arXiv:2603.09504v1 [math.PR] 10 Mar 2026

标准指数族超越量矩的均匀 Lorden 型界：小漂移与指数修正

Kalimulina E.Yu.*[1,2] Kelbert M.Ya.[3]

谨以本文缅怀 Galina A. Zverkina

[1] 俄罗斯科学院信息传输问题研究所，Bolshoy Karetny per.，莫斯科 127051，俄罗斯[2] 莫斯科国立大学（MSU），Leninskie Gory，莫斯科 119991，俄罗斯[3] 国立高等经济大学，统计与数据分析系，随机分析及其应用实验室，俄罗斯联邦莫斯科* 通讯作者：elmira.yu.k@gmail.com

摘要。我们研究具有来自标准化单参数指数族的独立同分布增量的随机游走的超越量 $R_b = S_{\tau(b)} - b$，重点关注小漂移情形 $\theta \downarrow 0$。不同于增量非负的经典更新过程情形，我们允许增量正负交替，并仅假设漂移为正 $\mu_\theta > 0$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们为 $\mathbb{E}_\theta[R_b^k]$ 得到关于障碍 b 的均匀 Lorden 型矩界，并给出一个随 b 指数衰减的显式余项。证明将问题化归为严格上升梯级高度的更新过程，并结合极限超越量矩的一个简单界，以及关于 R_b 的分布函数收敛至极限随机变量 R_∞ 的收敛速率的均匀指数估计；该估计关于 $\theta \in [0, \theta^*]$ 均匀，且适用于 $b \to \infty$。由此可知，在固定 θ 时，当 b 足够大，剩余寿命界中的经典常数 $(k+2)/(k+1)$ 可改进为 $C_k = 1$；在小漂移情形下，该改进也对所有 $b \geq 0$ 均匀成立。我们还给出反例，说明分母含 $k\mu_\theta$ 的更强不等式无法对 (b, θ) 均匀成立。最后，我们从最优传输的角度解释指数型累积分布函数估计：我们在度量 W_1，下得到指数收敛，并通过分位数耦合构造 $\mathbb{E}|\widetilde{R}_b - \widetilde{R}_\infty| = O(e^{-rb})$，还得到了利普希茨泛函的误差界以及平滑分布的全变差界。

关键词：随机游走、超越量、Lorden 型界、严格上升梯级高度、更新理论、小漂移、Wasserstein距离和耦合

1 引言

设 $(X_n)_{n\geq 1}$ 是一列独立同分布随机变量（i.i.d.），并令

$$S_0 := 0, \qquad S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad n \geq 1.$$

对于 $b > 0$ 集合

$$\tau(b) := \inf\{n \geq 1 : \ S_n > b\}, \tag{1.1}$$

并定义超越量

$$R_b := S_{\tau(b)} - b. \tag{1.2}$$

对于非负增量，已知以下关于平均超越量的界，该界对于水平b是均匀的。

定理 1（Lorden 不等式（Lorden，1970年）[10]）。假设X_1,X_2,...几乎处处非负，且

$$0 < \mathbb{E}[X_1] < \infty, \qquad \mathbb{E}[X_1^2] < \infty.$$

那么，按照（1.1）–（1.2）中的记号，对任意$b \geq 0$ 不等式

$$\mathbb{E}[R_b] \ \leq \ \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{\mathbb{E}[X_1]}. \tag{1.3}$$

成立。

不等式（1.3）在 [10]中得到了证明；关于其他证明及其某些推广，参见例如 [2, 4, 15, 17, 7]。

接下来考虑标准的单参数指数族 $F_\theta(dx) \ = e^{\theta x - \psi(\theta)} F_0(dx)$，其中 $E_0[X] = 0$允许变号增量（与定理 1的假设相反），并且只假设具有正漂移

$$\mu_\theta := \mathbb{E}_\theta[X_1] > 0.$$

在这种情况下，一个自然的工具是考察与严格上升梯时相关的更新过程 [19, 11]。

定义 1（严格上升梯时及其高度 [6]）。令 $T_+^{(0)} := 0$，并对$n \geq 1$ 递归定义

$$T_+^{(n)} := \inf\left\{m > T_+^{(n-1)} : \ S_m > S_{T_+^{(n-1)}}\right\}.$$

令 $T+ := T(1)+$ 且 $Hn := S^{T_+^{(n)}}$, $n \geq 0$.

由定义 1可知

$$T_+ = \inf\{n \geq 1 : \ S_n > 0\}.$$

引理 1（[19]）。对于每个 $b \ > 0$，都存在一个取整数值的随机变量$v(b) \geq 1$，使得

$$T_+^{(v(b))} = \tau(b),$$

其中 $v(b)$:=inf$\{n \ \geq 1 : H_n > b\}$。

定义 2（梯级高度更新函数）。对于 $\theta \in \Theta$，定义更新函数 [1]

$$U_\theta^+(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_\theta(H_n \leq x), \qquad x \geq 0. \tag{1.4}$$

令 $U_\theta^+(\mathrm{d}t)$ 表示 $[0,\infty$ 上由增量 $U_\theta^+((a,b])$ $=U_\theta^+(b)$ $-U_\theta^+(a)$ 确定的测度。

关键恒等式是关于超越量尾分布的更新方程（见 [19]）：

$$\mathbb{P}_\theta(R_b > y) = \int_{[0,b]} \mathbb{P}_\theta\big(S_{T_+} > b + y - t\big)\, U_\theta^+(\mathrm{d}t), \qquad b > 0,\ y > 0. \tag{1.5}$$

下面的结论可由定义（1.4）和方程（1.5）通过标准的更新理论论证得到 [19]。

命题 1（极限分布与极限超越量矩）。假设 $\mu_\theta = \mathbb{E}_\theta[X_1] > 0$，且增量分布满足标准的非格点假设，从而可对严格上升梯级高度过程应用关键更新定理 [14, 5]。那么存在随机变量R_∞，使得

$$R_b \Rightarrow R_\infty, \qquad b \to \infty.$$

此外，对于每个满足 $\mathbb{E}_\theta$îS$_{T_+}^{k+1}$ó $< \infty$ 的 $k \in \mathbb{N}$，极限公式 [19]

$$\lim_{b\to\infty} \mathbb{E}_\theta\left[R_b^k\right] = \frac{\mathbb{E}_\theta\left[S_{T_+}^{k+1}\right]}{(k+1)\,\mathbb{E}_\theta\left[S_{T_+}\right]}. \tag{1.6}$$

