arXiv:2603.09456v1 [math.DS] 10 Mar 2026

紧群上 Aut(F_n) 作用于表示的动力学刚性

S. CANTAT、C. DUPONT、F. MARTIN-BAILLON

摘要。设 G 为紧李群。设 F_n 为秩为 n 的自由群。当 n 足够大时，我们描述 Aut(F_n) 在 Hom(F_n;G) 上的轨道。动力学趋于稳定：轨道闭包和不变概率测度都是代数性的，正如拉特纳定理中所述。

摘要。设 G 为紧李群。设 F_n 为由 n 个字母生成的自由群。当 n 足够大时，我们描述 Aut(F_n) 在 Hom(F_n;G) 上的作用轨道。某种稳定性由此显现：轨道闭包和不变概率测度都是代数性的，正如拉特纳定理中所述。

目录

1. 引言 2 2. 有限群 5 3. 紧李群 10 4. 冗余定理 13 5. 动力学 17 6. 应用 24 7. 曲面群的冗余性 28 参考文献 30

日期：2025/2026。作者的研究活动部分由欧洲研究理事会资助（ERC GOAT 101053021和ERC PosLieRep 101018839）。

1. 引言

1.1. 尼尔森变换。设 $F_n = \langle a1, \ldots, a_n | \emptyset \rangle$ 为由 n 个生成元生成的自由群。给定群 G，记 Hom(F_n; G) 为从 $F_n \to$ 到 G 的同态集。一个同态 ρ: $F_n \to$ 到 G 由元组 $(\rho(a_1) \ldots, \rho(a_n))$ 唯一确定，该元组给出了同态集 Hom(F_n; G) $= G^n$ 的一个识别。

F_n 的自同构群通过前合成作用于 Hom(F_n; G)；更确切地说，若 $\varphi \in$Aut(F_n) 且 $\rho \in$Hom(F_n; G)，则 $\varphi_*\rho = \rho \circ \varphi^{-1}$。在同一 Hom($F_n$; G) $\simeq G^n$ 下，该作用与尼尔森变换的作用一致，也就是说，它由 n 个字母上的置换群以及以下初等变换生成

$$(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n) \mapsto (g_1, \ldots, g_i^{-1}, \ldots, g_n) \tag{1.1}$$

$$(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n) \mapsto (g_1, \ldots, g_i g_j, \ldots, g_n) \tag{1.2}$$

对于满足 (i, j) $\in \{1, \ldots, n\}$ 且 i $\neq$ j 的数对而言。我们的目标是理解 G 为紧李群时的这一作用：我们将看到，随着 n 变大，该作用的主要动力学特征会“稳定化”。

1.2. 动力学的稳定化。为陈述我们的主要结果，需要以下记号。设 H 是 G 的一个闭子群。则 H 是 G 的李子群；我们将 H° 记为其中性分支，并将 $H^\#$ 记为有限群 H/H°。令 π: H $\to H^\#$ 为投影，并令 # : Hom(F_n; H) $\to$Hom(F_n; $H^\#$) 由 $\rho \mapsto \rho^\# := \pi \circ \rho$ 定义。定义 Epi$^\#$(F_n; H) 为表示 $\rho : F_n \to H$ 的子集，其中诱导表示 $\rho^\# : F_n \to H^\#$ 是满射。于是，Epi$^\#$(F_n; H) 是 Hom(F_n; G) 的一个闭的、Aut(F_n)-不变子集。

在 Epi$^\#$(F_n; H) 上存在一个自然的概率测度 m_H^n，它在 Aut(F_n) 的作用下保持不变，构造如下。首先，若 H 连通，则将其 Haar 测度 Haar_H 归一化为概率测度，并定义 $m_H^n =$为 Epi$^\#$(F_n; H) = Hom(F_n; H) $\simeq H^n$ 上的 $\text{Haar}_H^{\otimes n}$。由于紧李群是幺模的，该测度在尼尔森变换（分别地，在 Aut(F_n)）作用下保持不变，因此 h $\mapsto$ hg 和 h $\mapsto h^{-1}$ 都保持 Haar_H 测度。其次，若 H 是有限群，则定义 m_H^n 为 Epi$^\#$(F_n; H) 上的均匀测度。对于一般情形，注意，若 F $\subset$Hom(F_n; H) $= H^n$ 是 # 的一个纤维，且 (g1, . . . , g_n) 是 F 中的一点，则右侧乘以 $(H^\circ)^n$ 给出一个自然的微分同胚

$$F = \prod_{i=1}^{n} g_i H^\circ. \tag{1.3}$$

此外，这样的纤维包含于 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n; H)$ 中，当且仅当它与之有非空交集。现在可以定义 m_H^n 为 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n; H)$ 上的测度，使其在 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n; H^{\#})$ 上的投影为 $m_{H^{\#}}$，并且其在投影 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n; H) \to \mathrm{Epi}^{\#}(F_n; H^{\#})$ 的每个纤维上的限制，在由公式（1.3）给出的微分同胚下，与 m_{H^0} 成比例。根据幺模性，此定义不依赖于 # 的纤维中所选的基点 $(g_1, \ldots, g_n)$，并给出一个在 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 的作用下保持不变的概率测度 m_H^n。

定理 A. 设 G 是一个紧李群。若 n 足够大，则
(1) 对任意 $\rho \in \mathrm{Hom}(F_n; G)$，自同构群 $\mathrm{Aut}(F_n)\rho$ 在 Hom(F_n;G) 中的闭包等于 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n; H\rho)$，其中 $H\rho$ 是群 $\rho(F_n)$ 的闭包；(2) 自同构群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 在 Hom(F_n;G) 中的轨道闭包恰为 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n;H)$，其中 H 是 G 的闭子群；(3) 若 μ 是 Hom(F_n;G) 上一个 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 不变的遍历概率测度，则存在唯一的闭子群 $H \subset G$，使得 μ 与 m_H^n 一致。

总而言之，当 n 足够大时，动力学会趋于稳定：轨道闭包和不变测度变得代数化，正如齐性动力学中 Ratner 的结果所示。我们将对“n 足够大”这一假设给出确切含义。例如，存在一个普适常数 $b \leq 10^3$，使得

$$n \geq 2m^2 \log_2(m) + 3m^2 + b \tag{1.4}$$

已经足够，其中 m 是 G 的最小忠实线性表示的维数。见下文备注 5.6 。Avni 和 Garion 关于有限单群乘积替换算法的研究中，已经出现过类似现象。[1]

1.3. 冗余性。为了证明这类结果，我们沿用 Gelander 在 [18] 中采用的相同思路。我们的主要技术内容涉及冗余同态 $\rho: F_n \to G$，或者等价地，冗余元组 $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$；我们现在介绍这一概念。对于 $A \subset G$，记 $\langle A \rangle$ 为由 A 生成的子群，记 $\langle A \rangle_{top}$ 为 $\langle A \rangle$ 在 G 中的闭包。令 $\mathrm{Epi}(F_n; G)$ 表示满足 $\langle \rho(F_n) \rangle_{top} = G$ 的同态集，即拓扑满同态集。我们有

$$\mathrm{Epi}(F_n; G) \subset \mathrm{Epi}^{\#}(F_n; G) \subset \mathrm{Hom}(F_n; G).$$

沿用 Lubotzky、Gelander 和 Minsky 的说法， [25, 20] 我们称 ρ 为冗余的，如果存在一个分解 $F_n = A \star B$，使其成为非平凡自由积（即 A 和 B 均为正秩自由群），且 $\rho(A)$ 与 $\rho(F_n)$ 具有相同的

闭包；等价地，如果存在一个 $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ 使得 ρ 冗余。

$$\langle \rho(\varphi^{-1}(a_1)), \ldots, \rho(\varphi^{-1}(a_{n-1}))\rangle_{top} = \overline{\rho(F_n)}.$$

因此，冗余性是一种拓扑概念。请注意，即使 G 是有限群，这也不同于 Lubotzky 在 [25], 中使用的概念，因为他的概念涉及 ρ ，而我们的概念涉及 ρ 在 自同构群(F_n)作用下的轨道。若能使 B 的秩为 $\geq k$, 则该同态是 k-冗余；因此，冗余性等同于 1-冗余。

用元组的性质来表述，对于 $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$，k-冗余意味着，在经过某个将 g_i 映射到某个 g_i'的尼尔森移动后，可以舍去最后 k 个生成元 $g_{n'-k+1}, \ldots, g_n'$，而不改变由 g_i生成的群的闭包。我们用 Red(F_n; G) 表示冗余同态的集合，用 $\mathrm{Red}^k(F_n; G)$ 表示 k-冗余同态的集合。

定理 B. 对每个整数 $m \geq 1$，都存在一个整数 $N(m) \geq 1$，使得对所有满足 $n \geq N(m)$ 的 n，以下性质成立：若 G 是 $GL_m(C)$ 的任意紧子群，则 $\mathrm{Hom}(F_n; G) \subset \mathrm{Red}(F_n;G)$。

这一陈述意味着 k-冗余性，其中 $n \geq N(m) + k - 1$。为了证明定理 B，我们依赖于：(1) 关于 $GL_m(\mathbf{C})$ 的有限子群结构的 Jordan定理；(2) Borel和Serre 的一项结果，该结果用于将 Jordan定理推广到 $GL_m(\mathbf{C})$ 的代数子群；(3) 每个 $GL_m(\mathbf{C})$ 的紧子群按实代数群的意义都是代数子群这一事实；以及 (4) 关于有限群和 Wiegoldt问题的一些基本事实。因此，证明依赖于众所周知的经典结果，专家们对此不会感到意外。在一项即将发表的工作中，Cohen 和 Vigdorovich 使用不同的策略证明了一个类似的定理（见注释 4.4）。

定理B 可用于证明定理A ，因为根据彼得–外尔定理，任意紧李群都嵌入某个一般线性群$_m(\mathbf{C})$中。事实上，除了 [18, 20], 之外，我们还将看到，足够的冗余性意味着动力刚性。

定理A 和B 对 [19]中的猜想2.6和问题2.9作出了肯定回答，适用于n 秩的F_n 足够大的情形。第6 节介绍了自同构群$\mathrm{Aut}(F_n)$ 在特征簇 $\chi(F_n$；特殊线性群$_d(\mathbf{R}))$上的动力学的三个应用：推论6.3 描述了极小不变紧子集。

一个有趣的问题是对平稳测度进行分类。为此，令 $Z \subset$同态集(F_n;G) 表示如下集合：其中 $\rho(F_n)$ 在 G中不稠密。若平均而言，自同构群(F_n) 在 同态集 (F_n;G) $\setminus Z$上的动力学具有扩张性，且 Z是排斥的，那么 [7] 定理1.1.5表明，每个遍历平稳测度 μ

在 同态集(F$_n$;G) 上μ(Z) $=0$ 实际上是不变的，接着定理 A 表明 μ $=$ m$_G^n$。因此，本文自然而然的后续研究方向是考察 自同构群(F$_n$) 在 同态集(F$_n$;G)的切空间上的扩张性质。

致谢。我们感谢 Alonso Beaumont Llona、Sébastien Gouëzel、Vincent Guirardel、Seung uk Jang 和 François Maucourant 提供有益的讨论。特别感谢 Tsachik Gelander 与我们讨论并提供参考文献 [1]，也感谢 Alex Lubotzky 为我们牵线认识 Tal Cohen 和 Itamar Vigodrovich。

2. 有限群

2.1. 秩、可压缩性与链。设 G 是一个有限群。我们定义

$$\mathrm{d}(G) = \min\{\mathrm{card}(S)\ ;\ S \subset G \text{ and generates } G\},$$
$$\tilde{\mathrm{d}}(G) = \max\{\mathrm{d}(H)\ ;\ H \text{ subgroup of } G\},$$

数 d(G) 称为 G 的秩。若子集 S ⊂G 中存在元素 s ∈S，使得 s ∈⟨S \ {s}⟩，则称 S 可压缩。若不存在这样的元素 s，则称 S 不可压缩。定义两个不可压缩常数如下：

$$\mathrm{ic}(G) = \max\{\mathrm{card}(S)\ ;\ S \subset G \text{ generates } G \text{ and is incompressible }\}, \quad (2.1)$$
$$\tilde{\mathrm{ic}}(G) = \max\{\mathrm{card}(S)\ ;\ S \subset G \text{ is incompressible}\}, \quad (2.2)$$

