arXiv:2603.09475v1 [cs.DM] 10 Mar 2026

带奇偶约束的无环定向问题的若干多项式类

Sylvain Gravier[1,3], Matthieu Petiteau[1,3], 和 Isabelle Sivignon[2,3]

[1]格勒诺布尔阿尔卑斯大学，法国国家科学研究中心，傅里叶研究所，38000 格勒诺布尔，法国[2]格勒诺布尔阿尔卑斯大学，法国国家科学研究中心，格勒诺布尔国立综合理工学院，GIPSA实验室，38000 格勒诺布尔，法国[3]格勒诺布尔阿尔卑斯大学，Maths à Modeler，38000 格勒诺布尔，法国

2026年3月11日

摘要

我们研究如下问题：在无向图上寻找一种无环定向，使其入度奇偶性受到顶点子集 T 所指定的约束。若顶点 v 的入度为奇数当且仅当 $v \in T$，则称该定向为 T-奇。无约束的奇偶定向问题是多项式时间可解的（Chevalier 等人（1983年）），但施加无环性会使问题更具挑战性，其复杂性仍是一个未决问题。Szegedy 和 Szegedy（2006年）针对该问题提出了一种随机多项式时间算法，但尚不清楚它是否属于 co-NP。此外，Gravier 等人（2025年）证明，该问题在部分有向图上变为 NP完全，即使限制在平面三次图上亦然。

我们确定了无环 T-奇定向存在的三个必要条件：全局奇偶条件 $\mathcal{P}$，以及确保潜在源点和汇点存在的两个条件 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 。遵循 Frank 和 Kiraly（2002年）的工作，我们定义了若干图类，这些图类包含这样的图：对于它们，必要条件 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 的某个给定子集也足以保证无环 T-奇定向的存在。我们建立了这些类之间的包含关系。
我们通过对路径与圈的笛卡尔积的可解实例进行刻画，完成了对这些类的研究。这些结果的证明都是构造性的，因此只要无环 T-奇定向存在，就可以在多项式时间内构造出来。我们利用这些族以及团，来证明我们层次中类的包含关系的严格性。

目录

1 In引言 **2**

2 定义和预备知识 **4**

3 必要条件类：定理 1.1 的证明 **5**
3.1 (a) 和 (b) 的证明 .63.2 (c) 的证明 .63.3 (d) 的证明 .73.4 (e) 的证明 .8

4 路径和/或环的笛卡尔积 **8**
4.1 证明方法和概述 .84.2 基本情形 .104.3 网格.104.4 圆柱和环面 .184.5 最后说明 .33

5 推论 1.5 的证明 **35**
5.1 (c')、(d') 和 (e') 的证明 .365.2 (c")、(d") 和 (e") 的证明 .36

1 引言

本文研究简单图上带奇偶性约束的定向问题。我们首先考虑顶点入度奇偶性的局部约束。对于图 G 和子集$T \subseteq V(G)$，若任意顶点 $v \in V$的入度为奇数当且仅当它属于 T，则称 G 的定向为 T-**奇** 。Chevalier、Jaeger、Payan 和 Xuong（1983年）**chevalierOddRootedOrientations1983**证明，求无向图 G 的 T-奇定向可在多项式时间内求解。具体而言，他们证明这种定向存在当且仅当 T 满足$|E| + |T| \equiv_2 0$。下文中，我们将该性质称为 $\mathcal{P}$。

Frank 与 Király（2002年）**frankGraphOrientationsEdgeconnection2002** 后来考虑增加一个 k-连通全局约束。他们刻画了无向图 $G =(V,\ E)$：存在 k-弧连通的 T-奇定向，当且仅当 $T \subset V$满足 $\mathcal{P}$。这项工作还提出了关于其他全局约束的问题，例如无环性，它可被视为另一类连通性约束。由此引出以下问题：

问题 1 （带奇偶约束的无环定向）。实例：顶点对 $(G、\ T)$，其中 G 为无向图，$T \subseteq V(G)$ 为其顶点集的一个子集。问题：G 是否具有无环的 T-奇定向？

该问题可满足实例的刻画见 Egres平台[1]，并被称为“带奇偶约束的无环定向”问题。这一判定问题的复杂度仍是一个未决问题。Szegedy（2005年）**szegedyApplicationsWeightedCombinatorial2005**提出了一种随机多项式算法来回答问题 1，它与 Szegedy、Szegedy（2006年）中同样给出的拟阵结果密切相关 **szegedySymplecticSpacesEarDecomposition2006**；然而，尚不清楚它是否属于 co-NP，并且该问题在部分有向图上变为 NP-完全，即使限制在既是平面图又是三次图的图上亦然 **gravierNoteComplexityAcyclic2025**。

继Frank和Kiraly（2002年）的研究**frankGraphOrientationsEdgeconnection2002**之后，Egres平台还提出了一个相关的无环性问题：

问题2。
为无向图 $G = (V, E)$ 找出一个良好刻画，使得对于每个满足 $\mathcal{P}$ 的可能 $T \subsetneq V$，都存在一个无环的 T- 奇定向。

条件 $\mathcal{P}$ 仍是存在无环 T-奇定向的必要条件。还需注意，无环约束还带来另外两个必要条件：存在潜在源点和潜在汇点。有限图 G 的任何无环定向都必须至少有一个入度为0的顶点和一个出度为0的顶点。这些顶点分别称为**源点**和**汇点**。在 T-奇定向中，如果一个顶点属于 $Source(T) = V\backslash T$，则称其为**潜在源点**；如果它属于 $Sink(T) = \{v \in T,\ d(v) \equiv_2 1\} \cup \{v \in V\backslash T,\ d(v) \equiv_2 0\}$，则称其为**潜在汇点**。之所以这样命名，是因为在 G 的任何无环 T-奇定向中，源点和汇点必定分别是潜在源点和潜在汇点。还值得注意的是，如果对于某个顶点 v 有 $Source(T) = Sink(T) = \{v\}$，那么除非该图是单点图，否则不存在无环 T-奇定向。这个必要条件相对较弱；事实上，T 中的任何奇度顶点都属于 $Sink(T)\backslash Source(T)$，而 $V\backslash T$ 中的任何奇度顶点都属于 $Source(T)\backslash Sink(T)$，同时 $V\backslash T$ 中的偶度顶点属于 $Source(T) \cap Sink(T)$，因此 $Source(T) = Sink(T)$ 当且仅当该图没有奇度顶点。由此，我们不单独考虑这一条件，而是出于对称性的原因，将其同时纳入**源点条件** $\mathcal{S}$ 和**汇点条件** $\mathcal{S}$。由此得到存在无环 T-奇定向的以下必要条件：

$$\mathcal{P}\colon\ |E| + |T| \equiv_2 0.$$
$$\mathcal{S}\colon\ \ Source(T) \neq \varnothing \text{并且如果 } |Source(T)| = 1\text{，那么要么是} \begin{cases} |V| = 1 \\ \text{，要么是} Source(T) \neq Sink(T). \end{cases}$$

[1] https://lemon.cs.elte.hu/egres/open/Acyclic_定向_with_parity_constraints

$\mathcal{S}$: $Sink(T) \neq \varnothing$ 并且如果 $|Sink(T)| = 1$，那么要么是 $\begin{cases} |V| = 1 \\ \\ \end{cases}$，要么是$Sink(T) \neq Source(T)$.

现在，我们将类 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}, \mathcal{C}_{\mathcal{S}}, \mathcal{C}_{\mathcal{S}}, \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}, \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{P}}\mathcal{S}}, \mathcal{C}_{\mathcal{SS}}, \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{P}}\mathcal{SS}}$定义为这样一些图的集合：对于这些图，带索引的必要条件也是存在无环 T-奇定向的充分条件。具体而言，若某个图属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$，则对于满足 $\mathcal{N}$ 中所有必要条件的任意子集 T，该图都存在无环 T-奇定向；由此可知，对于所有此类 T，$\{\mathcal{PSS}\}\backslash\mathcal{N}$ 中的所有必要条件总是成立。特别地，这些类之间有显然的包含关系：若 $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N} \subseteq \{\mathcal{PSS}\}$，则 $\mathcal{C}_{\mathcal{N}'} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$。
我们的第一个结果是描述上述所有类。本定理的证明见第 3 节。

定理 1.1。

(a) $\mathcal{C}_{\mathcal{S}} = \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{S}}} = \{$,(b) $\mathcal{C}_{\mathcal{SS}} = \{$,(c) $\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{$ $\} \cup \{G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \mid G$ 是连通的、非欧拉的，并且 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1\}$,$(d)$ $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{$, $\} \cup \{G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \mid G$ 是欧拉的$\}$,(e) $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \subset \{$ $\} \cup \{G \mid G$ 是连通的、非欧拉的，并且 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0\}$。

借助这一新的形式体系，问题 2 实质上是在问 G 是否属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$。为了说明这一问题的背景，我们回顾 Kiraly 和 Kisfaludi-Bak 的一个结果：

定理 1.2 (kiralyDualCriticalGraphsNotes中的定理1.8)。
设 $G = (V, E)$ 是一个图。
对于所有满足 $|E(G)| + |T| \equiv_2 0$ 的 $T \subseteq V$，G 存在一个无环的 T-奇定向，当且仅当对于某个顶点 $v \in V$，G 存在一个满足 $T' = V\backslash\{v\}$ 的无环 T'-奇定向。

请注意，定理 1.2 与问题 2 所问的内容有所不同：定理 1.2 刻画了属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ 的图，而问题 2 则要求对集合 $T \subsetneq V$ 给出类似的刻画。事实上，这一区别很重要；正如我们稍后将看到的，存在一些不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ 的图，但对于每个满足 $\mathcal{P}$ 的 $T \subsetneq V$，它们都存在无环的 T-奇定向。

此外，约束条件 $T \subsetneq V$ 保证了源点的存在，但破坏了与汇点存在性之间的对称性。通过研究类 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$、$\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$，我们恢复了这种对称性。

在第二节中，我们研究由环和/或路径的笛卡尔积定义的实例类。我们将**网格**、**环面**和**圆柱**分别定义为两条路径、两个环以及一个环和一条路径的笛卡尔积（见图1 和2）。随后，我们对满足全部三个必要条件 T 的集合 $\mathcal{PSS}$ 给出完整刻画，使得 G 具有无环 T-奇定向，其中 G 是网格图、环面或圆柱。特别是，作为第二个主要结果，我们证明以下两个定理：

定理 1.3。设 $G = C_p \square H_q$ 是一个图，其中 C_p 是一个包含 p 个顶点的环，而 H_q 是一条包含 q 个顶点的路径或环。设 $T \subset V(G)$ 是满足 $\mathcal{PSS}$ 的子集。

如果 H_q 是路径，或者如果 p、$q \geqslant 4$，那么 G 具有一个无环的 T-奇定向。

定理 1.4。设 $G = P_p \square P_q$ 是一个图，其中 P_p 和 P_q 是路径，其顶点集分别为 $\{v_1, \ldots, v_p\}$ 和 $\{w_1, \ldots, w_q\}$。设 $T \subset V(G)$ 是满足 $\mathcal{P}$ 的一个子集。

$P_p \square P_q$ 没有无环的 T-奇定向，当且仅当 p、$q \equiv_2 0$ 和 $V\backslash T$ 满足：

- $(v_{2k}, w_j) \in V\backslash T$ 当且仅当对于所有 $k \in \{1, \ldots, \frac{p}{2} - 1\}$ 以及 $j \in \{1, q\}$，$(v_{2k+1}, w_j) \in V\backslash T$。
- $(v_i, w_{2k}) \in V\backslash T$ 当且仅当对于所有 $i \in \{1, p\}$ 以及 $k \in \{1, \ldots, \frac{q}{2} - 1\}$，$(v_i, w_{2k+1}) \in V\backslash T$，对称地成立。

作为这些刻画的一个推论，我们证明类 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$、$\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$与$\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$ 之间的包含关系实际上是严格的（见图 3）：

推论 1.5. 设 p、q、$k \geqslant 1$ 为三个整数。

(c)' 圆柱 $C_{2p+1} \square P_{2q}$、网格 $P_{2p+1} \square P_q$ 和树属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。*(d)'* 环面 $C_p \square C_q$（具有 p、$q \geqslant 4$）和圈属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。

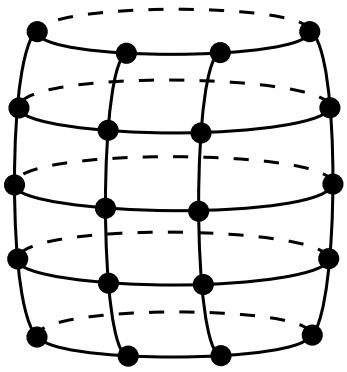


图 1：圆柱图 $C_4 \times P_5$

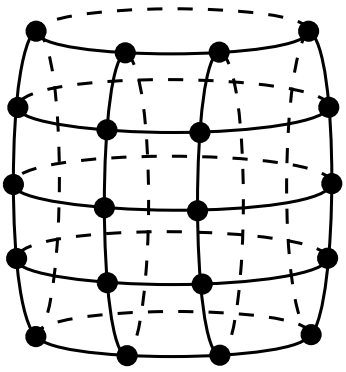


图 2：环面图 $C_4 \times C_5$

(e)' 圆柱 $C_{2p} \square P_q$、$C_{2p+1} \square P_{2q+1}$ 属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$。–

此外，

(c)" 团 $K_{4k+2} \in \{G \text{ 连通且非欧拉 } \mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1\} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。*(d)"* 团 $K_{2k+1} \in \{\circ\ \circ\} \cup \{G \mid G \text{ 是欧拉的}\} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$。*(e)"* 团 $K_{4k} \in \{G \text{ 连通且非欧拉} \mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0\} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。 –

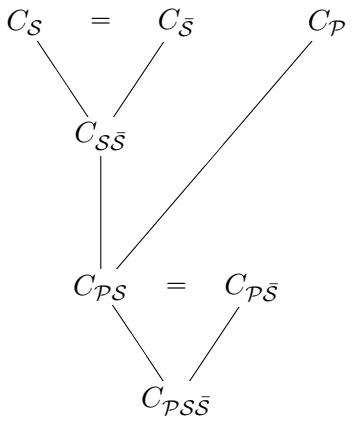


图 3：定理 1.1。

本文分为三个主要部分。第3 节证明了关于图类的定理1.1。第4节证明了关于由路径和环的笛卡尔积得到的图的定理1.3 和1.4 。最后，第5 节将证明最后这个推论。

2 定义与预备知识

一个**图** G 是一个由 $(V(G), E(G))$ 构成的顶点对，其中 $V(G)$ 是非空顶点集， $E(G)$ 是边集。我们只考虑简单图，即无自环且没有重边的图。对于子集 $X \subseteq V(G)$，**子图** $G[X]$ 是一个图，其顶点集为 X ，边集为$E(G[X]) = \{(u, v) \mid u \in X, v \in X, (u, v) \in E(G)\}$。对于子集 $X, Y \subseteq V(G)$，**割集** $\delta(X, Y)$是由一端点位于 X、另一端点位于 Y的边组成的集合。当 $Y = V(G) \backslash X$时，我们简写为 $\delta(X)$。顶点 v的**度**记为 $d(v)$，是与 v关联的边数，即 $|\delta(v)|$。

设 G 和 H 是两个图。 G 与 H的**笛卡尔积** 记为 $G \square H$，它是顶点集为 $V(G \square H) = V(G) \times V(H) = \{(u, v) \mid u \in V(G),\ v \in V(H)\}$的图。在 $V(G \square H)$ 中的两个顶点$(u,\ v)$ 和 $(u',\ v')$ 相邻，当且仅当 $[u = u'$ 和 $(v, v') \in E(H)]$，或者 $[v = v'$ 和

$(u,\ u') \in E(G)]$。

一个**有向图** D 由非空顶点集 $V(D)$ 和弧集 $A(D)$组成，其中弧是顶点的有序对。根据顶点的排列顺序，弧记作 $\overrightarrow{uv}$ 或 $\overrightarrow{vu}$。对于子集 $X,\ Y \subseteq V(D)$，割集 $\delta_D(X,\ Y)$ 是一个端点在 X中、另一个端点在 Y中的弧所构成的集合。对于顶点 $v \in V(D)$，我们将**出度** $d_D^+(v)$ 和**入度** $d_D^-(v)$分别定义为从 v向外和向内的弧的数量。度 $d_D(v)$ 为 $d_D^+(v) + d_D^-(v)$。如果所讨论的图没有歧义，可以省略下标。

给定一个图 G 和一个集合 $S \subset E(G)$，一个**定向** O （ S 的）是一个弧集，使得对于每一条边 $uv \in S$，要么 $\overrightarrow{uv} \in O$ ，要么 $\overrightarrow{vu} \in O$，但不能两者兼有。一个**定向** O （**图** G 的）是 $E(G)$的一个定向，我们用 $G_O = (V(G),\ O)$ 表示其关联有向图。弧集 A 称为**无环**，如果由 A 诱导的子图不包含任何有向圈。由此推广，有向图 D 是无环的，如果其弧集 $A(D)$ 是无环的。

对于图示，给定 $(G,\ T)$ 作为问题1的一个实例，我们将 T中的顶点称为**黑色**顶点，并将 $V(G)\backslash T$ 中的顶点称为**白色**顶点。**灰色**顶点表示既可以是黑色也可以是白色的顶点。**蓝色集合**是同色顶点的集合；因此，由灰色顶点构成的蓝色集合是其顶点要么全部为白色、要么全部为黑色的集合。

必要条件的三类：定理 1.1的证明

首先，我们证明以下有用的引理。令 $\mathcal{G}_{\leqslant 3}$ 为至多有 3 个顶点的图的集合。**引理 3.1**。 以下结论成立：

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{S}}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \{\circ, \circ\ \circ\}$$
$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}\overline{\mathcal{S}}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \{\circ, \circ\ \circ, \circ\!-\!\circ\}$$
$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \{\circ, \circ\!-\!\circ, \text{△}\}$$
$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \mathcal{C}_{\mathcal{P}\overline{\mathcal{S}}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \{\circ, \circ\ \circ, \circ\!-\!\circ, \text{△}, \text{⋀}, \circ\ \circ\}$$
$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\overline{\mathcal{S}}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \{\circ, \circ\ \circ, \circ\!-\!\circ, \text{△}, \text{⋀}, \circ\ \circ, \circ\!-\!\circ\}$$

证明。

( )单顶点图存在无环的 T-奇定向，当且仅当 $T = \varnothing$；若 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{S}$或 $\mathcal{S}$中的任一条件成立，这一点已得到保证。因此，它属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$、 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$、 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$，并且根据包含关系，也属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$、$\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$、 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$和 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{S}}$。

( )该图存在无环的 T-奇定向，当且仅当 $|T| = 1$。因此，它不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$或 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$，因为满足 $|T'| = 0$的集合 T'会满足 $\mathcal{S}$，但不满足 $\mathcal{S}$；而 $|T'| = 2$会满足$\mathcal{S}$ ，但不满足 $\mathcal{S}$。但它确实属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ ，因为任何同时满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 的集合 T' 都必须大小为 1。它也属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$，因为任何满足 $\mathcal{P}$的集合 T'都满足 $|T'| \equiv_2 |E| \equiv_2 1$。因此，根据包含关系，它也属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$、 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$和 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{S}}$。

( )该图存在无环的 T-奇定向，当且仅当 $|T| = 0$。因此，它不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ ，因为一个满足 $|T'| = 2$ 的集合 T' 会满足 $\mathcal{P}$ ，但不满足 $\mathcal{S}$。不过，它确实属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$和$\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ ，因为 $T = \varnothing$ 满足这两个条件；但若集合 T' 中 $|T'| \geqslant 1$ ，则既不满足 $\mathcal{S}$ ，也不满足$\mathcal{S}$，因为 $|V\backslash T' \cup \{v \in T',\ d(v) \equiv_2 1\}| > 1$ 不会成立。根据包含关系，它也属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$、$\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$、 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$和 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{S}}$。

( )该图存在无环的 T-奇定向，当且仅当 $|T|$ 为偶数。该图既不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ ，也不属于$\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ ，因为一个仅含一个度为 1 的顶点的集合 T' 会同时满足$\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ ，但不满足 $\mathcal{P}$。不过，它确实属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ ，因为任何满足 $\mathcal{P}$ 的集合 T' 恰好满足$|T'| \equiv_2 |E| \equiv_2 0$。根据包含关系，它也属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$、 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$和 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{S}}$。

( )当且仅当 $|T| = 1$时，该图存在无环的 T-奇定向。该图不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$，也不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$，因为一个满足 $|T'| = 0$ 的集合 T' 将同时满足 $\mathcal{S}$ 和$\mathcal{S}$。它也不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$，因为一个满足 $|T'| = 3$ 的集合 T' 将满足 $\overline{\mathcal{P}}$，但不满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$。然而，它确实属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}\mathcal{S}}$，因为如果一个集合 T' 满足 $\mathcal{P}$，它就满足 $|T'| \equiv_2 1$；而如果它满足 $\mathcal{S}$ 或 $\mathcal{S}$，

它就满足 $|V\backslash T'|>1$。因此，它要求 $|T'|=1$。根据包含关系，它也属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。

( ) 当且仅当 $|T|=0$ 时，该图存在一个无环的 T-奇定向。该图不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{SS}}$，因为满足 $|T'|=1$ 的集合 T' 会同时满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$。它也不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$，因为满足 $|T'|=2$ 的集合 T' 会满足 $\mathcal{P}$。然而，它确实属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$，因为若集合 T' 满足 $\mathcal{P}$，则它验证 $|T'|\equiv_2 0$；若它满足 $\mathcal{S}$ 或 $\mathcal{S}$，则它验证 $|V\backslash T'|>1$。因此，它要求 $|T'|=0$。根据包含关系，它也属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。

( ) 该图不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{SS}}$，因为任何满足 $|T'|=2$ 的集合 T' 都会同时满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$，但不满足 $\mathcal{P}$。它也不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$，因为满足 $|T'|=3$ 的集合 T' 会满足 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$，但不满足 $\mathcal{S}$。它不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$，因为仅由孤立顶点构成的集合 T' 会同时满足 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$，但不满足 $\mathcal{S}$。然而，它确实属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$，因为满足 $\mathcal{PSS}$ 的唯一可能集合 T' 是仅包含一个度为 1 的顶点的集合。这类集合始终存在无环的 T'-奇定向。□

引理 3.2。令 $G\in\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$ 满足 $|V(G)|\geqslant 4$。则 G 是连通的。

证明。
反设 G 不连通。
a. 首先假设 G 中的每个顶点都具有偶度。令 H 为最小的连通分量；由于该图是简单图且所有顶点的度都是偶数，它要么只有一个顶点，要么至少有 3 个顶点。由 H 的极小性以及 $|V(G)|\geqslant 4$，可得 $|V\backslash H|\geqslant 3$。任取$A\subset V\backslash H$，若 $|V(G)|+|E(G)|\equiv_2 0$ 则满足 $|A|=2$，否则满足 $|A|=3$。对 A 的这一选择意味着$|A|\equiv_2|V(G)|+|E(G)|$，特别地，集合 $T=V(G)\backslash A$满足 $\mathcal{P}$。此外，T满足$\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$，因为 $A\subseteq Source(T)\cap Sink(T)$且 $|A|\geqslant 2$。然而，由于 H中的所有顶点都属于 T，G不存在无环的 T-奇定向，因此 $T(H)$违反了 $G[H]$中的 $\mathcal{S}$。

b. 现假设存在两个具有奇度的顶点 $u,v\in V(G)$。
- 若 $|V(G)|+|E(G)|$为奇数，则对任意顶点 $x\neq u,v$选取 $T=V(G)\backslash\{x\}$。此时，T满足$\mathcal{P}$。由于 $\{x\}=Source(T)$、$u,v\in Sink(T)$以及 $Source(T)\neq Sink(T)$，它也满足 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$。然而，除包含 x的连通分量外，至少还存在另一个连通分量，且其所有顶点都在 T中，因此它不满足 $\mathcal{S}$，从而 G不存在无环 T-奇定向。