成立。

我们注意到，命题 1 的结论对具有正漂移的广泛非格点分布类均成立。现在我们固定一个增量分布参数类，并考虑小漂移情形；在这些情形中，我们需要得到关于 b一致的超越量矩 Lorden 型界。

定义 3（标准指数族）。设 F_0 是 $\mathbb{R}$ 上的一个概率测度，且 $\Theta = [0, \theta^*)$，$\theta^* \in [0, \infty]$ 是一个包含 0 的半区间，使得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} F_0(\mathrm{d}x) < \infty, \qquad \theta \in \Theta.$$

定义

$$\psi(\theta) := \ln \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} F_0(\mathrm{d}x), \qquad \theta \in \Theta,$$

以及概率测度族 $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$，定义为

$$F_\theta(\mathrm{d}x) = e^{\theta x - \psi(\theta)} F_0(\mathrm{d}x), \qquad \theta \in \Theta. \tag{1.7}$$

若归一化满足，则称族 $\{F_\theta\}$ 为标准族。

$$\mathbb{E}_0[X] = 0, \qquad \mathrm{Var}_0(X) = 1 \quad (X \sim F_0),$$

成立，且F_0 是强非格点的，则称该族为标准族，即

$$\limsup_{|t| \to \infty} |\chi(t)| < 1, \qquad \chi(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} F_0(\mathrm{d}x).$$

假设 1（增量模型）。随机变量 $X_1, X_2, \ldots$ 独立同分布，且 $X_1 \sim F_\theta$ 对某个 $\theta \in \Theta$，其中 $\{F_\theta\}$ 是定义 3. 意义下的标准指数族。

备注 1（非格点性质与关键更新定理的适用性）。由于$F_\theta(\mathrm{d}x) = e^{\theta x - \psi(\theta)} F_0(\mathrm{d}x)$，测度$F_\theta$和$F_0$等价且具有相同的支撑集。因此，若$F_0$ 是（强）非格点的，则对所有 $\theta \in \Theta$，F_θ 均为非格点。特别地，只要 $\mathbb{E}_\theta[S_{T_+}] < \infty$，对每个固定的 θ，严格上升梯级高度过程都适用关键更新定理。

对于 $\theta \in \Theta$，令 $\mathbb{P}_\theta$、$\mathbb{E}_\theta$ 和Var_θ 分别表示$X_1 \sim F_\theta$下的概率、期望和方差。则

$$\mu_\theta := \mathbb{E}_\theta[X_1] = \psi'(\theta) > 0, \qquad \psi''(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(X_1). \tag{1.8}$$

我们注意到，在（1.6）中，因子（$k+1$）自然出现在分母中 .

最后，在回顾部分，我们还重述更新过程的已知矩界 [4, 16]。假设$X_1, X_2, \ldots$几乎必然非负，并令

$$N(b) := \inf\{n \geq 1 : \ S_n > b\}, \qquad \zeta_b := S_{N(b)} - b, \qquad b \geq 0.$$

那么（S_n）是一个（离散）更新过程，其到达时刻为X_i，而量 ζ_b 是剩余寿命。在这种情况下， $\zeta_b = R_b$。

众所周知（参见 [4]；另见 [16]中的公式（11））， 对于 $k > 0$，若 $\mathbb{E}[X_1] \in (0,\infty)$ 且$\mathbb{E}[X_1^{k+1}] < \infty$，则不等式

$$\mathbb{E}[\zeta_b^k] \;\le\; \frac{k+2}{k+1}\,\frac{\mathbb{E}[X_1^{k+1}]}{\mathbb{E}[X_1]}, \qquad b \ge 0. \tag{1.9}$$

成立。（对于 $k = 1$， 存在一个更强的标准 Lorden界，不含因子 32：$\mathbb{E}[\zeta_b] \le \mathbb{E}[X_1^2]/\mathbb{E}[X_1]$。）

应用概率问题通常关注平均超越量（即 $k = 1$的情形）。不过，接下来我们将研究任意阶 $k \in \mathbb{N}$的矩。

相关文献（小漂移与阶梯量）。V.I. Lotov [11], 的研究也讨论了正漂移但漂移较小时随机游走的超越量界和阶梯泛函界；该研究在增量均值为正且较小的假设下，给出了第一个非负部分和尾部以及超过任意水平的超越量矩的上界，并且还给出了 $\mathbb{E}[T_+]$的一个界（参见 [11]中的摘要和参考文献）。我们注意到， [11] 在边界问题的矩泛函方面，Mogulskii 的绝对界 [12] 被明确列为基本工具之一。

本文旨在针对标准指数族模型中小漂移情形 $\theta \downarrow 0$下的超越量矩 $\mathbb{E}_\theta[R_b^k]$，得到关于水平b 一致的Lorden型界。特别地，我们关注能否用常数$C_k = 1$替换更新过程经典矩界中的因子$k+2k+1$ ：即证明对于充分大的障碍b （并且在小漂移情形下，甚至对所有$b \ge 0$一致地），有

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \;\le\; \frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta}.$$

附录 A 给出了反例，它们涉及分母中带有因子$k\mu_\theta, k > 1$ 的加强形式界，并表明一般而言，这样的界不能对所有 θ和所有$b \ge 0$同时成立。

除研究关于超越量R_b的 Lorden 型矩界（在水平b上均匀成立）这一理论问题外，我们还着眼于应用：为阈值停止问题和再生模型（排队论、可靠性等）提供明确的误差控制，因为由恒等式$S^{\tau(b)} = b + R_b$ 以及 Wald 恒等式（只要 $\mathbb{E}_\theta[\tau(b)] < \infty$）可得 $\mathbb{E}_\theta[\tau(b)] = (b + \mathbb{E}_\theta[R_b])/\mu_\theta$，其中 $\mu_\theta > 0$。

