 0，由此可知 $f_a(L) \cap \mathbb{B}$ 是连通的。按照引理 6.8 中的论证，我们看到 $f_a(L) \cap \mathbb{B}$ 与 $f_a(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}$ 的任意分支相交，因此 $f_a(\mathbb{B}) \cap \mathbb{B}$ 是连通的。特别地，当 a 较大时，我们不知道如何估计 μ_{f_a} 的李雅普诺夫指数，也不知道它的朱利亚集是否连通。

6.3. **推论**。

定理 *E* 的证明。设 $B = B(\mathbf{d}, \mathbf{a})$ 使得命题 6.10 的估计对 $M(f) \geqslant B$ 成立。引理 5.9 保证 $\{f \in \mathcal{H}^k_{\mathbf{d},\mathbf{a}};\ 1 \leqslant M(f) \leqslant B\}$ 是紧的，因此 $\chi^+(\mu_f)$ 在该子集上有上界，并且由 [4]，对每个 f 都有 $\chi^+(\mu_f) \geqslant \log d$。由此即得结论。□

现在我们说明定理 E 如何蕴含定理 D。回顾一下，定理 D 中的“稳定”是指 III 型稳定。下面的引理应与引理 4.4 相比较。

引理 6.16. 设 $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是双曲型自同构的一个代数族，且 Λ 不可约。若 $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 为 *III* 型稳定，则雅可比行列式(f_λ)以及 μ_{f_λ} 的李雅普诺夫指数在 Λ上为常数。

证明。根据假设，对于某个 $f_0 \in \Lambda$，存在一个由 f_0 的鞍点组成的集合 P，其上密度为正，并且可以沿 Λ 全纯延拓为一个鞍点集合 P_λ。如引理 4.4 中一样，对于这些鞍点中的每一个，稳定乘子和不稳定乘子都是常数，因此雅可比行列式也是常数。对于任意 $\lambda \in \Lambda$，P_λ 都与定理 2.1 的 $\mathrm{SPer}^+(f_\lambda)$ 集合相交，因此 $\chi^+(\mu_{f_\lambda}) = \chi^+(\mu_{f_0})$，如所述。由于雅可比行列式是常数，我们同样得出 $\chi^-(\mu_{f_\lambda})$是常数。□

定理 *D* 的证明。令 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}^1_d$ 或 $\mathcal{H}^k_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}$ 对于 $k \geqslant 2$，并令 $\Lambda \subset \mathcal{H}$ 为一个稳定代数族。根据引理 6.16，$\lambda \mapsto \chi^+(\mu_{f_\lambda})$在 Λ的每个不可约分支上都是常数；当 $k = 1$时，$\lambda \mapsto$ 雅可比行列式$(f_\lambda) = -a_\lambda$ 也为常数。因此在两种情况下，定理 E 和引理 5.9 都意味着 Λ有界，因而是有限的。□

注 6.17。得益于命题 6.10，我们可以在定理 D 中用任意由 H´énon 映射复合而成的代数族 f_λ 替换 $\mathcal{H}^k_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}$，只要多重雅可比行列式满足$|a_{i,\ \lambda}| = o(R_{f_\lambda}^{d_i - 1})$ 对每个 i 都成立。

以下结果是定理 3.5 关于不稳定乘子的对应结论，并蕴含了定理 A 和 B 中关于不稳定乘子谱的陈述。

定理 6.18。 设 $\mathcal{H}$ 满足某个 $d \geqslant 2$ 或$\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^{k}$的条件，$\mathbf{a}$ 满足某个 $\mathbf{a} \in (\mathbf{复数域}^{*})^{k}$ 以及某个$\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}^{k}$的条件。对每个 $f_0 \in \mathcal{H}$，同谱子集 $\Sigma^{u} = \{f \in \mathcal{H} ; \mathrm{SMult}^{u}(f) = \mathrm{SMult}^{u}(f_0)\}$都是有限集。