- 若 $|V(G)|+|E(G)|$为偶数，则选取 $T=V(G)\backslash\{u,x\}$，使 x与u处于同一连通分量（由于 u 具有奇度，x 必定存在）。注意，T满足 $\mathcal{P}$。若 x 不同于 v，则由于 $\{u,x\}=Source(T)$、$\{v\}\in Sink(T)$ 以及 $Source(T)\neq Sink(T)$，T也满足 $\mathcal{S}$和$\mathcal{S}$。但任何不同于包含 u 的连通分量的其他连通分量，其所有顶点都在 T中，且不含潜在源点，因此 G 不存在无环 T-奇定向。
否则，如果 $x=v$，那么我们最终可以假设 u 和 v 自身构成一个包含两个顶点的连通分量。现在取 $T=V(G)\backslash\{y,\ z\}$，使得 $y,\ z$ 均不同于 $u,\ v$（由于 $|V(G)|\geqslant 4$，可以保证它们存在）。这样的 T 可确保其满足 $\mathcal{PSS}$，因为$\{y,\ z\}\in Source(T)$、$\{u,\ v\}\in Sink(T)$。然而，G没有无环的 T-奇定向，因为$u,\ v\in T$，且由 $u,\ v$ 组成的连通分量不满足 $\mathcal{S}$。□

以下各小节将证明定理 1.1 的各个结论。

3.1 (a) 和 (b) 的证明

根据引理 3.1，我们有$\{\ ,\ \circ\ \circ\}=\mathcal{C}_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{G}_{\leqslant 3}=\mathcal{C}_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{G}_{\leqslant 3}$以及 $\{\ ,\ ,\ \circ\ \circ\}=\mathcal{C}_{\mathcal{SS}}\cap\mathcal{G}_{\leqslant 3}$。事实上，我们证明它们是 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}},\ \mathcal{C}_{\mathcal{S}},\ \mathcal{C}_{\mathcal{SS}}$ 中仅有的图。
令 G 为任意具有 $|V(G)|\geqslant 4$ 的图。我们找到满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 但不满足 $\mathcal{P}$的 T。考虑满足以下条件的$T\subsetneq V(G)$：当 $|E(G)|\equiv_2 1$时，$|T|=2$；否则为 $|T|=1$。根据构造，T 不满足 $\mathcal{P}$。由于 $T\neq V(G)$，且因为 $|V(G)|\geqslant 4$，我们有 $|Source(T)|=|V(G)\backslash T|\geqslant 2$，因此 T 满足 $\mathcal{S}$。如果所有顶点的度都是偶度，那么 $Source(T)=Sink(T)$，并且 $\mathcal{S}$ 也得到满足。否则，可以选择T 使其包含一个奇度顶点，从而 $\mathcal{S}$ 得到满足。因此：

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}}=\mathcal{C}_{\overline{\mathcal{S}}}=\{\circ,\circ\ \circ\}\subsetneq\mathcal{C}_{\mathcal{S}\overline{\mathcal{S}}}=\{\circ,\circ\ \circ,\circ\text{–}\circ\}.\quad\square$$

3.2 （c）的证明

定理 1.1 的这部分可以用定理 1.2 来证明；不过，我们给出一个独立的证明。

我们先证明:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \subseteq \{\circ\} \cup \{G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PS}\overline{\mathcal{S}}} \mid G \text{ is connected, non-Eulerian and } |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1\}$$

设 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。由引理 3.1 和 3.2， G 是连通的。

假设 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0$。令 $T = V(G)$。由于 $|E(G)| + |T| \equiv_2 0$，因此 T满足 $\mathcal{P}$。此外， T不满足 $\mathcal{S}$。因此， G 满足 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1$。

用反证法，假设 G 是一个满足 $|V(G)| > 1$的欧拉图。取某个顶点 $v \in V(G)$，令 $T = V(G)\backslash\{v\}$ 。这一选择确保 T 满足 $\mathcal{P}$。但注意，在这种情况下 $Source(T) = Sink(T) \equiv \{v\}$，而由于 $|V(G)| > 1$， $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$均不满足。因此，图 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ 不可能是欧拉图。现在证明另一个包含关系。

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \supseteq \{\circ\} \cup \{G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PS}\overline{\mathcal{S}}} \mid G \text{ is connected, non-Eulerian and } |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1\}.$$

显然，$\in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。设 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$ 是一个连通的非欧拉图，且满足 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1$和 $|V(G)| \geqslant 1$。我们将证明 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。考虑任意满足 $\mathcal{P}$ 的集合 $T \subseteq V(G)$，即$|E(G)| + |T| \equiv_2 0$。这意味着 $|Source(T)| = |V(G)\backslash T| \equiv_2 1$。注意，由于 G 是非欧拉图，G 含有非空且为偶数个奇数度顶点，因此， $Source(T) \neq Sink(T)$。若 T 至少包含一个奇数度顶点，则 $Sink(T) \neq \varnothing$。否则， $Source(T)$ 包含所有奇数度顶点（非空集合），并且至少包含一个偶度顶点，该顶点属于 $Sink(T)$。在两种情形下，$Source(T) \neq \varnothing$、 $Sink(T) \neq \varnothing$ 和 $Source(T) \neq Sink(T)$，从而证明 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 均成立。

由于 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PS}\overline{\mathcal{S}}}$，因此 G具有一个无环的 T-奇定向。因此 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。 □

3.3 (d) 的证明

我们证明:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{\circ\ \circ, \circ\!\circ\!\circ\} \cup \{G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PS}\overline{\mathcal{S}}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \mid G \text{ is Eulerian}\} = \mathcal{C}_{\mathcal{P}\overline{\mathcal{S}}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}}.$$

证明。
根据引理 3.1，我们有 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \cap \mathcal{G}_{\leqslant 3} = \{\circ, \circ\ \circ, \circ\!\circ\!\circ, \circ\!\circ\!\circ\!\circ, \circ\!\circ\!\circ\!\circ\!\circ\}$。此外，根据$(c)$， $\{\circ\!\circ\!\circ, \circ\!\circ\!\circ\!\circ\} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。因此 $\mathcal{G}_{\leqslant 3} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \mathcal{G}_{\leqslant 3} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{\circ\ \circ, \circ\!\circ\!\circ\}$

设 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$满足 $|V(G)| \geqslant 4$。显然， $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PS}\overline{\mathcal{S}}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。
反设 G 是非欧拉的。根据引理 3.2， G 是连通的。因此， G 有非零偶数个奇数度顶点。记 $O(G)$ 为奇度顶点集。我们证明 G 既不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$，也不属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$。设 $T_1 = V(G)\backslash O(G)$ 且 $T_2 = V(G)$。
集合 T_1 满足 $\mathcal{S}$ 但不满足 $\mathcal{S}$，因为 $Source(T_1) = O(G)$ 但 $Sink(T_1) = \varnothing$；而 T_2 满足 $\mathcal{S}$但不满足 $\mathcal{S}$，因为 $Source(T_2) = \varnothing$ 但 $Sink(T_2) = O(G)$。由于 $|O(G)| \equiv_2 0$， $|T_1| \equiv_2 |T_2| \equiv_2 |V(G)|$。此外，由于 $G \notin \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$，并且考虑到假设 G 是连通且非欧拉的，根据定理 1.1 的 (c) 项，我们有 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0$。因此， $|T_1| \equiv_2 |T_2| \equiv_2 |E(G)|$ 和 $\mathcal{P}$ 成立。于是， T_1 满足 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$，但不满足 $\mathcal{S}$；而 T_2 满足 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$，但不满足 $\mathcal{S}$，由此得出矛盾。

对于另一方向的包含，我们证明任何 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$ 仅含偶度顶点的图（不一定连通）都属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。令 $T \subseteq V(G)$。由于所有顶点的度都是偶数，因此我们有 $Source(T) = Sink(T)$，于是:

$$T \text{ satisfies } \mathcal{S} \iff T \text{ satisfies } \overline{\mathcal{S}}.$$

由于欧拉图的顶点度数都为偶数，我们得出 $\{\circ, \circ\!\circ\!\circ\} \cup \{G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \mid G\text{是欧拉图}\} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}\backslash\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。 □

3.4 (e) 的证明

至多有三个顶点的所有图都属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$，由引理 3.1可知。设 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$ 满足$|V(G)| \geqslant 4$。由引理 3.2，G 是连通的。此外，由定理 (d) 的第 1.1点，G 是非欧拉的；由定理 (c) 的第 1.1点，我们有 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0$。因此

$$\mathcal{C}_{\mathcal{PS}\overline{\mathcal{S}}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \subseteq \{ \} \cup \{G \text{ connected and non-Eulerian} \mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0\}.$$

□

4 路径和/或环的笛卡尔积

本节专门证明定理1.3和1.4。在第一个小节中，我们介绍一种通用方法，称为 T-分解，并在所有证明中使用。随后，我们研究基本情形（即树和圈），再讨论网格、圆柱，最后是环面。

4.1 证明方法与概述

这里介绍下一节各小节证明中使用的主要工具。我们先给出问题1的一个等价表述。

问题 3 （博弈）。
实例：顶点对 (G, T)，其中 $G = (V, E)$ 是一个图，$T \subset V$ 是一个顶点子集，其顶点染成黑色，其余顶点染成白色。
规则：这是一个单人游戏。每一回合，玩家必须移除一个白色顶点；移除后，玩家将该顶点的邻点颜色翻转：黑色邻点变为白色，白色邻点变为黑色。

问题：在遵守游戏规则的前提下，能否移除 G 的所有顶点？

引理 4.1。问题*3* 等价于问题 *1*。

证明。
设 $G = (V, E)$ 是一个图，$T \subset V$ 是一个顶点集合。
⇒）设 $v_1 > \cdots > v_n$是一个能够解决问题 3 的顶点消去序。定义边集 o 上的无环定向 G 如下：对每个 $v_i > v_j$，将边 v_iv_j 从 v_i 定向至v_j。该定向显然无环，而且还是 T-奇定向。事实上，每个顶点被移除时都是白色；因此，初始为黑色（分别为白色）的顶点，其颜色改变了奇数（分别为偶数）次，这意味着在它之前被移除的邻点数为奇数（分别为偶数）。也就是说，它在 o中的入度为奇数（分别为偶数）。因此，根据顶点的消去序，可以在线性时间内构造 T的无环 G -奇定向。

⇐）反过来，设 o 是 T的一个无环 G-奇定向。由于 o 是无环的，顶点上存在一个全序 $v_1 > \cdots > v_n$，使得对每个 $v_i > v_j$，边 v_iv_j均从 v_i定向至 v_j。我们在问题3中采用此消去序，并注意到顶点颜色翻转的次数等于其在 o中的入度。因此，每个顶点被移除时都是白色，故这是问题 3的一个有效消去序。因此，通过对该定向进行拓扑排序，可以在线性时间内根据 T的无环 G-奇定向，构造出 G 的顶点消去序。 □

对问题 1 的这种理解在证明中非常有用，主要是因为它让我们能够专注于图的结构以及集合 T，而无需考虑定向。它还提供了一种构造性方法：通过给出顶点的消去序来构造无环 T-奇定向。我们通常会借助归纳论证，找出一些可从 G 中移除的子图（符合问题 3的含义），从而得到一个更小、也更容易处理的图。

现在，更正式地说，图 G 的 **T-分解**（其中 $T \subseteq V(G)$）是 $V(G)$的一个有序分解$\langle V_0, \ldots\ldots, V_k \rangle$。对于每个 V_i，我们关联一个集合 $T_i = Z_i \triangle T(V_i)$；集合 Z_i定义为 V_i中在 $V_0 \cup \cdots \cup V_{i-1}$里有奇数个邻点的顶点所组成的集合；而 **对称差**表示两个集合之间的对称差（即，对于集合 X 和 Y，$X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$）。

我们称一个 T-分解**满足** $\mathcal{P}$，如果 T_i 对所有 $i \in \{0、\ldots\ldots、k\}$都满足 $\mathcal{P}$ 中的 $G[V_i]$，这意味着 $|T_i| \equiv_2 |T(V_i)| - |Z_i| \equiv_2 |E(G[V_i])|$。如果对每个 V_i

导出子图 $G[V_i]$ 存在一个无环的 T_i-奇定向。特别地，每个良好的 T-分解都满足 $\mathcal{P}$。

好的 T分解提供了一种结构化的方式来构造无环 T奇定向，对象为 G ，通过对每个 $G[V_i]$依次进行定向。在问题3的意义下，该分解对应于一个消去序，其中 V_1 中的所有顶点首先被移除，随后是 V_2中的所有顶点，依此类推。更一般地，我们断言：

The定理4.2. *G 具有无环 T奇定向，当且仅当 G 容许一个好的 T分解* $n.$

证明。
首先，假设 G 容许一个好的 T分解 $\langle V_0, \ldots\ldots, V_k\rangle$。对所有 $0 \leqslant i \leqslant k$，令 O_i 为 $G[V_i]$ 的一个无环 T_i奇定向，其中 $T_i = Z_i \triangle T(V_i)$。考虑如下定义的 G 的定向 O 。对任意边 $uv \in E(G)$ ，满足 $u \in V_i$， $v \in V_j$ 与 $j \geqslant i$:

- 若 $j = i$ ，则 $\overrightarrow{uv} \in O$ 当且仅当 $\overrightarrow{uv} \in O_i$,
- 否则 $\overrightarrow{uv} \in O$。

We 声称， O 是一个无环的 T-奇定向 G的。
结合以下事实：在定向 O中，对于所有 i， $j \in\{0, \ldots, k\}$，所有弧均从 V_i 指向 V_j ，且每个 O_i 都是无环的，可得 O是无环的。现在，令 $v \in V_i$，其中 $i \in \{0, \ldots\ldots k\}$。根据 O的定义，我们有：

- if $v \in Z_i$ then $d^-_{G_O}(v) \equiv d^-_{G[V_i]_{O_i}}(v) + 1 \bmod 2$,
- else $d^-_{G_O}(v) \equiv d^-_{G[V_i]_{O_i}}(v) \bmod 2$.

此外，根据 T_i的定义，我们有

- 若 $v \in Z_i$，则 $v \in T_i$ 当且仅当 $v \notin T$,
- 否则 $v \in T_i$ 当且仅当 $v \in T$。

From这些最后的注记，并且由于每个 O_i 都是 $G[V_i]$的一个 T_i-奇定向， O 是一个 T-奇定向 on 的 G。

其次，我们来证明：任意无环 T-奇定向都会诱导出一个良好的 T-分解。设 O为图 G的一个无环 T-奇定向。由于 O 是无环的，存在顶点的一个全序 $v_1, \ldots, v_n$，使得对任意边 $v_iv_j \in E(G)$，若 $i < j$，则 O包含弧 $\overrightarrow{v_iv_j}$，否则包含 $\overrightarrow{v_jv_i}$。此外，由于 O是一个 T-奇定向， $v_i \in T$当且仅当 $d^-_{G_O}(v_i)$为奇数。

我们定义平凡分解，其中对所有 $i \in \{0, \ldots, |V(G)| - 1\}$，有 $V_i = \{v_i\}$。对每个 i，注意到 $d^-_{G_O}(v_i) = |\{v_1, \ldots, v_{i-1}\} \cap N(v_i)|$。因此， $v_i \in T$当且仅当 $v_i \in Z_i$。由此推出，对所有 i都有 $T_i = \varnothing$，因为 $T_i = (Z_i \triangle T) \cap V_i$。由于每个 V_i都是单个顶点，它平凡地容许一个 $\varnothing$-奇定向。因此，分解 $\{V_0, \ldots, V_{n-1}\}$ 是一个良好的 T-分解。□

在接下来的各节证明中，我们常常需要证明某个选定的 T分解$\langle V_0, \ldots, V_k\rangle$ 是好的。为简化论证，我们会尽可能确保对分解中的每个V_i， $G[V_i]$ 都属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$、 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$或$\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。因此，为了证明一个 T分解是好的，我们总是先证明它满足 $\mathcal{P}$ ，然后证明对于每个 $i \in \{0, ..., k\}$， T_i 在 $G[V_i]$中满足 $\mathcal{PSS}$ 。下面的引理将有助于完成这项工作：

引理 4.3. *设 G 是一个图， $T \subseteq V(G)$ 是满足 $\mathcal{P}$的顶点子集。设 $\mathcal{A} = \langle V_0, \ldots, V_k\rangle$ 是 G 的一个 T分解，并设 i 是 $\{0, \ldots, k\}$中的任意整数：*

$$\textit{If } T_j \textit{ satisfies } \mathcal{P} \textit{ in } G[V_j] \textit{ for every } j \in \{0, \ldots, k\}\backslash\{i\} \textit{ then } \mathcal{A} \textit{ satisfies } \mathcal{P}.$$

证明。
设 G 为一个图，且 $T \subseteq V(G)$ 为满足 $\mathcal{P}$ 的顶点子集。设 $\mathcal{A} = \langle V_0, \ldots, V_k\rangle$ 为 G 的一个 T-分解，并设 i 为任意整数 $\{0, \ldots, k\}$。假设对于每个 $G[V_j]$， T_j 在 $G[V_j]$ 中满足 $\mathcal{P}$

$j \in \{0, \ldots, k\} \backslash \{i\}$，则：

$$
\begin{aligned}
|T_i| &\equiv_2 |T(V_i)| - |Z_i| && \text{(by definition)} \\
&\equiv_2 \left(|T| - \sum_{j \in S_i} |T(V_j)| \right) - |Z_i| \\
&\equiv_2 \left(|E(G)| - \sum_{j \in S_i} (|E(G[V_j])| + |Z_j|) \right) - |Z_i| && \text{(by } \mathcal{P}\text{)} \\
&\equiv_2 |E(G)| - \sum_{j \in S_i} |E(G[V_j])| - \sum_{j=0}^{k} |Z_j| \\
&\equiv_2 |E(G[V_i])| + \sum_{j=0}^{k} |\delta(V_0 \cup \cdots \cup V_{j-1}, V_j)| - \sum_{j=0}^{k} |Z_j| \\
&\equiv_2 |E(G[V_i])| + \sum_{j=0}^{k} (|\delta(V_0 \cup \cdots \cup V_{j-1}, V_j)| - |Z_j|) && \text{(by definition of } Z_j\text{)} \\
&\equiv_2 |E(G[V_i])|.
\end{aligned}
$$

因此，T_i在$G[V_i]$中满足$\mathcal{P}$，于是对于每个$j \in \{0, \ldots\ldots, k\}$，$T_j$在$G[V_j]$中满足$\mathcal{P}$，而且$\mathcal{A}$满足$\mathcal{P}$。□

4.2 基本情形

引理 4.4. 树属于$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。

证明。
根据**chevalierOddRootedOrientations1983**，我们知道，树存在一个针对子集$T \subseteq V(G)$的T-奇定向，当且仅当$|E(G)| + |T| \equiv_2 0$。□

注记。由于树（尤其是路径）满足$|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1$，条件$|E(G)| + |T| \equiv_2 0$等价于$|V(G) \backslash T| \equiv_2 1$，因此这也是存在无环$T$-奇定向的必要且充分条件。

引理 4.5. 圈属于$\mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。

证明。
设C是一个环。由于$|V(C)| = |E(C)|$，则由第**(c)**点（定理 1.1）可得，$C \notin \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。
设T为$V(C)$的一个满足$\mathcal{P}$与$\mathcal{S}$的子集。由$\mathcal{S}$，存在一个顶点$u \in V(C) \backslash T$。设v为u在C中的一个邻点。图$P = C - uv$是一条具有$d(u) = 1$的路径。设$T' = \{v\} \Delta T$，并注意T'在P中满足$\mathcal{P}$。此外，P是一棵树，因此由引理 4.4，P容许一个无环的T'-奇定向O。注意到$d^-_{P_O}(u) = 0$，因为$u \in V(P) - T'$与$d_P(u) = 1$。可以通过用弧$\overrightarrow{uv}$补全O，得到C的一个无环T-奇定向。□

注记。事实上，这证明了对于任意顶点$v \notin T$，都存在一种无环的T-奇定向，使得C v是一个源点。

4.3 网格

本节中，我们将刻画问题$I = (G, T)$的实例：其中G是一个网格图，且G存在无环的T-奇定向。

我们证明定理1.4，现重述如下：
定理 1.4:
令$G =$ $P_p \square P_q$是一个图，其中P_p和P_q是顶点集为$\{u_0$、……、$u_{p-1}\}$和$\{v_0$、……、$v_{q-1}\}$的路径分别 。设是满足$\mathcal{PSS}$的子集$T \subset V(P_p \square P_q)$。

$P_p \square P_q$没有无环的T-奇定向，当且仅当p、$q \equiv_2 0$和$V \backslash T$满足 ：

- $(u_{2k-1}, v_j) \in V \backslash T$当且仅当$(u_{2k}, v_j) \in V \backslash T$对所有$k \in \{1$、……、$\frac{p-2}{2}\}$和$j \in \{0, q-1\}$成立。
- $(u_i$、$v_{2k-1}) \in V \backslash T$当且仅当$(u_i$、$v_{2k}) \in V \backslash T$对所有$i \in \{0$、$p-1\}$和$k \in \{1$、.. .、$\frac{q-2}{2}\}$对称地成立。

预备知识

长度为 h 的路径 **path** H 是一个图，其顶点集为 $V(H) = \{w_0, \ldots, w_{h-1}\}$，边集为 $E(H) = \{(w_i, w_{i+1}) \mid 0 \leqslant i < h-1\}$。对于任意路径 H，我们定义集合 $Pairs(H) = \{[w_{2k-1}, w_{2k}] \subset V(H) \mid k = 1, \ldots, \frac{p-2}{2}\}$。令 $H^{[\geqslant k]}$ 和 $H^{[\leqslant k]}$ 分别为由 $\{w_k, \ldots, w_{h-1}\}$ 和 $\{w_0, \ldots, w_k\}$ 诱导的图。

一个**坏路径实例**是问题1的一个实例 (H, T) 其中 H 是一个偶数长度的路径 h，且 $T \subseteq V(H)$ 满足以下条件：首先，路径的两个端点 w_0 和 w_{h-1} 属于 T；其次，对于任意一对顶点 $[w, w'] \in Pairs(H)$，$w \in T$ 当且仅当 $w' \in T$。图4展示了这一构造的一个示例。

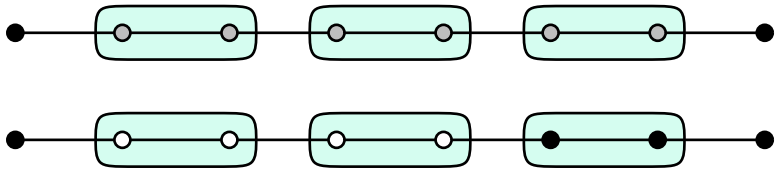


图4：（上）一般的坏路径实例，以及一个示例（下）

路径实例的一个显著性质是，只要它不是坏路径实例，就总能找到一条包含其中一个端点的奇数长度子路径，使其包含偶数个 T 顶点。

具体而言，我们断言：

命题4.6。设 (H, T) 是问题 *1* 的一个实例，且 H 是一条偶数长度的路径 h。

若 (H, T) 不是问题 *1* 的坏路径实例，则存在 $k \in \{0, \ldots, \frac{h-2}{2}\}$ 和 $L \in \{H^{[\leqslant 2k]}, H^{[\geqslant 2k+1]}\}$ 使得 $|T(L)|$ 为偶数。

证明。
令 (H, T) 为问题 1 的一个实例，其中 H 是一条路径。
假设 (H, T) 不是坏路径实例。若 $w_0 \notin T$ 或 $w_{h-1} \notin T$，则分别选择 $L = H[w_0]$ 或 $L = H[w_{p-1}]$。两种情况下，$|T(L)|$ 都是偶数。
否则，若 $w_0, w_{p-1} \in T$，那么由于 (H, T) 不是坏路径实例，存在一对顶点 $(w_{2k-1}, w_{2k}) \in Pairs(V(H))$，其最小指标为 $k \in \{1, \ldots, \frac{h-2}{2}\}$，满足 $w_{2k-1} \in T$ 当且仅当 $w_{2k} \notin T$。于是，$|T(H^{[\leqslant 2k]})|$ 是偶数。□
注意，事实上这个等价关系成立。确实，对于任意坏路径实例 (H, T)，对所有 $k \in \{0, \ldots, \frac{h-2}{2}\}$，$|T(H^{[\leqslant 2k]})|$ 和 $|T(H^{[\geqslant 2k+1]})|$ 均为奇数。