此外，$\mathrm{Law}(\mathrm{R}_b) \to \mathrm{Law}(\mathrm{R}_\infty)$ 的指数收敛率可通过最优传输/耦合来解释（参见第3节），由此得到界 $\mathrm{W}_1(\mathrm{R}_b, \mathrm{R}_\infty) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-rb})$，并可知存在联合分布 $(\widetilde{\mathrm{R}}_b, \widetilde{\mathrm{R}}_\infty)$，使得 $\mathbb{E}|\widetilde{\mathrm{R}}_b - \widetilde{\mathrm{R}}_\infty| = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-rb})$；因此，对于利普希茨泛函的均值，以 R_∞ 替换 R_b 所产生的误差也有明确的界。

论文的主要结果

固定 $k \in \mathbb{N}$ 并记 $x^+ := \max\{x\ 0\}$。在第 2 节中证明，在标准指数族模型（定义 3，假设 1）下，在大障碍和小漂移的情形中，可以将形式为（1.9）的经典矩界改进为常数 $C_k = 1$ 。

本文有哪些新意

不同于纯更新过程中剩余寿命的经典均匀界，我们考虑变号增量，并将问题化归为关于严格上升梯级高度的更新问题。我们的贡献如下：

- 我们推导出超越量矩的显式界 $\mathbb{E}_\theta[R_{kb}]$，并带有关于 b 的指数级小修正，该界对 $\theta \in (0, \theta^*]$; 一致；
- 由此界可得一个显式阈值 $b_0(\theta, k)$，超过该阈值后，常数改进为 $C_k = 1$;
- 我们证明，对于足够小的漂移（较小的 θ），改进 $C_k = 1$对所有 $b \geq 0$ 都是一致的。

更准确地说，主要结果可归结为以下三个断言。

1. 含关于水平 b 的指数修正的界。存在常数$C > 0$、$r > 0$和 $\theta^* > 0$，使得对所有 $\theta \in (0, \theta^*]$ 以及$b > 0$，以下界（见定理 2）

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \leq \frac{1}{k+1} \frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta} + C \frac{k\Gamma(k)}{r^k} e^{-rb}, \qquad \Gamma(k) = \int_0^\infty z^{k-1} e^{-z} dz.$$

成立。

2. 对 $C_k = 1$的改进（对充分大的 b）。对于固定的 $\theta \in (0, \theta^*]$和 $k \in \mathbb{N}$，存在一个阈值 $b_0(\theta, k) \geq 0$，使得对所有 $b \geq b_0(\theta, k)$均有（见推论 1）

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \leq \frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta}.$$

3. 小漂移：对所有 $b_k = 1$ 一致改进 $C \geq 0$。存在$\theta_k \in (0, \theta^*]$，使得对所有 $\theta \in (0, \theta_k]$ 以及所有 $b \geq 0$，均有（见推论 2）

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \leq \frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta}.$$

论文结构

本文的组织如下。在第1 节中，我们介绍记号，并回顾将超越量问题标准地化归为严格上升梯级高度更新过程的方法，特别是通过更新测度U_θ^+推导出尾部 $\mathbb{P}_\theta(R_b > y)$ 所满足的更新方程（1.5）。

在第2 节中，我们基于超越量在水平b 处的一致指数收敛速率（命题2）证明界（2.4），并且在大障碍和小漂移情形下（推论1 和2）将常数改进为$C_k = 1$ 。

第3节从 Wasserstein距离、耦合和平滑全变差的角度，对所得指数型累积分布函数估计给出了应用性解释，从而为利普希茨泛函导出显式近似误差界，并给出了一个阈值策略的示例（第3.1.3小节）。

附录汇集了技术细节，并给出反例，表明将界加强为形式（A.1）且$k\mu_\theta$ 位于分母中时，不能同时对所有参数值 θ 以及所有水平$b \geq 0$加以要求。

2 超越量矩界：主要结果的陈述与证明

本节包含引言中所述结果的证明。关键的外部工具是关于 θ一致的、水平b 处超越量的指数收敛率（命题2；参见 [19]）。我们首先证明带有指数修正的界（定理2），然后由此导出将Lorden型矩界中的常数改进为$C_k = 1$ （推论1 与2）。

2.1 经典矩界及其在大障碍情形下的改进

在本小节中，我们沿用第 1 节的记号。特别地，$\tau(b)$和R_b 定义于 (1.1)–(1.2) 中，而 T_+ 和 $H_n = S^{T_+^{(n)}}$ 定义见定义 1。我们

还假设定义 3 和假设 1 成立；对于 $\theta > 0$，有 $\mu_\theta > 0$。

带常数 $k+2k+1$ 的基本（已知）界。将(1.9）应用于严格上升梯级高度的更新过程 (H_n)，然后用 S^{T_+} 的矩的上界 $(X_1^+)^{k+1}$ 和 μ_θ（参见（1.8））， 可得到如下形式的界

$$\sup_{b\geq 0}\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \;\leq\; \frac{k+2}{k+1}\,\frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta},$$

文献中已有本质上形式相似的结果 [16, 4]。

我们关注如何在问题的自然情形“$C_k = 1$ 小漂移 + 大障碍”[1]下改进常数。

我们注意到，附录 A 中的反例表明，无法进一步将其加强为形式（A.1），并在分母中加入因子$k\mu_\theta$。

关键的已知事实：一致指数速率（见 [19, 3]）

命题 2（超越量 [19] 的一致指数收敛）。设 $\{F_\theta : \theta \geq 0\}$ 是一个标准指数族，且 F_0 为强非格点分布。那么存在常数 $C > 0$、$r > 0$ 和 $\theta^* > 0$，使得对所有 $b > 0$、$y > 0$

$$\sup_{\theta\in[0,\theta^*]}\big|\mathbb{P}_\theta(R_b \leq y) - \mathbb{P}_\theta(R_\infty \leq y)\big| \;\leq\; Ce^{-r(b+y)}. \tag{2.1}$$