因此，˜ic(G) 是所有子群 H ⊂G 的 ic(H) 的最大值。我们有 d(G) ≤ ic(G) < card(G)，且 ˜d(G) ≤ ˜ic(G) < card(G)。令 cl(G) 表示子群递增链的最大长度

$$\{1\} \subsetneq G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots \subsetneq G_i \subsetneq \cdots \subsetneq G_\ell = G. \quad (2.3)$$

在一条子群链中，G$_i$ 在G$_{i+1}$ 中的指数至少为2。因此，

$$\mathrm{d}(G) \le \mathrm{ic}(G) \le \tilde{\mathrm{ic}}(G) \le \mathrm{cl}(G) \le \log_2(\mathrm{card}(G)) \quad (2.4)$$

例 2.1. 考虑 S$_n$，即作用在 n 个字母上的置换群。根据斯特林公式，log(card(S$_n$)) ≃ n log(n)，误差项的阶为 log(n)；特别地，n ≃ log(card(S$_n$))/log log(card(S$_n$))。由于群 S$_n$ 构成一个递增序列，我们得到 cl(S$_n$) ≥n −1。事实上，文献 [10] 证明了 cl(S$_n$) $=\lfloor\frac{3n-1}{2}\rfloor$ − b(n)，其中 b(n) ≤log$_2$(n) 是 n 的二进制展开中 1 的个数。由于对换 (i, i +1) 构成一个不可压缩集合，ic(S$_n$) ≥n −1；Whiston 在文献 [29] 中证明这是最优的：若 S ⊂S$_n$ 不可压缩，则 card(S) ≤n −1；若 card(S) =n −1，则⟨S⟩ = S$_n$。因此，对于 S$_n$的每个子群 H，都有 ic(S$_n$) = ˜ic(S$_n$) =n −1。

例 2.2. 在群 Z/NZ 中，其中 N $= p_1 \cdots p_k$，由 k 个不同的素数构成，集合 S $= \{N/p1, \ldots, N/p_k\}$ 是生成且不可压缩的。例如，(2, 3) 是 Z/6 Z 的一个不可压缩生成对。一个尼尔森移动将其映射为 (2, 1)，而后者是可压缩的；因此，不可压缩元组的集合在尼尔森变换下并不保持不变。

2.2. 传递性。当 G 为有限群时，我们有

$$\mathrm{Epi}(F_n; G) = \{\rho : F_n \to G\,;\, \rho(F_n) = G\},$$

Red(F_n; G) $= \{\rho : F_n \to G\,;\ \rho(A) = \rho(F_n)$，其中 A 是 $F_n\}$. 的某个真自由因子

定理 2.3。设 G 为有限群。

（1）若 n $\geq$ ic(G) + d(G)，则自同构群(F_n) 在满同态集(F_n; G) 上传递作用；

（2）若 G 可解且 n $>$ d(G)，则自同构群(F_n) 在满同态集(F_n; G) 上传递作用。因此，若 n $\geq$ ˜ic(G) + ˜d(G)，自同构群(F_n) 在同态集(F_n; G) 中的轨道恰为子集满同态集(F_n; H)，其中 H 是 G 的任意子群。

该定理证明见 [25], ，其中最困难的部分是断言（2），这归功于 Dunwoody [15]。若 $n \geq \mathrm{cl}(G) + 1$，断言（1）也成立，参见 [25]。

我们重述断言（1）的证明（即 [25]中的命题 3.1），因为该证明将在5.1节中推广。我们还将在例2.6中证明阿贝尔群的断言（2）。这是本文唯一需要用到的情形，具体而言是在引理2.8中。

（1）的证明。我们将使用下面这个基本但至关重要的注记。

注 2.4. 若 (g1, . . . , g_n) $\in G^n$，且 h $\in \langle g1, \ldots, g_{n-1}\rangle$，则存在一个尼尔森移动，将 (g1, . . . , g_n) 变为 (g1, . . . , g_{n-1}, $g_n h^{\pm 1}$)（分别地，变为 (g1, . . . , g_{n-1}, $h^{\pm 1} g_n$）。

令 d $=$ d(G)，m $=$ ic(G)。不妨设 G 非平凡，即 d(G) $\geq$ 1。固定 G 的一组生成元 (g1, . . ., g_d)。取 $\rho \in$ 满同态集(F_n; G)，并将其与 G^n 中由 $h_i = \rho(a_i)$ 定义的元组 (h1, . . . , h_n) 等同。

根据 ic(G) 的定义，且由于 n $\geq$ ic(G) + d(G)，集合 (h1, . . . , h_n) 是可压缩的。这意味着，经过置换后，$h_n \in \langle h1, \ldots, h_{n-1}\rangle$；因此 (h1, . . . , h_{n-1}) 仍生成 G。根据归纳法，我们可以假设 (h1, . . . , h_m) 生成 G，因此其余元素 $h_{m+1}, \ldots, h_n$ 都属于 $\langle h1, \ldots, h_m\rangle$。根据备注 2.4，存在一个尼尔森移动，将 (h1, . . . , h_n) 映射为 (h1, . . ., h_m, 1, . . . , 1)。同理，g1, . . . , g_d 都属于 $\langle h1, \ldots, h_m\rangle$，并且 (h1, . . . , h_m, 1, . . ., 1) 可以移动为元组

$$(h_1, \ldots, h_m, g_1, \ldots, g_d, 1, \ldots, 1)$$

因为 $n \geq m + d$。

现在我们反过来进行。元素 h_i 全都属于 $\langle g_1, \ldots, g_d \rangle$，因此我们可以将 $(h_1, \ldots, h_m, g_1, \ldots, g_d, 1, \ldots, 1)$ 移到 $(g_1, \ldots, g_d, 1, \ldots, 1)$。这证明了 $(g_1, \ldots, g_d, 1, \ldots, 1)$ 属于 $\rho \in \mathrm{Epi}(F_n; G)$ 的轨道，并表明该作用在 $\mathrm{Epi}(F_n; G)$ 上是传递的。□

如果A 是一个秩为d的阿贝尔群，则其任意子群的秩至多为d。因此，定理2.3 的断言（2）给出

推论 2.5。设 A 是一个有限阿贝尔群。
(1) $\tilde{d}(A) = d(A)$；(2) 若 $n > d(A)$，则自同构群(F_n) 在 Hom(F_n;A) 上的作用轨道恰好是各个子集 $\mathrm{Epi}(F_n; H)$，其中 H 是 A 的任意子群。

另一方面，$\mathrm{ic}(A)$，因此 $\mathrm{cl}(A)$不能用 $\mathrm{d}(A)$来界定，例 2.2 已说明这一点。为使论述自足，我们给出 Dunwoody 对推论 2.5(2) 的证明（如定理 2.3中对可解群的证明，方法类似）。

推论 2.5 (2) 的证明。令 $d = d(A)$。只需证明尼尔森变换在生成元系 $(g_1, \ldots, g_n)$ 上传递作用。我们对链长 cl(A) 作归纳。当 $\mathrm{cl}(A) = 0$ 时结论显然成立。现在，设 $\mathrm{cl}(A) = \ell$，且命题已对长度至 $\ell - 1$ 的情形得到证明。固定一个极大子群序列 $G_i \subset A$，如 (2.3) 所示。于是 G_1 是 A 的真子群，且同构于某个素数 p 对应的 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，并且 $\mathrm{cl}(A/G_1) = \ell - 1$。设 $(h_1, \ldots, h_d)$ 是 A 的一个固定生成元系，$(g_1, \ldots, g_n)$ 是任意生成元系。由于 $\mathrm{cl}(A/G_1) = \ell - 1$，存在一个尼尔森移动，将 $(g_1, \ldots, g_n)$ 映至 $(m_1 h_1, \ldots, m_d h_d, m_{d+1}, \ldots, m_n)$，其中每个 m_i 都属于 G_1。若对于某个 $j \geq d + 1$，$m_j \neq 1$，则 m_j 生成 G_1，；最后这个 n 元组可以变换为 $(h_1, \ldots, h_d, m_j, 1, \ldots, 1)$，继而变为 $(h_1, \ldots, h_d, 1, \ldots 1)$，因为 h_i 生成 A。否则，$m_i h_i$ 生成 A，因此我们可以用 G_1 中的一个非平凡元素替换 m_{d+1}，再应用前述论证。在所有情形下，$(h_1, \ldots, h_d, 1, \ldots 1)$ 都属于 $(g_1, \ldots, g_n)$ 的轨道，证明至此完成。□

下面的例子表明，推论 2.5 是最佳的，并且定理 A在 n 太小时不成立。

例 2.6. 固定一个素数 q 和一个整数 $r \geq 1$，并令 $A = F_q^r$。根据前一个推论，当 $n \geq r + 1$ 时，自同构群(F_n) 在满同态集(F_n; A) 上传递作用。当 $n = r$ 时，满同态集(F_r; A) 可与 F_q-向量空间 F_q^r 的基的集合等同，进而与 $GL_r(F_q)$ 等同。在这种等同下，自同构群(F_r) 的作用为

特殊线性群$^{\pm}_{r}$(F$_q$) 通过右乘在 GL$_r$(F$_q$) 上的作用，其中 SL $^{\pm}$r (F$_q$) $=\{g \in$ GL$_r$(F$_q$)；det(g) $=\pm 1\}$。此作用并非传递作用，它有 $(q-1)/2$ 个轨道，由 GL$_r$(F$_q$) 上行列式取不同值（模 ± 1）给出。另一方面，根据推论 2.5 (2)，当 n $\geq$ r $+1$ ([1]) 时，自同构群(F$_n$) 在满同态集(F$_n$; A) 上传递作用。

例 2.7。取两个整数 r、q ≥ 1。考虑灯笼人群 L，它由 Z/rZ 对从 Z/rZ 到 Z/qZ 的函数加法群作用得到。因此，L 是 Z/rZ 与阿贝尔群 F 的半直积，其中 F 是由所有函数 f : Z/rZ $\to$ Z/qZ 构成的群，n $\in$ Z/rZ 通过 f (·) $\mapsto$ f (· $-$n) 作用于 F。它的秩为 2：事实上，L 由 $1 \in$ Z/rZ 和狄拉克函数 $\delta_0 \in$ F 生成（即 $\delta_0(0) = 1$，且对所有 n $\in$ Z/rZ $\setminus \{0\}$，δ_0 (n) $= 0$）。Dunwoody 定理表明，当 n ≥ 3 时，自同构群(F$_n$) 在满同态集(F$_n$; L) 上传递。另一方面，子群 F $\subset$A 同构于 (Z/qZ)^r，因此其秩为 r。由前例可知，当 n $\leq$ q 时，自同构群(F$_n$) 在满同态集(F$_n$; F) 上的作用不传递；若 q 是素数且 n $=$ r，则有 $(q-1)/2$ 个轨道。

2.3. Jordan 族。如果 G 是有限群，且 N 是 G 的正规子群 ，

(1) ic(G) $\leq$ ic(G/N) + ˜ic(N);

(2) cl(G) $=$ cl(G/N) +cl(N)。

这些结果取自 [10, 15, 29]。我们只概述第一个断言的证明，因为在下文中记住这一点很有用。为此，固定 G 的一个不可压缩生成集 S $\subset$ G，令 n $=$ card(S)。它在 G/N 中的投影 S 生成 G/N，因此存在 T $\subset$S，使得 T 生成 G/N，且 card(T) $\leq$ ic(G/N)。将 S 的元素重新排列后，可以写成

$$S = \{t_1, \ldots, t_d, s_{d+1}, \ldots, s_n\}$$

其中 T $=\{$t1, . . .t$_d$$\}$。存在 t$_i$中的字 w $_j$，使得对每个 j $>$d，s$'_j$:=s $_j$w $_j$都属于 N。设 S′ = {t1, . . . , t$_d$, s$'_{d+1}$, . . . , s$'_n$} 为经这些尼尔森变换得到的集合。则 card(S′) $=$card(S)，S′生成 G，且 {s$'_{d+1}$, . . . , s$'_n$} 是 N 中的一个不可压缩系统；事实上，若某个 s$'_k$ 可由其余 s$'_j$生成，则可将 s$_k$w$_k$写成 s $_j$w $_j$中的一个字，从而 s$_k$本身将是 t$_i$与 s$_j$（对 d $+1 \leq$ j $\leq$ n 且 j $\neq$ k）中的一个字，这与 S 的不可压缩性矛盾。因此，ic(G) $\leq$ ic(G/N) + ˜ic(N)。