现在我们关注网格 $G = P_p \square P_q$，其中 P_p 和 P_q 分别是长度为 p 和 q 的路径，其顶点集分别为 $V(P_p) = \{u_0, \ldots, u_{p-1}\}$ 和 $V(P_q) = \{v_0, \ldots, v_{q-1}\}$。还定义 $X_j = \{(u_i, v_j) \mid i = 1, \ldots, p-1\}$，其中 $j \in \{0, \ldots, q-1\}$ 取遍所有值；并定义 $Y_i = \{(u_i, v_j) \mid j = 1, \ldots, q-1\}$，其中 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ 取遍所有值。此外，注意到 $X_{\leqslant k} = \bigcup_{j=0}^{k} X_j$ 和 $X_{\geqslant k} = \bigcup_{j=k}^{q-1} X_j$，对于 Y 也类似。网格实例是问题 **1** 的一个实例 (G, T)，其中 G 是一个网格。值得注意的是，对于任意网格：

$$|V(G)| \equiv_2 p \times q, \quad |E(G)| \equiv_2 p + q \tag{G0}$$

对于任意网格 G，我们记 $Pairs(G) = Pairs(G[X_0]) \cup Pairs(G[X_{q-1}]) \cup Pairs(G[Y_0]) \cup Pairs(G[Y_{p-1}])$。一个**坏网格实例**对于问题1是一个实例 (G, T) 其中 $G = P_p \square P_q$ 是一个具有 $p \equiv_2 q \equiv_2 0$ 的网格，并且 T 满足以下条件：

1. $(G[U], T(U))$ 对于所有 $U \in \{X_0$ 的坏路径实例，X_{q-1}，Y_0，$Y_{p-1}\}$。
2. 对于所有 $i \in \{1, \ldots, p-2\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, q-2\}$，我们有 $(u_i, v_j) \in T$。

注意，条件**1.** 等价于：对于任意顶点对 $[(u, v), (u', v')] \in Pairs(G)$，都有 $(u, v) \in T$ 当且仅当 $(u', v') \in T$。因此，定理1.4实质上表明，对于任意网格实例 (G, T) 若 T 满足奇偶条件 $\mathcal{P}$，G 存在一个无环 T-奇定向，当且仅当 (G, T) 不是坏网格实例。

还值得注意以下几点：

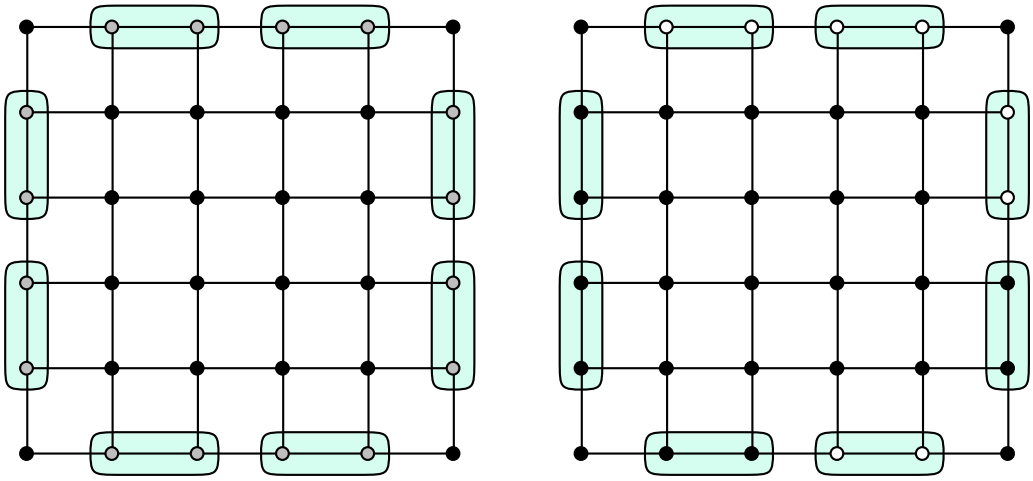


图 5：一般的坏网格实例及一个示例

断言4.7. 设 $(G,\ T)$ 是问题 *1* 的一个网格实例，且 T满足奇偶条件$\mathcal{P}$。

如果 $(G,\ T)$ 不是问题 *1*的坏网格实例，那么 T也满足 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$。

证明。
设 $(G,\ T)$ 是问题 1 的一个网格实例，且 T满足奇偶条件 $\mathcal{P}$。
如果 G 的维数为奇数，那么根据 **(a)**， $|V(G)\backslash T| \equiv_2 |V(G)\backslash E(G)| \equiv_2 1$。此外，任何奇数维网格至少有两个奇数度顶点。因此， T 确实满足条件 $\mathcal{S}$ 和$\mathcal{S}$。

现在假设 p 和 q 均为偶数。如果 T 不满足条件 $\mathcal{S}$，那么 $T = V(G)$。如果它不满足条件 $\mathcal{S}$，那么 $V(G)\backslash T = \{v \in V(G) \mid d(v) \equiv_2 1\}$。在这两种情形下， $(G,\ T)$ 都是问题 1的坏网格实例。 □

由此断言可知，在考虑网格实例时，我们可以专注于奇偶条件 $\mathcal{P}$，并检查该实例是否为坏网格实例。因此，在本节中，我们不再进一步提及条件 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$。

在 接下来的证明中，我们对网格实例 $(G$使用多个 T-分解，$T)$ 具体描述如下 be
细 致说明。我们始终假设 T 满足条件 $\mathcal{P}$。

(i,j)-角 T-分解 $\langle V_0$、V_1、$V_2\rangle$定义如下（见图6a）：

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \{(u_a, v_b) \mid 0 \leqslant a < i, 0 \leqslant b < j\} = \bigcup_{k=0}^{i-1} Y_k^{[<j]} \neq \varnothing \\
V_1 &= \{(u_a, v_b) \mid i \leqslant a < p, 0 \leqslant b < q\} = Y_{\geqslant i} \\
V_2 &= \{(u_a, v_b) \mid 0 \leqslant a < i, j \leqslant b < q\} = \bigcup_{k=0}^{i-1} Y_k^{[\geqslant j]}
\end{aligned}
$$

根据引理4.3，该 T-分解满足 $\mathcal{P}$ 当且仅当： (G1)

$$
\begin{aligned}
&|T_0| \equiv_2 |E(G[V_0])| \text{ i.e. } |T(V_0)| \equiv_2 |E(G[V_0])| \equiv_2 i + j \\
&|T_1| \equiv_2 |E(G[V_1])| \text{ i.e. } |T(V_1)| \equiv_2 |E(G[V_1])| - |Z_1| \equiv_2 (p - i + q) - j
\end{aligned}
$$

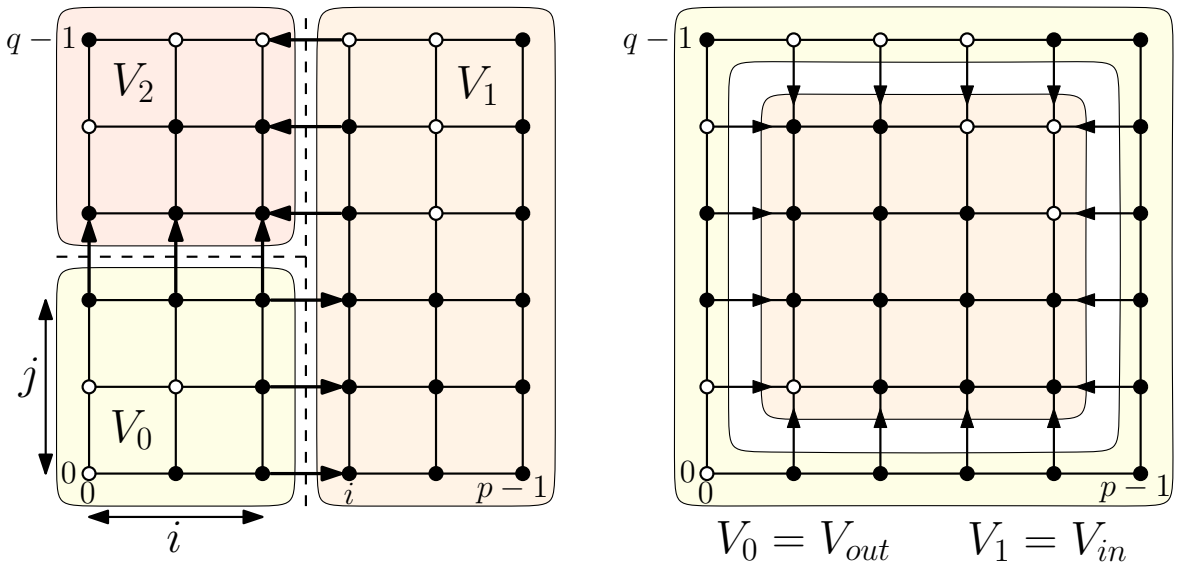
内网格 T-分解：我们在此定义网格实例 T的两种不同的 $\langle V_{out}$-分解 $V_{in}\rangle$和$\langle V_{in},\ V_{out}\rangle$（见图6b），其中 $(G$、$T)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
V_{out} &= X_0 \cup Y_0 \cup X_{q-1} \cup Y_{p-1} \\
V_{in} &= V\backslash V_{out}
\end{aligned}
$$

根据引理 4.3， $\langle V_{out},\ V_{in}\rangle$满足 $\mathcal{P}$当且仅当 $|T_0| \equiv_2 |E(G[V_{out}])|$即 $|T(V_{out})| \equiv_2 0$。

并且根据引理 4.3，$\langle V_{in},\ V_{out}\rangle$满足 $\mathcal{P}$当且仅当 $|T_1| \equiv_2 |E(G[V_{out}])|$即 $|T(V_{out}) \equiv_2 |E(G[V_{out}])| - |Z_1| \equiv_2 0$。

Hence，对于两种内部网格 T-分解，我们只需检查是否 $|T(V_{out})| \equiv_2 0$to check如果该分解满足 $\mathcal{P}$。（ G2)



(a) $(i,\ j)$-角 T-分解满足 $\mathcal{P}$　　(b) 满足 $\mathcal{P}$ 的内网格 T 分解

图 6

定理1.4 的证明

证明分为三个引理，前两个（引理 4.8 和引理 4.9）证明充分条件，最后一个（引理 4.10）证明必要条件。

引理 4.8。设 $(G,\ T)$ 是问题 *1* 的一个网格实例，且 T满足奇偶条件$\mathcal{P}$。

若存在 $U \in \{X_0,\ X_{q-1},\ Y_0,\ Y_{p-1}\}$ 使得 $(G[U],\ T(U))$ 不是问题*1* 的坏路径实例，则 G 存在一个无环 T-奇定向。

证明。
令 (G,T) 为问题 1 的一个网格实例，且 T 满足奇偶条件 $\mathcal{P}$
。a. 假设 G 有一个奇数维，记作 $q \equiv_2 1$。在这种情况下，$(G[Y_0],T(Y_0))$ 和$(G[Y_{p-1}],T(Y_{p-1}))$ 均为非坏路径实例。我们对 p使用归纳法。对于 $p = 1$，G 是一条路径，结论由引理 4.4 得出。对于 $p > 1$，由于 T满足 $\mathcal{P}$ 和 $|E(G)| \equiv_2 p + 1$，我们有 $|T| \equiv_2 p + 1$。因此，$|V(G)\backslash T| = pq - (p + 1)$ 为奇数，所以存在 $k \in \{0, \ldots, p - 1\}$，使得 $|Y_k\backslash T(Y_k)|$ 为奇数。令 k 为满足该条件的最小指标。根据对称性，不妨设$k < p - 1$。现在考虑 $(k + 1, q)$-角 T-分解 $\langle V_0, V_1, \varnothing\rangle = \langle Y_{<k+1}, Y_{\geqslant k+1}, \varnothing\rangle$（见图 7a）。我们证明该分解满足 $\mathcal{P}$。根据引理 4.3，我们只需检验 $|T_0| = |T(V_0)| \equiv_2 |E(G[V_0])|$。回想一下 $q \equiv_2 1$，有：

$$|T(V_0)| = \sum_{0\leqslant i<k+1} |T(Y_i)| \equiv_2 qk + q + 1 \equiv_2 k + 1 + q$$

此外，每个 V_i 都会诱导出一个奇数维网格，因此根据归纳法，每个 $G[V_i]$ 都存在一个无环的 T_i-奇定向。因此，$\langle V_0$、V_1、$\varnothing\rangle$是一个良好的 T-分解，并且根据定理 G 存在一个无环的 T-奇定向。4.2。

b. 假设 p和 q均为偶数，并且存在 $U \in \{X_0, X_{q-1}, Y_0, Y_{p-1}\}$，使得 $(G[U],T(U))$不是坏路径实例。不失一般性，设 $U = Y_0$。由于 T满足 $\mathcal{P}$，$|T|$ 为偶数。b.1. 若 $|T(Y_0)|$为奇数，考虑 $(1, q)$-角 T-分解 $\langle V_0, V_1, \varnothing\rangle = \langle Y_0, Y_{\geqslant 1}, \varnothing\rangle$（见图 7b）。

我们证明该分解满足 $\mathcal{P}$，并且根据引理4.3，我们只需检查是否$|T_0| = |T(V_0)| \equiv_2 |E(G[V_0])|$。但根据假设:

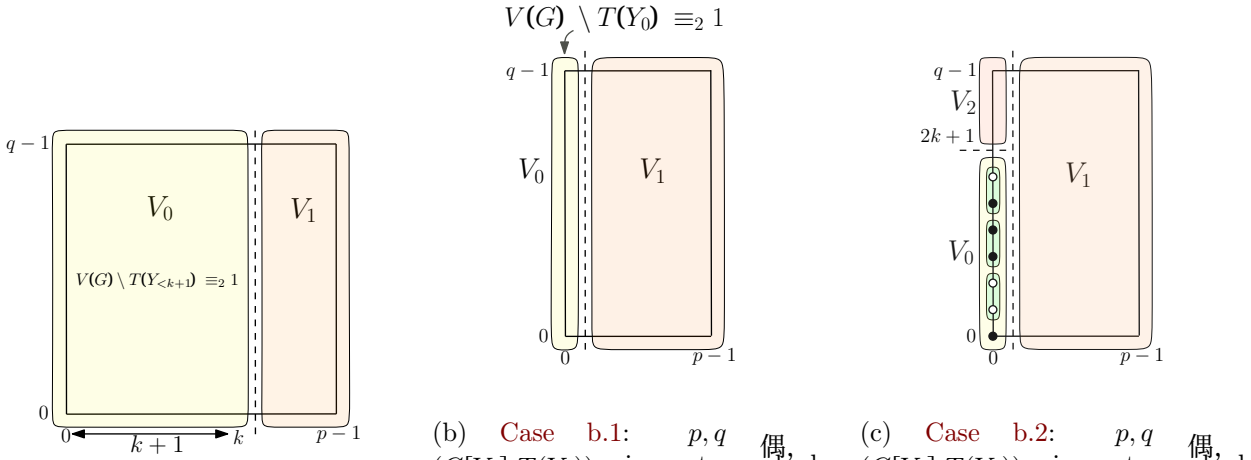
$$|T(V_0)| = |T(Y_0)| \equiv_2 1 + q$$

b.2. 若 $|T(Y_0)|$是偶数，因为 $(Y_0,\ T(Y_0))$不是问题 1的坏路径实例，根据断言 4.6，存在 $k \in \{0, \ldots, \frac{q-2}{2}\}$ 使得 $|T(Y_0^{[\leqslant 2k]})|$是偶数。在这种情况下，考虑 $(1,\ 2k+1)$- 角 T- 分解 $\langle V_0,\ V_1,\ V_2\rangle = \langle Y_0^{[<2k+1]},\ Y_{\geqslant 1},\ Y_0^{[\geqslant 2k+1]}\rangle$（见图 7c）。要证明该分解满足 $\mathcal{P}$ 我们参考 (G1):

$$|T(V_0)| = |T(Y_0^{[<2k+1]})| \equiv_2 1 + 2k + 1$$
$$|T(V_1)| = |T(Y_{\geqslant 1})| \equiv_2 |T| - |T(Y_0)| \equiv_2 p + q - 0 \equiv_2 p - 1 + q - (2k+1) \qquad \text{(by (G0))}$$

在两种情形下，每个 V_i 都会生成一个具有奇数维的网格，因此根据情形 **1**，每个 $G[V_i]$ 都存在一个无环 T_i-奇定向。因此，$\langle V_0,\ V_1,\ V_2\rangle$是一个良好的 T-分解，并且根据定理 G 存在一个无环T-奇定向4.2。

□



(a)情形 a: q 奇

(b) Case b.1: p, q 偶, $(G[Y_0], T(Y_0))$ is not a bad 路径实例且 $|T(Y_0)|$ 为奇数

(c) Case b.2: p, q 偶, $(G[Y_0], T(Y_0))$ is not a bad 路径实例且 $|T(Y_0)|$ 为偶数

图7：引理证明中使用的三种分解示意图4.8。

Lem引理 4.9。设 $(G,\ T)$ 是问题*1* 的一个网格实例，且 T满足奇偶条件 $\mathcal{P}$。如果

$(G,\ T)$ 不是问题*1*的坏网格实例，则 G 存在一个无环 T-奇定向 n.

证明。
设 $(G,\ T)$ 为问题 1 的一个网格实例，使得 T满足奇偶条件 $\mathcal{P}$。引理4.8 涵盖了 G 具有奇数维的情形，因此我们假设 $p,\ q \equiv_2 0$，并且由于 T 满足$\mathcal{P}$，我们有 $|T| \equiv_2 0$。

我们按网格规模进行归纳。
初始情形： $p = 2$且 $q \geqslant 2$。若 $(G,\ T)$不是坏网格实例，则存在 $i \in \{0,\ 1\}$使得 $(G[Y_i],\ T(Y_i))$不是坏路径实例。因此，引理 4.8适用，且 G容许一个无环T-奇定向。我们处理情形 $p \geqslant 2$ 与 $q = 2$ 时利用对称性。

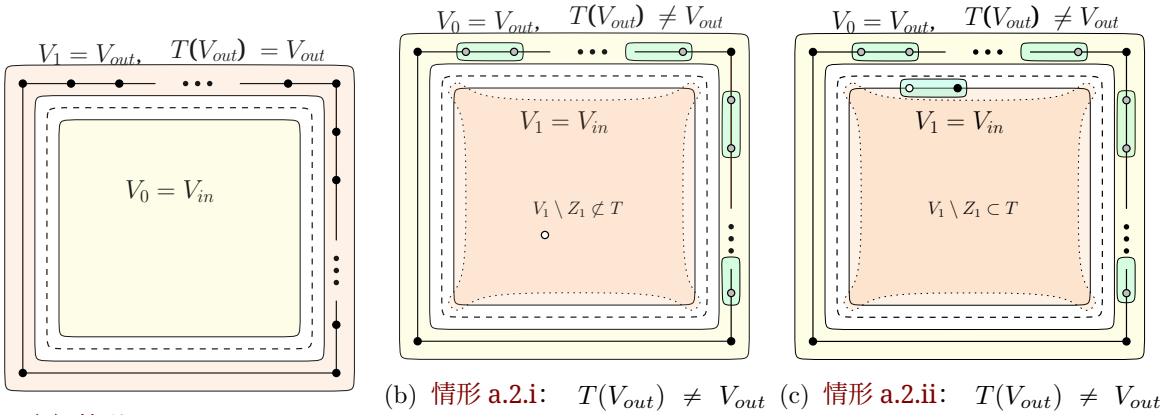
归纳：我们假设 $p \geqslant 4$且 $q \geqslant 4$，并且问题 **1** 的每一个非坏网格实例 $(G' = P_{p'} \square P_{q'},\ T')$，若 $p' < p$ 或 $q' < q$ 且 T' 在 G' 中满足 $\mathcal{P}$，则容许一个无环 T'-奇定向。由引理 4.8，若存在 $U \in \{X_0,\ X_{q-1},\ Y_0, Y_{p-1}\}$使得 $(G[U],\ T(U))$不是问题 **1** 的坏路径实例，则 G 容许一个无环 T-奇定向。因此，在下文中，我们可以假设这样的 U不存在。注意，这意味着对所有 $U \in \{X_0,\ X_{q-1},\ Y_0,\ Y_{p-1}\}$都有 $|T(U)| \equiv_2 0$。

定义 $V_{out} = X_0 \cup Y_0 \cup X_{q-1} \cup Y_{p-1}$ 和 $V_{in} = V(G) \backslash V_{out}$。证明的其余部分分为两部分，在这两部分中我们将证明 G 存在一个无环 T-奇定向。在第一部分中，我们假设 $(G[V_{in}],\ T(V_{in}))$不是问题 1的坏网格实例。在第二部分中，我们假设

$(G[V_{in}],\ T(V_{in}))$ 是问题 1 的坏网格实例，且 $T(V_{in}) \neq V_{in}$。此处唯一未考虑的剩余情况对应于 $T(V_{in}) = V_{in}$，这恰好是 $(G,\ T)$ 是坏网格实例的情况。

部分 a. 我们在此假设 $(G[V_{in}],\ T(V_{in}))$ 不是问题1的坏网格实例。回想一下，在一个 T-分解中，$T_i = Z_i \triangle T(V_i)$，其中 Z_i 是 V_i 的顶点集合，这些顶点在 $V_0 \cup \cdots \cup V_{i-1}$ 中具有奇数个邻点。

我们区分两种情形，如图8a、8b 和8c所示。



（a）情形 a.1：$T(V_{out}) = V_{out}$　(b) 情形 a.2.i：$T(V_{out}) \neq V_{out}$ 并且 $V_1 \setminus Z_1 \not\subset T$　(c) 情形 a.2.ii：$T(V_{out}) \neq V_{out}$ 并且 $V_1 \setminus Z_1 \subset T$

Fig图8：引理 4.9 部分证明中使用的三种分解示意图

a.

a.1. 若 $T(V_{out}) = V_{out}$，我们证明内网格 T-分解 $\langle V_0, V_1\rangle = \langle V_{in}, V_{out}\rangle$ 是良好的（见图8a），并应用定理 4.2。由于 $|T(V_{out})| = |V_{out}| \equiv_2 0$，该分解根据 (G2) 满足$\mathcal{P}$ 。根据假设，$(G[V_0], T_0)$ 不是问题 1 的坏网格实例，因此根据归纳法，$G[V_0]$ 存在一个无环的 T_0-奇定向。并且，由于 $Z_1 \neq \varnothing$，$G[V_1]$ 是一个具有 $T_1 = V_{out} \triangle Z_1 \neq V_{out}$ 的环。因此，T_1 也在 $G[V_1]$ 中满足 $\mathcal{S}$，且根据引理 4.5，$G[V_1$ 存在一个无环的 T_1-奇定向。

a.2. 否则，我们证明内网格 T-分解 $\langle V_0, V_1\rangle = \langle V_{out}, V_{in}\rangle$ 是良好的（见图8b和8c），然后应用定理 4.2。首先，该分解满足 $\mathcal{P}$：事实上，由于对所有 $U \in \{X_0, X_{q-1}, Y_0, Y_{p-1}\}$，$(G[U], T(U))$ 都是问题 1 的坏路径实例，因此有 $|T(V_{out})| \equiv_2 0$，而 (G2) 保证 $\mathcal{P}$ 因而成立。此外，$G[V_0]$ 是一个带有 $T_0 = T(V_{out}) \neq V_{out}$的环，因此根据引理 4.5，$G[V_0]$ 存在一个无环的 T_0-奇定向。接下来需要检查 $(G[V_1], T_1)$ 不是问题 1 的坏网格实例，从而根据归纳法，它存在一个无环的 T_1-奇定向。回想一下 $V_1 = V_{in}$ 和 $T_1 = T(V_{in}) \triangle Z_1$。