证明。设 $E_n = \mathrm{SMult}_{n}^{u}(f_0)$。由命题 3.3 和定理 D 可知， Σ^{u} 是 $\mathcal{H}$的离散子集。要证明 Σ^{u} 是有限集，只需证明它有界。为此，注意到若 |雅可比行列式$(f_0)| \geqslant 1$，则对任意精确周期为 n的鞍点 p，都有 $|\lambda^{u}(p)| \geqslant$ |雅可比行列式$(f_0)|^{n} / |\lambda^{s}(p)| >$ |雅可比行列式$(f_0)|^{n}$。此外还有 $|\lambda^{u}(p)| \leqslant (\|Df_0\|_{J_0^{\star}}^{n}$，其中 $J_0^{\star} := J^{\star}(f_0)$。因此， E_n包含于环域 $\{\min(1,$|雅可比行列式$(f_0)|)^{n} \leqslant |z| \leqslant (\|Df_0\|_{J_0^{\star}})^{n}\}$中。对任意 $f \in \Sigma^{u}$，同样的推理依然适用，因此任意 $z \in E_n$都满足 $|z| \geqslant \min(1,$|雅可比行列式$(f)|)^{n}$，由此可推出 |雅可比行列式$(f)| \leqslant \|Df_0\|_{J_0^{\star}}$。（注意，在 $\mathcal{H}_{\mathbf{d},\mathbf{a}}^{k}$ 中这是显然的，因为此处雅可比行列式固定。）此外，对于 $f \in \Sigma^{u}$，鞍点的李雅普诺夫指数不超过 $\log \|Df_0\|_{J_0^{\star}}$，所以$\chi^{u}(f) \leqslant \log \|Df_0\|_{J_0^{\star}}$。由命题 6.1（对于 $\mathcal{H}_{d}^{1}$）以及命题 6.10 或定理 E（对于 $\mathcal{H}_{\mathbf{d},\mathbf{a}}^{k}$），可得 $M(f)$的一致上界。结合雅可比行列式（分别为多重雅可比行列式）的界，这意味着 Σ^{u} 有界，证毕。□

我们还可以完成定理 C 的证明。

命题 6.19。 定理 *3.6* 中定义的集合 F 是有限的。

证明。 这里我们按照方程 (3.11) 定义 E_n。接着，如定理 6.18 的证明所示，若 f 在 $J^{\star}$ 的某个邻域上与 f_0 共轭于 C^{1}，则我们可以得到|雅可比行列式$(f)|$和 $M(f)$的统一上界，因此 F是 $\mathcal{H}$的有界子集，证毕。□

将连通性轨迹 $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{H}_d$ （分别地，$\mathcal{C}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^{k} \subset \mathcal{H}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^{k}$）定义为朱利亚集连通的自同构所构成的集合。根据 [14, 推论 2.2]， $\mathcal{C}_d$ 和 $\mathcal{C}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^{k}$ 是闭集。

推论 6.20。 对任意 $k \geqslant 1$、$\mathbf{d} \in (\mathbf{N}_{\geqslant 2})^{k}$ 以及$\mathbf{a} \in (\mathbf{复数域}^{*})^{k}$，连通性轨迹 $\mathcal{C}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^{k} \subset \mathcal{H}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^{k}$ 是紧的。

类似族 $f_a(x, y) = (ay + x^{2}, x)$ 的例子表明，如果多重雅可比行列式不固定，这个结果就不成立：事实上，由于 $f_{a^{-1}}$与 f_a^{-1}共轭，当 $|a|$ 足够大时， $J(f_a)$是连通的（见 § 2.3）。

证明。连通性轨迹 $\mathcal{C}_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}^{k}$ 是闭集，因此我们只需证明它是有界的。若 |雅可比行列式$(f)| = \prod_{i=1}^{k} |a_i| \leqslant 1$，则由 [6] 中的定理 0.2 和 7.3 可知， J_f连通当且仅当 $\chi^{+}(\mu_f) = \log d$，因此由定理 E 可立即得出其有界性。若 $\prod_{i=1}^{k} |a_i| > 1$，则考虑 f^{-1}，将问题归约到耗散情形。若

$f \in \mathcal{C}^k_{\mathbf{d},\ \mathbf{a}}$，引理 5.9 的证明表明，$f^{-1}$ 共轭于 $g \in \mathcal{C}^k_{\mathbf{d}^\vee,\ \mathbf{b}}$，其中$\mathbf{d}^\vee = (d_1,\ \cdots,\ d_k)$，且 $\mathbf{b}$ 为固定值。耗散情形下的论证表明$M(g)$有界，因此 $M(f)$ 也有界（再次应用引理 5.9），证毕。□