因此，对于任意 $k > 0$ 以及所有 $b > 0$，我们有

$$\sup_{\theta\in[0,\theta^*]}\big|\mathbb{E}_\theta[R_b^k] - \mathbb{E}_\theta[R_\infty^k]\big| \;\leq\; C\frac{k\Gamma(k)}{r^k}e^{-rb}, \qquad \Gamma(k) = \int_0^\infty z^{k-1}e^{-z}dz. \tag{2.2}$$

$_\infty$备注 2。估计式（2.2）可由（2.1）通过尾积分得到：$\mathbb{E}[Z^k] = k\int y^{k-1}\mathbb{P}$（$Z >$ $_0y$）dy。

带有指数修正的界 $\mathbb{E}_\theta[R_b^k]$

引理 2。假设定义 3 和假设 1 成立。则对于每个 $\theta \in \Theta$满足 $\theta > 0$的，我们有 $\mathbb{E}_\theta[T_+] < \infty$，其中 $T+ := \inf\{n \geq 1 : \; S_n > 0\}$。

证明。设 $\eta := \theta$。然后由（1.7）可得

$$\mathbb{E}_\theta\left[e^{-\eta X_1}\right] = \int e^{-\theta x}e^{\theta x-\psi(\theta)}F_0(dx) = e^{-\psi(\theta)}.$$

[1]在诸如 [11, 12], 的研究中，也在小漂移假设下分析了梯级泛函。我们工作的区别在于，通过指数收敛率将常数改进为 $C_k = 1$。

函数 ψ 是严格凸的，且 $\psi(0)=0$， $\psi'(0)=\mathbb{E}_0[X_1]=0$，因此$\psi(\theta)>0$对 $\theta>0$ 成立，进而 $\mathbb{E}_\theta[e^{-\theta X_1}]<1$。此外，在事件 $\{T_+>n\}$上，有 $S_n\le 0$，所以 $e^{-\theta S_n}\ge 1$，并且

$$\mathbb{P}_\theta(T_+>n)\le \mathbb{E}_\theta[e^{-\theta S_n}]=\left(\mathbb{E}_\theta[e^{-\theta X_1}]\right)^n=e^{-n\psi(\theta)}.$$

求和后，我们得到 $\mathbb{E}_\theta[T_+]<\infty$。 □

引理3. 设 $\theta>0$ and $k\in\mathbb{N}$。则

$$\mathbb{E}_\theta[R_\infty^k]\ \le\ \frac{1}{k+1}\,\frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta}. \tag{2.3}$$

证明。根据命题 1 (参见（1.6）) [19], 可得

$$\mathbb{E}_\theta[R_\infty^k]=\frac{\mathbb{E}_\theta[S_{T_+}^{k+1}]}{(k+1)\mathbb{E}_\theta[S_{T_+}]}.$$

由于 $S_{T_+-1}\le 0<S^{T_+}$，因此 $0<S_{T_+}\le X_{T_+}^+$，由此

$$S_{T_+}^{k+1}\le (X_{T_+}^+)^{k+1}\le\sum_{i=1}^{T_+}(X_i^+)^{k+1}.$$

取期望并应用 Wald恒等式（该恒等式适用，因为对于$\theta>0$，有 $\mathbb{E}_\theta[T_+]<\infty$, 且 $\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]<\infty$属于指数族），我们得到

$$\mathbb{E}_\theta[S_{T_+}^{k+1}]\le\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{i=1}^{T_+}(X_i^+)^{k+1}\Big]=\mathbb{E}_\theta[T_+]\,\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}].$$

另一方面，根据 Wald恒等式

$$\mathbb{E}_\theta[S_{T_+}]=\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{i=1}^{T_+}X_i\Big]=\mathbb{E}_\theta[T_+]\,\mu_\theta.$$

将两者相除，得到（2.3）。 □

定理 2（带指数修正的过冲矩界）。假设定义 3 与假设 1 成立。则存在 $C>0$、$r>0$ 以及 $\theta^*>0$，使得对任意 $k\in\mathbb{N}$、任意 $b>0$ 以及任意 $\theta\in(0,\theta^*]$,

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k]\ \le\ \frac{1}{k+1}\,\frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta}\ +\ C\,\frac{k\Gamma(k)}{r^k}\,e^{-rb}. \tag{2.4}$$

证明。由（2.2）可得

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \le \mathbb{E}_\theta[R_\infty^k] + C\frac{k\Gamma(k)}{r^k}e^{-rb}.$$

接下来应用引理3，得到（2.4）。 □

主要改进：大障碍和小漂移情况下的常数 $C_k = 1$

推论1（常数 $C_k = 1$ 对于充分大的 b）。假设定理 2的条件成立，并令 $k \in \mathbb{N}$，$\theta \in (0, \theta^*]$。设

$$A_{\theta,k} := \frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta}, \qquad B_k := C\frac{k\Gamma(k)}{r^k}, \qquad \ln_+(x) := \max\{\ln x, 0\}.$$

定义阈值

$$b_0(\theta,k) := \frac{1}{r}\ln_+\left(\frac{(k+1)B_k}{kA_{\theta,k}}\right). \tag{2.5}$$

那么对于所有 $b \ge b_0(\theta, k)$，改进不等式

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \le \frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta} = A_{\theta,k}. \tag{2.6}$$

成立。

证明。由 (2.4) 可得

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \le \frac{A_{\theta,k}}{k+1} + B_k e^{-rb}.$$

若 $b \ge b_0(\theta, k)$，则由 (2.5) 可知 $B_k e^{-rb} \le k k+1 A\theta, k$，因此

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \le \frac{A_{\theta,k}}{k+1} + \frac{k}{k+1}A_{\theta,k} = A_{\theta,k}.$$

□

推论 2（小漂移：$C_k = 1$ 关于 b一致）。假设定理 2的条件成立，且令 $k \in \mathbb{N}$。则存在 $\theta_k \in (0, \theta^*]$ 使得对所有$\theta \in (0, \theta_k]$ 以及所有 $b \ge 0$ (2.6) 均成立。