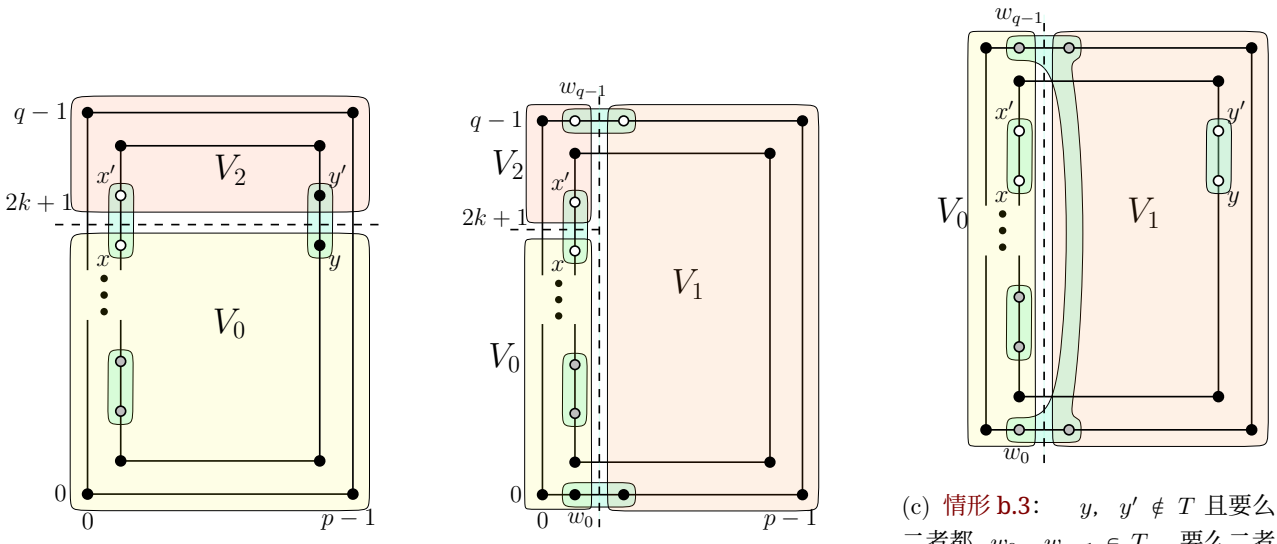
a.2.i 如果存在一个顶点 $(u,\ v) \in V_1 \setminus T$不属于 Z_1，则 $(u,\ v)$ 不属于 T_1，这确保了 $(G[V_1],\ T_1)$ 不是一个坏网格实例（见图8b）。

a.2.ii 否则，由于 $(G[V_{in}], T(V_{in}))$ 不是坏网格实例，必定存在 $[(u,v),(u',v')] \in Pairs(G[V_{in}])$，使得 $(u,v) \in T(V_{in})$ 当且仅当 $(u',v') \notin T(V_{in})$（见图8c）。但是，由于 (u,v) 和 (u',v') 都属于 Z_1，它们也满足 $(u,v) \in T_1$ 当且仅当 $(u',v') \notin T_1$。因此，$(G[V_1], T_1)$ 不是坏网格实例。

部分 b. 现在假设 $(G[V_{in}], T(V_{in}))$ 是问题 1 的一个坏网格实例，且 $T(V_{in}) \neq V_{in}$。注意，这意味着 $p \geqslant 6$ 或 $q \geqslant 6$，并且必定存在 $[x, x'] \in Pairs(G[V_{in}])$ 使得 $x, x' \notin T(V_{in})$。不失一般性，利用对称性，可设 $q \geqslant 6$ 且 $[x, x'] = [(u_1, v_{2k}), (u_1, v_{2k+1})]$，其中 $k \in \{1, \ldots, \frac{q-4}{2}\}$.

我们区分图 9a、9b 和 9c 所示的三种情形（同一绿色集合中的灰色顶点要么全为黑色，要么全为白色）。

b.1. 假设顶点对 $[y, y'] = [(u_{p-2}, v_{2k}), (u_{p-2}, v_{2k+1})]$ 满足 $y, y' \in T$。我们证明 $(p, 2k+1)$-角 T-分解 $\langle V_0, \varnothing, V_2\rangle = \langle X_{<2k+1}, \varnothing, X_{\geqslant 2k+1}\rangle$ 是好的



(a) 情形 b.1： $y,\ y' \in T$

(b) 情形 b.2： $w_0 \in T,\ w_{q-1} \notin T$

(c) 情形 b.3： $y,\ y' \notin T$ 且要么二者都 $w_0,\ w_{q-1} \in T$，要么二者都$w_0,\ w_{q-1} \notin T$

Fig图 9：证明引理 4.9 中使用的三种分解示意图 b.

（见图9a）以应用定理4.2。由当前假设以及(G1)，该分解满足 $\mathcal{P}$：事实上， $T(V_0) \equiv_2 1 \equiv_2 p + 2k + 1$。

此外， V_0 和 V_2 诱导出具有奇数维的网格图，因此引理 4.8 保证 $G[V_0]$ 和$G[V_2]$ 分别具有一个无环的 T_0-奇定向和 T_2-奇定向。

b.2. 假设 $w_0 = (u_1, v_0) \in T$和 $w_{q-1} = (u_1, v_{q-1}) \notin T$。现在我们证明， $(2, 2k+1)$-角 T-分解 $\langle V_0, V_1, V_2\rangle = \langle Y_0^{[<2k+1]} \cup Y_1^{[<2k+1]}, Y_{\geqslant 2}, Y_0^{[\geqslant 2k+1]} \cup Y_1^{[\geqslant 2k+1]}\rangle$ 在 G 上的分解是良好的（见图 9b）。类似地，我们当前的假设和 (G1) 证明该分解满足 $\mathcal{P}$:

$$T(V_0) \equiv_2 1 \equiv_2 2 + 2k + 1$$
$$T(V_1) \equiv_2 |T(Y_{\geqslant 2})| \equiv_2 1 \equiv_2 p - 2 + q - (2k + 1)$$

还要注意， $G[V_0]$ 和 $G[V_2]$ 是具有奇数维的网格。因此，根据引理 4.8，它们分别存在无环的 T_0-奇定向和 T_2-奇定向。为了证明 T-分解是好的，现在只需检查 $G[V_1]$ 不是问题 1 的坏网格实例，并应用归纳法。由于 $(u_1, v_0) \in T$和 $[(u_1, v_0), (u_2, v_0)] \in Pairs(G[V_1]]$，我们推得 $(u_2, v_0) \in T$。还要注意， $(u_2, v_0) \in Z_2$。因此， $(u_2, v_0) \notin T_2$，这意味着 $(G[V_1], T_1)$ 不是问题 1 的坏网格实例。所以根据定理 4.2， G 存在无环的 T-奇定向。

The case where $(u_1, v_{q-1}) \in T$ and $(u_1, v_0) \notin T$ is symmetrical.

b.3. 最后，假设 y、 y'不在 T中，并且要么 w_0、 $w_{q-1} \in T$同时成立，要么 w_0、 $w_{q-1} \notin T$同时成立。我们证明 G 的 $(2, q)$-角 T-分解 $\langle V_0, V_1, \varnothing\rangle = \langle Y_{<2}, Y_{\geqslant 2}, \varnothing\rangle$是好的（见图 9c），并通过应用定理 4.2 得出结论。为了证明该分解满足 $\mathcal{P}$，根据引理 4.3，我们只需检查 $|T(V_0)| \equiv_2 |E(G[V_0])|$：

$$T(V_0) \equiv_2 0 \equiv_2 2 + q \equiv_2 |E(G[V_0])| \quad \text{by (G0)}$$

现在，为了证明 T分解是好的，只需验证 $(G[V_0], T_0)$和$(G[V_1], T_1)$ 不是问题1 的坏网格实例，并应用归纳法:

- 我们来证明 $(G[V_0], T_0)$ （连同 $V_0 = Y_{<2}$）不是坏网格实例。

由于 $(G[V_{in}], T(V_{in}))$是问题 1 的坏网格实例，注意到对所有， ， $(u_1, v_1) \in T$与 $[(u_1, v_{2j}), (u_2\ v_{2j+1})] \in Pairs(G[V_{in}])$ $j \in \{1 \ldots \frac{q-4}{2}\}$ —— $(u_1\ v_{2k}) \notin T$ 。然而，由于， ，必定存在$1 \leqslant k' \leqslant k$，使得 $(u_1, v_{2k'-1}) \in T$当且仅当 $(u_1, v_{2k'}) \notin T$。因此， $(G[Y_1], T(Y_1))$不是坏路径实例，并且由引理 4.8， $G[V_0]$ 容许一个无环 T_0奇定向。

- 我们证明 $(G[V_1], T_1)$ （其中 $V_1 = Y_{\geqslant 2}$）不是坏网格实例。我们分两种情形讨论：如果 $p = 4$，由于 $Z_1 = Y_2$，我们推得 $(u_2, v_1) \notin T_1$且 $(u_{p-2}, v_{2k-1}), (u_{p-2}, v_{2k}) = (u_2, v_{2k}), (u_2, v_{2k+1}) \in$

T_1。此外，由于 $(G[V_{in}],\ T(V_{in}))$ 是问题 1 的一个坏网格实例，因此我们有 $[(u_2,\ v_{2j}),$ $(u_2\ v_{2j+1})] \in Pairs(G[Y_{\geqslant 2}])$ $1 \leqslant j \leqslant \frac{q-4}{2}$ —— $1 \leqslant k' \leqslant k$ ，对所有 均成立。因此，必然存在 使得$(u_2,\ v_{2k'-1}) \in T_1$ 当且仅当 $(u_2,\ v_{2k'}) \notin T_1$。于是，$(G[Y_2],\ T_1(Y_2))$ 不是问题 1 的一个坏路径实例，并且根据引理 4.8，$G[V_1]$ 具有一个无环 T_1-奇定向。

若 $p \geqslant 6$，注意到 $(u_{p-2},\ v_{2k-1})$，$(u_{p-2},\ v_{2k}) \notin T_1$，因此 $(G[V_1],\ T_1)$ 不是问题 1 的坏网格实例，由归纳法可知，$G[V_1]$ 存在一个无环 T_1奇定向。
结合第 1 部分和第 2 部分即可完成归纳。因此，若 $(G,\ T)$ 不是问题 1 的坏网格实例，且 T 满足奇偶条件 $\mathcal{P}$，则它存在一个无环 T奇定向。□

引理 4.10。若 $(G,\ T)$ 是问题 *1*的坏网格实例，则 G 不存在无环T奇定向。

证明。
设 $(G,\ T)$ 是问题 1 的坏网格实例，且 $G = P_p \square P_q$。我们证明 G 不存在任何无环 T奇定向。

证明过程如下。我们构造一个新的实例 $(\mathcal{G},\ \mathcal{T})$，其中 $|\mathcal{T}| = |V(\mathcal{G})| - 1$，并证明 G 的任意无环 T- 奇定向都意味着存在 $\mathcal{G}$ 的无环 $\mathcal{T}$- 奇定向。接下来，我们回顾 Kiraly 和 Kisfaludi-Bak 的以下定理（**kiralyDualCriticalGraphsNotes** 中的定理 1.40）。该定理为平面图中的无环 T-奇定向提供了一个关键刻画。为引用此定理，我们先给出一些直观定义；正式定义请参阅 **diestelGraphTheory2017**。**平面嵌入** 是图在平面上的一种绘制方式，其中任意两条边都不相交。能够进行平面嵌入的图称为**平面图**。 G 的平面嵌入的**对偶图** 是这样一种图：该嵌入的面构成其顶点集，并且当两个面共享 G 的一条边时，它们相邻。如果一个图删除任意一个顶点后，剩余图都有完美匹配，则称该图为**因子临界**。

> **（kiralyDualCriticalGraphsNotes 中的定理 1.40）**平面图$G = (V,\ E)$ 若存在某个顶点 $v \in V$所对应的无环 $V\backslash\{v\}$-奇定向，则其对偶图必为因子临界图。（因此，如果根据 G的平面嵌入存在多个对偶图，那么它们全都是因子临界图。）

根据该定理的逆否命题，要证明 G 不允许任何无环 T-奇定向，只需证明 $\mathcal{G}$ 的某个平面嵌入的对偶图不是因子临界图。为此，我们证明 $\mathcal{G}$的某个平面嵌入 $\phi(\mathcal{G})$ 包含 $\lceil \frac{f}{2} \rceil$ 个两两独立的面，其中 f 是 $\phi(\mathcal{G})$ 中的面数，且两个面独立当且仅当它们不共用一条边。实际上，这意味着 $\phi(\mathcal{G})$ 的对偶图包含一个大小为 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 的独立集，因此它不是因子临界图。

构造 $(\mathcal{G},\ \mathcal{T})$**:**
通过向 G 添加一个与 $V\backslash T$ 中每个顶点相连的顶点 s，定义 $\mathcal{G}$，如下所示：

- $V(\mathcal{G}) = V(G) \cup \{s_{root}\}$
- $E(\mathcal{G}) = E(G) \cup \{ws_{root} \mid w \in V(G)\backslash T\}$

设 $\mathcal{T} = V(\mathcal{G})\backslash\{s_{root}\}$。

$(\mathcal{G},\ \mathcal{T})$**的正确性：**
假设 G 允许一个无环的 T-奇定向 O。我们按如下方式构造 $\mathcal{G}$ 的定向 O'：

对于所有弧 $a \in O$，• $a \in O'$。

• 对于每个 $w \in V(G)\backslash T$，$\overrightarrow{s_{root}w} \in O'$。

根据构造，O' 是 $\mathcal{G}$的一个 $\mathcal{T}$-奇定向。此外，O' 保持无环，s_{root} 是 $\mathcal{G}_{O'}$中的一个源点。因此，G 的任意无环 T-奇定向都蕴含 $\mathcal{G}$的一个无环 $\mathcal{T}$-奇定向。

平面嵌入 $\phi(\mathcal{G})$**:**
现在我们描述 $\phi(\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$ 的平面嵌入。首先，将顶点 $(u_i, v_j) \in V(G)$ 映射到点 $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$，其中 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ 和 $j \in \{0, \ldots, q-1\}$。每条边都绘制为连接其端点的直线线段。若顶点 (v_i, v_j) 满足 $i \in \{0, p-1\}$ 或 $j \in \{0, q-1\}$，则称其位于网格边界上。附加顶点 s_{root} 仅与 $V(G)\backslash T$ 中的顶点相邻。

由于 (G,T) 是一个坏网格实例，所有这些顶点都位于网格边界上。因此，我们将 s_{root} 嵌入网格的外部面中，位于点 (p,q)，并对每个顶点 $w \in V(G)\backslash T$，绘制一条从 s_{root} 到 w的曲线。可以选择这些曲线，使它们彼此不相交，也不与 G的任何边相交，但端点处除外（见图10）。

$\phi(\mathcal{G})$的独立面：
首先，注意到 $|V(\mathcal{G})| = pq+1$和 $|E(\mathcal{G})| = q(p-1)+p(q-1)+|V(G)\backslash T|$，因此根据欧拉公式，$\phi(\mathcal{G})$ 包含 $f = (p-1)(q-1)+|V(G)\backslash T|$ 个面。

我们选取由以下环定义的 $\phi(\mathcal{G})$ 的这些面：

1. $(u_{2i},\ v_{2j})(u_{2i},\ v_{2j+1})(u_{2i+1},\ v_{2j+1})(u_{2i+1},\ v_{2j})$对所有 $i \in \{0,\ \ldots,\ p-2\}$和 $j \in \{0,\ \ldots,\ q-2\}$均成立。
2. $(u,\ v)(u',\ v')s_{root}$对所有 $[(u,\ v),\ (u',\ v')] \in$均成立。顶点对$(G)$满足 $(u,\ v),\ (u',\ v') \in V(G)\backslash T$。

请注意，$\phi(\mathcal{G})$ 中所有选取的面都是独立的。此外，我们恰好选取了 $\binom{(p-1)(q-1)}{2}$ 个面，位于**1.**以及 $\binom{|V(G)\backslash T|}{2}$ 个面，位于**2.**。总计得到 $\binom{(p-1)(q-1)}{2}+\frac{|V(G)\backslash T|}{2} = \binom{f}{2}$ 个独立面（见图10）。

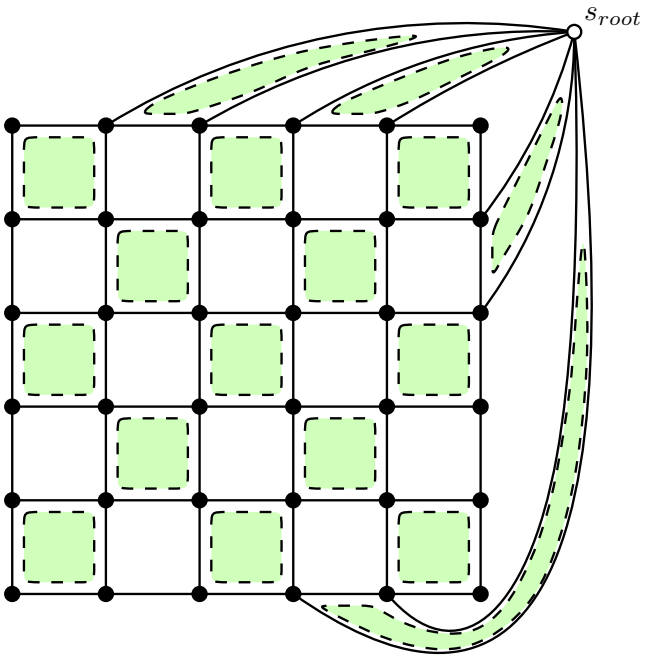


图10：图 $\mathcal{G}$ 的平面嵌入中选取的面，该嵌入对应于图5中的坏网格实例。

□

结合引理4.9和引理4.10，我们得到以下定理：

定理4.11。设 $(G,\ T)$ 是问题*1*的一个网格实例，且 T满足奇偶条件$\mathcal{P}$。

G存在一个无环的 T-奇定向，当且仅当 $(G,\ T)$ 不是问题*1*的坏网格实例。

□

4.4 圆柱与环面

在本节中，我们证明定理1.3，从而解决了图 $G \square H$ 在 G 且 H 为路径或环时的问题**1**。下面回顾关于圆柱和环面的第二个结果：

定理(1.3)。设 $G = C_p \square H_q$ 是一个图，其中 C_p 是一个包含 p 个顶点的环，且 H_q 是一个包含 q 个顶点的路径或环。设 $T \subseteq V(G)$ 是满足 $\mathcal{PSS}$的子集。

如果 H_q 是一条路径，或者如果 p、$q \geqslant 4$，那么 G 有一个无环的 T-奇定向。

至于网格，定理1.3 的证明通过构造和归纳法完成。我们将该证明分解为三个引理（引理4.12、4.13 关于圆柱，以及4.15 关于环面），本定理是其直接推论。现在我们给出一些预备结果和定义。

预备知识

设 $p \geqslant 3$ 与 $q \geqslant 1$。设 G 为具有 $H_q \in \{P_q,\ C_q\}$的 $C_p \square H_q$。若 $H_q = C_q$，则 $q \geqslant 3$。我们将顶点集记为 $V(C_p) = \{u_0,\ \ldots\ldots,\ u_{p-1}\}$ 与 $V(H_q) = \{v_0,\ \ldots\ldots,\ v_{q-1}\}$。我们将边集固定如下：$E(C_p) = \{u_i u_{i+1 \bmod p} \mid i = 0,\ \ldots\ldots,\ p-1\}$ 与 $E(H_q) = \{v_j v_{j+1} \mid j = 0,\ \ldots\ldots,\ q-2\}$，若$H_q$是一条路径；否则为$E(H_q) = \{v_j v_{j+1 \bmod q} \mid j = 0,\ \ldots\ldots,\ q-1\}$。

对于每个 $j \in \{0 \ldots q-1\}$ $v_j) \mid k = i \ldots p-1\}$ $v_j) \mid ,,,$ $i = 0$ 令 $X_j^{[\geqslant i]} k = 0 \cdots$ $= \{(u_k,,,$ 和 $X_j^{[\leqslant i]} = \{(u_k,,, i\}$。当 或 时，我们分别省略上标 $[\geqslant i]$ 和 $[\leqslant i]$；在这些情形下，由 X_j 诱导的图是 C_p；我们称 X_j 为一条**行**。扩展而言，我们记作$X_{\leqslant j} = \cup_{k=0}^{j} X_k, X_{<j} = X_{\leqslant j} \backslash X_j$ 和 $X_{\geqslant j} = \cup_{k=j}^{q} X_k, X_{>j} = X_{\geqslant j} \backslash X_j$。特别地，由 $X_{\leqslant j}$ 诱导的图是一个圆柱。

对于每个 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$，令 $Y_i^{[\geqslant j]} = \{(u_i, v_k) \mid j \leqslant k \leqslant q-1\}$ 和 $Y_i^{[\leqslant j]} = \{(u_i, v_k) \mid 0 \leqslant k \leqslant j\}$。当 $j = 0$ 或 $q-1$ 时，我们分别省略上标 $[\geqslant j]$ 和 $[\leqslant j]$；在这些情形下，由 Y_i 诱导的图是 H_q；我们称 Y_i 为一条**列**。类似地，我们还记作 $Y_{\leqslant i} = \cup_{k=0}^{i} Y_k, Y_{<i} = Y_{\leqslant i} \backslash Y_i$ 和 $Y_{\geqslant i} = \cup_{k=i}^{p} Y_k, Y_{>i} = Y_{\geqslant i} \backslash Y_i$。特别地，当$H_q = P_q$ 时，由 $Y_{\leqslant i}$ 诱导的图是一个网格；而当 $H_q = C_q$ 时，则是一个圆柱。

圆柱

本部分旨在证明圆柱情形下的定理 1.3 。对于任意圆柱 $G = C_p \square P_q$，需要提醒的是：

$$|V(G)| \equiv_2 p \times q, \quad |E(G)| \equiv_2 p \tag{C0}$$

设 $T \subseteq V(G)$ 是一个子集。回顾一下，$Source(T) = V(G) \backslash T$和 $Sink(T)$ 分别是T 中度为奇数的顶点集合，以及 $V(G) \backslash T$ 中度为偶数的顶点集合。因此，在圆柱中，$Source(T) \neq \varnothing$ 当且仅当 $T \neq V(G)$，而 $Sink(T) \neq \varnothing$ 当且仅当 $T \neq V(G) \backslash \{X_0,\ X_{q-1}\}$。此外，无需检查 $Source(T) \neq Sink(T)$ 是否成立，因为对于非欧拉图，这总是成立的。

注意，T 不满足 $\mathcal{S}$ 当且仅当 $T = V(G)$，且不满足 $\mathcal{S}$ 当且仅当$T = V(G) \backslash \{X_0,\ \overline{X_{q-1}}\}$(见图11）。在证明中，为了说明柱面实例 $(G,\ T)$满足 $\mathcal{S}$或 $\mathcal{S}$，我们证明 $Source(T)$ 和 $Sink(T)$ 均非空。

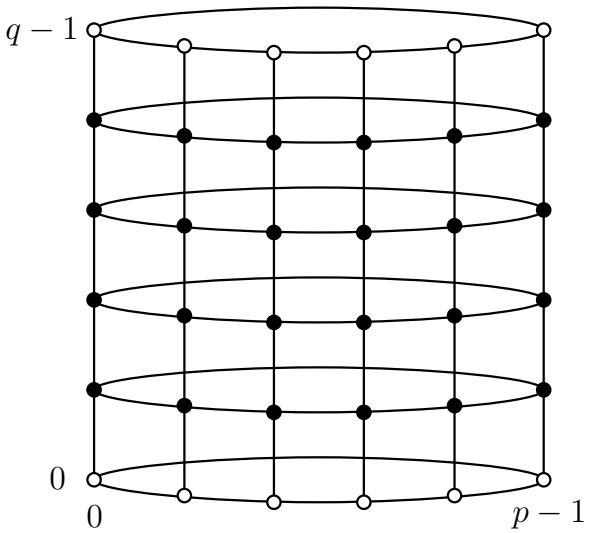


图11：一个满足 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$，但违反 $\mathcal{S}$ 的圆柱，其中 T

