arXiv:2603.09537v1 [math.QA] 10 Mar 2026

A型杨氏代数与量子仿射代数中修正的 Drinfeld-Cartan 级数的余积

´ ˆJEROME MILOT

Abstract. 我们给出了 A 型 A 杨氏代数以及特定 A 型 A_2量子仿射代数中修正的 Drinfeld-Cartan 生成级数的余积的显式公式。作为后者的一项辅助结果，我们给出了特定 A 型 A_2 量子仿射代数的正预基本表示的显式表示。

Contents

1. 引言 1 致谢 3 记号与约定 3 2. 杨氏代数、S 级数、Theta级数 4 2.1. 杨氏代数 4 2.2. S 级数与 Theta级数 6 3. A型中 S 级数余积的公式 7 4. 量子仿射代数、T级数与 Theta级数 10 4.1. 量子仿射代数 10 4.2. T级数与 Theta级数 11 5. 根向量与万有R矩阵 12 6. 正预基本模 15 7. A型 A_2 18中 T级数余积的公式 8. 附录：移位杨氏代数与作为结合子的 Theta级数 20 参考文献 24

1. Introduction

设 $\mathfrak{g}$ 为一个复有限维单李代数。为简便起见，我们假设 $\mathfrak{g}$ 为单边。令 I 为其 Dynkin 节点集，$C = (c_{ij})$为其 Cartan 矩阵，并令 q 为一个非零且不是单位根的复数。令 $Y(\mathfrak{g})$为杨代数，$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$为量子仿射代数，它们分别由 Drinfeld [6] 构造为流代数 $\mathfrak{g}[z]$和环路代数 $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ 的 Hopf代数变形。

1988年，Drinfeld 为这些量子群给出了一种新的实现方式，更适合研究其表示论 [7]。在这一新表述中，量子仿射代数$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的生成元被编码在生成级数 $x_i^{\pm}(z)$ $\phi_i^{\pm}(z)$ 中，其中 $i \in I$。作为这些生成级数交换关系的一个例子，我们有

$$\phi_i^-(z)x_j^{\pm}(w) = \frac{q^{\pm c_{ij}}w - z}{w - q^{\pm c_{ij}}z}\phi^-(z)x_j^{\pm}(w) \quad \text{for } i, j \in I.$$

如果能为这一新表述赋予 Hopf代数结构，并建立这些实现之间的同构，那么相应的余积就会过于复杂。更好地理解这些余积，将有助于明确地研究这些量子群的表示论，尤其是 R矩阵。本文为 A型中若干族 Drinfeld新生成元建立了明确的余积公式；这些生成元与其他生成元之间的交换关系更为简单。

这些生成级数出现在量子仿射代数表示论及其与量子可积系统之间联系的研究中。在这一背景下，Baxter 引入了称为传递矩阵的对易算子，其共同特征值编码了有关模型的重要信息。对特征值的研究促使 Frenkel-Reshetikhin [11] 引入了q特征的概念，这是经典特征的量子类比。他们猜想，可以通过计算某个相关表示的 q特征并进行适当的代换来得到这些特征值。
Frenkel-Hernandez [10] 利用 Borel子代数的一类特殊表示证明了这一猜想，这类表示称为前基本表示。Hernandez-Jimbo [18] 引入了这些表示，并将其构造为 Kirillov-Reshetikhin模的极限。事实证明，与这些前基本模相关联的传递矩阵在上述代换过程中发挥着关键作用。

在同一篇文章中，Frenkel-Hernandez 将与预基本表示相关联的传递矩阵的极限定义为 Drinfeld-Cartan 子代数的一族新生成级数。他们证明，这些称为**T级数**的级数在 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的任意有限维表示上都是多项式。在代数层面上，这些修正的 Drinfeld-Cartan 级数与其他生成元的相互作用尤为良好。事实上，对于 $i,\ j \in I$：

$$T_i(z)x_j^-(w)T_i(z)^{-1} = (1-\delta_{i,j}wz)x_j^-(w)$$

这比 $\phi_i^{\pm}(z)$ 的交换关系更简单。这也是我们选择研究这些级数而非标准 Drinfeld-Cartan 生成元的原因之一。2024年，Zhang [24]证明，T级数的余积有一个紧凑的公式

$$\Delta\left(T_i(z)\right) = (1\otimes T_i(z)) \times \Theta_i(z) \times (T_i(z)\otimes 1)$$