附录 A. 少乘子的映射

定义 A.1. 若存在一个复数 κ，使得对于每个 $p \in \mathrm{SPer}_n(f)$ 以及每个 $n \geqslant 1$，$\lambda^u(p) = \kappa^n$，则称洛克斯德罗米克自同构 f 是例外的 。

这一概念自然地出现在许多刚性问题中（参见例如 [1]或 [11, §2]，了解本文所处的背景）。我们在例 3.8 中看到，正特征下存在例外自同构的类似情形，但我们尚不了解特征零下的任何例子。关于例外自同构的部分不存在性结果见 [1, 命题 6.1]和 [11,命题 8.9]。

定理 A.2. 若 (f_λ) 是复数域 $\mathbf{C}^2$ 上斜驶多项式自同构的一个代数族，其中任意稳定不可约代数族都是平凡的，则例外映射集合在 Λ 中是离散的。

证明。令 $\mathcal{E} \subset \Lambda$ 为例外映射的集合。置

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \{\lambda \in \Lambda\,;\, \forall m \leqslant n,\, \forall p \in \mathrm{SPer}_m,\, \forall q \in \mathrm{SPer}_n,\, (\lambda^u(p))^n = (\lambda^u(q))^m\}$$

和 $\mathcal{E} = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathcal{E}_n$，使得 $\mathcal{E}$ 包含 $\mathcal{E}$。反设 $\mathcal{E}$ 不是离散的，并取一个聚点 f_0。对于 $n \geqslant 1$，令 V_n 为 f_0 在 $\widetilde{\ }$ 中的一个邻域，在其中所有周期不超过 n 的鞍点都能延续。于是 $\mathcal{E}_n \cap V_n$ 是 V_n 中一个正维解析子集；更准确地说，它是 V_n 与某个 Λ 的代数子簇的交集的若干连通分支之并。必要时缩小 V_n，我们可以假设 $\widetilde{\ }$ 满足：(i) $\mathcal{E}_n \cap V_n$ 有唯一一个包含 f_0 的连通分支；(ii) $V_{n+1} \subset V_n$。$\widetilde{\ }$取 n_1，使得对于 $n \geqslant n_1$，$\mathcal{E}_n$ 在 f_0 处的芽为常值。

$\widetilde{\ }$我们断言 $\mathcal{E}_{n_1} \cap V_{n_1}$ 是一个类型 (I) 的稳定族。事实上，若 $n \geqslant n_1$ 和 $f \in \widetilde{\ }\mathcal{E}_n \cap V_n$，则对于每个 $p = p(f) \in \mathrm{SPer}_n(f)$ 和每个 $q = q(f) \in \mathrm{SPer}_{n_1}(f)$，都有形如 $\lambda^u(p)^{n_1} = \lambda^u(q)^n$ 的关系。由于 f 的雅可比行列式为常数，因此 $\lambda^s(p)^{n_1} = \lambda^s(q)^n$ 也成立。现在，q 可沿着 $\mathcal{E}_{n_1} \cap V_{n_1}$ 中的任意路径全纯延续为一个鞍点 $\widetilde{\ }$，而关系 $\lambda^u(p)^{n_1} = \lambda^u(q)^n$ 和 $\lambda^s(p)^{n_1} = \lambda^s(q)^n$ 的持续性表明，沿着该路径可以跟踪 p，使其始终为鞍点。$\widetilde{\ }$因此，$\mathcal{E}_{n_1} \cap V_{n_1}$ 是一个稳定族，断言得证。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$根据定义 $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{n_1}$，并且我们已经证明，定义 $\mathcal{E}$ 的所有关系沿着$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$$\mathcal{E}_{n_1} \cap V_{n_1}$保持不变，因此 $\mathcal{E} \cap V_{n_1} = \mathcal{E}_{n_1} \cap V_{n_1}$。这一推理表明，$\mathcal{E}$ 是 Λ中的一个解析子集，它局部上是某个代数簇的局部分支之并。因此，根据$\widetilde{\ }$解析延拓，我们得出结论：$\mathcal{E}$ 的任何全局解析分支都是一个稳定的