在接下来的证明中，我们使用柱面实例 $(G,\ T)$ 的多个 T-分解，我们将

在此仔细描述。利用引理4.3，我们给出所使用的充要条件，用以证明这些 T-分解满足奇偶条件 $\mathcal{P}$。

首行 T-分解。 这里定义两种不同的 T-分解 $\langle V_0,\ V_1\rangle = \langle X_0,\ X_{\geqslant 1}\rangle$或 $\langle X_{\geqslant 1},\ X_0\rangle$的 $(G,\ T)$（见图 12a）。根据引理 4.3，这两种 T-分解满足 $\mathcal{P}$当且仅当：

$$|T(V_0)| \equiv_2 |E(X_0)| \equiv_2 |E(X_{\geqslant 1})| \equiv_2 p \tag{C1}$$

$\mathbf{i^{th}}$-列 T-分解。 其定义为 $\langle V_0,\ V_1\rangle = \langle Y_i,\ V(G)\backslash Y_i\rangle$ 对于 $i \in \{0 \dots p-1\}$（见图 12b）：

$$V_0 = Y_i, \quad V_1 = V(G)\backslash Y_i$$

根据引理 4.3，此 T-分解满足 $\mathcal{P}$ 当且仅当：

$$|T_0| \equiv_2 |E(G[V_0])| \text{ i.e. } |T(V_0)| \equiv_2 |E(Y_i)| \equiv_2 q-1 \tag{C2}$$

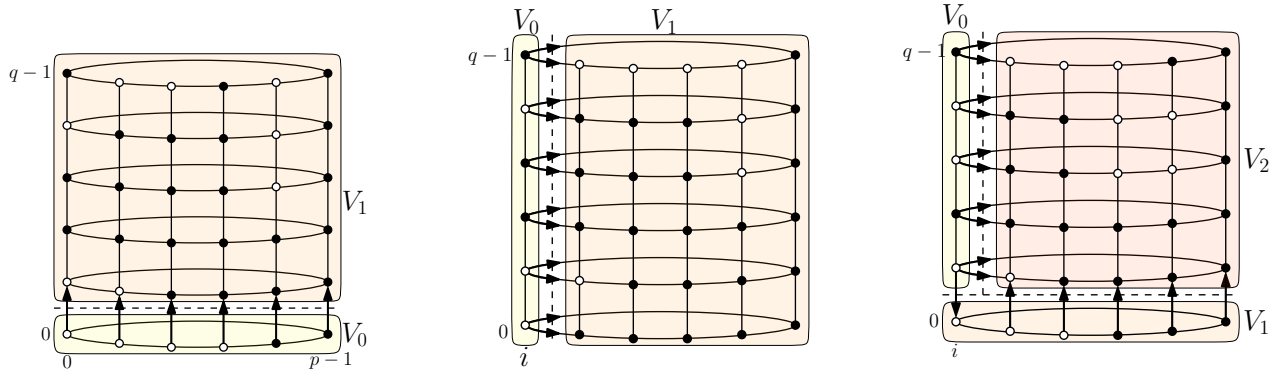
$\mathbf{i^{th}}$-列和首行 T-分解。 这里定义了两种不同的 T-分解（见图 12c）。

第一种是 $\langle V_0,\ V_1,\ V_2\rangle = \langle Y_i^{[\geqslant 1]},\ X_0,\ V(G)\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0)\rangle$。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$当且仅当：

$$\begin{aligned} &|T_0| \equiv_2 |E(G[V_0])| \text{ i.e. } |T(V_0)| \equiv_2 |E(Y_i^{[\geqslant 1]})| \equiv_2 q \\ &|T_1| \equiv_2 |E(G[V_1])| \text{ i.e. } |T(V_1)| \equiv_2 |E(X_0)| - |Z_1| \equiv_2 p-1 \end{aligned} \tag{C3a}$$

第二种是 $\langle V_0,\ V_1,\ V_2\rangle = \langle V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0),\ X_0,\ Y_i^{[\geqslant 1]}\rangle$。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$当且仅当：

$$\begin{aligned} &|T_1| \equiv_2 |E(G[V_1])| \text{ i.e. } |T(V_1)| \equiv_2 |E(X_0)| - |Z_1| \equiv_2 p-(p-1) \equiv_2 1 \\ &|T_2| \equiv_2 |E(G[V_2])| \text{ i.e. } |T(V_2)| \equiv_2 |E(Y_i^{[\geqslant 1]})| - |Z_2| \equiv_2 q-1 \end{aligned} \tag{C3b}$$



(a) 首行 T-分解满足 $\mathcal{P}$

(b) i-列 T-分解满足 $\mathcal{P}$

(c) 一个 i-列与第一行 T-满足 $\mathcal{P}$ 的分解

图12： T-分解，用于下列引理的证明：4.13 和 4.12。

引理 4.12. 设 G 是一个圆柱 $C_p \square P_q$，其中 $p \geqslant 3$ 为奇数且 $q \geqslant 1$。对于任意满足以下条件的子集 $T \subseteq V(G)$，图 G 具有无环 T-奇定向：

若 q 为偶数，则• $\mathcal{P}$。

- $\mathcal{PSS}$若 q 为奇数。

证明。
令 $G = C_p \square P_q$ 满足 $p \geqslant 3$ 为奇数且 $q > 1$ (关于 $q = 1$，参见引理 4.5)。

a. 假设 $q \equiv_2 0$，因此 $|V(G)| \equiv_2 0$。令 T 为 $V(G)$ 的子集，满足 $\mathcal{P}$，并回忆一下，我们假设 p 为奇数。由 (C0)，可知 $|T| \equiv_2 1$ 且 $|V(G)\backslash T| \equiv_2 1$。这意味着 T 也满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$（$T \neq V(G)$ 和 $T \neq V(G)\backslash\{X_0, X_{q-1}\}$，因为 $|V(G)\backslash\{X_0,\ X_{q-1}\} \equiv_2 0$）。由 (C0)，我们有 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1$，因此 T 必须验证 $|V(G)\backslash T| \equiv_2 1$ 是否成立，从而满足 $\mathcal{S}$

且 $\mathcal{S}$也如此。此外，由于 $|V(G)\backslash T| \equiv_2 1$，必定存在 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$ 使得 $|Y_i\backslash T(Y_i)| \equiv_2 1$。考虑 i^{th}列 T分解 $\mathcal{A}_1 = \langle V_0, V_1\rangle = \langle Y_i, V(G)\backslash Y_i\rangle$（见图13a）。它满足 $\mathcal{P}$（见(C2)）：

$$|T(V_0)| \equiv_2 q-1 \equiv_2 |E(G[V_0])|$$

现在，$G[V_0]$ 是一条路径，并且根据引理 T_0具有一个无环 4.4 给出的奇 $G[V_1]$ 是一个偶数维度的网格，因此，如果 $(G[V_1], T_1)$ 不是坏网格实例，根据引理 $T_1$4.9，它具有一个无环 -奇定向，并且 $\mathcal{A}_1$ 是好的。

否则，如果 $(G[V_1], T_1)$ 是 $\mathcal{A}_1$ 中的一个坏网格实例，特别地，我们有 (u_{i+1}, v_0) 以及(u_{i+1}, v_{q-1}) 不属于 T。在这种情况下，我们定义 $\mathcal{A}_2 = \langle V_0, V_1\rangle = \langle V(G)\backslash Y_i, Y_i\rangle$。根据引理 $\mathcal{P}$，要证明它满足 4.3，只需检查 $|T_1| \equiv_2 |E(G[V_1])|$，或等价地检查 $|T(V_1)| \equiv_2 |E(G[V_1])| - |Z_1|$。但是 $|Z_1| \equiv_2 0$，因此：

$$|T(V_1)| \equiv_2 |T(Y_i)| \equiv_2 q-1 \equiv_2 |E(G[V_1])| - |Z_1|$$

现在，由 V_0 在 $\mathcal{A}_2$ 中诱导的子图是一个偶数维度的网格，但在此情况下，$(G[V_0], T_0)$可保证不是 $\mathcal{A}_2$ 中的坏网格实例，因为它的角顶点 (u_{i+1}, v_0) 和 (u_{i+1}, v_{q-1})不在 T_0中。因此，$G[V_0]$ 根据引理4.9，具有一个无环。此外，T_0 $G[V_1]$是一条路径，并根据引理 T_1具有一个无环4.4，从而证明 $\mathcal{A}_2$ 是好的。

b. 从现在起，假设 $q \equiv_2 1$，并令 T 为满足 $\mathcal{PSS}$ 的 $V(G)$ 的一个子集。

b.1. 假设存在一列 Y_i 使得 $T(Y_i)$ 在 $G[Y_i]$ 中满足 $\mathcal{P}$ 对某些 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$。那么，i^{th}-列 T-分解 $\mathcal{B} = \langle V_0, V_1\rangle = \langle Y_i, V(G)\backslash Y_i\rangle$满足 $\mathcal{P}$（参见(C2) 和图13b）：

$$|T(V_0)| \equiv_2 |T(Y_i)| \equiv_2 q-1$$

现在证明这是一个良好的分解。子图 $G[V_0]$ 是一条路径，并根据引理 T_0具有无环奇定向4.4。子图 $G[V_1]$ 是一个具有奇数维的网格图，因此根据引理 T_1具有无环奇定向4.8。

b.2. 假设对于所有 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $T(Y_i)$ 都不满足 $\mathcal{P}$在 $G[Y_i]$中，即 $|T(Y_i)| \equiv_2 1$。**b.2.i.** 假设 $T(X_0) \neq X_0$和 $T(X_0) \neq \varnothing$。如果 $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{P}$在 $G[X_0]$中，我们考虑第一行 T-分解 $\mathcal{C}_1 = \langle V_0, V_1\rangle = \langle X_0, X_{\geqslant 1}\rangle$; 否则，如果 $T(X_0)$ 不满足$\mathcal{P}$ 在 $G[X_0]$中，那么 $T(X_{\geqslant 1})$ 满足 $\mathcal{P}$ 在 $G[X_{\geqslant 1}]$中。确实：

$$\begin{aligned} |T| &= |T(X_0)| + |T(X_{\geqslant 1})| \\ &\equiv_2 |E(G[X_0])| + |E(G[X_{\geqslant 1}])| + |\delta(X_0, X_{\geqslant 1})| \\ &\equiv_2 |E(G[X_0])| + |E(G[X_{\geqslant 1}])| + 1 \end{aligned}$$

其中 $\delta(X_0, X_{\geqslant 1})$ 表示一端在 X_0 、另一端在 $X_{\geqslant 1}$的边集。在这种情况下，我们考虑第一行 T 分解 $\mathcal{C}_2 = \langle V_0, V_1\rangle = \langle X_{\geqslant 1}, X_0\rangle$（见图13c），且 $\mathcal{C}_1$ 或 $\mathcal{C}_2$ 满足 $\mathcal{P}$，根据引理4.3。

对于 $i \in \{0, 1\}$，若子图 $G[V_i]$ 是一个圆柱，其中 p 为奇且 q 为偶；或者是一个环（其中T_i 满足 $\mathcal{S}$，因为 $T_i \neq V_i$），那么它具有无环 T_i奇定向，分别由情形**a.** 或引理4.5可得。因此，$\mathcal{C}_1$ 或 $\mathcal{C}_2$ 是良好的。根据对称性，我们只需处理 $T(X_{q-1}) \neq X_{q-1}$且 $T(X_{q-1}) \neq \varnothing$ 的情形。

b.2.ii. 假设 $T(X_0) = X_0$且 $T(X_{q-1}) = X_{q-1}$。我们考虑一个 i^{th}列且第一行 T分解 $\mathcal{D}_1 = \langle V_0, V_1, V_2\rangle = \langle V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0), X_0, Y_i^{[\geqslant 1]}\rangle$其中 $i \in \{0, \ldots\ldots, p-1\}$满足 $T(V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0)) \neq V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0)$（见图13d）。该分解满足$\mathcal{P}$（参见(C3b)）：

$$|T(V_1)| \equiv_2 |T(X_0)| \equiv_2 p, \quad |T(V_2)| \equiv_2 |T(Y_i^{[\geqslant 1]})| \equiv_2 0 \equiv_2 q-1$$

子图 $G[V_0]$ 是一个偶数维度的网格。如果 $(G[V_0], T_0)$ 是问题 1 的一个坏网格实例，我们对称地考虑 i^{th}-列和第一行的 T-分解 $\mathcal{D}_2 = \langle V_0, V_1, V_2\rangle = \langle V\backslash(Y_i^{[\leqslant q-2]} \cup X_{q-2}), X_{q-1}, Y_i^{[\leqslant q-2]}\rangle$（见图 13d），该分解同样满足 $\mathcal{P}$。现在，$(G[V_0], T_0)$ 不可能同时在 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$中成为坏网格实例。事实上，这将意味着 $T(V\backslash Y_i) = V\backslash Y_i$，这是不可能的，因为 $V\backslash Y_i \supset V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0)$ 且我们假设了$T(V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0)) \neq V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0)$。根据引理4.9，$G[V_0]$具有一个无环的 T_0-奇定向。

子图 $G[V_1]$ 是一个满足 T_1 的环，且 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$，因为 $T_1 \neq V_1$，因此它根据引理 $T_1$4.5 具有一个无环的 T_1-奇定向。子图 $G[V_2]$ 是一条路径，并根据引理 $T_2$4.4 具有一个无环的 T_2-奇定向。我们推得，在 $\mathcal{D}_1$ 或 $\mathcal{D}_2$ 之间至少有一个分解是好的。

b.2.iii. 设 $T(X_0) = \varnothing$ 和 $T(X_{q-1}) = X_{q-1}$。考虑 i^{th}-列与第一行 T-分解 $\mathcal{E} = \langle V_0,\ V_1,\ V_2\rangle = \langle Y_i^{[\geqslant 1]},\ X_0,\ V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0)\rangle$ 其中 $i \in \{0,\ \ldots,\ p-1\}$（见图 13e）。该分解满足 $\mathcal{P}$（参见(C3a)）：

$$|T(V_0)| \equiv_2 |T(Y_i^{[\geqslant 1]})| \equiv_2 1 \equiv_2 q, \quad |T(V_1)| \equiv_2 |T(X_0)| \equiv_2 0 \equiv_2 p-1$$

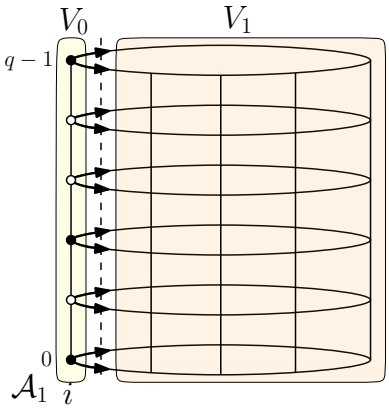
现在我们证明 $\mathcal{E}$ 是好的。子图 $G[V_0]$ 是一条路径，并且根据引理 4.4，具有无环 T_0-奇定向。子图 $G[V_1]$ 是一个环，并且 T_1 满足 $\mathcal{S}$，因为根据假设 $T_1 \neq V_1$，所以根据引理 T_1具有无环 4.5-奇定向。子图 $G[V_2]$ 是一个偶数维度的网格，但 $(G[V_2],\ T_2)$ 不是问题 1 中的坏网格实例，因为角顶点 $(u_{i+1},\ v_{q-1}) \in T_2$，因此根据引理 4.9即可完成证明。

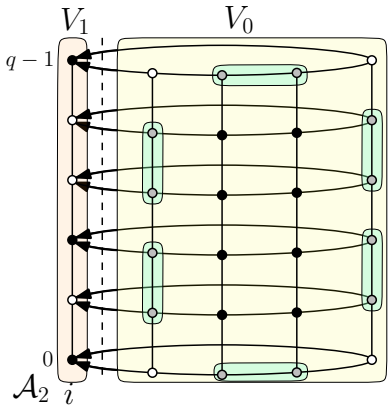
b.2.iv. 假设 $T(X_0) = \varnothing$ 和 $T(X_{q-1}) = \varnothing$，因此所有奇数度顶点都不在 T中。于是，由于 T满足 $\mathcal{S}$，我们有 $T \neq V(G)\backslash\{X_0、\ X_{q-1}\}$，并且在 $u \in V(G)\backslash\{X_0、\ X_{q-1}\}$ 中存在一个不属于 T的顶点（否则这恰好就是图 11所描述的实例）。但是，因为 T满足 $\mathcal{P}$，我们还有 $|V(G)\backslash T| \equiv_2 p \times q - |E(G)| \equiv_2 0$。因此，实际上存在两个不同的顶点 $u、\ v \in V(G)\backslash\{X_0、\ X_{q-1}\}$，使得 $uv \notin T$。此外，由于我们假设对所有 $i \in \{0、\ \ldots\ldots、\ p-1\}$、$|T(Y_i)| \equiv_2 p$，必定存在一个 $k \in \{0、\ \ldots\ldots、\ p-1\}$，使得 $|Y_k\backslash T(Y_k)| \geqslant 4$。现在，对于某些 $i \in \{0、\ \ldots\ldots、\ p-1\}\backslash\{k\}$，我们考虑一个 i^{th}-列且首行为 T 的分解 $\mathcal{F}_1 = \langle V_0、\ V_1、\ V_2\rangle = \langle Y_i^{[\geqslant 1]}、\ X_0、\ V\backslash(Y_i^{[\geqslant 1]} \cup X_0)\rangle$（见图 13f）。这本质上与情形 b.2.iii. 中的分解相同，出于相同的原因，它满足 $\mathcal{P}$。子图 $G[V_2]$ 是一个偶数维度的网格，并且 T_2 在 $G[V_2]$中同时满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$：事实上，由于 $Y_i \neq Y_k$，只需考察 Y_k中的顶点，即可发现：当 $k \neq i-1$ 且 $k \neq i+1$时，有两个度为 4 且不在 T_2 中的顶点（即位于 $G[V_2]$的 $Source(T_2) \cap Sink(T_2)$ 中）；或者当 $k = i-1$ 或 $k = i+1$ 时，有两个位于 T_2 中的度为 3 的顶点（即位于 $G[V_2]$ 的 $Sink(T_2)\backslash Source(T_2)$ 中），以及一个不在 T_2 中的度为 3 的顶点（即位于 $G[V_2]$的 $Source(T_2)\backslash Sink(T_2)$ 中）。现在，如果 $(G[V_2]、\ T_2)$ 是一个坏网格实例，我们对称地考虑分解 $\mathcal{F}_2 = \langle V_0、\ V_1、\ V_2\rangle = \langle Y_i^{[\leqslant q-2]}、\ X_{q-1}、\ V\backslash(Y_i^{[\leqslant q-2]} \cup X_{q-1})\rangle$，它同样满足 $\mathcal{P}$（见图 13f）。

现在我们证明，要么 $\mathcal{F}_1$，要么 $\mathcal{F}_2$ 是好的。子图 $G[V_0]$ 是一条路径，并且根据引理$T_0$4.4，它具有无环的-奇定向。子图 $G[V_1]$ 是一个环，并且 T_1 满足 $\mathcal{S}$，因为$T_1 \neq V_1$ 根据假设可知，因此根据引理 $T_1$4.5，它具有无环的-奇定向。

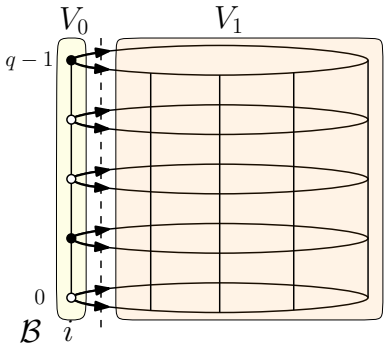
现在我们注意到，$(G[V_2],T_2)$ 不可能在 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$中同时构成坏网格实例。事实上，这将意味着对于所有 $j \in \{0,\ldots,p-1\}\backslash\{i\}$，都有 $Y_j\backslash T(Y_j) = \{(u_j,v_0),(u_j,v_{q-1})\}$，而这与 $|Y_k\backslash T(Y_k)| \geqslant 4$ 以及 $k \in \{0,\ldots,p-1\}$ 和根据假设得到的 $i \neq k$ 矛盾。由此我们推得，在$\mathcal{F}_1$ 或 $\mathcal{F}_2$中，$G[V_2]$ 具有引理 4.9所述的无环 T_2-奇定向。因此，$\mathcal{F}_1$ 或 $\mathcal{F}_2$ 是好的，证明至此结束。

□

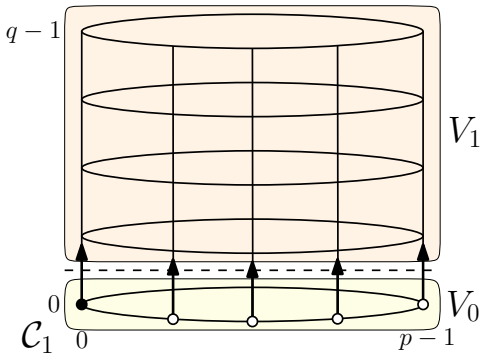


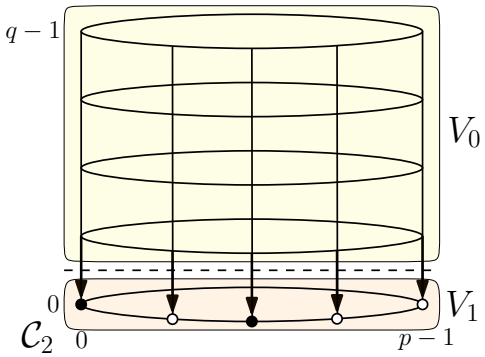


(a) 情形 a: q 为偶数

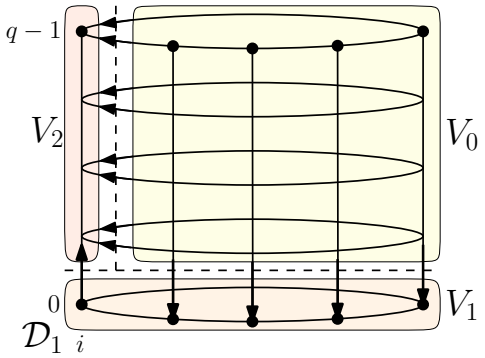


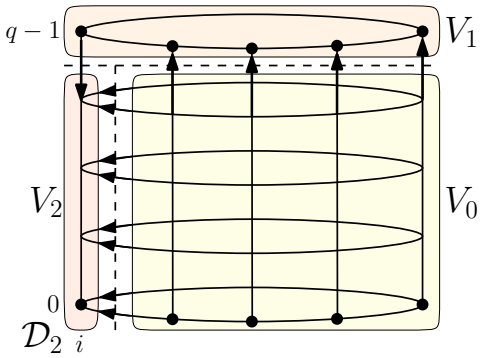
(b) 情形 b.1: q 为奇数，且 $T(Y_i)$ 满足-满足 $\mathcal{P}$ in $G[Y_i]$