其中，$\Theta_i(z)$ 的每个权分量都是关于 z的多项式。

本文的主要结果之一是给出了类型 A_2 中 $\Theta_i(z)$ 的显式公式（定理 7.1）：

定理 1.1. 量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 的 *Theta*级数由以下两个公式给出

$$\Theta_1(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x_{1,0}^-\otimes x_{1,-1}^+ z\right)\exp_q\left((q-q^{-1})\left[x_{1,0}^-, x_{2,0}^-\right]_q \otimes \left[x_{2,0}^+, x_{1,-1}^+\right]_{q^{-1}} z\right);$$

$$\Theta_2(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x_{2,0}^-\otimes x_{2,-1}^+ z\right)\exp_q\left((q-q^{-1})\left[x_{2,0}^-, x_{1,0}^-\right]_q \otimes \left[x_{1,0}^+, x_{2,-1}^+\right]_{q^{-1}} z\right)$$

其中 $\exp_q$ 是 q-指数，而 $[x,y]_q = xy - qyx$ 是 q对易子。

为证明这一结果，我们利用万有R矩阵，并将其作用于 Borel子代数上的一个预基本模，以确定 $\Theta_i(z)$。作为辅助结果，我们显式计算了 Borel子代数的一个正预基本模的基。这些模已由 Bazhanov-Hibberd-Khoroshkin [1], 在类型 A_2 中研究，并由 Jang-Kwon-Park [20]在任意 $n \in \mathbb{N}$的类型 A_n 中研究。我们的工作给出了所有根向量在此模上的显式作用。

2024年，Zhang 为杨氏代数定义了 T级数的一个类似物，它与其他生成元也能良好地相互作用。请注意，在表示层面，T级数的类似物已于

2020 年由 Gautam-Wendlandt [14] 和 Hernandez-Zhang [19] 独立研究。这些修正的 Drinfeld-Cartan 级数也可以用 Theta级数以基本相同的方式分解，并具有相同的局部多项式性。我们的第二个主要结果是任意 $n \in \mathbb{N}$ 下类型 A_n 中 $\Theta_i(z)$的显式公式（定理 3.1）：

定理1.2. 对于 $n \in \mathbb{N}$，杨代数 $Y(\mathfrak{sl}_{n+1})$ 的*Theta*级数由以下 n公式给出，对于 $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\Theta_i(z) = \exp\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant n+1} E_{kj} \otimes E_{jk}\right)$$

其中 E_{jk} 是 $\mathfrak{sl}_{n+1} \subset Y(\mathfrak{sl}_{n+1})$中的初等矩阵。

请注意，该结果好于预期：Theta级数的权分量不依赖于 z。

尽管该结果与量子仿射代数的情形有些相似，但所涉及的论证有所不同。对于杨代数， $\Theta_i(z)$ 可解释为移位 Yangian 上某些模之间的同态。该态射与某些生成元的作用之间的交换关系给出一个具有唯一解的方程组，我们求解它以确定 $\Theta_i(z)$。

我们的结果除了为Drinfeld-Cartan生成元提供余乘公式之外，还可在今后的工作中用于显式计算新的R矩阵，如 [24, 第6节和 10]，或用于计算其他修正的 Drinfeld-Cartan 级数的余乘公式，尤其是Gerasimo-Kharchev-Lebedev-Oblezin的截断级数 [15]；情形 $\mathfrak{sl}_2$ 此前已在 [22]中研究过。

本文结构安排如下。第1节回顾杨氏代数、S 级数和 Theta级数的定义与性质。第2节建立 S 级数的余乘公式。其中一部分证明使用了移位杨氏代数等定义；为求简洁，第1节不再回顾这些定义，这部分证明见附录。第3节回顾量子仿射代数、Borel子代数和 T级数的定义与性质。第4节介绍根向量和万有R矩阵的概念。我们按照 Damiani [5] 的构造，计算了 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ 的情形下的根向量。第5节利用由第4节确定的根向量构成的 $U_q(\mathfrak{b})$ 子代数的基，为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ 给出 $U_q(\mathfrak{b})$ 的第一个正预基本表示的显式基。第6节将 R矩阵应用于预基本模，建立 T级数的余乘公式。附录回顾移位杨氏代数的基本定义与性质，并证明第2节中引用的结果。