代数族，而正维分支的存在与我们的~假设矛盾。因此， $\mathcal{E}$ 是一个离散集。□

注 A.3。

（1）证明表明，可以通过要求 $\lambda^u(p) \in \kappa^n F_n$ 来扩展例外映射的定义，其中 F_n 是一个有限的单位根集合。（在 [11, §2] 中，我们关注的是 $\lambda^u(p) \in \pm d^n$的情形。）（2）只需假设，对于某个子序列 (n_j) 中的所有鞍点，例外恒等式 $\lambda^u(p) = \kappa^n$ 成立。证明过程相同，只是我们得到一个 III 型稳定族。（3）不同于给定不稳定乘子的情形（定理 A 和 B），我们无法运用定理 6.18 的论证来得出例外离散集是有限的结论。

参考文献

[1] Eric Bedford 和 Kyounghee Kim. 正熵 $\mathbb{C}^2$的多项式微分同胚不存在光滑朱利亚集。《J. Geom. Anal.》，27(4):3085–3098，2017年。[2] Eric Bedford、Mikhail Lyubich 和 John Smillie. $\mathbb{C}^2$上多项式微分同胚的周期点分布。《数学发明》，114(2):277–288，1993年。[3] Eric Bedford、Mikhail Lyubich 和 John Smillie. $\mathbb{C}^2$上的多项式微分同胚。IV. 最大熵测度与层状流。《数学发明》，112(1):77–125，1993年。[4] Eric Bedford 和 John Smillie. $\mathbb{C}^2$上的多项式微分同胚。III. 平衡测度的遍历性、指数与熵。《数学年刊》，294(3):395–420，1992年。[5] Eric Bedford 和 John Smillie. $\mathbb{C}^2$上的多项式微分同胚。V. 临界点与李雅普诺夫指数。《J. Geom. Anal.》，8(3):349–383，1998年。[6] Eric Bedford 和 John Smillie. $\mathbb{C}^2$上的多项式微分同胚。VI. J的连通性。《Ann. of Math. (2)》，148(2):695–735，1998年。[7] Sayani Bera 和 Kaushal Verma. $\mathbb{C}^2$上多项式自同构逃逸集的刚性。arXiv:2601.07681，2026年。[8] Pierre Berger 和 Romain Dujardin. 关于 $\mathbb{C}^2$上多项式自同构的稳定性与双曲性。《Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4)》，50(2):449–477，2017年。[9] Bodil Branner 和 John H. Hubbard. 三次多项式的迭代。I. 参数空间的全局拓扑。《Acta Math.》，160(3-4):143–206，1988年。[10] Serge Cantat 和 Romain Dujardin. $\mathbb{C}^2$上全纯共轭的多项式自同构必为多项式共轭。《Bull. Lond. Math. Soc.》，56(12):3745–3751，2024年。[11] Serge Cantat 和 Romain Dujardin. 关于 $\mathbb{C}^2$上多项式自同构的一些刚性结果。arXiv:2411.10339，2024年。[12] Laura G. DeMarco 和 Curtis T. McMullen. 树与多项式动力学。《Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4)》，41(3):337–382，2008年。[13] Romain Dujardin. ´中的亨农型映射。《Amer. J. Math.》，126(2):439–472，2004年。 $\mathbb{C}^2$Romain Dujardin. 关于二维微分同胚朱利亚集连通性的一些评述。载于《复动力系统》，Contemp. Math. 第396卷，第63–84页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006年。[14] Romain Dujardin. $\mathbb{C}^2$上多项式自同构的李雅普诺夫指数连续性。《Ergodic Theory Dynam. Systems》，27(4):1111–1133，2007年。[15] Romain Dujardin 和 Charles Favre. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表示的退化与李雅普诺夫指数。《Ann. H. Lebesgue》，2:515–565，2019年。