证明。根据标准指数族的定义，$\mu_\theta = \psi'(\theta) \to 0$当 $\theta \downarrow 0$时，而 $\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}] \to \mathbb{E}_0[(X_1^+)^{k+1}] > 0$（该不等式为严格不等式，因为 $\mathrm{Var}_0(X_1) = 1$）。因此，$A\theta,k = \mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]/\mu_\theta \to \infty$当 $\theta \downarrow 0$时。选取 θ_k，使得对所有 $\theta \in (0, \theta_k]$，均有 $B^k \le k k+1 A\theta,k$。于是由 (2.4)，当 $b \ge 0$时（因为 $e^{-rb} \le 1$），

我们得到

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \le \frac{A_{\theta,k}}{k+1} + B_k \le A_{\theta,k},$$

由此得到（2.6）。 □

3 耦合问题中的超越量界及收敛速率估计：Wasserstein距离、平滑全变差以及以R_b 替代R_∞的误差

超越量分布关于水平 b 的收敛速率的指数估计，见 (2.1)（命题 2），是证明第2节结果所需的关键外部工具。本节记录这一累积分布函数估计的一些标准推论，这些推论便于应用近似问题，也有助于在再生模型和更新过程中构造耦合 [9], ，特别是在排队论和可靠性领域 [20, 8]。具体而言，(2.1) 给出：(i) 在 1阶 Wasserstein 距离下的指数收敛率，并由此保证存在分位数耦合（$\widetilde{\mathrm{R}}_b$, $\widetilde{\mathrm{R}}_\infty$），使得 $\mathbb{E}_\theta|\widetilde{\mathrm{R}}_b - \widetilde{\mathrm{R}}_\infty| = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-rb})$；(ii) 以 R_b 替代 R_∞ 时，利普希茨泛函期望的误差具有通用界；(iii) 必要时，在对分布进行标准平滑后，可控制全变差。这些推论旨在方便后续应用，并不声称具有新颖性。

接下来，我们利用这些界，针对在典型的阈值近似中用R_b 替换为R_∞ 所产生的误差，得到显式的先验界（见§3.1.3）。

记号、基本的累积分布函数估计及预备结果

对于$y \ge 0$，令

$$F_{b,\theta}(y) := \mathbb{P}_\theta(R_b \le y), \qquad F_{\infty,\theta}(y) := \mathbb{P}_\theta(R_\infty \le y).$$

根据命题 2，存在常数 $C > 0$， $r > 0$ 和 $\theta^* > 0$ 使得对所有 $b > 0$ 和 $y > 0$

$$\sup_{\theta\in[0,\theta^*]} \left|F_{b,\theta}(y) - F_{\infty,\theta}(y)\right| \le Ce^{-r(b+y)}. \tag{3.1}$$

1阶 Wasserstein 距离和一维公式

定义 4（Wasserstein 距离 W_1）。设 X,Y 是定义在 $\mathbb{R}$ 上且一阶矩有限的随机变量。定义 1 阶 Wasserstein 距离如下：

$$W_1(X,Y) := \inf\Big\{\mathbb{E}|X'-Y'| : X' \overset{d}{=} X,\ Y' \overset{d}{=} Y\Big\},$$

其中，下确界取遍所有具有指定边缘分布的联合构造 (X',Y')（例如参见 [13, §2.1。3]；另见 [18]）。

在一维情形下，使用以分布函数表示的公式更为方便。

引理 4（通过累积分布函数表示 W_1 的一维公式）。设 $X,Y \geq 0$，且 $\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y] < \infty$。则

$$W_1(X,Y) = \int_0^\infty \big|F_X(t) - F_Y(t)\big|\, dt, \tag{3.2}$$

其中，$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$，而 $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$（例如参见 [13, §2.1.3]）。

关于该结论的证明，例如参见 [13, §2.1.3]；这是通过分位数（单调）耦合得到的一维最优传输的标准推导。

命题 3（度量中的指数估计W_1）。假设命题 2 的条件成立，从而估计（3.1）成立。则对所有 $b > 0$

$$\sup_{\theta\in[0,\theta^*]} W_1(R_b, R_\infty) \leq \frac{C}{r} e^{-rb}. \tag{3.3}$$

证明。这是公式（3.2）与估计（3.1）的直接推论：对于固定的 $\theta \in [0,\theta^*]$

$$W_1(R_b,R_\infty) = \int_0^\infty |F_{b,\theta}(t) - F_{\infty,\theta}(t)|\, dt \leq \int_0^\infty Ce^{-r(b+t)}\, dt = \frac{C}{r}e^{-rb}.$$

对 $\theta \in [0,\theta^*]$ 取上确界，我们得到（3.3）。 □

推论 3（均值误差呈指数级小的分位数耦合）。假设命题 3 的条件成立。固定 $\theta \in [0,\theta^*]$ 和 $b > 0$。令$U \sim$均匀分布$(0,1)$且 $F^{-1}(u) := \inf\{t \geq 0 : F(t) \geq u\}$。定义

$$\widetilde{R}_b := F^{-1}_{b,\theta}(U), \qquad \widetilde{R}_\infty := F^{-1}_{\infty,\theta}(U).$$

那么 $\widetilde{R}_b \overset{d}{=} R_b$, $\widetilde{R}_\infty \overset{d}{=} R_\infty$ 且

$$\mathbb{E}_\theta \left| \widetilde{R}_b - \widetilde{R}_\infty \right| = W_1(R_b, R_\infty) \le \frac{C}{r} e^{-rb}.$$

证明。对于一维情形，分位数耦合是最优的W_1 （例如，见 [13]）；接下来只需应用（3.3）。 □

3.1 超越量界在应用中的示例

3.1.1 利用利普希茨泛函进行误差控制

以下推论是标准结果：由康托罗维奇–鲁宾斯坦不等式以及命题3 中的估计即可得到（例如，见 [18]）。

推论4（利普希茨泛函）。假设命题3 的条件成立。那么，对于任意利普希茨函数 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，对所有$b > 0$

$$\sup_{\theta \in [0,\theta^*]} \left| \mathbb{E}_\theta g(R_b) - \mathbb{E}_\theta g(R_\infty) \right| \le \mathrm{Lip}(g) \sup_{\theta \in [0,\theta^*]} W_1(R_b, R_\infty) \le \mathrm{Lip}(g) \frac{C}{r} e^{-rb}.$$