致谢。 作者感谢 CDP C2EMPI、法国政府通过法国2030计划提供的支持，以及里尔大学、里尔大学卓越倡议和里尔欧洲大都会对 R-CDP-24-004-C2EMPI项目的资助与支持。

作者感谢 Huafeng Zhang 富有成效的讨论、深刻的见解和对稿件的仔细审阅。

Notations and conventions

注 $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$。固定 $n \in \mathbb{N}^*$。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ 为特殊线性李代数， $\mathfrak{h}$ 为其嘉当子代数，$I = \{1, \dots, n\}$ 为 Dynkin 节点集。设 $\Delta := (\alpha_i)_{i \in I}$为单根，并用 R 表示正根集。设 $(\,,\,) : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ 为非退化对称双线性型。Cartan 矩阵 C 记为 $c_{i,j} = {}^{2}{}_{(\alpha_i,\alpha_j)\ (\alpha_i,\alpha_i)}$。在 A 型中，该矩阵是对称的。设

基本余权 $(\omega_i^\vee)$ 为 $\mathfrak{h}$ 中与基 (α_i) 对偶的基，即 $\langle \alpha_i, \omega_i^\vee \rangle = \delta_{ij}$。记 $\alpha_i^\vee = \sum_{j\in I} c_{ij}\omega_j^\vee$。

$$P^\vee := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\,\omega_i^\vee; \quad Q := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\,\alpha_i; \quad Q_+ := \sum_{i\in I} \mathbb{N}\,\alpha_i$$

余权格、根格和正根锥。对于 $i \in I$，定义反射 $(s_i)_{i\in I}$，其作用于 Q 的方式为 $s_i(x) := x - \langle x, \alpha_i^\vee\rangle \alpha_i$，其中 $x \in Q$。

$\hat{}$ 记与 $\mathfrak{g}$ 相关联的仿射 Kac-Moody 代数为 $\hat{\mathfrak{g}}$，并记仿射 Dynkin 节点集为 $I = \{0, \dots, n\}$。设 $q \in \mathbb{C}^\times$ 不是单位根。对 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，定义：

$$(m)_q := \frac{q^{2m}-1}{q^2-1}; \quad (m)_q! := \prod_{s=1}^{m} [s]_q; \quad [m]_q := \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}; \quad \left[\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right]_q := \prod_{s=1}^{k} [m-s+1]_q.$$

定义量子 Cartan 矩阵 $C(q) = ([c_{i,j}]_q)_{i,j\in I}$。由于 q 是一般的，它可逆。记其逆矩阵为 $\tilde{C}(q) = \left(\tilde{C}_{i,j}(q)\right)_{i,j\in I}$。

2. Yangian、S-级数、Theta 级数

本节回顾杨氏代数的两种表示：J 表示和流表现。前者有助于简化我们的一些计算，后者则是本文采用的表示。随后，我们引入一类称为 S 级数的级数，其系数生成一个重要的交换子代数：Drinfeld-Cartan子代数。Drinfeld-Cartan子代数的标准生成元的余积显式公式目前仍未解决。已有证明表明， [24] S 级数具有便于使用的余乘公式，其中用到了 Theta级数。这类级数的系数属于 Drinfeld-Cartan子代数，可解释为杨氏代数某些模的结合子。

2.1. 杨氏代数。

本小节回顾杨代数的 J 表示、流表现，以及这两种表示之间的同构。

定义 2.1。 [6] 设 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个不变双线性形式，且 (x_λ) 是关于 $(\cdot,\cdot)$的$\mathfrak{g}$ 的一组标准正交基。杨代数 Y^J 的$\boldsymbol{J}$ 表示 是由生成元$x, J(x)$ （ $x \in \mathfrak{g}$） 生成并满足以下关于 $x, y, z \in \mathfrak{g}$的关系的代数：

$$xy - yx = [x,y]_{x,y\in\mathfrak{g}}; \quad [x, J(y)] = J([x,y]); \tag{1}$$

$$J(ax+by) = aJ(x) + bJ(y); \tag{2}$$

$$[J(x)\ [J(y)\ z]] - [x, [J(y)\ J(z)]] = \sum_{\lambda,\mu,\nu} ([x,x_\lambda]\,,\ [[y,x_\mu]\,,[z,x_\nu]])\ \{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\} \tag{3}$$

其中 $\{x_1,x_2,x_3\} = \frac{1}{24}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$。