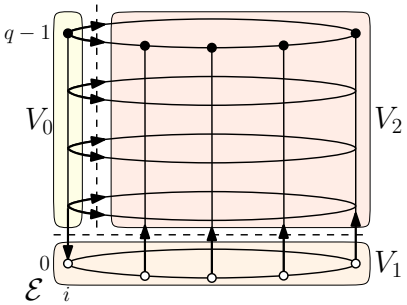


(c) 情形 b.2.i: q为奇数， $T(X_0) \neq X_0$且 $T(X_0) \neq \varnothing$

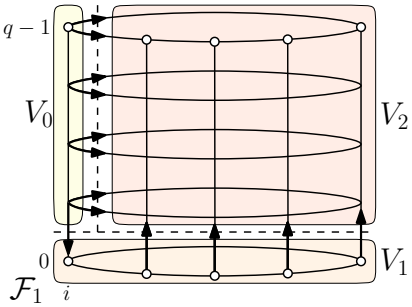


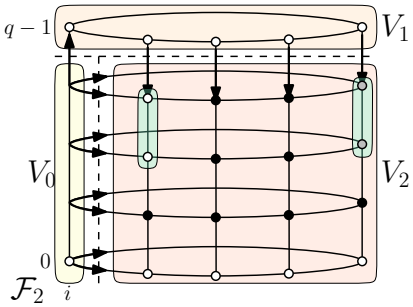


(d) 情形 b.2.ii: q 为奇数， $T(X_0) = X_0$ 且 $T(X_{q-1}) = X_{q-1}$



(e) 情形 b.2.iii: q 为奇数， $T(X_0) = \varnothing$ 和 $T(X_{q-1}) = X_{q-1}$





(f) 情形 b.2.iv: q 为奇数， $T(X_0) = \varnothing$ 和 $T(X_{q-1}) = \varnothing$

图 13: T-分解用于引理4.12 的证明，其中 p 根据假设为奇数。

引理 4.13. 设 G 是一个圆柱 $C_p \square P_q$，其中 $p \geqslant 4$ 为偶数且 $q \geqslant 1$。那么，对于满足 $\mathcal{PSS}$ 的任意子集 $T \subseteq V(G)$，G 都存在一个无环的 T-奇定向。

证明。
设 G 是一个圆柱 $C_p \square P_q$，其中 $p \geqslant 4$ 为偶数且 $q > 1$（关于 $q = 1$，参见引理4.5），并设$T \subseteq V(G)$ 使其满足 $\mathcal{PSS}$。我们分多种情形讨论：

a. 假设 $T(X_0)$ 不满足 $\mathcal{P}$在 $G[X_0]$中，亦即 $|T(X_0)| \equiv_2 1 \neq_2 |E(G)|$根据(C0)。那么，3 个相邻顶点 w_1、w_2、w_3 在 X_0 中必定存在一条子路径，使得 $|T(\{w_1, w_2, w_3\})| \equiv_2 0$。事实上，假设情况并非如此，那么：

$$3|T(X_0)| = \sum_{i=0}^{p-1} |T(\{(u_i, v_0), (u_{i+1}, v_0), (u_{i+2}, v_0)\})| \equiv_2 p$$

但 p 是偶数，因此 $|T(X_0)| \equiv_2 0$，且它满足 $G[X_0]$中的 $\mathcal{P}$，这就产生了矛盾。令 $w \in \{w_1, w_2, w_3\}$满足 $w \notin T$。我们考虑分解 $\mathcal{A}_1 = \langle V_0, V_1, V_2\rangle = \langle\{w\}, X_{\geqslant 1}, X_0\backslash\{w\}\rangle$（见图 14a）。$T(V_0)$ 显然满足 $G[V_0]$中的 $\mathcal{P}$，且我们有 $|T_1| = |T(V_1)| + 1 = |T| - |T(V_0)| + 1 \equiv_2 0 \equiv_2 |E(G[V_1])|$，因此由引理 4.3 可知，$\mathcal{A}_1$ 满足 $\mathcal{P}$。如果 T_1 既不满足 $G[V_1]$中的 $\mathcal{S}$，也不满足其中的 $\mathcal{S}$，那么我们不考虑 $\mathcal{A}_1$，而改为考虑分解 $\mathcal{A}_2 = \langle V_0, V_1, V_2\rangle = \langle\{w_1, w_2, w_3\}, X_{\geqslant 1}, X_0\backslash\{w_1, w_2, w_3\}\rangle$（见图 14a），它同样满足 $\mathcal{P}$。事实上，由引理 4.3，只需检查以下内容：

$$|T_0| \equiv_2 |T(V_0)| \equiv_2 0 \equiv_2 |E(G[V_0])|$$
$$|T_2| \equiv_2 |T(V_2)| - |Z_2| \equiv_2 1 - 1 \equiv_2 0 \equiv_2 |E(G[V_2])|$$

现在，在这两个划分中，V_0 和 V_2 都是路径，并且根据引理 4.4，分别存在无环的 T_0-奇定向和 T_2-奇定向。此外，V_1 诱导出一个非空圆柱图（如 $q > 1$），我们通过对引理 4.13 使用归纳法，证明它在至少一个划分中存在无环的 T_1-奇定向。首先，考虑 $\mathcal{A}_1$，那么根据假设，T_1 在 $G[V_1]$ 中同时满足 $\mathcal{S}$ 或$\mathcal{S}$。其次，考虑 $\mathcal{A}_2$，我们将 w'_1、w'_2、$w'_3 \in V_1$ 定义为 V_1中 w_1、w_2、w_3的三个邻点，并将 $w' \in \{w'_1, w'_2, w'_3\}$记为 w的邻点。根据假设，$T(V_1)\triangle\{w'\}$在 $G[V_1]$中既不满足 $\mathcal{S}$，也不满足 $\mathcal{S}$，即 $T(V_1)\triangle\{w'\} = V_1$或 $T(V_1)\triangle\{w'\} = V_1\backslash(X_1 \cup X_{q-1})$。但是，$T(V_1)\triangle\{w'_1, w'_2, w'_3\} = T_1$与 V_1和 $V_1\backslash(X_1 \cup X_{q-1})$都不同，因此在 $G[V_1]$ 中满足 $\mathcal{S}$和$\mathcal{S}$（见图11）。因此，$\mathcal{A}_1$ 或 $\mathcal{A}_2$ 是好的。

b. 从现在起，我们假设 $T(X_0)$在 $G[X_0]$中满足 $\mathcal{P}$。这意味着 $|T(X_{\geqslant 1})| \equiv_2 p$，从而 $T(X_{\geqslant 1}$在 $G[X_{\geqslant 1}]$中也满足 $\mathcal{P}$。并且在对称性意义下，我们可以假设 $T(X_{q-1})$和$T(X_{\leqslant q-2})$ 分别在 $G[X_{q-1}]$ 和 $G[X_{\leqslant q-2}]$ 中同样满足 $\mathcal{P}$。

b.1. 假设 $T(X_{\geqslant 1})$和 $T(X_{\leqslant q-2})$都不分别在 $G[X_{\geqslant 1}]$和 $G[X_{\leqslant q-2}]$中同时满足 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$。则要么 $T = V(G)$，此时 T 不满足 $\mathcal{S}$，这是一个矛盾；要么 $q = 3$ 和 $T = \varnothing$。在这种情况下，我们定义 i^{th}-列 T-分解$\mathcal{B} = \langle V_0, V_1\rangle = \langle Y_i, V(G)\backslash Y_i\rangle$。它对任意 $0 \leqslant i \leqslant p-1$ 都满足 $\mathcal{P}$（见图 14b）：事实上，我们参照(C1)，并指出 $|T(V_0)| \equiv_2 |T(Y_i)| \equiv_2 p$。现在我们证明该分解是好的。$V_0$ 导出一条路径，因此由引理 4.4，它具有无环的 T_0-奇定向。图$G[V_1]$ 是一个具有奇数维的网格，因此由引理 4.8，它具有无环的 T_1-奇定向。

b.2. 不妨设 $T(X_{\geqslant 1})$ 在 $G[X_{\geqslant 1}]$中同时满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$。

b.2.i. 设 $T(X_0) \neq \varnothing$。我们考虑首行 T-分解 $\mathcal{C} = \langle V_0, V_1\rangle = \langle X_{\geqslant 1}, X_0\rangle$（见图 14c）。根据假设，由于 $T(X_0)$在 $G[X_0]$中满足 $\mathcal{P}$，且根据引理 4.3，T_1 在 $G[V_1]$ 中满足 $\mathcal{P}$，该分解满足 $\mathcal{P}$。

此外，它是良好的。事实上，$G[V_0]$是一个偶数维度的圆柱，并且根据归纳法具有无环 T_0-奇定向；而 $G[V_1]$ 是一个环，其中 T_1 满足 $\mathcal{S}$，因为$T_1 = X_0\triangle T(X_0) \neq X_0 = V_1$ 根据假设，所以根据引理 4.5，它具有无环 T_1-奇定向。

b.2.ii. 设 $T(X_0) = \varnothing$。我们考虑第一行 T-分解 $\mathcal{D}_1 = \langle V_0, V_1\rangle = \langle X_0, X_{\geqslant 1}\rangle$ (见图 14d)。分解 $\mathcal{D}_1$ 满足 $\mathcal{P}$：事实上，我们参照 (C1) 并注意到 $|T(V_0)| \equiv_2 |T(X_0)| \equiv_2 p$。另请注意，$G[V_0]$ 具有一个无环的 T_0-奇定向，由引理 4.5可知。现在有三种情形需要考虑：

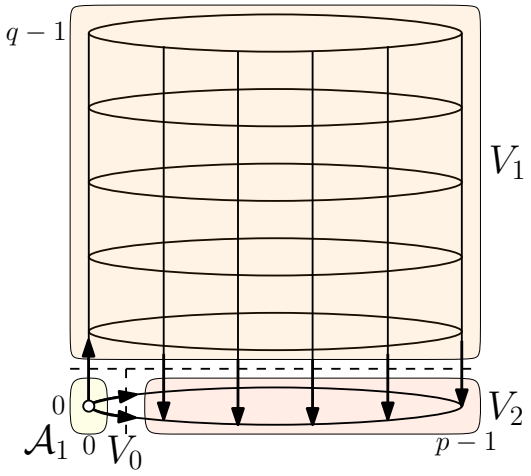
- 如果 T_1 同时满足$\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$（在 $G[V_1]$ 中），那么根据归纳法，$G[V_1]$ 具有一个无环的 T_1-奇定向 on 并且 $\mathcal{D}_1$ 是好的。
- 如果 T_1 在 $G[V_1]$中不满足 $\mathcal{S}$，那么 $T_1 = X_{\geqslant 1}\backslash\{X_1, X_{q-1}\}$ 和 $T = V(G)\backslash\{X_0, X_{q-1}\}$,

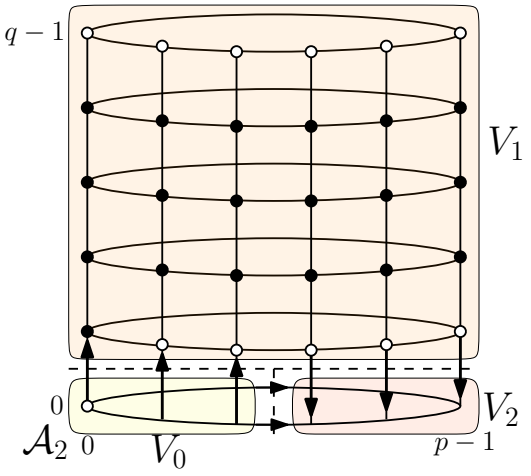
这恰恰表明 T 不满足 $\mathcal{S}$（见图11），这就导致了矛盾。- 最后，如果 T_1 在 $G[V_1]$ 中不满足 $\mathcal{S}$，那么 $T_1 = X_{\geqslant 1}$，这意味着 $T = V(G)\backslash\{X_0、\ X_1\}$。如果 $q = 2$，那么 T 不满足 $\mathcal{S}$，因为 G 的每个顶点的度数都是 3，但它们中没有一个属于 T。因此，我们可以假设 $q \geqslant 3$。我们定义 $C_4 = \{(u_0、\ v_0)、\ (u_0、\ v_1)、\ (u_1、\ v_0)、\ (u_1、\ v_1)\}$，并考虑 T-分解 $\mathcal{D}_2 = \langle V_0、\ V_1、\ V_2\rangle = \langle C_4、\ X_{\geqslant 2}、\ X_{<2}\backslash C_4\rangle$（见图14d）。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$。事实上，我们有：

$$
\begin{aligned}
&|T_0| \equiv_2 |T(V_0)| \equiv_2 0 \equiv_2 |E(G[V_0])| \\
&|T_2| \equiv_2 |T(V_2)| - |Z_2| \equiv_2 0 - 0 \equiv_2 |E(G[V_2])| \qquad \text{by (G0)}
\end{aligned}
$$

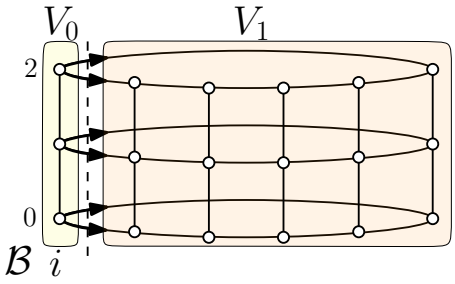
现在我们证明它是良好的。 $G[V_0]$ 是一个环，并且根据引理 4.5，具有一个无环的 T_0-奇定向。 $G[V_1]$ 是一个圆柱，其中 T_1 满足 $\mathcal{PSS}$，因为 $(u_0、\ v_2)、\ (u_1、\ v_2) \notin \overline{T_1}$（即在$Source(T_1)$ 的 $G[V_1]$中），$(u_2、\ v_2) \in T_1$ 在 $G[V_1]$ 中（即在 $Sink(T_1)\backslash Source(T_1)$ 的$G[V_1]$中）的度数为 3。因此，根据归纳法，$G[V_1]$ 具有一个无环的 T_1-奇定向。最后，$(G[V_2]、\ T_2)$ 不是坏网格实例，因为两个角顶点 $(u_3、\ v_1)$ 和 $(u_{p-1}、\ v_1)$ 都不在 T_2中。因此，根据引理 4.8，它具有一个无环的 T_2-奇定向。

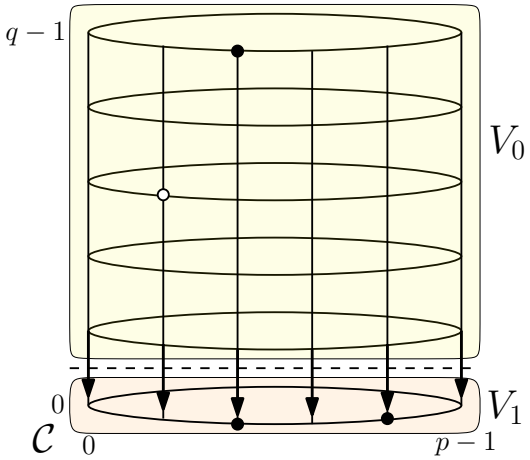
□



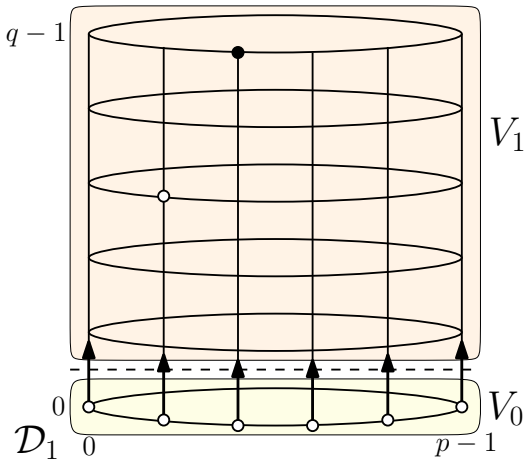


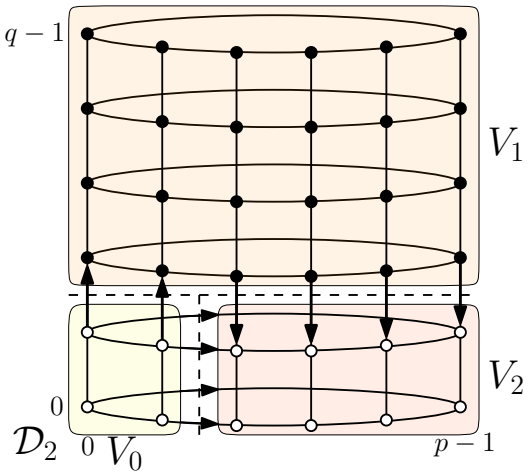
(a) 情形 a: $T(X_0)$ 不满足 $\mathcal{P}$ 中的 $G[X_0]$。





(b) 情形 b.1: $T(X_{\leqslant q-2})$ 均不满足 (c) 情形 b.2.i: $T(X_{\geqslant 1})$ 同时满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$，且二者都满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_\circ^-$ $T(X_0) \neq \varnothing_\circ$





(d) 情形 b.2.ii: $T(X_{\geqslant 1})$ 同时满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 以及 $T(X_0) = \varnothing$

图 14: T-分解，用于引理4.13 的证明，其中 p 根据假设为偶数 is.

准 2-圆柱

在本小节中，我们处理一些特殊实例，它们在证明1.3 环面相关定理时很有用。

我们将准 2-圆柱 Q_p 定义为从某个整数 $p \geqslant 4$ 对应的圆柱 $C_p \square P_2$ 中移除顶点$x = (u_0,\ v_1)$ 所得的结构。我们不严格地区分圆柱和环面所定义的记号，因此将集合 $\{(u_1,\ v_1)$、……、$(u_{p-1},\ v_1)\}$ 记为 X_1，将 $\{(u_0,\ v_0)\}$ 记为 Y_0。请注意：

$$|V(Q_p)| \equiv_2 1 \text{ and } |E(Q_p)| \equiv_2 p-1 \tag{QC}$$

此外，在准 2-圆柱 Q_p中，顶点集的子集 T 不满足 $\mathcal{S}$ 当且仅当$T = V(Q_p)$，且不满足 $\mathcal{S}$当且仅当 $T = \{(u_0,\ v_0),\ (u_1,\ v_1),\ (u_{p-1},\ v_1)\}$（见图 15）。

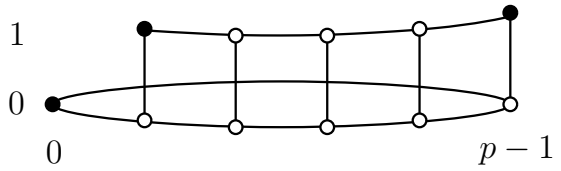


图 15：准 2-圆柱 Q_p 以及满足 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$ 但不满足 $\mathcal{S}$的子集 T。

Lem命题 4.14。设 $p \geqslant 4$。准 2-圆柱 $G = (C_p \square P_2)\backslash\{x\}$ 存在一个无环 T-取向，*dd orie*对于满足以下条件的任意子集 $T \subseteq V(G)$：

- $\mathcal{P}$ 若 p 为奇数。
- $\mathcal{PSS}$ 若 p为偶数。

证明。
设 $p \geqslant 4$ 以及 $G = (C_p \square P_2)\backslash\{x\}$。**a.** 假设 $p \equiv_2 1$ 并设 $T \subseteq V(G)$ 为满足 $\mathcal{P}$的子集。根据(QC)，我们有$|T| \equiv_2 |E(G)| \equiv_2 0$以及 $|V(G)\backslash T| \equiv_2 1$。因此 T也同时满足 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$。

a.1. 假设 $T(X_0)$ 在 $G[X_0]$中满足 $\mathcal{P}$，即 $|T(X_0)| \equiv_2 p \equiv_2 1$。那么 $T(X_1)$ 在 $G[X_1]$ 中同样满足 $\mathcal{P}$，事实上：

$$\begin{aligned} |T(X_1)| &\equiv_2 |T| - |T(X_0)| \\ &\equiv_2 |E(G)| - |E(G[X_0])| \\ &\equiv_2 |E(G[X_1])| + |\delta(X_0, X_1)| - 1 \\ &\equiv_2 |E(G[X_1])| \end{aligned} \tag{$*$}$$

- 若 $T(X_0) \neq \{(u_0,\ v_0)\}$，我们考虑 T-分解 $\mathcal{A}_2 = \langle V_0,\ V_1\rangle = \langle X_1,\ X_0\rangle$（见图 16a）。由引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为 $|T_0| = |T(X_1)|$ 在 $G[V_0]$中满足 $\mathcal{P}$。此外，它是好的。事实上，由引理 4.4，路径 $G[V_0]$ 容许一个无环的 T_0-奇定向。而且，由于 $T(X_0) \neq \{(u_0,\ v_0)\}$，存在 $(u_i,\ v_0) \in T(X_0)$。因此 $(u_i,\ v_0) \in Source(T_1)$ 在 $G[V_1]$ 中（见图 16a），所以 T_1 在 $G[V_1]$ 中满足 $\mathcal{S}$，并且由引理 4.5，环 $G[V_1]$ 容许一个无环的 T_1-奇定向。

- 否则，若 $T(X_0) = \{(u_0, v_0)\}$，我们考虑 T-分解 $\mathcal{A}_1 = \langle V_0, V_1\rangle = \langle X_0, X_1\rangle$（见图 16a）。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为 $|T_0| = |T(X_0)|$ 在 $G[V_0]$中满足 $\mathcal{P}$。此外，它是良好的，因为 $T(X_0) \neq X_0$，所以 T_0 在 $G[V_0]$ 中满足 $\mathcal{S}$，且环 $G[V_0]$ 根据引理 4.5 存在无环 T_0-奇定向。此外，路径 $G[V_1]$ 根据引理 4.4 存在无环 T_1-奇定向。

a.2. 现在假设 $T(X_0)$ 在 $G[X_0]$中不满足 $\mathcal{P}$，即 $|T(X_0)| \equiv_2 0$。那么，根据 $(*)$，$T(X_1)$ 也不满足 $\mathcal{P}$，即 $|T(X_1)| \equiv_2 0$。
- 若 $T(X_0) \neq \varnothing$，则存在 $i \in \{1, \ldots, p-1\}$使得 $(u_i,\ v_0) \in T$。我们考虑T-分解 $\mathcal{B}_1 = \langle V_0,\ V_1,\ V_2\rangle = \langle X_0\backslash\{(u_i,\ v_0)\},\ X_1,\ \{(u_i,\ v_0)\}\rangle$(见图 16b)。根据引理4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为:

$$\begin{aligned} |T_0| &= |T(V_0)| = |T(X_0)| - |T(\{(u_i, v_0)\})| \equiv_2 1 - 1 \equiv_2 |E(G[V_0])| \\ |T_2| &= |T(V_2)| - |Z_2| \equiv_2 1 - 3 \equiv_2 |E(G[V_2])| \end{aligned}$$

此外，它是良好的，因为对于所有 $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$，路径 $G[V_k]$ 存在无环的 T_k-奇定向，根据引理 4.4。

- 现在假设 $T(X_0) = \varnothing$。我们考虑 T-分解 $\mathcal{B}_2 = \langle V_0,\ V_1,\ V_2\rangle = \langle \{(u_0,\ v_1)\},\ X_0,\ X_1 \backslash \{(u_0,\ v_1)\}\rangle$（见图 16b）。由引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为：

$$
\begin{aligned}
&|T_0| = |T(V_0)| \equiv_2 0 \equiv_2 |E(G[V_0])| \\
&|T_1| = |T(X_0)| - |Z_1| \equiv_2 0 - 1 \equiv_2 |E(G[X_0])|
\end{aligned}
$$

此外，它是良好的，因为对于所有 $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$，路径 $G[V_k]$ 根据引理 T_k 能够实现无环 4.4 给出的奇定向。

b. 假设 $p \equiv_2 0$，因此特别有 $|X_0| \equiv_2 0$ 和 $|X_1| \equiv_2 1$。令 $T \subseteq V(G)$ 为满足 $\mathcal{PSS}$ 的一个子集。那么由 (QC) 可知 $|T| \equiv_2 |E(G)| \equiv_2 1$ 且 $|V(G) \backslash T| \equiv_2 0$。

b.1. 首先假设 $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{PSS}$ 于 $G[X_0]$中。我们考虑分解 $\mathcal{C} = \langle V_0, V_1\rangle = \langle X_0, X_1\rangle$（见图 16c）。由于根据假设，$T_0 = T(X_0)$ 满足 $\mathcal{P}$ 且 $\mathcal{S}$ 属于 $G[V_0]$，因此只需使用引理 4.3 即可证明 $\mathcal{C}$ 满足 $\mathcal{P}$。此外，它是良好的，因为环$G[V_0]$ 根据引理 4.5 可实现无环的 T_0-奇定向，而路径 $G[V_1]$ 根据引理 4.4 可实现无环的T_1-奇定向。

b.2. 现在假设 $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{P}$，但不满足 X_0中的 $\mathcal{S}$（或等价地 $\mathcal{S}$），则 $T(X_0) = \overline{X_0}$和 $|T(X_1)| \equiv_2 1$。在这种情况下，我们断言可以将 X_1分成两条路径，使得其中一条（记为 P）具有偶数长度，并且 $T(P)$在 $G[P]$中满足 $\mathcal{P}$。更精确地说，我们断言存在 $l \in [1, \frac{p-2}{2}]$，使得要么 $|T(X_1^{[\leqslant 2l]})| \equiv_2 1$，要么 $|T(X_1^{[\geqslant 2l]})| \equiv_2 1$。用反证法假设并非如此，则对所有 $k \in [1, \frac{p-2}{2}]$，我们有 $|T(X_1^{[\leqslant 2k]})| \equiv_2 |T(X_1^{[\geqslant 2k]})| \equiv_2 0$ 以及：

$$
0 \equiv_2 |T(X_1^{[\leqslant 2k]})| + |T(X_1^{[\geqslant 2k]})| \equiv_2 |T(X_1)| + |T(\{(u_{2k}, v_1)\})| \equiv_2 1 + |T(\{(u_{2k}, v_1)\})|
$$