备注3（示例）。1）$g(y) = (y-a)^+$: $\mathrm{Lip}(g) = 1$；2）$g(y) = e^{-\lambda y}$: $\mathrm{Lip}(g) = \lambda$。

3.1.2 平滑后的全变差（固定平滑）

定义 5（全变差）。对于 μ，ν 上的概率测度 $\mathbb{R}$ 集

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} := \sup_{A \subset \mathbb{R}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

定义 6（平滑）。令 U ～服从均匀分布 Unif(0，1)，且与X相互独立。设

$$X^{\mathrm{sm}} := X + U.$$

引理 5（平滑将W_1 转化为全变差）。对于任意随机变量X、Y，若$\mathbb{E}|X| + \mathbb{E}|Y| < \infty$,

$$\left\| \mathrm{Law}(X^{\mathrm{sm}}) - \mathrm{Law}(Y^{\mathrm{sm}}) \right\|_{\mathrm{TV}} \le W_1(X, Y). \tag{3.4}$$

成立。

证明。取一个可测集 $A \subset \mathbb{R}$ 并定义测试函数

$$f_A(x) := \mathbb{P}(x + U \in A) = \int_0^1 \mathbf{1}_A(x+u)\, du.$$

于是 $0 \le f_A \le 1$。我们证明 f_A 是 1-利普希茨的。对于 $h > 0$，有

$$\begin{aligned} f_A(x+h) - f_A(x) &= \int_0^1 \mathbf{1}_A(x+h+u)\,du - \int_0^1 \mathbf{1}_A(x+u)\,du \\ &= \int_h^{1+h} \mathbf{1}_A(x+v)\,dv - \int_0^1 \mathbf{1}_A(x+v)\,dv \\ &= \int_1^{1+h} \mathbf{1}_A(x+v)\,dv - \int_0^h \mathbf{1}_A(x+v)\,dv, \end{aligned}$$

因此 $|f_A(x+h) - f_A(x)| \le h$。类似地，对于 $h < 0$，我们得到 $|f_A(x+h) - f_A(x)| \le |h|$。因此，$\mathrm{Lip}(f_A) \le 1$。

现在，对于任意联合构造 (X', Y')，若 $X' \overset{d}{=} X$，$Y' \overset{d}{=} Y$，则有

$$\left|\mathbb{E} f_A(X') - \mathbb{E} f_A(Y')\right| \le \mathbb{E}|X' - Y'|.$$

对所有耦合取下确界，得到

$$\left|\mathbb{E} f_A(X) - \mathbb{E} f_A(Y)\right| \le W_1(X, Y).$$

剩下的工作是对 A 取上确界，从而得到（3.4）。 □

推论5（平滑超越量的全变差界）。假设命题 3 的条件成立。定义 $R_b^{\mathrm{sm}} := R_b + U$ 以及 $R_\infty^{\mathrm{sm}} := R_\infty + U$，其中 $U \sim$均匀分布$(0,1)$，且与其余所有随机量相互独立。则对所有 $b > 0$

$$\sup_{\theta \in [0,\theta^*]} \left\|\mathrm{Law}(R_b^{\mathrm{sm}}) - \mathrm{Law}(R_\infty^{\mathrm{sm}})\right\|_{\mathrm{TV}} \le \sup_{\theta \in [0,\theta^*]} W_1(R_b, R_\infty) \le \frac{C}{r} e^{-rb}.$$

注4（在水平1处饱和与常数的锐性）。由于总是$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} \le 1$，因此也有

$$\left\|\mathrm{Law}(X^{\mathrm{sm}}) - \mathrm{Law}(Y^{\mathrm{sm}})\right\|_{\mathrm{TV}} \le \min\{1,\ W_1(X, Y)\}.$$

3.1.3 阈值停止：显式近似误差

考虑 $\tau(b) = \inf\{n \ge 1 : S_n > b\}$ 以及超越量 $R_b = S^{\tau(b)} - b$。在许多阈值信号和再生模型问题中，以下量很重要：(i) 越过该水平所需的平均时间，$\mathbb{E}_\theta[\tau(b)]$，以及 (ii) 超过阈值所产生的惩罚项 $\mathbb{E}_\theta[g(R_b)]$，其中 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是利普希茨函数。

精确公式与超越量的作用。在我们的模型中，对于 $\theta > 0$ 我们有$\mathbb{E}_\theta|X_1| < \infty$ 以及 $\mathbb{E}_\theta[\tau(b)] < \infty$。例如，在标准指数族中

$\mathbb{E}_\theta[e^{-\theta X_1}] = e^{-\psi(\theta)} < 1$，并且在事件 $\{\tau(b) > n\}$ 上，我们有 $S_n \le b$，因此

$$\P_\theta(\tau(b) > n) \le e^{\theta b}\,\mathbb{E}_\theta[e^{-\theta S_n}] = e^{\theta b}\big(\mathbb{E}_\theta[e^{-\theta X_1}]\big)^n = e^{\theta b} e^{-n\psi(\theta)},$$

也就是说， $\tau(b)$的尾部按几何级数衰减，且 $\mathbb{E}_\theta[\tau(b)] < \infty$。因此，Wald恒等式适用，并且

$$\mathbb{E}_\theta[\tau(b)] = \frac{\mathbb{E}_\theta[S_{\tau(b)}]}{\mu_\theta} = \frac{b + \mathbb{E}_\theta[R_b]}{\mu_\theta}. \tag{3.5}$$