[1]这可以直接通过线性代数证明。事实上，如果 (g1, . . . , g$_n$) 生成 A，则可以假设 (g1, . . . , g$_r$) 是一个基，并找到一个特殊线性群 $_r$(F$_q$) 中的矩阵，将 g$_i$变换为 (e1, . . . , αe$_r$, g$'_{r+1}$, . . . , g$'_n$)，其中 (e1, . . . , e$_r$) 是标准基，$\alpha \in F_q^{\times}$，而 g$'_j$属于 A。因此，再进行若干次尼尔森变换后，可以将 (g$'_{r+1}$, . . . , g$'_n$) 替换为 (e$_r$, 0, . . . , 0)，随后得到 (e1, . . . , e$_r$, 0, . . . , 0)。

引理 2.8. 设 G 为一个有限群，并设 $0 \to A \to G \to Q \to 1$ 是一个正合列，其中 A 为阿贝尔群。若

$$n \geq d(A) + \tilde{ic}(Q) + 1,$$

每个 $\rho \in$ 同态集(F_n; G)都是冗余的。

证明。设 ρ 为同态集(F_n; G)的一个元素，并设H为其像。用Q_H 表示H在Q中的投影，用A_H 表示H与A的交集。令

$$d = d(Q_H) \leq \tilde{d}(Q) \ , \ I = ic(Q_H) \leq \tilde{ic}(Q) \ , \ e = d(A).$$

我们的假设蕴含$n - I - e \geq 1$。

令$(g_1, \ldots, g_n) = (\rho(a_1) \ldots, \rho(a_n))$，其中如上$F_n = \langle a_1, \ldots, a_n | \emptyset \rangle$。由于$n \geq \tilde{ic}(Q)$，存在一个尼尔森移动，将$(g_1, \ldots, g_n)$映为一个元组

$$(h_1, \ldots, h_I, h'_{I+1}, \ldots, h'_n)$$

其中 $\{h_1, \ldots, h_I\}$ 生成Q_H（h j表示h j在Q中的投影）且不可压缩（特别地，对 $1 \leq j \leq I$有$h_j \notin A$），并且对$I + 1 \leq j \leq n$有$h'_j \in A_H$。设B为A_H中由 $\{h'_{I+1}, \ldots, h'_n\}$生成的子群。B的秩为$\leq d(A_H) \leq d(A) = e$，因此我们可以固定B的一个生成元系 $\{b_1, \ldots, b_e\}$。由于$n - I \geq e + 1 \geq d(B) + 1$，将推论 2.5 (2)应用于$G = B$，可得一个仅作用于$h'_j$的尼尔森移动，它将$(h'_{I+1}, \ldots, h'_n)$映为$(b_1, \ldots, b_e, 1, \ldots, 1)$，且末尾至少有一个1。这表明 ρ 是冗余的。□

定理 2.9。设 G 是一个有限群，且有正合列 $0 \to A \to G \to Q \to 1$，其中 A 是阿贝尔群。如果

$$n \geq 1 + d(A) + \tilde{d}(Q) + \tilde{ic}(Q)$$

那么 Aut(F_n) 在 Hom(F_n;G) 中的轨道恰好是 Epi(F_n;H) 这些子集，其中 H 是 G 的任意子群。

证明。设 $\rho: F_n \to G$ 是一个同态，并设 $H = \rho(F_n)$。我们用 Q_H表示 H 在 Q 中的投影，并令 $A_H = A \cap H$。设 $\{q_1, \ldots q_d\} \subset H$，其中 $d = d(Q_H)$，且其投影生成 Q_H。设 $\{u_1, \ldots, u_e\} \subset A_H$是 A_H的一个生成子集，其中 $e := d(A_H) \leq d(A)$。令 $I = ic(Q_H)$。与引理 2.8 的证明一样，我们先进行一次尼尔森移动，将 $(g_1, \ldots, g_n)$ 映射为 $\omega_1 := (h_1, \ldots, h_I, h'_{I+1}, \ldots, h'_n)$。令 B 为 A_H 中由 $\{h'_{I+1}, \ldots, h'_n\}$ 生成的子群，它满足 $d(B) \leq d(A_H) = e$。设 $\{b_1, \ldots, b_e\}$是 B 的一个生成子集。注意到

$$n - I \geq n - \tilde{ic}(Q) \geq 1 + d(A) + \tilde{d}(Q) \geq 1 + e + d(Q_H).$$

特别是，$n - I \geq 1 + e \geq 1 + d(B)$。由推论 2.5(2) 应用于 B，可知存在一次尼尔森移动，将 ω_1 映射为 $\omega_2 := (h1, \ldots, h_I, b1, \ldots, b_e, 1, \ldots, 1)$。由于 $n - I - e \geq 1 + d(Q_H)$，$\omega_2$ 可以映射为

$$(h_1, \ldots, h_I, b_1, \ldots, b_e, q_1, \ldots, q_d, 1, \ldots, 1)$$

然后到

$$\omega_3 := (\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_I, b_1, \ldots, b_e, q_1, \ldots, q_d, 1, \ldots, 1),$$

其中 $\tilde{h}_j \in A_H$ 对 $1 \leq j \leq I$。现在注意到，对于 A_H 的每个子群 B′，都有 $n - I \geq 1 + e \geq 1 + d(B')$，并且 H 的以下子集生成 A_H：

$$\{\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_I, b_1, \ldots, b_e, q_1, \ldots, q_d\}.$$

依次使用推论 2.5(2) 以及 ω_3 中单位元 1 的出现，我们可以将 ω_3 映射到

$$(\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_I, u_1, \ldots, u_e, q_1, \ldots, q_d, 1, \ldots, 1),$$

然后变为 $(u1, \ldots, u_e, q1, \ldots, q_d, 1, \ldots, 1)$。证明至此完成。 □

我们称有限群 G 的 Jordan 阶 至多为 (J,R) (J 和 R 为非负整数)，如果 G 包含一个正规阿贝尔子群 A，其秩为 $\leq R$，且 $\mathrm{card}(G/A) \leq J$。定理 2.9 立即推出：

推论 2.10。设 G 是 Jordan 阶至多为 (J,R) 的有限群。如果

$$n \geq 1 + R + \max\{\tilde{d}(Q) + \tilde{ic}(Q) \,;\, Q \textit{ is a group with } \mathrm{card}(Q) \leq J\}$$

那么 Aut(F$_n$) 在 Hom(F$_n$;G) 中的轨道恰好是 Epi(F$_n$;H) 这些子集，其中 H 是 G 的任意子群。

3. 紧李群

3.1. Peter-Weyl定理。 彼得-外尔理论的一个推论是，每个紧李群都存在一个在有限维向量空间上的忠实连续表示。此外，$GL_m(\mathbf{R})$ 的任意紧子群实际上都是$GL_m(\mathbf{R})$ 的代数子群（见 [26], 第78页），并且群的连通分支（相对于欧几里得拓扑）与其不可约分支（相对于扎里斯基拓扑）相同。综上，我们得到以下定理。

定理3.1（Peter-Weyl）。若G是紧李群，则存在整数m、实代数群G′(R) $\subset GL_m(R)$，以及李群同构$G \to G'(R)$。

更精确地说，紧李群与$GL_m(R)$的紧实代数子群之间存在范畴等价，每个连续同态都自动是代数的（因为其图像是闭的）。

由于 $GL_m(R)$ 的每个紧子群都包含在正交群 $O_m(R)$ 的某个共轭群中，因此还可以假设 $G' \subset O_m(R)$。使用复表示和酉群代替实表示，可以得到类似的结果，其中 $G' \subset U_m(C) \subset GL_m(C)$（这样做时，m 的最优值可能小于嵌入正交群时的值）。下文中，我们使用嵌入 $GL_m(C)$（或 $U_m(C)$），并将 $GL_m(C)$ 视为实李群。

3.2. 若尔当定理。经典的 Jordan 定理指出，$GL_m(C)$ 的有限子群的 Jordan 阶至多为 (J(m),R(m))，其中 $R(m) = m$，而 J(m) 仅取决于 m；关于这一结果的两种证明，参见 [5] 或 [13]。我们始终用 J(m) 表示若尔当定理成立时的最优常数，并称其为若尔当常数。

注 3.2. 置换群 S_{m+1} 嵌入 $GL_m(R)$，因此对所有 m，都有 $J(m) \geq (m+1)!$；而 Collins 在 [12] 证明，只要 $m \geq 71$，就有 $J(m) = (m+1)!$（他还计算了 $m \leq 70$时的 J(m)）。

我们将需要 Jordan定理的以下一个版本，这个版本或许不太为人熟知。如果 G 是李群，那么 $G^{\#}$ 表示 G 的连通分支有限群：它是 G 对其中性分支 G°取商所得的群。

定理 3.3（Jordan）。设 m 为正整数。对于任意实代数子群 $G \subset U_m(C)$（分别地，任意复代数子群 $G \subset GL_m(C)$），存在正合列 $0 \to A \to G^{\#} \to Q \to 1$，其中 A 是秩为 $\leq m$ 的阿贝尔群，且 $\mathrm{card}(Q) \leq J(m)$（其中 J(m) 为若尔当常数）。

证明。设 $\pi\colon G \to G^{\#}$ 为商映射。将 $GL_m(C)$ 视为实代数群，并将 G 视为代数子群，[6] 的定理 1.1（另见 [4] 中的引理 5.11）给出了一个有限子群 $F \subset G$，使得 $\pi(F) = G^{\#}$。

应用于 F，经典的 Jordan定理给出一个正规子群 $A_F \subset F$，使得 $\mathrm{card}(F/A_F) \leq J(m)$。由于 A_F 是 $GL_m(C)$ 的有限阿贝尔子群，因此可对角化，并且可以将其视为 $(C^{\times})^m$ 的子群。这样的群的秩为 $\leq m$，因为 $(R/Z)^m$ 的每个有限子群都由$\leq m$ 个元素生成（R^m 的每个离散子群的秩均为 $\leq m$）。最后，令 $A = \pi(A_F) \subset G^{\#}$，$Q = G^{\#}/A$。群 A 是 $G^{\#}$ 的正规子群，其秩为 $\leq m$，指数为 $\leq J(m)$。□

3.3. 有限群的生成元。

定理 3.4（科瓦奇和罗宾逊）。$GL_m(C)$ 的每个有限子群都至多由 $\lfloor 3m/2 \rfloor$ 个元素生成。

换言之，$d(F) \le \lfloor 3m/2 \rfloor$ 当 $F \subset GL_m(\mathbf{C})$ 为有限群。这一点证明见 [22]。设

$$N_{\#}(m) = 1 + 5m/2 + \log_2(J(m)). \tag{3.1}$$

推论 3.5. 设 G 是 $GL_m(C)$ 的一个紧子群。若 $n \ge N_{\#}(m)$，则
(1) 每个 $\rho \in \mathrm{Hom}(F_n; G^{\#})$ 都是冗余的；(2) 自同构群(F_n) 在 $\mathrm{Hom}(F_n; G^{\#})$ 中的轨道恰为 $\mathrm{Epi}(F_n; H)$ 这些子集，其中 H 是 $G^{\#}$ 的任意子群。

证明。将群 G 视为 $U_m(C)$ 的一个子群。由定理 3.3，存在正合列 $0 \to A \to G^{\#} \to Q \to 1$，其中 A 是秩为 $d(A) \le m$ 的阿贝尔群，且 $\mathrm{card}(Q) \le J(m)$。定理 3.3 的证明指出，G 中存在一个有限子群 F，使得 $\pi(F) = G^{\#}$。由定理 3.4，F 的任意子群均由 $\lfloor 3m/2 \rfloor$ 个元素生成。于是，$\pi(F) = G^{\#}$ 以及 Q 也具有相同性质。因此 $\tilde{d}(Q) \le \lfloor 3m/2 \rfloor$，且 $d(A) + \tilde{d}(Q) \le 5m/2$。此外，不等式 (2.4) 蕴含 $\tilde{ic}(Q) \le \log_2(\mathrm{card}(Q)) \le \log_2(J(m))$。由此可得

$$N_{\#}(m) = 1 + 5m/2 + \log_2(J(m)) \ge 1 + d(A) + \tilde{d}(Q) + \tilde{ic}(Q).$$

结论可通过将引理 2.8 与定理 2.9 应用于 $G^{\#}$而得出。 □

注 3.6. 作为前述证明的副产物，我们得到 $d(G^{\#}) \le \lfloor 3m/2 \rfloor$。这立即蕴含 $N_{\#}(m) \ge 2 + d(G^{\#})$ 对每个 $m \ge 1$ 成立，该结论将用于引理 5.2 的证明。