注释1。 关系 (3) 在特殊情形 A_1 下并不完全相同，应替换为：

$$[[J(x_1),J(x_2)]\,,[x_3,J(x_4)]] + [[J(x_3),J(x_4)]\,,[x_1,J(x_2)]] = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \alpha_{\lambda,\mu,\nu}\{x_\lambda, x_\mu, J(x_\nu)\}$$

其中$\alpha_{\lambda,\mu,\nu} = ([x_1,x_\lambda], [[x_2,x_\mu]\,,[[x_3,x_4]\,,x_\mu]])\ + ([x_4,x_\lambda], [[x_3,x_\mu]\,,[[x_1,x_2]\,,x_\mu]])$。

J 表示由 Drinfeld 于1985年引入。它具有简单的Hopf代数结构，其余积由下式给出，对于 $x \in \mathfrak{g}$:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x; \quad \Delta\left(J(x)\right) = J(x) \otimes 1 + 1 \otimes J(x) + \frac{1}{2}\left[x \otimes 1, \Omega\right]$$

其中 Ω 是 $\mathfrak{g}$的伴随表示中的二次Casimir元。

现在，我们来定义流表现，这是我们主要采用的表示。它由 Drinfeld [7]于1988年引入。与 J 表示相比，使用这种表示进行代数运算通常更为方便。

定义 2.2. [7]与 $\mathfrak{g}$ 相关联的杨代数的流表现 Y 是由生成元$x_{i,m}^{-}$,$x_{i,m}^{+}$,$\xi_{i,p}$ 对所有满足以下关系的 $i \in I$, $m, p \in \mathbb{N}$ 定义的结合代数:

$$\begin{gathered}
\left[\xi_{i,p}, \xi_{j,m}\right] = 0, \quad \left[x_{i,p}^{+}, x_{j,m}^{-}\right] = \delta_{i,j}\xi_{i,p+m}, \\
\left[\xi_{i,m+1}, x_{j,p}^{\pm}\right] - \left[\xi_{i,m}, x_{j,p+1}^{\pm}\right] = \pm\frac{1}{2}c_{ij}\left(\xi_{i,m}x_{j,p}^{\pm} + x_{j,p}^{\pm}\xi_{i,m}\right), \\
\left[x_{i,m+1}^{\pm}, x_{j,p}^{\pm}\right] - \left[x_{i,m}^{\pm}, x_{j,p+1}^{\pm}\right] = \pm\frac{1}{2}c_{ij}\left(x_{i,m}^{\pm}x_{j,p}^{\pm} + x_{j,p}^{\pm}x_{i,m}^{\pm}\right), \\
ad_{x_{i,0}^{\pm}}^{1-c_{i,j}}(x_{j,0}^{\pm}) = 0 \qquad (i \neq j)
\end{gathered}$$

其中 $ad_x(y) = xy - yx$。

杨代数具有一个 Q分次，称为权分次，它在生成元上的定义为 $wt(x_{i,m}^{\pm}) = \pm\alpha_i$；以及 $wt(\xi_{i,m}) = 0$。对于 $\beta \in Q$，记 Y_β 为 Y 中权为 β的元素构成的子空间。

定义 $i \in I$的生成级数:

$$\xi_i(z) := 1 + \sum_{m \geq 0} \xi_{i,m} z^{-m-1}; \quad x_i^{\pm}(z) = \sum_{m \geq 0} x_{i,m}^{\pm} z^{-m-1}.$$

它们是关于 z^{-1} 的幂级数，其首项分别为1 和 $x_{i,\,0}^{\pm} z^{-1}$。对于 $i \in I, p \in \mathbb{N}$，$\xi_{i,\,p}$ 生成了 $Y(\mathfrak{g})$ 的一个交换子代数，记作 Y^0，称为***Drinfeld-Cartan*** 子代数。

对于 $\alpha \in R$，设 $x_\alpha^{\pm} \in \mathfrak{g}$的权为 $\pm\alpha$，且满足 $(x_\alpha^{+},\ x_\alpha^{-}) = 1$ 以及 $x_{\alpha_i}^{\pm} = x_{i,\,0}^{\pm}$。下面给出这两种表示之间的同构。