因此，对 $\mathbb{E}_\theta[R_b]$ 的控制直接决定了$\mathbb{E}_\theta[\tau(b)]$近似的精度。

指数误差。设 $\kappa_\theta := \mathbb{E}_\theta[R_\infty]$ (特别是， $\kappa_\theta < \infty$)。由推论 4，取 $g(y) = y$(其中 $\mathrm{Lip}(g) = 1$)，可得：对所有 $b > 0$ 以及 $\theta \in (0,\ \theta^*]$

$$\left|\mathbb{E}_\theta[R_b] - \kappa_\theta\right| \le \frac{C}{r} e^{-rb}.$$

将其代入（3.5），得到显式误差界

$$\left|\mathbb{E}_\theta[\tau(b)] - \frac{b + \kappa_\theta}{\mu_\theta}\right| \le \frac{C}{r\,\mu_\theta} e^{-rb}. \tag{3.6}$$

因此，修正项 $b \mapsto b + \kappa_\theta$（连续性修正）的误差对于固定的 θ，随 b 增大而呈指数级减小。

4 结论

本文在标准指数族模型下，针对具有变号增量和正b漂移的随机游走，得到了关于水平 $b_b = S^{\tau(b)} \urcorner b$ 一致的 Lorden 型界，适用于超越量矩 。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，证明了存在一个关于 b指数级小的修正项，使得当 $\theta \in (0, \theta^*]$且$b > 0$

$$\mathbb{E}_\theta\left[R_b^k\right] \ \le\ \frac{1}{k+1}\,\frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{\mu_\theta} \ +\ O(e^{-rb}).$$

由此可知，矩界中的经典常数可改进为 $C_k = 1$: 对于固定的 θ，当 b 足够大时，该结论成立；而在小漂移情形下（当 $\theta \downarrow 0$），该结论对所有 $b \ge 0$ 都一致成立。

证明依赖于将问题归约为严格上升梯级高度的更新过程，以及R_b 的分布以均匀指数收敛速率收敛到极限R_∞。附录中的反例表明，即使在标准指数族中，将

界加强为分母为$k\mu_\theta$的形式（对于$k > 1$），也不可能对所有（b θ）同时成立。

最后，第3节从指数型累积分布函数估计中推导出一些标准但便于应用的结论：Wasserstein距离 W_1, 下的指数收敛 $\mathbb{E}|\tilde{R}_b - \tilde{R}_\infty| = O(e^{-rb})$、利普希茨泛函的误差界，以及平滑后的全变差控制。

A 反例：为什么分母中含有$k\mu_\theta$的强化界一般不成立：两个反例

在本附录中，我们证明，对于$k > 1$，不能指望以下形式的强化矩界成立

$$\mathbb{E}_\theta\left[R_b^k\right] \le \frac{\mathbb{E}_\theta\left[(X_1^+)^{k+1}\right]}{k\,\mu_\theta}, \qquad b \ge 0, \tag{A.1}$$

对所有水平b 同时成立；在参数模型中，也不能指望它对所有参数值成立。这里 $R_b = S^{\tau(b)} - b$, $\tau(b) = \inf\{n \ge 1 : S_n > b\}$, $\mu_\theta = \mathbb{E}_\theta[X_1] > 0$, $x^+ = \max\{x\ 0\}$。

A.1 反例1：确定性增量

命题4（确定性反例）。设 $X_1 \equiv c > 0$ 几乎必然。则对每个 $k > 1$ 不等式（A.1）在 $b = 0$处便已不成立。

证明。对于 $b = 0$，有 $\tau(0) = 1$，且 $R_0 = S^{\tau(0)} = X_1 = c$，因此

$$\mathbb{E}[R_0^k] = c^k.$$

另一方面，$X_1^+ = c$， $\mu = \mathbb{E}[X_1] = c$，且（A.1）的右端等于

$$\frac{\mathbb{E}[(X_1^+)^{k+1}]}{k\,\mu} = \frac{c^{k+1}}{k\,c} = \frac{c^k}{k}.$$

由于 $k > 1$，有 $c^k > c^k\,k$，因此（A.1）不成立。 □

注5. 若希望形式上得到 $b > 0$ 而非 $b = 0$，只需取任意 $b \in \left(0, c(1 - k^{-1/k})\right)$：则 $\tau(b) = 1, R_b = c - b$ 且 $(c - b)^k > c^k/k$。

A.2 反例 2：基于均匀分布的标准化指数族

命题5（标准指数族中的反例）。设 $a := \sqrt{3}$，令 $F_0 =$ 在区间$[-a,a]$上服从均匀分布。考虑标准指数族 $\{F_\theta : \ \theta \geq 0\}$由倾斜定义

$$F_\theta(\mathrm{d}x) = e^{\theta x - \psi(\theta)} F_0(\mathrm{d}x), \qquad \psi(\theta) := \log \mathbb{E}_0[e^{\theta X_1}].$$

那么，对每个 $k > 1$，都存在 $b \in (0,a)$ 以及 $\theta_0 > 0$，使得对所有 $\theta \geq \theta_0$，不等式 (A.1) 均不成立。

证明。步骤 1：F_θ 的显式形式及其在 $\theta \to \infty$ 时的集中性。由于F_0在 $[-a,a]$, 上服从均匀分布，因此对于 $\theta > 0$，分布F_θ的密度为

$$f_\theta(x) = \frac{e^{\theta x}}{\int_{-a}^{a} e^{\theta u}\,\mathrm{d}u} \mathbf{1}_{[-a,a]}(x) = \frac{\theta\, e^{\theta x}}{e^{a\theta} - e^{-a\theta}} \mathbf{1}_{[-a,a]}(x).$$

对于任意 $\varepsilon \in (0,2a)$，可得

$$\mathbb{P}_\theta(X_1 \leq a - \varepsilon) = \frac{\int_{-a}^{a-\varepsilon} e^{\theta x}\,\mathrm{d}x}{\int_{-a}^{a} e^{\theta x}\,\mathrm{d}x} = \frac{e^{\theta(a-\varepsilon)} - e^{-a\theta}}{e^{a\theta} - e^{-a\theta}} \leq e^{-\theta\varepsilon} \xrightarrow[\theta\to\infty]{} 0.$$