常数 $N_{\#}(m) \simeq m\log_2(m)$ 相当小。为得到它，我们使用了 [12]与 [22], ，二者都依赖于有限单群分类，但上界 $N_{\#}(m)$ 。 $m^2\log_2(m)$ 可由 [13], 第 258 页所述的舒尔定理得到。

注 3.7. 例2.6 表明推论 3.5 几乎是最优的：使该推论成立的最佳常数 $N_{\#}(m)$ 必然 $\ge m$。

3.4. 紧群的生成元。任意连通紧李群 G 都可以写成商 $(K \times T)/F$，其中

- K 是单连通、几乎单的紧李群 $K_1 \times \cdots K_l$ 的乘积，K_i，
- T 是环面 R_k / Z_k，并且
- F 是 K ×T 的一个有限子群，且不包含 $\{1\} \times T$ 的任何非平凡元素。

Kuranishi 的一个定理表明，K 由 2 个元素拓扑生成（见 [23]）。更精确地说，存在一个开且稠密的子集 $U_K \subset K \times K$，它具有全 Haar 测度，使得每一对 $(g,h) \in U_K$ 都生成 K 的一个稠密子群（见引理 1.4，载于 [18]）。这些结果的下述推广将用于第 5.1.2 节。

定理 3.8. 设 G 为 $GL_m(C)$ 的紧子群。则，

(1) G 至多由 $\lfloor 2+(3m/2) \rfloor$ 个元素拓扑生成；(2) 若 G 连通，则生成 G 的元素对构成 G ×G 中一个具有全 Haar 测度的子集。

证明。按上文记 $G^\circ = (K \times T)/F$。选取开集 U_K 中的一对 (g, h)，取 s, t ∈T，使得 $\langle s, t \rangle_{top} = T$，并考察这一对 S =((g, s), (h, t))。闭子群 $H := \langle S \rangle_{top} \subset K \times T$ 在第一投影下映满 K，在第二投影下映满 T。在李代数层面，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{t}$ 满射到 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{t}$。由于 $\mathfrak{k}$ 是半单的，这意味着 $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{t}$。因此 H =K ×T。这证明 G° 是由 2 个元素拓扑生成的；更准确地说，生成对在 $G^\circ \times G^\circ$ 中构成一个具有满 Haar 测度的稠密子集。这证明了第二个断言。

对于第一个断言，我们结合 [6]，的定理 1.1，该定理给出了 G 的一个有限子群，它与 G 的每个连通分支都有交集；再结合定理 3.4，以及第二个断言（应用于 G°）。□

在此证明中，如果我们将对定理 3.4 的引用替换为 Jordan 定理，便可得到一个类似的结论，其中 $2+m+J(m)$ 取代 $\lfloor 2+(3m/2) \rfloor$。

4. 冗余定理

定理 4.1. 对于每个整数 m ≥ 1，都存在一个正整数 N(m)，使得对于所有 n ≥N(m)，Hom(F_n; U_m(C)) ⊂Red(F_n; U_m(C))。等价地，对于 GL_m(C) 的每个紧子群 G，以及每个 n ≥ N(m)，我们有

$$\mathrm{Epi}(F_n; G) \subset \mathrm{Red}(F_n; G).$$

证明见下文第 4.2 节。这表明

$$N(m) = 2mN_{\#}(m) = 2m(1 + 5m/2 + \log_2(J(m))) \tag{4.1}$$

可行，但我们不声称这是最优的。

注 4.2. 定理 4.1 表明，每个同态 $F_n \to U_m(\mathbf{C})$ 都是k-冗余的，只要 $n \geq N(m) + k - 1$。

与定理 4.1 的证明并行，我们还将在线性代数群范畴中证明该定理的一个版本。在此背景下，满同态和冗余表示的概念必须相对于扎里斯基拓扑来考量。于是，该定理可表述如下。

定理 4.3. 设 k 为特征为 0 的域。对于每个整数 $m \geq 1$，存在一个整数 Z(m)，使得对于所有 $n \geq Z(m)$，$\mathrm{Hom}(F_n; GL_m(k)) \subset \mathrm{Red}(F_n; GL_m(k))$。等价地，对于 $GL_m(k)$ 的每个代数子群 G 以及每个 $n \geq Z(m)$，都有 $\mathrm{Epi}(F_n; G) \subset \mathrm{Red}(F_n; G)$。

正如我们将看到的，可以取$Z(m) = \frac{1}{2}m(m+5)N_{\#}(m)$。这肯定了 [19], 中的猜想 4.2 和猜想 4.3，但仅当$n \geq Z(m)$时。

注 4.4。在[11], 中，作者得到了类似的冗余性结论：设 $G \subset GL_m(C)$ 是一个简单复线性群；若 $(g_1, \ldots, g_n)$ 生成 G 的一个扎里斯基稠密子群，且 $n \geq am^{10},$，其中 $a > 0$ 是某个普适常数，那么 $(g_1, \ldots, g_n)$ 是可压缩的。他们的证明依赖于三个主要要素。为简单起见，假设 $G \subset GL_m(C)$ 定义在 Z 上，且 g_i 属于 G(Z)。首先，根据 Weisfeiler 定理，当素数足够大时，g_i 生成 $G(F_p)$。其次，对于所有足够大的素数，映射 $G(Z_p) \to G(F_p)$ 的核是 $G(Z_p)$ 的 Frattini 子群。第三，Harper 的一个近期定理 [21]蕴含 $\mathrm{ic}(G(F_p)) \leq am^{10}$，其中 $a > 0$ 是某个普适常数。

4.1. 冗余性。

引理 4.5. 设 G 为拓扑群。假设 $\rho\colon F_n \to G$ 是一个同态，且 $F_n = A \star B$ 是一个自由分解，并且 $\rho_{|A}$ 是冗余的。那么，ρ 是冗余的。

我们同时证明这一结果，并用尼尔森变换来重新表述。我们从 $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ 开始。该假设意味着，经过某个尼尔森移动后，我们有 $\langle g_2, \ldots, g_j \rangle_{top} = \langle g_1, \ldots, g_j \rangle_{top}$，其中某个 $j \geq 1$。要证明 $(g_1, \ldots, g_n)$ 是冗余的，只需证明 $\langle g_2, \ldots, g_n \rangle_{top} =$

$\langle g1,\ldots,g_n\rangle_{top}$。但是 $\langle g2,\ldots,g_n\rangle_{top}$ 包含 $\langle g2,\ldots,g_j\rangle$顶部，因此也包含 g_1；所以它包含 $\{g1,\ldots,g_n\}$，进而也包含 $\langle g1,\ldots,g_n\rangle_{top}$。

注 4.6。尽管 G^n 上的乘积拓扑与扎里斯基拓扑并不一致，这个证明仍适用于带有扎里斯基拓扑的代数群。

4.2. 定理的证明 **4.1**。固定 $m \geq 1$，其中 $m \geqslant 1$。

4.2.1. 连通子群的链。对于紧李群 G，定义$\ell(G)$ 为递增序列中最长的长度，该序列由闭连通子群 $G_0 = \{1_G\} \subset G_1 \subset \cdots \subset G_\ell = G$ 构成。因此，$\ell(G) = 0$ 当且仅当 G 是有限群。注意，若 $H \subset G$，则 $\ell(H) \leq \ell(G)$，并且 $\ell(G) = \ell(G^\circ)$。

在酉群 U_m 中，考虑序列 $G_1 = U_1, G_2 = U_1 \times U_1$,....., $G_m = U_1^m$，其中 U_1 的各个副本沿对角线排列。接着，定义 G_{m+j}=$U_j \times U^{m-}{}_j 1$，直到 $G_{2m-1} = U_m$。这一构造表明，$\ell(U_m) \geq 2m - 1$。事实上，正如下一个定理所示，这里取等号。

定理 4.7. 若 G 是 U_m 的闭子群，则 $\ell(G) \leq \ell(U_m) = 2m - 1$。

此结果可由 [9] 中的定理 1 和定理 2 推出（另见 [28]，其中研究了半单李代数的极大子代数）。它将显而易见的二次上界 $\ell(U_m) \leq$ 维数$_{\mathbf{R}}(U_m) = m^2$ 替换为线性上界。

备注 4.8. 设 G 是定义在某个代数闭域 k 上的线性代数群。用 $\ell_a(G)$ 表示连通代数子群 $G_i \subset G$ 的递增链的最大长度。令 $R_u(G)$ 表示幺幂根基。商 $G := G/R_u(G)$ 是约化的，我们用 rk(G) 表示该群的秩，用 B(G) 表示其博雷尔子群。于是，[8] 的定理 1 和定理 3 表明

$$\ell_a(G) = \dim(R_u(G)) + \mathrm{rk}(\overline{G}) + \dim(B(\overline{G})) > \dim(G)/2$$

这给出 $\ell_a(GL_m(k)) = \frac{1}{2}m(m+3)$，这是关于 m 的二次函数。因此，对于特征为 0 的域 K 上的 $GL_m(K)$ 的任意代数子群，都有 $\ell_a(G) \leq 12m(m+3)$。

4.2.2. N(m) 的定义。递归地定义序列 N(m,D)：

$$N(m,0) = N_{\#}(m) \tag{4.2}$$

$$N(m,D+1) = N(m,0) + \max_{0\leq j\leq D} N(m,j) \tag{4.3}$$

注意，N(m, D) 随着 D 和 m 的增大而严格递增。因此，在方程 (4.3) 中，最大值等于 N(m, D)，从而得到 N(m, D) $=$(D $+$ 1)N(m, 0)。特别地，若定义 N(m) $:=$ N(m, 2m $-$ 1)，则有

$$N(m) = 2mN_{\#}(m). \tag{4.4}$$

4.2.3. 递归的描述。设P(ℓ)为如下断言：对每个n $\geq$N(m ℓ)，以及每个满足 ℓ(G) $\leq$ ℓ的紧子群G $\subset$ GL$_m$(C)，任意同态 $\rho : F_n \to$ G都是冗余的。

我们将证明$P(\ell)$，通过对 ℓ进行归纳。然后，借助定理4.7，定理 4.1 随之成立，其中$N(m)$ 如方程(4.4)所示。

注记4.9。为证明定理4.3，我们令Z(m) $=$ N(m, m(m $+$ 3)/2) $=$ ‡2m(m $+$5)N$_{\#}$(m)。

4.2.4. 递归的证明。为验证性质$P(0)$，我们只需参阅推论3.5。

现在，假设对 0 $\leq$ k $\leq$ ℓ，P(k)成立。为证明P(ℓ + 1)，我们固定某个n $\geq$ N(m ℓ + 1)。取满足 ℓ(G) $=$ ℓ + 1 的G以及一个同态ρ: $F_n \to$ G，并令$g_i = \rho(a_i)$，1 $\leq$ i $\leq$ n。用 ρ的像的闭包替换G，我们可以假设 $\rho \in$ 满同态集(F_n; G)。

设 π : G $\to$ G$^{\#}$ 表示商态射。由于 n $\geq$ N(m, 0)，推论 3.5 告诉我们，同态集(F_n; G$^{\#}$) 的每个元素都是冗余的。因此，存在一个尼尔森移动（将 g_i映射到某个 g_i'）以及某个整数 k $\leq$N(m, 0) $-$ 1，使得 ($\pi(g_1') \ldots, \pi(g_k')$) 生成 G$^{\#}$；由此，我们还可以要求 $g'_{k+1}, \ldots, g'_n$ 都位于 G$^{\circ}$，即 G 的中性分支中。现在，我们令

$$H = \langle g'_{k+1}, \ldots, g'_n \rangle_{top}$$

并区分两种情形。

第一种情形是当 ℓ(H) $<$ ℓ(G) 时。根据 N(m ℓ + 1) 的定义，我们有 n $-$ k $\geq$ 1 + max$_{0 \leq j \leq \ell}$N(m, j)，由归纳可知 ($g'_{k+1}, \ldots, g'_n$) 是冗余的。根据引理 4.5，ρ 也是冗余的。

在第二种情形中，ℓ(H) $=$ ℓ(G)，或等价地，H $=$ G$^{\circ}$。设 K $\subset$ H 为由 K $= \langle g'_{k+1}, \ldots, g'_{n-1} \rangle_{top}$ 所定义的闭子群。若 ℓ(K) $=$ ℓ(G)，则 K $=$H，且 ($g'_{k+1}, \ldots, g'_n$) 立即冗余。否则 ℓ(K) $<$ ℓ(G)。由于 n $\geq$N(m, 0) $+$N(m ℓ (K))，我们得到 n $-$k $-$ 1 $\geq$N(m ℓ(K))，并且归纳假设表明 ($g'_{k+1}, \ldots,$ g $'_{n-1}$) 是冗余的。在这两种情形下，我们都借助引理 4.5 得出结论。