因此，对于所有 $k \in [1,\ \frac{p-2}{2}]$，我们得到 $(u_{2k},\ v_1) \in T(X_1)$。但对于所有 $k \in [1,\ \frac{p-2}{2}]$，根据假设，我们还有 $|T(X_1^{[\leqslant 2k]})| \equiv_2 0$，因此可归纳得出，对于所有$k \in [1,\ \frac{p-2}{2}]$，都有 $(u_{2k-1},\ v_1) \in T(X_1)$。这意味着 $|T(X_1)| = |X_1|$，从而 $T = V(G)$，且不满足 $\mathcal{S}$，这与我们的假设矛盾。

因此，令 l 满足：在对称性意义下，$|T(X_1^{[\geqslant 2l]})| \equiv_2 1$。我们定义分解$\mathcal{D} = \langle V_0,\ V_1,\ V_2\rangle = \langle X_1^{[\geqslant 2l]},\ X_0,\ X_1^{[<2l]}\rangle$（见图 16d）。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为：

$$
\begin{aligned}
&|T_0| = |T(X_1^{[\geqslant 2l]})| \equiv_2 1 \equiv_2 |E(G[X_0])| \\
&|T_2| = |T(X_1^{[<2l]})| - |Z_2| \equiv_2 |T(X_1)| - |T(X_1^{[\geqslant 2l]})| - 0 \equiv_2 1 - 1 \equiv_2 |E(G[X_1^{[<2l]}])|
\end{aligned}
$$

注意，由于 $|Z_2| \equiv_2 |\delta(V_0 \cup V_1, V_2)| \equiv_2 |\delta(V_0, V_2)| + |\delta(V_1, V_2)| \equiv_2 1 + 1 \equiv_2 0$，因此 $|Z_2| \equiv_2 0$。现在我们证明该分解是良好的。$G[V_0]$和 $G[V_2]$ 是路径，根据引理 4.4，它们分别具有无环的T_0-奇和 T_2-奇定向。$G[V_1]$ 是一个环，且 T_1 在 $G[V_1]$ 中满足 $\mathcal{S}$，因为 $T_1 = T(V_1) \triangle Z_1 = X_0 \triangle X_0^{[\geqslant 2l]} \neq X_0$（即 $G[V_1]$中的 $Source(T_1) \neq \varnothing$），因此根据引理 4.5，$G[V_1]$具有无环的 T_1-奇定向。

b.3. 现在假设 $T(X_0)$不满足 $\mathcal{P}$，即 $|T(X_0)| \equiv_2 1$ 且 $|T(X_1)| \equiv_2 0$。**b.3.i.** 首先假设 $T(X_0) \neq \{(u_0, v_0)\}$。我们考虑分解 $\mathcal{E} = \langle V_0, V_1\rangle = \langle X_1, X_0\rangle$（见图 16e）。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为 $|T_0| = |T(X_1)| \equiv_2 |T| - |T(X_0)| \equiv_2 1 - 1 \equiv_2 |E(G[X_1])|$。现在我们证明该分解是良好的。路径 $G[V_0]$ 根据引理 4.4，具有无环的 T_0-奇定向。为了利用引理 4.5证明环 $G[V_1]$ 具有无环的 T_1-奇定向，我们需要证明 $T_1 \neq V_1$。由矛盾可得：

$$
\begin{aligned}
T_1 = V_1 &\iff T(V_1) \triangle Z_1 = V_1 \\
&\iff T(X_0) \triangle X_0^{[\geqslant 1]} = X_0 \\
&\iff T(X_0) = X_0 \triangle X_0^{[\geqslant 1]} \\
&\iff T(X_0) = \{(u_0, v_0)\} \qquad \text{一个矛盾}
\end{aligned}
$$

b.3.ii. 现在假设 $T(X_0) = \{(u_0, v_0)\}$。在这种情况下，我们声称可以将 X_1分成两条路径，其中一条（设为 P）具有偶数长度，而 $T(P)$不满足 $\mathcal{P}$于

$G[P]$。更确切地说，我们声称存在 $l \in [1, \frac{p-2}{2}]$，使得 $|T(X_1^{[\leqslant 2l]})| \equiv_2 0$或 $|T(X_1^{[\geqslant 2l]})| \equiv_2 0$成立。假设情况并非如此，那么对所有 $k \in [1, \frac{p-2}{2}]$，都有 $|T(X_1^{[\leqslant 2k]})| \equiv_2 |T(X_1^{[\geqslant 2k]})| \equiv_2 1$，并且：

$$0 \equiv_2 |T(X_1^{[\leqslant 2k]})| + |T(X_1^{[\geqslant 2k]})| \equiv_2 |T(X_1)| + |T(\{(u_{2k}, v_1)\})| \equiv_2 |T(\{(u_{2k}, v_1)\})|$$

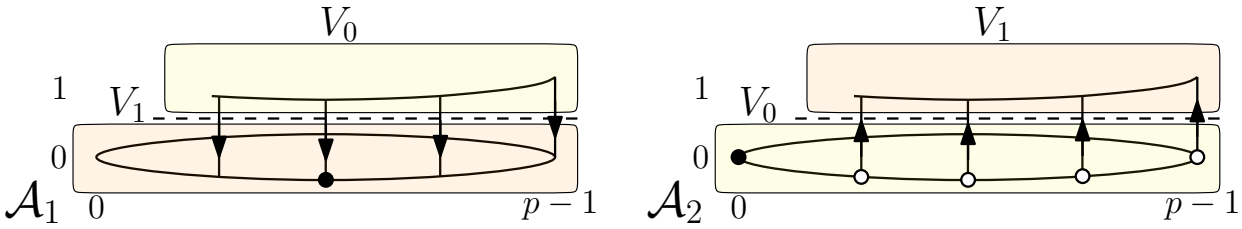
因此，对于所有 $k \in [1, \frac{p-2}{2}]$，我们得到 $(u_{2k}, v_1) \notin T(X_1)$。利用 $|T(X_1^{[\leqslant 2]})| = |T(\{(u_1, v_1), (u_2, v_1)\})| \equiv_2 0$，我们推得 $(u_1, v_1) \in T(X_1)$。类似地，由于 $|T(X_1^{[\geqslant p-2]})| = |T(\{(u_{p-2}, v_1), (u_{p-1}, v_1)\})| \equiv_2 0$，我们推得 $(u_{p-1}, v_1) \in T(X_1)$。然后利用 $|T(X_1^{[\leqslant 2k]})| \equiv_2 0$对于所有 $k \in [2, \frac{p-2}{2}]$，我们进一步归纳地推出，没有其他顶点属于 $T(X_1)$，且 $T(X_1) = \{(u_1, v_1), (u_{p-1}, v_1)\}$。这意味着 $\mathcal{T} = \{(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_{p-1}, v_1)\}$，并且不满足 $\mathcal{S}$，因为它恰好包含每个偶度顶点（见图15），这与我们的初始假设相矛盾。

因此，设其为这样的 l，并不失一般性地假设在对称性下 $|T(X_1^{[\geqslant 2l]})| \equiv_2 0$。我们定义分解 $\mathcal{F} = \langle V_0, V_1, V_2 \rangle = \langle Y_{\geqslant 2l}, Y_0, Y_{<2l} \backslash Y_0 \rangle$（见图16f）。根据引理4.3，它满足$\mathcal{P}$ 因为：

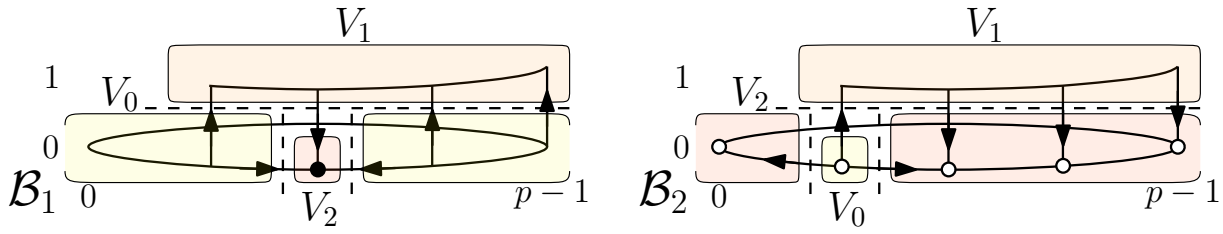
$$\begin{aligned} |T_0| &= |T(Y_{\geqslant 2l})| = |T(X_1^{[\geqslant 2l]})| + |T(X_0^{[\geqslant 2l]})| \equiv_2 0 + 0 \equiv_2 |E(G[X_1^{[\geqslant 2l]}])| \\ |T_1| &= |T(V_1)| - |Z_1| \equiv_2 1 - 1 \equiv_2 |E(G[V_1])| \end{aligned}$$

现在证明该分解是良好的。图 $G[V_0]$和 $G[V_2]$是网格，并且根据定理 T_0-奇及 T_2-奇定向分别是无环的4.11。事实上，$(G[V_0], T_0)$ 不是坏网格实例，因为角顶点 $(u_{p-1}, v_0) \notin T_0$ 而 $(G[V_2], T_2)$ 也不是坏网格实例，因为 $G[V_2]$ 是一个具有奇数维的网格。

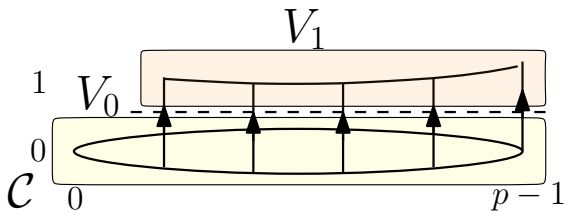
□



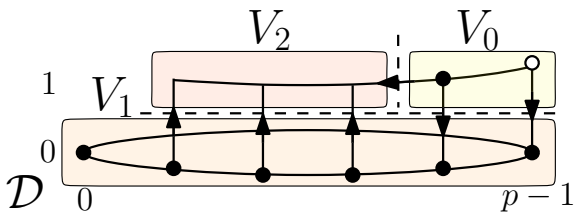
(a) 情形 a.1: $p \equiv_2 1$ 和 $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{P}$ 于 $G[X_0]$



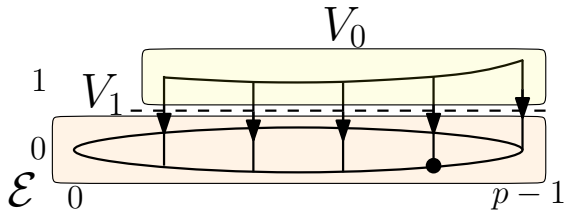
(b) 情形 a.2: $p \equiv_2 1$ 和 $T(X_0)$ 不满足 $\mathcal{P}$ 于 $G[X_0]$



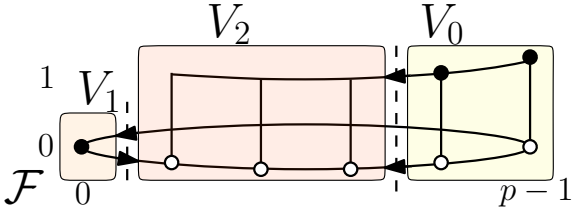
(c) 情形 b.1: $p \equiv_2 0$ 和 $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{PSS}$ 于 $G[X_0]$



(d) 情形 b.2: $p \equiv_2 0$ 和 $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{P}$ 但不 $\mathcal{S}$ 且$\mathcal{S}$ 在 $G[X_0]$



(e) 情形 b.3.i: $p \equiv_2 0$, $T(X_0)$ 不满足 $\mathcal{P}$ 在$G[X_0]$和 $T(X_0) \neq \{(u_0, v_0)\}$



(f) 情形 b.3.ii: $p \equiv_2 0$和 $T(X_0) = \{(u_0, v_0)\}$在 $G[X_0]$

图 16: T-分解，用于引理4.14的证明。

环面

本节旨在证明环面上的定理 1.3。与之前一样，证明通过构造和归纳法进行。对于任意环面 $G = C_p \square C_q$，需要记住：

$$|V(G)| \equiv_2 p \times q \ , \ |E(G)| \equiv_2 0 \tag{T}$$

引理 4.15. 设 $p, q \geqslant 4$。环面 $G = C_p \square C_q$ 对满足 $\mathcal{PSS}$的任意子集 $T \subseteq V(G)$，都存在一个无环的 T-奇定向。

证明。
设 p, $q \geqslant 4$ 和 $G = C_p \square C_q$。设 $T \subseteq V(G)$ 为满足 $\mathcal{PSS}$的一个子集。根据 (T)，可知 $|T|$ 为偶数。

a. 首先，假设 $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{P}$且 $\mathcal{S}$，也就是说，$|T(X_0)| \equiv_2 p$，$X_0 \backslash T \neq \varnothing$，因此 $|T(X_{\geqslant 1})| \equiv_2 p$。根据引理 4.5，我们已经知道 $G[X_0]$ 存在一个无环的 $T(X_0)$-奇定向。根据集合 $T(X_{\geqslant 1})$，分为两种情形。

- 假设 $T(X_{\geqslant 1}) \neq X_{\geqslant 1}$ 和 $T(X_{\geqslant 1}) \neq X_{>1} \backslash X_{q-1}$（由于 $q \geqslant 4$，后一个集合定义良好），并考虑分解 $\mathcal{A}_1 = \langle V_0, V_1 \rangle = \langle X_0, X_{\geqslant 1} \rangle$（见图 17a）。根据引理 4.3，该分解满足 $\mathcal{P}$；事实上，根据假设，$|T_0| = |T(X_0)|$ 在 $G[X_0]$ 中满足 $\mathcal{P}$。为了证明 $G[V_1]$ 存在无环的 T_1-奇定向，从而证明 $\mathcal{A}_1$ 是良好的，我们使用圆柱上的定理 1.3。为此，我们必须证明 T_1 满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$。等价地，我们通过反证证明 $T_1 \neq X_{\geqslant 1}$（即 $G[V_1]$中的 $Source(T_1) \neq \varnothing$）以及 $T_1 \neq X_{>1} \backslash X_{q-1}$（即 $G[V_1]$中的 $Sink(T_1) \neq \varnothing$）：

$$\begin{aligned} T_1 = (X_{\geqslant 1} \text{ or } X_{>1} \backslash X_{q-1}) &\iff T(V_1) \triangle Z_1 = (X_{\geqslant 1} \text{ or } X_{>1} \backslash X_{q-1}) \\ &\iff T(X_{\geqslant 1}) \triangle (X_1 \cup X_{q-1}) = (X_{\geqslant 1} \text{ or } X_{>1} \backslash X_{q-1}) \\ &\iff T(X_{\geqslant 1}) = (X_{\geqslant 1} \triangle (X_1 \cup X_{q-1}) \text{ or } (X_{>1} \backslash X_{q-1}) \triangle (X_1 \cup X_{q-1})) \\ &\iff T(X_{\geqslant 1}) = (X_{>1} \backslash X_{q-1} \text{ or } X_{\geqslant 1}) \quad \text{a contradiction} \end{aligned}$$

- 现在，假设 $T(X_{\geqslant 1})$ 是 $X_{\geqslant 1}$ 或 $X_{>1} \backslash X_{q-1}$。令 O 为 $G[X_0]$的一个无环 $T(X_0)$-奇定向。令 w_1 和 w_2 为 X_0 的顶点，且满足 $d^-_{G[X_0]_O}(w_1) = d^-_{G[X_0 \backslash \{w_1\}]_O}(w_2) = 0$。注意，这直接意味着 $T(\{w_1, w_2\})$ 在 $G[\{w_1, w_2\}]$中满足 $\mathcal{P}$。我们定义分解 $\mathcal{A}_2 = \langle V_0, V_1, V_2 \rangle = \langle \{w_1, w_2\}, X_{\geqslant 1}, X_0 \backslash \{w_1, w_2\} \rangle$（见图 17a）。根据引理 4.3，该分解满足 $\mathcal{P}$：事实上，$T_0 = T(\{w_1, w_2\})$ 在 $G[V_0]$ 中满足 $\mathcal{P}$，并且：

$$\begin{aligned} |T_1| &= |T(X_{\geqslant 1})| - |Z_1| \\ &\equiv_2 |T| - |T(X_0)| - 2 \\ &\equiv_2 |E(G)| - |E(G[X_0])| \\ &\equiv_2 |E(G[X_{\geqslant 1}])| + |\delta(X_0, X_{\geqslant 1})| \\ &\equiv_2 |E(G[X_{\geqslant 1}])| \end{aligned}$$

证明 T_1 在 $G[V_1]$中满足 $\mathcal{P}$。此外，$\mathcal{A}_2$ 是良好的。事实上，根据构造，$G[V_0]$ 和 $G[V_2]$ 分别存在无环 T_0-奇定向和 T_2-奇定向。最后，我们对圆柱应用 1.3，以证明 $G[V_1]$ 存在无环 T_1-定向。为此，我们必须证明 T_1 满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$：令 w'_1、w''_1 和 w'_2、w''_2 分别为 w_1 和 w_2 在 V_1 中的四个邻点。于是 $T_1 = T(V_1) \triangle Z_1 = T(X_{\geqslant 1}) \triangle \{w'_1, w'_2, w''_1, w''_2\} \neq X_{\geqslant 1}$（即 $G[V_1]$中的 $Source(T_1) \neq \varnothing$）以及 $T_1 \neq X_{>1} \backslash X_{q-1}$（即 $G[V_1]$中的 $Sink(T_1) \neq \varnothing$），因为根据假设，$T(X_{\geqslant 1})$ 要么是 $X_{\geqslant 1}$，要么是 $X_{>1} \backslash X_{q-1}$。因此，$(G[V_1], T_1)$ 不可能是圆柱 $G[V_1]$ 中 T_1 对 $\mathcal{S}$ 或 $\mathcal{S}$ 不成立的情形之一（见图11）。

b. 现在可以假设，对于所有 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$，要么 $T(X_i)$ 不满足 $\mathcal{S}$在 $G[X_i]$ 中的条件（即 $X_i \subseteq T$），要么不满足 $\mathcal{P}$在 $G[X_i]$中的条件（即 $|T(X_i)| \equiv_2 p-1$）。等价地，对于所有 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$，$|X_i \backslash T(X_i)|$不是 0 就是奇数。利用对称性，也可以假设，对于所有 $j \in \{0, \ldots, q-1\}$，$|T(Y_j)| \equiv_2 q$当且仅当 $Y_j \subseteq T$（即 $|Y_j \backslash T(Y_j)|$ 不是 0 就是奇数）。此外，由于 T 满足 $\mathcal{S}$，我们可以假设 $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{S}$，这意味着 $|T(X_0)| \equiv_2 p-1$ 和 $X_0 \backslash T \neq \varnothing$。因此，又由于根据 (T)，$|T|$ 是偶数，我们有 $|T(X_{\geqslant 1})| \equiv_2 p-1$。令 $x \in X_0 \backslash T$，并利用对称性，假设$x = (u_0, v_0)$。

b.1. 若 p是偶数，则 $|T(X_0)| \equiv_2 1$，因此在旋转的意义下，不妨设 $(u_{p-1}, v_0) \in T$。此外，这意味着 $|T(X_{\geqslant 1})| \equiv_2 1$，所以存在 $0 < i \leqslant q-1$使得 $|T(X_i)| \equiv_2 1$。令 k为最小的

这样的指标。由于 $p \geqslant 3$，在对称性的意义下，不妨设 $k < q-1$。根据 k的定义，对于所有 $0 < j < k$，都有 $X_j \subseteq T$。现在我们考虑两种情形：

- 假设存在 $j \in \{k+1, \ldots, q-1\}$ 使得 $X_j \not\subseteq T$。我们考虑分解 $\mathcal{B}_1 = \langle V_0, V_1 \rangle = \langle X_{<k+1}, X_{\geqslant k+1} \rangle$（见图17b）。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为 $|T_0| = |T(X_{<k+1})| \equiv_2 |T(X_0)| + |T(X_k)| \equiv_2 1+1 \equiv_2 0$。此外，$\mathcal{B}_1$是好的。事实上，$T_0$满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$，且在 $G[V_0]$ 中如同在圆柱 $G[V_0]$ 中一样满足 $x \in Source(T_0)$，而 $v_0) \in Sink(T_0)$ 在$G[V_0]$中。由此，根据引理 4.13，$G[X_0]$ 存在一个无环的 T_0-奇定向。此外，由于根据假设（即 $G[V_1]$中的 $Source(T_1) \neq \varnothing$），$T_1$在圆柱 $G[V_1]$ 中满足 $\mathcal{S}$，并且它确实满足 $G[V_1]$ 中的 $\mathcal{S}$：根据假设 $T(X_{\geqslant k+1}) \neq X_{\geqslant k+1}$，且 $T_1 = T(V_1) \triangle Z_1 = T(X_{\geqslant k+1}) \triangle (X_{k+1} \cup X_{q-1}) \neq X_{>k+1} \backslash X_{q-1}$（即 $G[V_1]$中的 $Sink(T_1) \neq \varnothing$）。因此，$(G[V_1], T_1)$不是使 T_1 在 $G[V_1]$中不满足 $\mathcal{S}$ 的情形（见图11）。所以，根据引理 4.13，圆柱$G[V_1]$ 存在一个无环的 T_1-奇定向。

- 现在假设 $T(X_j) = X_j$对所有 $j \in \{k+1, \ldots, q-1\}$。我们考虑分解$\mathcal{B}_2 = \langle V_0, V_1, V_2 \rangle = \langle Y_0^{[<q-1]}, X_{q-1} \cup X_0 \backslash \{x\}, V \backslash (V_0 \cup V_1) \rangle$（见图 17b）。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为：

$$
\begin{aligned}
|T_0| &= |T(Y_0^{[<q-1]})| \equiv_2 |T(Y_0)| - 1 \equiv_2 q \equiv_2 |E(G[Y_0])| \equiv_2 |E(G[Y_0^{[<q-1]}])| \\
|T_1| &= |T(X_{q-1} \cup X_0 \backslash \{x\})| - |Z_1| \\
&\equiv_2 |T(X_{q-1})| + |T(X_0)| - 4 \\
&\equiv_2 0 + 1 - 4 \\
&\equiv_2 |E(G[X_{q-1} \cup X_0 \backslash \{x\}])| \quad \text{by (QC)}
\end{aligned}
$$