因此，$X_1 \to a$ 依概率收敛于 $\theta \to \infty$。由于 $|X_1| \leq a$ 几乎必然成立，对每个$m > 0$, 我们也有$X_1 \to a$ 在L^m中收敛，因此

$$\mu_\theta = \mathbb{E}_\theta[X_1] \to a, \qquad \mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}] \to a^{k+1}, \qquad \theta \to \infty. \tag{A.2}$$

步骤 2：选择障碍b。令$t := k^{-1/k} \in (0,1)$，并选择

$$b := a\,\frac{1-t}{2} \in (0,a).$$

Then

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1+t}{2} > t \quad \Longrightarrow \quad (a-b)^k = a^k \Big(\frac{1+t}{2}\Big)^k > a^k t^k = \frac{a^k}{k}.$$

因此，对于 b 的这一取值，

$$(a-b)^k > \frac{a^k}{k}. \tag{A.3}$$

步骤 3：$\mathbb{E}_\theta[R_b^k]$ 的渐近性，其中 $\theta \to \infty$。固定所选的 $b \in (0,a)$。于是

$$\mathbb{P}_\theta(\tau(b) = 1) = \mathbb{P}_\theta(X_1 > b) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} 1,$$

因为 $X_1 \to a > b$ 依概率成立。在事件 $\{\tau(b) = 1\}$ 上，我们有 $R_b = X_1 - b$。此外，因为 $X_1 \le a$ 几乎必然成立，且 $S_{\tau(b)-1} \le b$，所以 $0 \le R_b = S^{\tau(b)} - b \le a$ 几乎必然成立，因此 $0 \le R_b^k \le a^k$。

分解期望：

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] = \mathbb{E}_\theta\left[(X_1 - b)^k; X_1 > b\right] + \mathbb{E}_\theta\left[R_b^k; X_1 \le b\right].$$

第二项估计为

$$0 \le \mathbb{E}_\theta\left[R_b^k; X_1 \le b\right] \le a^k \, \mathbb{P}_\theta(X_1 \le b) \xrightarrow[\theta \to \infty]{} 0.$$

对于第一项，我们使用L^k 收敛$X_1 \to a$：

$$\mathbb{E}_\theta\left[(X_1 - b)^k; X_1 > b\right] = \mathbb{E}_\theta[(X_1 - b)^k] - \mathbb{E}_\theta\left[(X_1 - b)^k; X_1 \le b\right] \longrightarrow (a-b)^k - 0 = (a-b)^k.$$

因此，

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] \longrightarrow (a-b)^k, \qquad \theta \to \infty. \tag{A.4}$$

第4步：与（A.1）右端比较。由（A.2）可得

$$\frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{k\,\mu_\theta} \longrightarrow \frac{a^{k+1}}{k\,a} = \frac{a^k}{k}, \qquad \theta \to \infty.$$

将其与（A.4）和（A.3）结合，我们得到：对于所有充分大的 θ，

$$\mathbb{E}_\theta[R_b^k] > \frac{\mathbb{E}_\theta[(X_1^+)^{k+1}]}{k\,\mu_\theta},$$

也就是说，（A.1）不成立。 □

注6. 反例5 属于标准指数族：$F_0 =$ 均匀分布$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 具有 $\mathbb{E}_0[X_1] = 0$，方差$_0$（X_1）$= 1$，它是绝对连续的，因此是强非格点的。因此，（A.1）不成立并非格点效应或缺乏指数矩所导致。

致谢。第二作者的工作是在高等经济学院大学的基础研究计划框架内完成的。

参考文献

[1] A. A. Borovkov。《广义更新过程》。Fizmatlit，莫斯科，2020年。俄文。英文书名：广义更新过程。

[2] Hans Carlsson 和 Olle Nerman。Lorden 更新不等式的另一种证明。《应用概率进展》，18(4):1015–1016，1986年。[3] J. T. Chang。小漂移随机游走的首次梯级高度矩。《应用概率年刊》，2(4):714–738，1992年。[4] Joseph T. Chang。关于超越量的不等式。《应用概率年刊》，4(4):1223–1233，1994年11月。[5] D. R. Cox。《更新理论》。Methuen，伦敦，1962年。[6] William Feller。《概率论及其应用导论》，第二卷。Wiley，纽约，第二版，1971年。[7] S. Janson。m依赖变量的更新理论。《概率年刊》，11(3):558–568，1983年。[8] E. Yu. Kalimulina 和 G. A. Zverkina。关于更新过程的 Lorden 不等式的某种推广，2021年。arXiv:1910.03381。[9] T. Lindvall。《耦合方法讲义》。Dover Publications，米尼奥拉，纽约州，2002年。[10] G. Lorden。关于越过边界的超额。《数理统计年刊》，41(2):520–527，1970年。[11] V. I. Lotov。关于随机游走梯级高度矩及分布的不等式。《西伯利亚数学杂志》，43(4):655–660，2002年。译自《西伯利亚数学杂志》，43:4 (2002)，816–822。[12] A. A. Mogulskii。某些边界泛函矩的绝对估计。《概率论及其应用》，18:340–347，1973年。[13]Filippo Santambrogio。《应用数学家的最优传输》，《非线性微分方程及其应用进展》第87卷。Birkh¨auser，查姆，2015年。[14] W. L. Smith。更新理论及其延伸。《皇家统计学会杂志》B辑，20(2):243–284，1958年。[15]John L. Spouge。关于独立加项且分布各异时越过边界的超越量的不等式。《统计与概率快报》，77(14):1486–1489，2007年9月。

[16] O. V. Sugakova. 计数过程与随机数量随机变量的求和. 概率论与数理统计, (74):181– 189, 2007.[17] D. Svensson. Lorden更新不等式的随机环境推广. 马尔可夫过程及相关领域, 8(4):637–649, 2002.[18] C´edric Villani. 最优传输：旧与新, 数学科学基础丛书第338卷. Springer, 2009.[19] H.-C. Wong. 阐明随机游走中超越量的渐近行为. 概率电子通信, 30:1–12, 2025.[20] G. Zverkina. Lorden 不等式与某扩展Erlang–Sevastyanov排队系统的多项式收敛速率, 2020. arXiv:2010.05882.