注 4.10. 定理 4.3 的证明是相同的，只是递归进行到 $\ell = \ell_a(\mathrm{GL}_m(\mathbf{k}))$ 而不是 $\ell(U_m)$。

5. 动力学

这里，我们应用上一节的结果来证明定理 A。

5.1. 轨道闭包。本节我们对 n 较大时自同构群(F_n)在 Hom(F_n;G) 上的作用的轨道闭包进行分类。

5.1.1. 两个引理。设 k 是一个满足 $<n$ 的整数。回顾一下，若存在分解 $F_n \to A \star B$，使得 (i) B 是秩至少为 k 的自由群，且 (ii) ρ(A) 和 ρ(F_n) 有相同的闭包，则称同态$\rho: F_n \to G$ 是 k-冗余的。回顾一下，我们用 $\mathrm{Red}^k(F_n; G)$ 表示这些 k-冗余同态构成的集合。以下引理是定理 2.3 (1) 的拓扑版本。

引理 5.1（d-冗余表示的极小性）。设 d 和 n 是两个满足 $0 \le d \le n$ 且 $n \ge 2$ 的整数。设 G 是一个由 d 个元素拓扑生成的拓扑群。若 $\rho \in \mathrm{Red}^d(F_n; G) \cap \mathrm{Epi}(F_n; G)$，则 ρ 在自同构群($F_n$)-轨道中的轨道在 $\mathrm{Red}^d(F_n; G) \cap \mathrm{Epi}(F_n)$ 中稠密。

注意，对于这个引理，G 不一定是李群。对于扎里斯基拓扑的应用，我们不指定 Hom(F_n;G) $= G^n$ 上的拓扑；我们只要求投影是连续的。为了证明这个引理，我们将反复使用以下两个事实。

(a) 对于连续群作用，记 $x \supset y$ 表示 y 的轨道包含在 x 的轨道闭包中。那么，$\supset$ 具有传递性：若 $x \supset y$ 且 $y \supset z$，则 $x \supset z$。

(b) 若 $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$，且 $h \in \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$，则存在一些尼尔森变换，可将 $(g_1, \dots, g_n)$ 变为 $(g_1, \dots, g_{n-1}, g_n h)$。反之，若 $h \in \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_{top}$，则 $(g_1, \dots, g_{n-1}, g_n h)$ 属于 $(g_1, \dots, g_n)$ 的轨道闭包。

证明。令 $m = n - d$。固定一个在拓扑意义下生成 G 的元组 $(g_1, \dots, g_d)$。

令 $(h_1 \dots, h_n) = (\rho(a_1) \dots, \rho(a_n))$。由于 ρ 是 d-冗余的且为满同态，经过尼尔森变换后，我们可以假设 $\langle h_1 \dots, h_m \rangle_{top} = G$。

我们首先证明，$(g_1, \dots, g_d, 1, \dots, 1)$ 属于 ρ 的轨道闭包。对于 $k > m$，我们有 $h_k \in \langle h_1 \dots, h_m \rangle_{top}$，因此 $(h_1, \dots, h_m, 1, \dots, 1)$ 属于 $(h_1, \dots, h_n)$ 的轨道闭包。通过同样的论证，

$$(h_1, \dots, h_m, 1, \dots, 1) \supset (h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_d).$$

现在利用 (g1, . . ., g_d) 在拓扑意义下生成 G，我们得到

$$(h_1,\dots,h_m,g_1,\dots,g_d)\supset(g_1,\dots,g_d,1,\dots,1).$$

现在考虑另一个表示 $\rho'\in \mathrm{Red}^d(F_n;G)\cap \mathrm{Epi}(F_n;G)$，并令 $(h'_1\dots,h'_n)=(\rho'(a_1)\dots,\rho'(a_n))$。和之前一样，我们可以假设 $(h'_1,\dots,h'_m)$ 在拓扑意义下生成 G。反过来，按照上述相同的推理可得

$$\begin{aligned}(g_1,\dots,g_d,1,\dots,1)&\supset(g_1,\dots,g_d,h'_1,\dots,h'_m)\\&\supset(h'_1,\dots,h'_m,1,\dots,1)\\&\supset(h'_1,\dots,h'_n).\end{aligned}$$

(注意，第二行用到了 ρ′ 是一个满同态。) 我们得出结论： ρ的轨道在 $\mathrm{Red}^d(F_n;G)\cap\mathrm{Epi}(F_n;G)$ 中稠密。□

引理 5.2. 设 G 是 $GL_m(C)$ 的一个紧子群。设 n 为一个满足 $n\geq N_{\#}(m)$ 的整数。那么 $\mathrm{Epi}(F_n;G)$ 的闭包为 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n;G)$。

证明。只需证明 $\mathrm{Epi}(F_n;G)$ 在 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n;G)$ 中稠密，因为 $\mathrm{Epi}(F_n;G)\subset\mathrm{Epi}^{\#}(F_n;G)$，且 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n;G)$ 是闭集。

当 G 连通时，该断言意味着 满同态集(F_n;G) 是 同态集(F_n;G)的一个稠密子集，这由 [18]的引理 1.10 得出。在这种情况下，$n\geq 2$ 就足够了；下文将用到这一点。

对于一般的 G，固定 $\rho\in\mathrm{Epi}^{\#}(F_n;G)$，并令 $(g1,\dots,g_n)=(\rho(a_1)\dots,\rho(a_n))$。由于 $\mathrm{Red}^d(F_n;G)$、$\mathrm{Epi}(F_n;G)$ 和 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n;G)$ 均为 Aut(F_n)-不变的，我们可以在尼尔森变换意义下进行讨论。由于 $n\geq N_{\#}(m)$，根据注 3.6，我们知道 $n\geq d(G^{\#})+2$。现在，利用推论 3.5，我们可以假设经过若干次尼尔森移动后，$(g1,\dots,g_{n-2})$ 生成 $G^{\#}$。再进行一次尼尔森移动，我们还可以假设 g_{n-1} 和 g_n 属于 G^o。

利用连通群的情形，我们可以找到一个序列 $(g^{(k)}{}_{n-1},g_n^{(k)})\in$满同态集$(F_2;G^o)$，它收敛到 (g_{n-1},g_n)。于是，$(g1,\dots,g_{n-2},g^{(k)}{}_{n-1},g_n^{(k)})$ 是满同态集$(F_n;G)$ 中的一个序列，并收敛到 (g1, . . ., g_n)。□

5.1.2. 定理 A 的断言 (1) 和 (2) 的证明。设 G 是一个紧李群。设 m 是使得 G 可嵌入 $GL_m(C)$ 的最小整数 ≥ 1。令 $d=2+\lfloor 3m/2\rfloor$。固定 $n\geq N(m)+d$，其中 N(m) 是定理 4.1 中给出的常数（见公式 (4.1)）。

取定 $\rho\in$ 同态集(F_n;G) 并记 H_ρ 为 ρ像的闭包 ρ。根据定义，$\rho\in$ 满同态集(F_n;H_ρ)。根据定理 4.1 和注释 4.2，

$$\mathrm{Epi}(F_n;H_\rho)=\mathrm{Epi}(F_n;H_\rho)\cap\mathrm{Red}^d(F_n;H_\rho).$$

特别地，表示 ρ 是 d-冗余的。

由定理 3.8 (1)，群 $H\rho$ 可由 d 个元素拓扑生成。因此，将引理 5.1 应用于 ρ，ρ 的自同构群(F_n)-轨道在满同态集(F_n; $H\rho$)中稠密。由于满同态集(F_n; $H\rho$)的闭包为 $Epi^{\#}(F_n; H\rho)$（由引理 5.2），我们得出 ρ 的轨道闭包为 $Epi^{\#}(F_n; H\rho)$。

5.2. 不变概率测度。这里，我们证明定理 A的断言 (3)。

5.2.1. 测度分解。我们回顾一下关于纤维化的概率测度分解概念（见 [16], 定理 5.14）。

设 (X, μ) 和 $(Y, \bar{\mu})$ 是博雷尔概率空间，且有一个可测映射 $\pi: X \to Y$，使得 $\bar{\mu} = \pi_*\mu$。那么存在一个以 $y \in Y$ 为参数的概率测度可测族 μ_y，使得

$$\mu = \int_Y \mu_y \, d\bar{\mu}(y),$$

并且，对于 $\bar{\mu}$-几乎处处的 μ_y，其支集包含于 $\pi^{-1}(y)$。此外，若 $T: X \to X$ 是可测变换，且 μ 和 π 在 T 的作用下保持不变，那么对于 $\bar{\mu}$-几乎处处的 y，测度 μ_y 是 T-不变的。

5.2.2. 闭子群。

定理 5.3. 设 G 为紧李群。那么 G 至多包含可数多个闭子群的共轭类。

证明概要。第一个主要工具是 Montgomery 和 Zippin 的一个简单定理，该定理指出，对于 G 的任意紧子群 F，G 中存在 F 的一个邻域 U，使得：若 H 是包含于 U 的 G 的子群，则存在某个 $g \in G$，使得 $g^{-1}Hg \subset F$（见 [27] 第 5.3 节第 215 页）。此外，若 H 与 F 同构（作为李群），则 $g^{-1}Hg = F$，因为 $g^{-1}H^{\circ}g = F^{\circ}$，二者维数相同；进而 $g^{-1}Hg = F$，因为 $\mathrm{card}(H^{\#}) = \mathrm{card}(F^{\#})$（见 [24] 中的引理 2.1）。

我们已在第3.4节中描述了第二个要素：在同构意义下，紧李群只有可数多个，因此紧子群的可能情形也只有可数多种，且均属于G

现在固定这样一个紧李群 F，并考虑从 F 到 G 的同态空间 Hom(F, G)。每个同态 $F \to G$ 相对于所描述的 F 与 G 的实代数群自然结构都是代数的

在第3.1节中，因此同态集(F,G) 是代数簇的可数并（由次数为 $\leq d$ 的公式给出的同态构成一个仿射簇）。因此，它至多具有可数多个连通分支。两个同态共轭这一性质是闭性质，并且由 Montgomery-Zippin 定理可知，它也是开的。证明至此结束。 □

5.2.3. 不变概率测度的支集。

引理 5.4. 设 G 是一个紧李群，μ 是 Hom(F_n; G) 上 Aut(F_n)-不变且遍历的概率测度。则存在 G 的一个闭子群 H，使得 μ 支集于 Epi(F_n; H) 上。

证明。步骤 1.– 存在一个闭子群 H，使得 μ 支集于态射 $\rho\colon F_n \to G$ 的集合上，其中 $\rho(F_n)$ 是 H 的一个共轭子群。

根据定理 5.3，我们可以固定一个可数族 $(H_i)_{i\in I}$，其中每个共轭类恰好对应一个 H_i。

对于子集 $A \subset G$ 和 $X \subset \mathrm{Hom}(F_n; G)$，我们定义 $X^A = \{g\rho g^{-1};\ g \in A\ \rho \in X\}$。注意，当 X 和 A 都是紧集时，$X^A$ 是紧的。

固定一个闭子群 H。令 $I_H \subset I$ 表示与 H 的真闭子群（在 G 中）的共轭类对应的指标 i 的集合。我们有

$$\mathrm{Epi}(F_n;H)^G = \mathrm{Hom}(F_n;H)^G \setminus \bigcup_{i\in I_H} \mathrm{Hom}(F_n;H_i)^G$$

（这里我们与定理 5.3 的证明中一样，使用闭子群不能严格包含其某个共轭子群这一事实，参见 [24] 中的引理 2.1）。因此满同态集$(F_n;H)^G$对每个同态集$(F_n;H_i)^G$都是紧的，因而是可测的。我们有

$$\mathrm{Hom}(F_n;G) = \bigsqcup_i \mathrm{Epi}(F_n;H_i)^G,$$

其中并集互不相交。由于每个 $\mathrm{Epi}(F_n;H_i)^G$ 都是 Aut(F_n)-不变的，遍历性意味着 μ 将质量 1 赋予 $\mathrm{Epi}(F_n;H)^G$，其中 H 是 G 的唯一一个闭子群。

步骤 2.– 测度 μ 的支集包含在 Epi(F_n;H) 的唯一一个共轭子集中。

对于 g_1 与 $g_2 \in G$，两个子集满同态集$(F_n; H)^{g_1}$与满同态集$(F_n; H)^{g_2}$相交当且仅当它们相等，而这恰好发生在 $g_2^{-1}g_1$ 属于 N(H)，即 H 在 G 中的正规化子时。换言之，满同态集$(F_n; H)^G$ 被子集满同态集$(F_n; H)^g$（其中 $g \in G/N(H)$）所划分。记 p 为从满同态集$(F_n; H)^G$到 G/N(H) 的映射，它将表示 ρ 映到唯一的 $g \in G/N(H)$,