此外，$\mathcal{B}_2$ 是良好的。根据引理 4.4，路径 $G[V_0]$ 具有一个无环 T_0-奇定向。根据引理 4.14，准圆柱 $G[V_1]$ 具有一个无环 T_1-奇定向。事实上，T_1 满足 $\mathcal{S}$，因为 $T_1(X_{q-1}) = X_{q-1} \subset Sink(T_1)$ 在 $G[V_1]$ 中，并且它满足 $\mathcal{S}$，因为 $(u_{p-1}, v_0) \in Source(T_1)$ 在$G[V_1]$中。此外，V_2 导出一个具有奇数维的网格图，因此引理 4.8 保证 $G[V_2]$具有一个无环 T_2-奇定向。

b.2. 现在假设 p和 q都是奇数。回想一下，我们在 **b.** 中假设，对于所有 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$，$T(X_i) = X_i$或 $|T(X_i)|$是偶数；对于所有 $j \in \{0, \ldots, q-1\}$，$T(Y_j) = Y_j$或 $|T(Y_j)|$是偶数。

b.2.i 假设 $X_1 \subseteq T$。那么，$T(X_{<2})$和 $T(X_{\geqslant 2})$分别在 $G[X_{<2}]$和 $G[X_{\geqslant 2}]$中满足 $\mathcal{P}$。事实上：

$$
\begin{aligned}
|T(X_{<2})| &= |T(X_0)| + |T(X_1)| \equiv_2 0 + 1 \equiv_2 |E(G[X_{<2}])| && \text{by (C0)} \\
|T(X_{\geqslant 2})| &= |T| - |T(X_{<2})| \equiv_2 0 - 1 \equiv_2 |E(G[X_{\geqslant 2}])| && \text{by (C0)}
\end{aligned}
$$

我们借助图 17c 来说明以下情形。

- 如果 $T(X_{\geqslant 2})$满足 $\mathcal{S}$且$\mathcal{S}$在 $\overline{G}[X_{\geqslant 2}]$中，那么分解 $\mathcal{C}_1 = \langle V_0, V_1 \rangle = \langle X_{\geqslant 2}, X_{<2} \rangle$根据引理 4.12是良好的。

- 如果 $T(X_{\geqslant 2})$在 $G[X_{\geqslant 2}]$中不满足 $\mathcal{S}$，那么对于所有$2 < i < q-1$，$T(X_2) = T(X_{q-1}) = \varnothing$和 $X_i \subseteq T$（见图11）。在这种情形下，由于 $p \geqslant 5$ 且根据引理 4.3，分解$\mathcal{C}_2 = \langle V_0, V_1 \rangle = \langle X_1 \cup X_2, X_0 \cup X_{\geqslant 3} \rangle$满足 $\mathcal{P}$，因为 $|T(X_1 \cup X_2)| = |T(X_1)| + |T(X_2)| \equiv_2 1+0 \equiv_2 |E(G[X_1 \cup X_2])|$。此外，根据引理 4.12，该分解是良好的。事实上，T_0 在 $G[V_0]$ 中满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$，因为 $X_1 \in Sink(T_0)$ 在 $G[V_0]$ 中且 $X_2 \in Source(T_0)$ 在 $G[V_0]$中；而T_1 在 $G[V_1]$ 中同时满足 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$，因为 $X_{q-1} \in Source(T_1) \cap Sink(T_1)$ 在 $G[V_1]$中。还要注意，由于我们假设对于所有 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$，$T(X_i) = X_i$或 $|T(X_i)|$是偶数，因此必有 $T(X_0) = \varnothing$。

- 如果 $T(X_{\geqslant 2})$在 $G[X_{\geqslant 2}]$中不满足 $\mathcal{S}$，那么对所有 $1 \leqslant i \leqslant p-1$，$X_i \subseteq T$。首先假设$T(X_0) \neq \varnothing$，并利用对称性，不妨设 $(u_1, v_0) \in T$。此外，由于 T满足 $\mathcal{S}$，即 $V \backslash T \neq \varnothing$且 $|V \backslash T \cup \{v \in T, d(v) \equiv_2 1\}| > 1$，我们知道 $|V \backslash T| > 1$。因此，存在$y \neq (u_0, v_0)$，使得 $y \in X_0 \backslash T$。现在考虑分解 $\mathcal{C}_3 = \langle V_0, V_1 \rangle = \langle Y_{<2}, Y_{\geqslant 2} \rangle$。根据引理 4.3，它满足 $\mathcal{P}$，因为 $|T_0| = |T(Y_{<2})| = |T(Y_0)| + |T(Y_1)| \equiv_2 0+1 \equiv_2 |E(G[Y_{<2}])|$。此外，根据引理 4.12，该分解是良好的。事实上，T_0 在圆柱 $G[V_0]$ 中满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$，因为 $x \in Source(T_0)$ 在 $G[V_0]$ 中，且 $(u_1, v_0) \in Sink(T_0)$ 在 $G[V_0]$中。此外，T_1在圆柱 $G[V_1]$ 中满足 $\mathcal{S}$，因为 $Y_2^{[\geqslant 1]} \in Source(T_1)$ 在 $G[V_1]$ 中；它还在 $G[V_1]$中满足 $\mathcal{S}$，因为 y 要么属于 Y_2，要么属于 Y_{q-1}，在这种情况下它属于 T_1，且在 $G[V_1]$中的度数为 3；要么既不属于 Y_2，也不属于 Y_{q-1}，在这种情况下它不属于 T_1，且度数为 4，位于

$G[V_1]$。两种情形下，$y \in Sink(T_1)$ 属于 $G[V_1]$。

最后，假设 $T(X_0) = \varnothing$。在这种情况下，我们考虑分解 $\mathcal{C}_4 = \langle V_0、V_1、V_2\rangle = \langle \{x\}、Y_{\geqslant 2}、Y_{<2}\backslash\{x\}\rangle$。根据引理 4.3，该分解满足 $\mathcal{P}$:

$$|T_0| = |T(\{x\})| \equiv_2 0$$
$$|T_1| = |T(Y_{\geqslant 2})| - |Z_1| \equiv_2 1 - 1 \equiv_2 |E(G[Y_{\geqslant 2}])|$$

此外，这个分解是良好的。事实上，圆柱 $G[V_1]$ 由引理 T_1 得到无环4.12，因为 T_1 同时满足 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$（在 $G[V_1]$ 中，因为顶点 $(u_3, v_0) \in Sink(T_1)$ 在 $G[V_1]$ 中，因为 $q \geqslant 4$ 且 $(u_2, v_0) \in Source(T_1)$ 在 $G[V_1]$中）。此外，准圆柱$G[V_2]$ 由引理得到无环 T_2定向，见引理 4.14，因为 q 是奇数。

b.2.ii 现在假设对于所有 $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ 和 $j \in \{0, \ldots, q-1\}$，都有 $|T(X_i)| \equiv_2 |T(Y_j)| \equiv_2 0$。考虑分解 $\mathcal{D} = \langle \{x\}, X_{\geqslant 2}, X_{<2}\backslash\{x\}\rangle$(见图 18）。由引理4.3，它满足 $\mathcal{P}$:

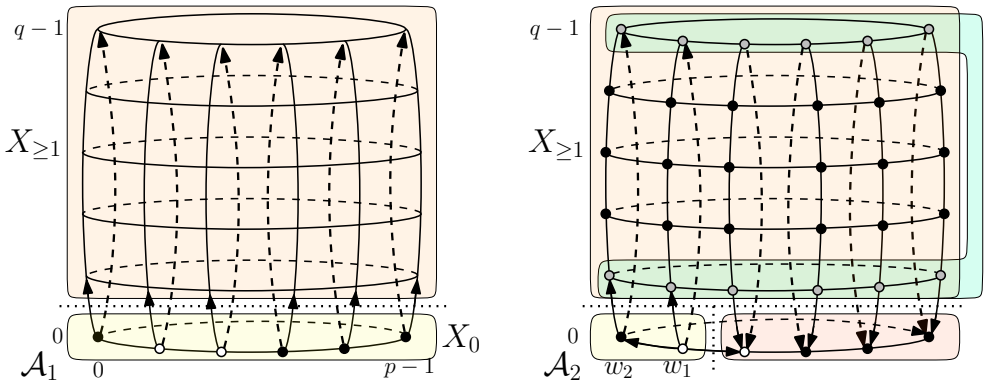
$$|T_0| = |T(\{x\})| \equiv_2 0$$
$$|T_1| = |T(X_{\geqslant 2})| - |Z_1| \equiv_2 (q-2) \times (p-1) - 1 \equiv_2 p \equiv_2 |E(G[X_{\geqslant 2}])| \quad \text{by (C0)}$$

现在证明该分解是良好的。根据假设，$|T(X_2)| \equiv_2 p - 1$ 并且根据该分解的构造，$Z_1 = X_2 \cup X_{q-1}$。这意味着 X_2 同时包含属于和不属于 $T_1 = T(V_1) \triangle Z_1$的两个顶点。特别地，$T_1(X_2) \subset Sink(T_1)$ 在 $G[V_1]$ 中，因为这些是度为 3 的顶点，并且 $X_2\backslash T_1(X_2) \subset Source(T_1)$ 在 $G[V_1]$中。因此，T_1 在 $G[V_1]$ 中同时满足 $\mathcal{S}$和$\mathcal{S}$，而圆柱 $G[V_1]$ 根据引理 4.12 具有一个无环的 T_1-奇定向。此外，准圆柱 $G[V_2]$ 根据引理 4.14 具有一个无环的 T_2-定向，因为 q 是奇数。

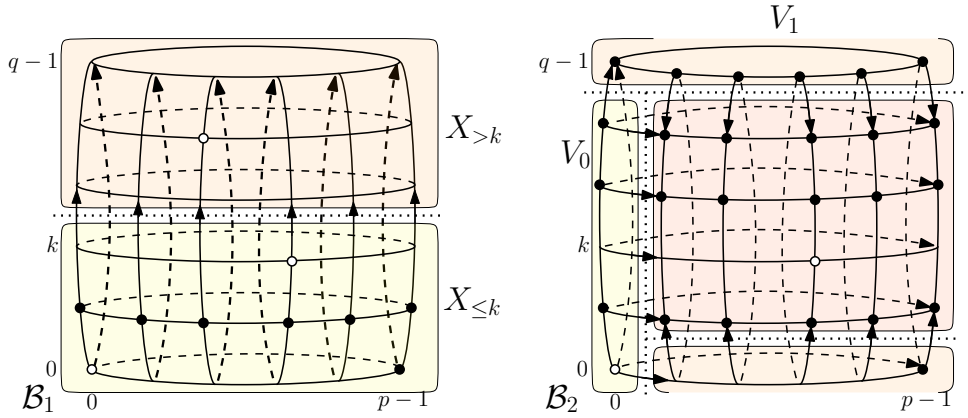
In 在所有情形下，我们得到一个良好的 T-分解，因此可以应用定理 4.2得出结论。 □

4.5 最后说明

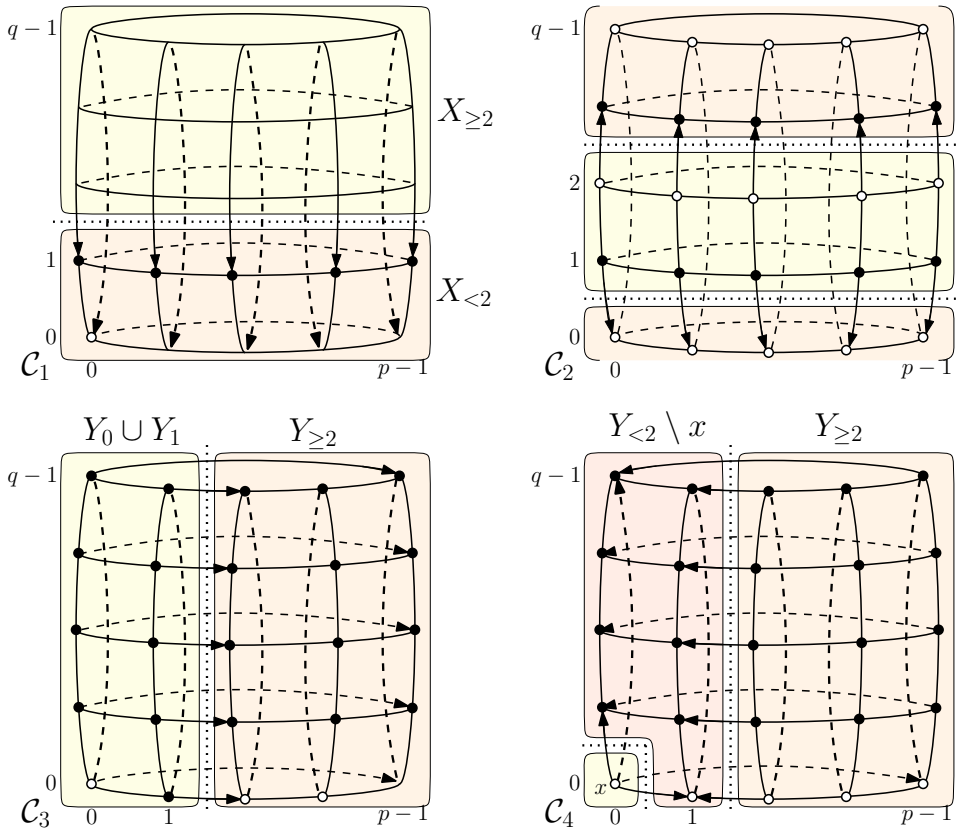
似乎引理 4.15 在 $p = 3$ 且 $q > 3$时成立。不过，要确定这一情形，证明会更加技术性。此外，图 19 所示的构型表明，当 $p = q = 3$ 时，该结果不成立。



(a) 情形 a: $T(X_0)$ 满足 $\mathcal{S}$ 且 $\mathcal{P}$ 在 $G[X_0]$



(b) 情形 b.1: p 为偶数, $|X_i \backslash T(X_i)|$ 且 $|Y_j \backslash T(Y_j)|$ 为 0 或对所有 i, j



(c) 情形 b.2.i: p, q 为奇数, $|X_i \backslash T(X_i)|$ 且 $|Y_j \backslash T(Y_j)|$ 为 0 或对所有 i, j 且 $X_1 \subseteq T$

图 17: T-分解, 用于证明引理 4.1534

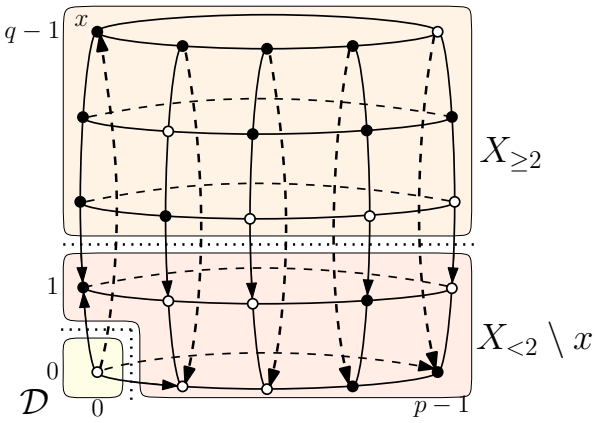


图 18：情形 b.2.ii：p，q 为奇数，$|X_i \backslash T(X_i)| \equiv_2 |Y_j \backslash T(Y_j)| \equiv_2 1$ 对于所有 i 以及 j

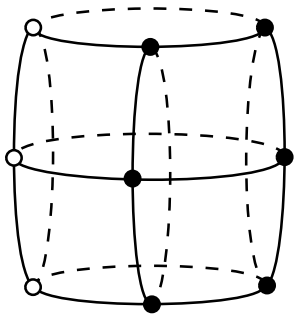


图 19：带有一个坏的 T 的环面 $C_3 \times C_3$。

5 推论 1.5 的证明

本节旨在证明推论1.5。为便于阅读，我们在此重述定理1.1 和推论1.5：

定理 (1.1)。

(a) $\mathcal{C}_{\mathcal{S}} = \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{S}}} = \{$,(b) $\mathcal{C}_{\mathcal{SS}} = \{$, $\}$,(c) $\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{$ $\} \cup \{G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \mid G$ 是连通的、非欧拉的，而 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1\}$,$(d)$ $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{$, $\} \cup \{G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \mid G$ 是欧拉的$\}$,(e) $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \subset \{$ $\} \cup \{G \mid G$ 是连通的、非欧拉的，而 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0\}$。

推论 (1.5)。 设 $p, q, k \geqslant 1$ 是三个整数。

(c)' 圆柱 $C_{2p+1} \square P_{2q}$、网格 $P_{2p+1} \square P_q$和树属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。*(d)'* 环面 $C_p \square C_q$ 与 p、$q \geqslant 4$ 以及圈属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。*(e)'* 圆柱 $C_{2p} \square P_q$, $C_{2p+1} \square P_{2q+1}$ 属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$。

此外，

(c)" 团 $K_{4k+2} \in \{G$ 连通且非欧拉 $\mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1\} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。*(d)"* 团 $K_{2k+1} \in \{\circ\ \circ\} \cup \{G \mid G$ 是欧拉的$\} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$。*(e)"* 团 $K_{4k} \in \{G$ 连通且非欧拉 $\mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0\} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。

5.1 (c')、(d') 和 (e') 的证明

证明 (c)': 根据引理 4.4，所有树都属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。此外，根据关于网格的引理 4.8 ，若$G = P_p \square P_q$满足 p或 q为奇数，则 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。类似地，根据关于圆柱的引理 4.12，若 $G = C_p \square P_q$满足 p 为奇数且 q 为偶数，则 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。在这两种情形下，图 G 是连通的、非欧拉的，且满足条件 $|V(G)|+|E(G)| \equiv_2 1$。因此，根据定理 (c)，我们有 1.2，得到 $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。 □

证明 (d)': 根据引理 4.5，所有圈都属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。此外，根据引理 4.15，任何环面$C_p \square C_q$满足 $p > 3$或 $q > 3$都属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。在这些情形下，这些图都是欧拉图，因此属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$，这是(d) 中定理 1.2的结论。 □

证明 (e)': 定理 1.3 指出，所有圆柱都属于 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$。此外， $C_{2p+1} \square P_{2q+1}$和$C_{2p} \square P_q$都是非欧拉图，并满足 $|V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0$，因此 $C_{2p+1} \square P_{2q+1}$， $C_{2p} \square P_q$属于$\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$ 定理 (c) 和 (d) 中 1.2的结论。 □

5.2 (c")、(d") 和 (e") 的证明

我们先证明关于团的以下引理:

引理 5.1. 设 $p > 1$ 是一个整数， T 是完全图 K_n 上 $n \in \{2p+1$ 个顶点中的任意子集，其中共有 $2p+2\}$ 个顶点。我们有:

- $K_{2p+1} \in \{G \mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 p+1\} \cap \{G \mid G$ 是欧拉的$\}$。 - $K_{2p} \in \{G \mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 p\} \cap \{G \mid G$ 是连通的且不是欧拉的$\}$。 - T 在 K_n 中验证 $\mathcal{PSS}$ 。 - 若 $n \geqslant 5$， 则 K_n 没有无环的 T- 奇定向。

证明。
前两部分源于以下事实：对于 $n \in \{2p,\ 2p+1\}$，我们有 $|V(K_n)| = n$、 $|E(K_n)| = \binom{n(n-1)}{2} \equiv_2 p$，且对每个顶点 v 都有 $d(v) \equiv_2 n-1$。对于第三部分， $\mathcal{P}$ 由 $|T| \equiv_2 p$ 得出，而$\mathcal{S}$ 由 $|V(K_n) \backslash T| \geqslant 2$ 得出，因为 $p > 1$。此外，对所有 v 中的 $V(K_n)$， $\mathcal{S}$ 由 $\overline{d}(v) \equiv_2 n-1$ 得出：事实上，当 p 为奇数时， $V(G) \backslash T$ 中的顶点是潜在汇点；当 p 为偶数时， T 中的顶点是潜在汇点。

最后一个断言直接源于以下结论：当且仅当 $|T| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$时，顶点数为 n 的完全图存在一个无环 T-奇定向。该结论可通过对 n 进行归纳法轻松证明。 □

现在，根据引理 5.1，我们知道 $K_n \notin \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$ 对任意 $n \geqslant 5$都成立。我们还知道：- 对于任意奇数 $p \geqslant 1$，有 $K_{2p} \in \{G \mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 1\} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$ 且为非欧拉 ian.
因此，(c") 是定理 1.5的直接推论。
- 对于任意 $p \geqslant 1$，有 $K_{2p+1} \in \{G \mid G$ 是欧拉$\}$。因此，(d") 是定理 1.5 的直接推论。

- 对于任意偶数 $p \geqslant 1$，有 $K_{2p} \in \{G \mid |V(G)| + |E(G)| \equiv_2 0\} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$ 且为非欧拉。因此，(e") 是定理 1.5 的直接推论。 □

6 结论

本文推进了我们对带奇偶性约束的无环定向问题的理解。我们引入了新的必要条件，其中第一个，$\mathcal{S}$ 保证存在一个不会成为唯一汇的源点，并且对称地 $\mathcal{S}$ 保证存在一个不会成为唯一源点的汇。由这些必要条件，我们建立了图类的层次， $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ 对于 $\mathcal{N} \subseteq \{\mathcal{P},\ \mathcal{S},\ \mathcal{S}\}$，它们刻画了这些条件何时也是充分的。我们在定理1.1中对这些图类的初步刻画揭示了严格的包含关系，并凸显了欧拉图的特殊作用（见图20）。

事实上，我们可以将目前包含在 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 中的条件 $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}$ 单独提出来。也就是说，如果对于某个顶点 v，有 $Source(T) = Sink(T) = \{v\}$，那么除非该图是单点图，否则不存在无环 T-奇定向。我们想讨论这一条件的一些性质。请注意，$Source(T) = Sink(T)$ 当且仅当该图没有奇度顶点。现在，对于满足$|E| + |V| \equiv_2 0$ 的图，条件 $\mathcal{P}$ 已经意味着 $|V \backslash T| \equiv_2 0$，因此特别地，$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}$ 总是成立。因此，对于至少有 4 个顶点的图，条件 $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}$ 的实际意义在于

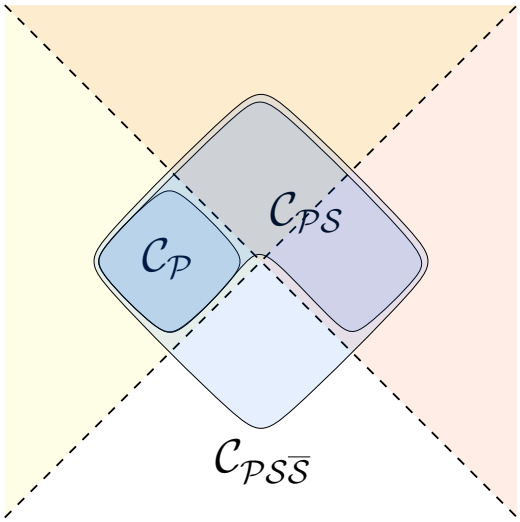


图 20：类 $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ 关于 $\mathcal{N} \subseteq \{\mathcal{P}, \mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}\}$ 的层次。

满足 $|E| + |V| \equiv_2 1$ 的欧拉图，若将其单独提出来，只能将类 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}} \backslash \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ 细分为两个子类，具体取决于图是否满足 $|E|+|V| \equiv_2 1$ 或 $|E|+|V| \equiv_2 0$。

这项工作的一项核心贡献，是对网格、圆柱和大环面的可解实例给出完整刻画。这些结果不仅解决了若干重要图族上的该问题，也用以证明我们所提出层次中包含关系的严格性。在方法上，我们引入了 T-分解，这是一种强有力的构造性工具，为这些特定图类提供了通向多项式时间算法的途径。

我们的发现为未来研究开辟了若干途径。一个主要的开放问题是识别类 $\mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$ 中的图的计算复杂性。针对该问题的多项式时间算法将显著澄清可处理实例的全貌，尤其是因为它将根据我们的结果直接给出识别 $\mathcal{C}_{\mathcal{PS}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ 中实例的多项式时间算法。还需要进一步研究，以完整刻画该类中的图；对此，我们已利用团给出了初步见解与反例。因此，我们提出如下开放问题：

问题4. 给定一个图 G，是否存在一个多项式时间算法来判定$G \in \mathcal{C}_{\mathcal{PSS}}$?

最后，将我们关于笛卡尔积的结果加以推广，是一个自然而然的下一步。事实上，**kiralyDualCriticalGraphsNotes**中的定理 1.8 推出，给定两个图$G, H \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$，且满足 $|V(G)| \equiv_2 1$，我们有 $G \square H \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。更一般地，确定因子 G 和 H 满足何种条件时，$G \square H$ 属于我们的某个类别，仍然是一个颇具挑战的问题。小环面（例如 $C_3 \square C_q$）的情形不在我们现有方法的适用范围内，同样是一个引人关注的开放问题。