[17] Romain Dujardin 和 Mikhail Lyubich. $\mathbb{C}^2$上耗散多项式自同构的稳定性与分岔。《数学发明》，200(2):439–511，2015年。[18] Charles Favre. 复射影空间自同态在混合空间中的退化。《朱西厄数学研究所杂志》，19(4):1141–1183，2020年。[19] Charles Favre. 亚纯有理映射族中乘子的爆破。arxiv:2504.20284，2025年。[20] Charles Favre 和 Chen Gong. 非阿基米德技术与动力系统退化。《北京数学杂志》，2025年。[21]Charles Favre 和 Juan Rivera-Letelier. 非阿基米德动力学中的刚性、扩张与熵。arXiv:2504.20280，2025年。[22] Shmuel Friedland 和 John Milnor. 平面多项式自同构的动力学性质。《Ergodic Theory Dynam. Systems》，9(1):67–99，1989年。[23] John H. Hubbard 和 Ralph W. Oberste-Vorth. 复域中的亨农映射。II. 多项式的射影极限与归纳极限。载于《实与复动力系统》（希勒勒，1993），NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci. 第464卷，第89–132页。Kluwer Acad. Publ.，多德雷赫特，1995年。[24]Valentin Huguin. 多项式映射的模空间与小周期点处的乘子。arXiv:2412.19335，2024年。[25] Yutaka Ishii. $\mathbb{C}^2$上的双曲多项式微分同胚。I：一种非平面映射。《Adv. Math.》，218(2):417–464，2008年。[26] Zhuchao Ji 和 Junyi Xie. 复动力系统中的同宿轨道、乘子谱与刚性定理。《Forum Math. Pi》，11：论文编号 e11，37页，2023年。[27] Zhuchao Ji 和 Junyi Xie. 乘子谱态射一般是单射的。《J. Eur. Math. Soc. (JEMS)》，2025年。10.4171/JEMS/1750。[28] Yusheng Luo. 树、通过重心扩张得到的有理映射长度谱及Berkovich空间。《Duke Math. J.》，171(14):2943–3001，2022年。[29] Anthony Manning. 多项式映射的最大测度维数。《Ann. of Math. (2)》，119(2):425–430，1984年。[30] Curt McMullen. 有理映射族与迭代求根算法。《Ann. of Math. (2)》，125(3):467–493，1987年。[31] John Milnor. 二次有理映射的几何与动力学。《Experiment. Math.》，2(1):37–83，1993年。附录由作者与Lei Tan撰写。[32] John Milnor. 关于具有两个临界点的有理映射。《Experiment. Math.》，9(4):481–522，2000年。[33] John Milnor. 关于Latt`es映射。载于《黎曼球面上的动力系统》，第9–43页。欧洲数学会，苏黎¨世，2006年。[34] John W. Morgan 和 Peter B. Shalen. 赋值、树与双曲结构的退化。I.《Ann. of Math. (2)》，120(3):401–476，1984年。[35] Feliks Przytycki. 全纯映射吸引盆边界上调和测度的豪斯多夫维数。《数学发明》，80(1):161–179，1985年。[36] Joseph H. Silverman. 动力系统的算术，数学研究生教材第241卷。施普林格，纽约，2007年。[37] John Wermer. $\mathbb{C}^n$中一条曲线的包。《Ann. Math. (2)》，68:550–561，1958年。[38] John Wermer. 关于一个等价于双圆盘的定义域。《数学年刊》，248:193–194，1980年。[39] Amie Wilkinson. 几何、动力学与刚性。可见 https://www.math. uchicago.edu/%7Ewilkinso/papers/papers.html，2025年。[40] Eduard Zehnder. C. L. Siegel定理推广的一个简单证明。载于《Geom. Topol., III. Lat. Am. Sch. Math., Proc.》，里约热内卢，1976年，数学讲义第597号，第855–866页。1977年。

SERGE CANTAT，IRMAR，博利厄校区，22-23 号楼，263 AVENUE DU G´EN´ERAL LECLERC，CS 74205，35042 雷恩 C´EDEX，法国电子邮箱地址：serge.cantat@univ-rennes1.fr

ROMAIN DUJARDIN，索邦大学，法国国家科学研究中心，概率、统计与建模实验室（LPSM），F-75005 巴黎，法国电子邮箱地址：romain.dujardin@sorbonne-universite.fr