使得 $\rho \in$ 满同态集$(F_n;H)^g$。它是可测映射（[2]）。并且它是自同构群 (F_n)-不变的。因此，由遍历性，μ 以p 的单一纤维为支集。□

5.2.4. 冗余表示上的唯一遍历性。

引理 5.5. 设 G 是 $GL_m(\mathbb{C})$ 的一个紧子群。设 $n \geq N_\#(m)$。令 μ 为 Hom(F_n;G) 上一个 Aut(F_n)-不变的遍历概率测度。若 μ 在集合 $\mathrm{Red}^4(F_n;G) \cap \mathrm{Epi}(F_n;G)$ 上赋予的测度为 1，则 μ 是代数测度 m_G^n。

在开始证明之前，如 § 1.2 中所述，考虑自然映射

$$\#\colon \mathrm{Hom}(F_n;G) \mapsto \mathrm{Hom}(F_n;G^\#);$$

对于一个表示 $\rho\colon F_n \to G$，它将其关联到通过与投影 $\pi\colon G \to G^\#$ 复合得到的表示 $\rho^\#\colon F_n \to G^\#$。对于 $G^\#$ 中的每个元素 $g^\#$，我们固定一个元素 $\hat{g} \in G$，使得 $\pi(\hat{g}) = g^\#$，并假设 $G^\#$ 的单位元 $1^\#$ 的提升是 G $1 \in$ 的单位元。于是，对于 $(G^\#)^n = \mathrm{Hom}(F_n; G^\#)$ 中任意元素 $(g^\#) = (g_1^\#, \ldots, g_n^\#)$，纤维 $F = \#^{-1}(g^\#)$ 可识别为 $\prod_{i=1}^n \hat{g}_i G^\circ$。这给出一个映射

$$(h_1, \ldots, h_n) \in (G^\circ)^n \mapsto (\hat{g}_1 h_1, \ldots, \hat{g}_n h_n)$$

参数化 F。Haar 测度 $m_{G^\circ}^n$ 在此映射下的像按定义即为测度 m_F。如 § 1.2 所述，该测度 m_F 不依赖于提升 $\hat{g}$ 的预先选取。并且若 $\varphi \in$自同构群(F_n) 将一条纤维F （# 的）映到一条纤维 F'，则 $\varphi_*(m_F) = m_{F'}$。此外，

$$m_G^n = \frac{1}{|\mathrm{Epi}(F_n;G^\#)|} \sum_{(g^\#) \in \mathrm{Epi}(F_n;G^\#)} m_{F_{(g^\#)}} \tag{5.1}$$

其中 $F_{(g^\#)}$ 是 # 在 $(g^\#)$ 上方的纤维。

引理 *5.5* 的证明。记 $\pi_{1,n-4}\colon G^n \to G^{n-4}$ 为到前 $n-4$ 个因子的投影，并记 $\pi_{n-1,n}$ 为到最后两个因子的投影；类似地，令$\pi_{n-3,n-2}$为投影 $(g1, \ldots, g_n) \mapsto (g_{n-3}, g_{n-2})$。

步骤 1.– 由于 $n \geq N_\#(m)$，由推论 3.5 可知，自由群 F_n 的自同构群在满同态集 Epi(F_n; $G^\#$) 上传递作用。因此，μ 在满同态集 Epi(F_n; $G^\#$) 上的投影是计数测度。我们只需证明，对于 # 的每个纤维 F，μ_F 的限制与 m_F 成比例。

[2]事实上，设 $\bar{A}$ 为 G/N(H) 的一个紧子集，A 为其在 G 中的原像。逆像 $p^{-1}(\bar{A})$ 等于满同态集(F_n; H)^A。如前所述，满同态集(F_n; H)^A 与同态集(F_n; H)^A $\setminus \bigcup_{i \in IH}$ 同态集(F^n; H_i)^G 重合，因此该子集是可测的。由此可知 p 是可测的。

步骤 2.– 令 $R = \pi_{1,n-4}^{-1}(\mathrm{Epi}(F_{n-4}, G))$ 为所有满足 $(g_1, \ldots, g_n)$ 生成 G 的一个稠密子群的 $(g_1, \ldots, g_{n-4})$ 的集合。则

$$\mathrm{Red}^4(F_n; G) \cap \mathrm{Epi}(F_n; G) = \bigcup_{\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)} \varphi(R).$$

测度 $\mu(\varphi(R)) = \mu(R)$ 与 $\varphi \in$ 自同构群(F_n) 无关，并且由假设 $\mu(\mathrm{Red}^4(F_n; G) \cap$ 满同态集$(F_n; G)) = 1$，因此 $\mu(R) > 0$。由于满同态集$(F_n; G^{\#})$ 是有限的，# 的至少一个纤维 F 满足

$$\mu(R \cap F) > 0.$$

我们固定这样一个纤维 F，并用 $(g_1^{\#}, \ldots, g_n^{\#}) = \#(F)$ 表示它在满同态集$(F_n; G^{\#})$ 中的像。由 R 的定义，$(g_1^{\#}, \ldots, g_{n-2}^{\#})$ 生成 $G^{\#}$。因此，施加一个固定前 $n-4$ 个生成元 $a_1, \ldots, a_{n-4}$ 的 F_n 的自同构 φ，我们可以假设当 $j = n-3, n-2, n-1, n$ 时 $g_j^{\#} = 1^{\#}$。这样做，我们得到 # 的一个新纤维 F'，即位于 $(g_1^{\#}, \ldots, g_{n-4}^{\#}, 1^{\#}, \ldots, 1^{\#})$ 上方的那个，它仍然满足 $\mu(R \cap F') > 0$。为简单起见，我们将 F' 记为 F，并假设当 $j \geq n-3$ 时 $g_j^{\#} = 1^{\#}$。

步骤 3.–让我们证明，Haar 测度 m_F在 F 在 自同构群(F_n)的稳定子群作用下是遍历的。这是 Gelander 定理的一个变体（见 [18]）。

为此，令 $\mathrm{Aut}(F_n)_F$ 表示 F 的稳定子群（等价地，表示 $\mathrm{Epi}(F_n; G^{\#})$ 中 #(F) 的稳定子群），并设 $A \subset F$ 是 $\mathrm{Aut}(F_n)_F$-不变的、具有正 Haar 测度的可测子集。那么，其投影 $\pi_{n-1,n}(A)$ 是 $(G^{\circ})^2$ 中具有正 Haar 测度的可测子集。根据定理 3.8 (2)，$\pi_{n-1,n}(A)$ 中几乎每一对 (h_{n-1}, h_n) 都生成 G°的稠密子群。现在，使用以下类型的尼尔森变换

$$(\hat{g}_1 h_1, \ldots, \hat{g}_{n-2} h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) \mapsto (\hat{g}_1 h_1 w_1, \ldots, \hat{g}_{n-2} h_{n-2} w_{n-2}, h_{n-1}, h_n)$$

其中每个 w_j 都是 h_{n-1} 和 h_n中的一个字，我们看到，对于 A 中几乎每个元素，经过该元素的 $\pi_{n-1,n}$ 整个纤维几乎完全包含在 A 中。我们称 A 关于投影 $\pi_{n-1,n}$ 是饱和的。

接下来，考虑投影 $\pi_{n-3,\ n-2}$。根据我们已证明的结论，$\pi_{n-3,\ n-2}(A)$ 是 $(G^{\circ})^2$ 中全 Haar 测度的子集。现在，我们考虑以下类型的移动

$$(\hat{g}_1 h_1, \ldots, \hat{g}_{n-2} h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) \mapsto (\hat{g}_1 h_1, \ldots, \hat{g}_{n-2} h_{n-2}, h_{n-1} w_{n-1}, h_n w_n),$$

其中 w_{n-1} 与 w_n 是 h_{n-3} 与 h_{n-2} 中的字（回顾 $\hat{g}_{n-3} = 1_G = \hat{g}_{n-2}$）；于是，同样的论证表明 A 关于该投影是饱和的

$\pi_{1,n-2}$。这两个饱和性质表明，A 事实上是一个具有全 Haar 测度的子集。因此 m_F 是遍历的。

因此，m_G^n 对 Aut(F$_n$) 的作用是遍历的，因为 Aut(F$_n$) 在 # 的纤维上具有传递作用。

步骤 4。——现在回到对 μ_F 的研究。由步骤 1 和 2，$\mu_F(R \cap F) > 0$。我们将 μ_F 相对于投影 $\pi_{1,n-2}$ 作测度分解。条件测度 $\mu_{(g)}$，对于

$$(g) \in \prod_{i=1}^{n-2} \hat{g}_i G^\circ,$$

是 $(G^\circ)^2$ 上的概率测度。令 $S := \pi_{1,n-2}(R \cap F)$。对于 $(g) \in S$，测度 $\mu_{(g)}$ 在所有右平移下不变

$$(h_{n-1}, h_n) \mapsto (h_{n-1}w_{n-1}, h_n w_n)$$

其中 w_{n-1} 和 w_n 是 $(g) = (\hat{g}_i h_i)$ 中的任意字，满足 $w_{n-1}(g^\#) = 1^\# = w_n(g^\#)$。对于 $(g) \in S$，这些字对构成 $(G^\circ)^2$ 的稠密子集。因此，$\mu_{(g)}$ 与 Haar 测度 $m_{G^\circ}^2$ 相同。由于 $\mu_F(R \cap F) > 0$，我们得出结论：

$$(\pi_{n-1,n})_* \mu_F \geq \alpha m_{G^\circ}^2$$

对于某个 $\alpha \geq \mu_F(R \cap F) > 0$。我们的意思是，如果 $B \subset (G^\circ)^2$ 可测，那么 $(\pi_{n-1,n})_* \mu_F(B) \geq \alpha m_{G^\circ}^2(B)$。

现在，对于一个使 $m_{G^\circ}^2$ 测度总量达到全部的集合 $P \subset (G^\circ)^2$，每一对 $(h_{n-1}, h_n) \in P$ 都生成 G° 的一个稠密子群。通过在 $\pi_{n-1,n}: F \to (G^\circ)^2$，的纤维上，利用 (h_{n-1}, h_n) 中的字进行右乘，我们推得 $\mu_{(h_{n-1},h_n)}$ 的条件测度 μ_F 是 Haar 测度（更准确地说，是通过 F 的参数化得到的 Haar 测度的像）。因此，$\mu_F \geq \alpha' m_F$ 对于某个 $\alpha' > 0$ 成立。由于 μ 和 m_G^n 在 Aut(F$_n$) 的作用下不变，这一性质在 # 的每个纤维上都成立。因此，$\mu \geq \alpha' m_{G^\circ}^n$。再由 μ 和 m_G^n 的遍历性，我们得出 $\mu = m_{G^\circ}^n$。□

5.2.5. 结论。现在我们证明定理 A 的断言 (3)。设 G 为紧李群。令 m 为使 G 能嵌入 GL$_m$(C) 的最小整数 ≥ 1。取 $n \geq N(m) + 3$。由引理 5.4，μ 的支集包含于某个紧群 $H \subset G \subset GL_m(C)$ 的 Epi(F$_n$; H) 上。由定理 4.1，Epi(F$_n$; H) $\subset$ Red^4(F$_n$; H)。由于 $n \geq N(m)$，我们有 $n \geq N_\#(m)$，因此可将引理 5.5 应用于李群 H。于是 μ 就是代数测度 m_H^n。

注 5.6。在第 5.1.2 节中，我们使用了下界 $N(m) + 2 + \lfloor 3m/2 \rfloor$；这里使用的是 $N(m) + 3$，它更小。由公式 (4.1)、[12]，中 Collins 的定理以及斯特林公式可知，该量有上界 $b + 3m^2 + 2m^2 \log_2(m)$，其中 $b \leq 10^3$ 为某个常数（当 $m \geq 71$ 时，可用 0 替代）。这证明了不等式 (1.4)。

6. 应用

6.1. 特征簇。 与第 3.1节中一样，我们赋予紧李群G 其自然的实代数结构。

令 π: $\mathrm{Hom}(F_n; G) \to \chi(F_n; G)$ 为到特征簇的投影，也就是说，投影到商 $\chi(F_n; G) = \mathrm{Hom}(F_n; G)/\!\!/G$，其中 G 以共轭作用。此处的商是在几何不变理论意义下取得的，因此 π 是代数簇态射，故连续。由 G 的紧致性可知， π 的纤维是 $\mathrm{Hom}(F_n; G)$ 上共轭作用的轨道。

自同构群(F_n)对 $\mathrm{Hom}(F_n; G)$ 的作用诱导出对 $\chi(F_n; G)$ 的作用，该作用经由群 $\mathrm{Out}(F_n) = \mathrm{Aut}(F_n)/\mathrm{Inn}(F_n)$ 因子化。

若 H 是紧群，则其 Haar 测度 m_H 在连续自同构群 Aut(H) 的作用下保持不变。因此，若 H 是 G 的闭子群，则 m_H 在 G 中 H 的正规化子的作用下保持不变。现在，考虑引言中定义的概率测度 m_H^n ，其支集为 $\mathrm{Epi}^{\#}(F_n; H)$，并将其投影以得到 $\chi(F_n; G)$ 上的概率测度$\pi_* m_H^n$ ；该测度仅取决于 H 在 G 中的共轭类 $[H]$ 。如此一来，我们至多得到可数多个不同的概率测度 $m_{[H]}^n := \pi_* m_H^n$。定理 A 直接推出以下结论。

定理 6.1. 设 G 是 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ 的紧子群。若 $n \geq N(m) + 2 + \lfloor \frac{3m}{2} \rfloor$，则 $\chi(F_n; G)$ 中 $\mathrm{Out}(F_n)$- 不变的遍历概率测度恰为测度 $m_{[H]}^n$。若 K 是一个紧不变子集，且 $\mathrm{Out}(F_n)$ 在其上的作用是拓扑传递的，那么对于 G 的某个唯一闭子群 H，有 $K = \pi(\text{满同态集}^{\#}(F_n; H))$。

6.2. 非紧群中的紧轨道。本节中，对于某个 $m \geq 1$，我们将 G 替换为非紧线性群 $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$。我们仍将投影记作$\pi$: $\mathrm{Hom}(F_n; \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})) \to \chi(F_n; \mathrm{SL}_m(\mathbb{R}))$，它投影到特征簇上。与紧情形不同，纤维通常并非共轭类。当两个表示的共轭类闭包相交时，它们在特征簇中被视为相同。

表示 $\rho\colon F_n \to SL_m(R)$ 若其像保持 R^m 的一个真非平凡子空间不变，则称为可约；否则称为不可约。若它保持分解 $R^m = \bigoplus V_i$ 的每个因子不变，且其在每个因子上的限制均不可约，则称为完全可约。

如果 ρ 是可约的，我们可以找到一个完全可约表示 ρ_0，使得 ρ 和 ρ_0 在特征簇中的像相同。根据 Jordan-Hölder 理论，它在共轭意义下唯一。我们称 ρ_0 为 ρ 的半单化。为构造它，假设 ρ 保持一个非平凡真子空间 $V \subset R^m$。令 W 为满足 $R^m = V \oplus W$ 的任意子空间。令 r_t 为 R^m 上的线性变换：在 V 上按乘以 t^w 作用，在 W 上按乘以 t^{-v} 作用，其中 $v = \dim(V)$ 且 $w = \dim(W)$，从而 r_t 属于 $SL_m(R)$。若用 r_t 对 ρ 进行共轭，并令 t 趋于 $+\infty$，则在极限处得到一个保持直和 $V \oplus W$ 的每个因子的新表示 ρ'。重复此过程至多 m 次，我们看到，在 ρ 的共轭类的闭包中存在一个完全可约表示 ρ_0。由于投影 π 是连续的，ρ 和 ρ_0 在特征簇中的像相同。

定理 6.2. 设 m 为正整数，且 n 足够大。设 ρ 是 $\mathrm{Hom}(F_n;SL\ m(R))$ 中的一个元素。若 $\pi(\rho)$ 在 $\chi(F_n;SL\ m(R))$ 中的 $\mathrm{Out}(F_n)$-轨道相对紧，则 ρ 的半单化 ρ_0 取值于一个紧群。若进一步 ρ 完全可约，则 ρ 本身取值于一个紧群。

对于可约表示，必须先进行半单化。例如，考虑一个取值于幺幂上三角矩阵群的非平凡表示 ρ。它在 $\chi(F_n;SL_m(R))$ 中的像是平凡表示的等价类，因此被 $\mathrm{Out}(F_n)$ 固定，但 ρ 并不有界。

推论 6.3. 对于 $m \geq 1$ 且 n 足够大，$\chi(F_n; SL_m(R))$ 中最小的 $\mathrm{Out}(F_n)$-不变紧子集为 $\pi(\mathrm{Epi}^{\#}(F_n; G))$，其中 G 是 $SL_m(R)$ 的一个紧子群。

若将 C^m 视为实向量空间，就得到一个从 $SL_m(C)$ 到 $SL\ 2_m(R)$ 的嵌入，以及一个连续映射 $\chi(F_n;SL_m(C)) \to \chi(F_n;SL\ 2_m(R))$。这可用于证明上述结论对 $SL_m(C)$ 同样成立，只需将 $SL_m(R)$ 替换为它。

特别地，若 n 较大（$n \geq Z(2m)$），且 $\rho\colon F_n \to SL_m(C)$ 在特征簇中有有限轨道，则其半单化的像是有限的。

定理 *6.2*的证明。 设 G 是 $\rho(F_n)$ 在 特殊线性群$_m$（$\mathbf{R}$）中的（实）扎里斯基闭包 .

步骤 1。首先，我们假设 ρ 是不可约的。如果 G 是紧的，则它共轭于 $SO_m(R)$ 的一个子群，我们便得到结论。因此，为了导出矛盾，假设 G 不是紧的。记 G 的近端秩为 r（见 [3, 第 4.1] 节）。根据定义，这是满足以下条件的最小整数 ≥ 1：存在元素 $g_k \in G$、标量 $\lambda_k \in R$，以及一个秩为 r 的非零端同态 f，使得 $\lambda_k g_k$ 收敛于 f。由于 G 不是紧的，该秩为 $\leq m-1$，且 f 不可逆。

根据定理 4.3，ρ 关于扎里斯基拓扑是冗余的。我们可以假设 $\rho(F_{n-1}) = \langle \rho(a_1) \ldots, \rho(a_{n-1}) \rangle$ 在 G 中扎里斯基稠密。由[3, 引理 6.23] 可知，$\rho(F_{n-1})$ 的近端秩也等于 r。因此，存在一个序列 $w_k \in F_{n-1}$ 和标量 λ_k，使得 $\lambda_k \rho(w_k)$ 收敛到某个秩为 r 的端同态 f。由于 $\rho(w_k)$ 的行列式为 1，而 f 不可逆，λ_k 趋于 0。由 $\rho(F_{n-1})$ 的不可约性，适当用某个 $w \in F_{n-1}$ 所对应的 $\rho(w)$ f 替换 f 后，我们可以假设 f 非幂零；否则，对每个 $w \in F_{n-1}$，都有 $\rho(w)\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$，这将与 $\rho(F_{n-1})$ 的不可约性矛盾。

设 $h = \rho(a_n)$。取 $w_1, w_2 \in F_{n-1}$，稍后确定。存在序列 $\varphi_k \in$自同构群(F_n)，使得 $(\varphi_k)_* \rho(a_n) = \rho(w_1 a_n w_2 w_k)$。由于

$$\lambda_k (\varphi_k)_* \rho(a_n) = \lambda_k \rho(w_1 a_n w_2 w_k) = \rho(w_1) h \rho(w_2) \lambda_k \rho(w_k)$$

我们得到

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k (\varphi_k)_* \rho(a_n) = \rho(w_1) h \rho(w_2) f.$$

取迹后，我们看到，若 $\mathrm{tr}\,(\rho(w_1)h\rho(w_2)\, f) \neq 0$，则 $\mathrm{tr}\,((\varphi_k)_* \rho(a_n))$ 随 k 趋于 $+\infty$。由于函数 $\rho \mapsto \mathrm{tr}(\rho(a_n))$ 在特征簇上诱导出一个连续函数，这将意味着 $\pi(\rho)$ 的轨道在 $\chi(F_n;$ 特殊线性群 $_m(R))$ 中不是相对紧的。

现在我们来证明，可以找到 w_1 与 $w_2 \in F_{n-1}$，使得

$$\mathrm{tr}\,(\rho(w_1) h \rho(w_2) f) \neq 0.$$

确实，否则对于每个 $g_1, g_2 \in \rho(F_{n-1})$，都有 $\mathrm{tr}\,(g_1 h g_2 f) = 0$。由于这是关于 g_1 和 g_2, 的多项式方程，且 $\rho(F_{n-1})$ 在 G 中 Zariski 稠密，因此该方程对所有 $g_1, g_2 \in G$ 都成立。取 $g_1 = h^{-1}$，可得对每个 $g \in G$，都有 $\mathrm{tr}\,(g f) = 0$。取 $g = \rho(w_k)^{l-1}$，其中 $l \in Z$，则有 $\mathrm{tr}\left((\lambda_k \rho(w_k))^{l-1} f\right) = 0$。当 k 趋于无穷时，对每个 $l \in Z$，都有 $\mathrm{tr}\left(f^l\right) = 0$。这意味着 f 是幂零的，矛盾。

步骤 2.– 现在，我们不再假设 ρ 不可约。考虑 ρ 的半单化 ρ_0。设 $R^m = \oplus_i V_i$ 是 R^m 的一个分解，其中各项均为 ρ_0 的不可约表示。根据假设，$\pi(\rho_0)$ 有一个有界轨道。这意味着，在 Hom(F_n; SL m(R)) 上、在共轭下不变的正则函数沿着 Aut(F_n)(ρ_0) 有界。这些函数包括对任意 $w \in F_n$，$\rho(w)$ 的特征值的所有对称函数；并且存在有限个字 (w_j)，其中 $w_i = a_i$，对 $i \leq n$，使得函数 $\rho \mapsto tr(\rho(w_j))$ 生成 $\chi(F_n; SL\ m(R))$ 上的正则函数代数。此外，C^m 的一个子集有界，当且仅当它在初等对称函数下的像也有界。由此可知，Out(F_n)($\pi(\rho_0)$) 有界等价于：对于所有 $\varphi \in Aut(F_n$，以及某个 $D > 0$，所有元素 $\rho(\varphi(w_j))$ 的特征值的模都满足 $\leq D$。因此，对每个 i，由限制 $(\rho_0)|_{V_i}$ 确定的 $\chi(F_n; SL\ (V_i))$ 中的点，在 Out(F_n) 的作用下有一个有界轨道。根据第一步，$\rho_0(F_n)$ 在每个 V_i 上的限制都相对紧，而 $\rho_0(F_n)$ 本身也相对紧，因此其取值落在一个紧子群中。□

6.3. 本原元的约束。令 $P_n \subset F_n$ 为本原元的集合，其中 $a \in F_n$ 是本原元，当且仅当它是 F_n 的某个自由基中的元素。

令 $d(m) < m^2$ 为最小整数，使得 $SL_m(C)$ 的每个扎里斯基闭子群都可以由 d(m) 个元素拓扑生成。

引理 6.4. 设 ρ 是从 F_n 到 $SL_m(C)$ 的一个同态，并令 G 为 $\rho(F_n)$ 的扎里斯基闭包。若 $n \geq N(m) + d(m) - 1$，则 $\rho(P_n)$ 在 G 中扎里斯基稠密。

证明。由定理 4.3，ρ 对扎里斯基拓扑是 d(m)-冗余的。由引理 5.1，ρ 的轨道在 $Red^d(F_n; G) \cap Epi(F_n; G)$ 中扎里斯基稠密。现在，$\rho(P_n) = \pi_1$ (Aut(F_n)ρ)，其中 π_1 是到第一坐标的投影，因此 $\rho(P_n)$ 的闭包包含 π_1 ($Red^d(F_n; G) \cap Epi(F_n; G)$) $= G$。□

以下陈述恰好是猜想 7.1（或等价地，7.3）[19] 当 n 充分大时。

定理 6.5. 令 Uni(m) $\subset GL_m(C)$ 表示幺幂元的代数子簇。假设 $n \geq N(m) + d(m) - 1$。如果 $\rho \in Hom(F_n; GL_m(C))$ 将每个本原元映射为幺幂元，即 $\rho(P_n) \subset$ Uni(m)，那么 $\rho(F_n)$ 共轭于一个幺幂上三角矩阵群。

事实上，引理 6.4 表明， $\rho(F_n)$ 中的每个元素都是幺幂元。该定理随即成立，因为 $GL_m(\mathbf{C})$ 的一个子群若其所有元素都是幺幂元，则它共轭于一个上三角矩阵群。

7. 曲面群的冗余性

设 S_g 是一个亏格为 g 的闭曲面，并令 $\pi_1(S_g)$ 表示其基本群。群 $\mathrm{Aut}(\pi_1(S_g))$ 作用于 $\mathrm{Hom}(\pi_1(S_g);G)$ ，其中 G 为任意群；人们不禁会问，定理 A 的类似结论是否也适用于这种情形。我们目前还不知道如何得到这样的结论。但我们给出了定理 B的一个类似结论。

沿用 Dunfield-Thurston 的术语，我们称 $\rho\colon \pi_1(S_g) \to G$ 是一个稳定化，如果 S_g 可以写成连通和 $S_g = S_{g_1}\#S_{g_2}$ ，并且存在一个表示 $\rho' : \pi_1(S_{g_1}) \to G$，使得 ρ 在 S_{g_1} 上等于 ρ'，而在 S_{g_2} 上是平凡表示（特别地，在进行连通和 $S_{g_1}\#S_{g_2}$ 时所沿的曲线上， $\rho(\gamma) = 1_G$ ）。以下是 [14] 的命题 6.16。

定理 7.1。设 G 为有限群。若 $g > \mathrm{card}(G)$，则每个同态 $\rho\colon \pi_1(S_g) \to G$ 均为稳定化。

我们建立如下推广。

定理 7.2。设 G 为 Jordan 阶至多为 (J, R) 的有限群。若 $g \geq J + R + 1$，则每个 $\rho\colon \pi_1(S_g) \to G$ 均为稳定化。

推论 7.3。对每个整数 $m \geq 1$，存在正整数 T (m)，使得对所有 $g \geq T(m)$，均有同态集$(\pi_1(S_g); U_m(C)) \subset \mathrm{Red}(\pi_1(S_g); U_m(C))$。

此处，若存在分解 $S_g = S_{g_1}\#S_{g_2}$ ，使得$\rho(\pi_1(S^*_{g_1}))$ 在 $\rho(\pi_1(S_g))$ 中稠密，则 ρ 是冗余的，其中 $S^*_{g_1}$ 为穿孔曲面。一旦我们掌握定理 7.2，该推论便可完全如同定理 4.1 那样导出。事实上，在该证明中，尼尔森变换以非平凡方式被使用的唯一之处，是处理 G 的离散部分 $G^{\#}$ 。我们所得到的常数 T (m) 为 $2m(1 + m + J(m))$。

定理 7.2 的证明。 设 $0 \to A \to G \to Q \to 1$ 为 G 的正合列，其中 A 是秩为 $\leq R$ 的阿贝尔群，且 Q 的基数为 $\leq J$。

步骤 1.– 将 ρ 与商映射 $G \to Q$ 复合，得到 $\bar{\rho}\colon \pi_1(S_g) \to Q$。将 $\bar{\rho}$应用于定理 7.1 可得一个分解

$$S_g = S_{g-1}\#T$$

由此诱导出基本群 $\pi_1(S_g) = \pi_1(S^*_{g-1}) \star_\gamma \pi_1(T^*)$ 的分解，其中 T^* 是一个单孔环面，而 S^*_{g-1} 是一个亏格为 $g-1$ 的单孔曲面，并且 $\bar{\rho}$ 在 $\pi_1(T^*)$ 上的限制是平凡的。这意味着 ρ 在 $\pi_1(T^*)$ 上的限制取值于阿贝尔群 A。特别地，曲线 γ 是 S_{g-1} 和 T 的连接处所在的曲线，它等于 $\pi_1(T^*)$ 的生成元的交换子，并且经 ρ 映射后成为 G 中的单位元。由此可得，ρ 诱导出两个表示 $\rho : \pi_1(S_{g-1}) \to G$ 和 $\rho : \pi_1(T) \to A$。

同样的过程可以应用于 $\rho: \pi_1(S_{g-1}) \to G$。将此过程迭代 $R+1$ 次，我们得到一个分解 $S_g = S_{g-R-1} \# S_{R+1}$，使得 ρ 诱导出表示 $\rho: \pi_1(S_{g-R-1}) \to G$ 和 $\rho : \pi_1(S_{R+1}) \to A$。

步骤 2.– 现在只需将研究限制在阿贝尔部分：我们可以假设 $\rho: \pi_1(S_g) \to A$ 的取值落在一个阿贝尔群中，并且 $g \geq R+1$。该表示通过阿贝尔化分解，并可与一个向量 $v \in H^1(S_g; A)$（即 $v \in \mathrm{Hom}(S_g; A)$）对应。通过选取辛基，我们将 $H^1(S_g; A)$ 识别为 A^{2g}。映射类群 Mod_g 在 S_g 的 $H^1(S_g; A)$ 上的作用，通过 $Sp_{2g}(Z)$ 在 A^{2g} 上的作用分解。回顾一下，态射 $\mathrm{Mod}_g \to Sp_{2g}(Z)$ 是满射的（见 [17]中的定理 6.44）。我们将证明存在 $M \in Sp_{2g}(Z)$，使得 Mv 的最后两个坐标为零。这将意味着 S_g 中存在一个单孔环面，在其上限制 ρ 后，后者为平凡表示。

引理 7.4. 辛群 $Sp_{2g}(Z)$ 在 Z^{2g} 的本原向量上具有传递作用。

证明（见 [2] 中的引理 5.3）。令 $(u_1, \ldots, u_g, v_1, \ldots, v_g)$ 为 Z^{2g} 的典范辛基，辛形式由 $u_1^* \wedge v_1^* + \ldots + u_g^* \wedge v_g^*$ 给出。设 w 是 Z^{2g} 中的本原向量。若 $g = 1$，则存在 $Sp_2(Z) = SL_2(Z)$ 中的一个元素将 w 映到 u_1（根据贝祖定理）。因此，我们可以假设 $w = \sum_i a_i u_i$，其中 $w_0 = (a_1, \ldots, a_g) \in Z^g$ 是本原向量。由于 $SL_g(Z)$ 在本原向量上具有传递作用，因此存在矩阵 $M \in SL_g(Z)$，使得 $Mw_0 = u_1$；矩阵 $\mathrm{diag}(M\ {}^tM^{-1})$ 属于 $Sp_{2g}(Z)$，并将 w 映到 u_1。□

将 A 分解为循环群之和 $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$，其中 $r \leq R$，并记 p_i 为到 A_i 上的投影。我们可以将 v 写成一个 $2g \times R$ 矩阵：

$$\begin{bmatrix} p_1(v_1) & \cdots & p_R(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(v_{2g}) & \cdots & p_R(v_{2g}) \end{bmatrix}$$

将 $p_1(v) \in A_1^{2g}$ 提升到 Z^{2g}，引理给出 $M_1 \in Sp_{2g}(Z)$，使得 $M_1 p_1(v) = (\star, \star, 0, \ldots, 0)$，因此 $M_1 v$ 可写成分块矩阵：

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \star & \star & \cdots & \star \\ \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & \star & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \star & \star & \star \end{array}\right]$$

利用一个形如 $\begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}^2$ 的 $Sp_{2g}(Z)$ 元素，我们可以对右下角矩阵（它属于 $(A_2 \oplus \cdots \oplus A_R)^{2(g-1)}$）应用相同的过程。经过 r 次迭代，v 被 $Sp_{2g}(Z)$ 中的一个元素映射为最后两个坐标均为零的向量。□

参考文献

[1] Nir Avni 和 Shelly Garion。《有界李秩单群的乘积替换图的连通性》。J. Algebra, 320(2):945–960,2008.[2] Yves Benoist。《有理辛群》。载于《几何与分析中的对称性》第1卷：纪念 Toshiyuki Kobayashi 的论文集，第357卷《Progr. Math.》，第241–250页。Birkhäuser/Springer，新加坡， [2025] ©2025.[3] Yves Benoist 和 Jean-François Quint。《约化群上的随机游走》。Springer International Publishing.[4] A. Borel 和 J.-P. Serre。《伽罗瓦上同调中的有限性定理》。Comment. Math. Helv., 39:111–164, 1964.[5] Emmanuel Breuillard。《Jordan关于有限子群定理的原始证明阐释》。$GL_n(\mathbb{C})$。Model Theory, 2(2):429–447, 2023.[6] Michel Brion。《具有有限商的代数群的扩张》。Pacific J. Math., 279(1-2):135–153, 2015.[7] Aaron Brown、Alex Eskin、Simion Filip 和 Federico Rodriguez Hertz。《通过因子化方法实现广义u-Gibbs态和平稳测度的测度刚性》。预印本，arXiv:2502.14042:1–278, 2025.[8] Timothy C. Burness、Martin W. Liebeck 和 Aner Shalev。《代数群的长度与深度》。Math. Z., 291(1-2):741–760, 2019.[9] Timothy C. Burness、Martin W. Liebeck 和 Aner Shalev。《紧李群的长度与深度》。Math. Zeitschrift, 294(3):1457–1476, 2020.[10] Peter J. Cameron、Ron Solomon 和 Alexandre Turull。《对称群的子群链》。J. Algebra, 127(2):340–352, 1989.[11] Tal Cohen 和 Itamar Vigdorovich。《李群和代数群中不可约生成集的最大大小》。预印本，第1–12页，2026.[12] Michael J. Collins。《复线性群的Jordan定理》。J. Group Theory, 10(4):411–423, 2007.[13] Charles W. Curtis 和 Irving Reiner。《有限群与结合代数的表示论》。Wiley Classics Library。John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988。重印自1962年原版，Wiley-Interscience出版物。

[14] Nathan M. Dunfield 和 William P. Thurston。《随机3维流形的有限覆盖》。Invent. Math., 166(3):457–521,2006.[15] M. J. Dunwoody。《Nielsen变换》。载于《抽象代数中的计算问题》（会议论文集，牛津，1967），第45–46页。Pergamon，牛津—纽约—多伦多，安大略省，1970.[16] Manfred Einsiedler 和 Thomas Ward。《遍历理论：兼论数论》，《数学研究生教材》第259卷。Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011.[17] Benson Farb 和 Dan Margalit。《映射类群入门》。Princeton Mathematical Series。Princeton University Press，普林斯顿，新泽西州，2012.[18] Tsachik Gelander。《紧李群中的F_n 嵌入》。Israel J. Math., 167:15–26, 2008.[19] Tsachik Gelander。《自同构群(F_n)在表示空间上的作用》。J. Algebra, 656:206–225, 2024.[20] Tsachik Gelander 和 Yair Minsky。《自同构群(F_n)在冗余表示上的动力学》。Groups Geom. Dyn., 7(3):557–576, 2013.[21] Scott Harper。《极小生成集的最大大小》。Forum Math. Sigma, 11:论文编号e70，10，2023.[22] L. G. Kovács 和 Geoffrey R. Robinson。《有限完全可约线性群的生成》。Proc. Amer. Math. Soc., 112(2):357–364, 1991.[23] Masatake Kuranishi。《自由群在李群中的处处稠密嵌入》。Nagoya Math. J., 2:63–71, 1951.[24] Dong Hoon Lee 和 Ta-sun Wu。《拓扑群同态的共轭》。Illinois J. Math., 13:694–699, 1969.[25] Alexander Lubotzky。《自同构群(F_N)在群表示与表示上的动力学》。载于《几何、刚性与群作用》，Chicago Lectures in Math.，第609–643页。Univ. Chicago Press，芝加哥，伊利诺伊州，2011.[26] Rached Mneimné 和 Frédéric Testard。《经典李群理论导论》。Collection Méthodes。[《方法集》]。Hermann，巴黎，1986.[27] Deane Montgomery 和 Leo Zippin。《拓扑变换群》。Robert E. Krieger Publishing Co.，亨廷顿，纽约州，1974。重印自1955年原版。[28] A. L. Onishchik 和 È. ˜B. Vinberg。《李群与代数群》。Springer Series in Soviet Mathematics。Springer-Verlag，柏林，1990。由俄文翻译，D. A. Leites 撰写序言。[29] Julius Whiston。《对称群的极大独立生成集》。J. Algebra, 232(1):255–268,2000。

法国国家科学研究中心，雷恩数学研究所 - 联合研究单位6625，雷恩大学 雷恩，法国电子邮箱：serge.cantat@univ-rennes.fr 电子邮箱：christophe.dupont@univ-rennes.fr 电子邮箱：florestan.martin-baillon@mis.mpg.de