定理2.3。 [7, 定理 1][17, 定理 2。6] 代数 Y^J 和 Y 同构，两种表示之间的同构 φ： $Y^J \to Y$ 由下式给出:

$$\varphi(h_i) = \xi_{i,0}; \quad \varphi\left(J(h_i)\right) = \xi_{i,1} + \frac{1}{4}\sum_{\alpha \in R}(\alpha, \alpha_i)\{x_\alpha^{+}, x_\alpha^{-}\} - \frac{1}{2}\xi_{i,0}^2;$$

$$\varphi(x_i^{\pm}) = x_{i,0}^{\pm}; \quad \varphi(J(x_i^{\pm})) = x_{i,1}^{\pm} \pm \frac{1}{4}\sum_{\alpha \in R}\left\{\left[x_i^{\pm}, x_\alpha^{\pm}\right], x_\alpha^{\mp}\right\} - \frac{1}{4}\{x_{i,0}^{\pm}, \xi_{i,0}\}.$$

特别地，对于 $i \in I$，有:

$$\varphi(J(x_{i,0}^{+})) = x_{i,1}^{+} + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=i+1}^{n}\left(E_{i,k}E_{k,i+1} + E_{k,i+1}E_{i,k}\right) - \sum_{j=1}^{i}\left(E_{j,i+1}E_{i,j} + E_{i,j}E_{j,i+1}\right)\right)$$

其中 $E_{j,\,k}$ 是 $\mathfrak{sl}_{n+1} \subset Y$（$\mathfrak{sl}_{n+1}$）中的初等矩阵。

通过定义 φ 为 Hopf代数态射，可以为杨代数的流表现赋予 Hopf代数结构。然而，Drinfeld-Cartan生成元的余积的可计算公式仍是一个未解决的问题。例如，对于 $\mathfrak{sl}_2$ [23, 定义 2.24]:

$$\Delta(\xi(z)) = (1 \otimes \xi(z)) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(x^-(z+1))^k \otimes (x^+(z+1))^k \right) \times (\xi(z) \otimes 1)\,.$$

2.2. **S 级数与 Theta 级数**。 标准 Drinfeld-Cartan 生成元的余积在代数操作上相当复杂。2024年，Zhang 引入了一族新的 Drinfeld-Cartan 生成元，即 S 级数 [24], ，用于构造杨氏代数一维表示的 R 矩阵。这些级数通过求解 Drinfeld-Cartan 子代数中的差分方程来定义。

在他的文章中，Zhang 证明，S 级数的余乘积可以用 Theta 级数表示为更紧凑的公式。这些级数可以解释为移位杨氏代数的结合子。移位杨氏代数是一族结合代数，由 Brundan-Kleshchev [4] 在 A 型中引入，并由 [21, 3] 在一般情形下引入，是对标准杨氏代数的推广。本文的主要结果之一是给出了 A 型中 Theta 级数以及 S 级数余积的显式公式。

首先，为了引入 S 级数，我们需要 Gerasimov–Kharchev–Lebedev–Oblezin [15,引理 2.1], 中称为 GLKO 级数的级数。这些是 Laurent级数 $A_i(z) \in 1 + z^{-1}Y^0[[z^{-1}]]$ ，关于 $i \in I$由以下关于 $i \in I$ 的差分方程唯一确定:

$$\xi_i(z) = \frac{A_{i-1}(z-\frac{1}{2})A_{i+1}(z-\frac{1}{2})}{A_i(z)A_i(z-1)} \in 1 + z^{-1}Y^0[[z^{-1}]]$$

其中 $A_{-1}(z) = A_{n+1}(z) = 1$。引入 GKLO 元素

$$A_i(z) = \exp\left(\sum_{m \geq 0} a_{i,m} z^{-m-1} \right).$$

注 2. *GKLO* 级数本身也颇具研究价值：某些杨氏代数的商群称为截断 *Yangian* 代数，它们源自 *GKLO* 级数。其余积的显式公式预计相对简单（例如，在 A_1 [22] 型中就是如此）。要计算该公式，可以根据 *S* 级数的余乘积计算 *GKLO* 级数的公式。

现在，让我们回顾 [24, 命题 4.1] 中的 S 级数。对于 $i \in I$，存在唯一的幂级数$S_i(z)$，属于 $1 + z^{-1}Y^0[[z^{-1}]]$ 并满足差分方程

$$S_i(z+1) = S_i(z) \times A_i(z) \times \exp\left(a_{i,0} \sum_{k>0} \frac{(-z)^{-k}}{k} \right).$$

注意，S 级数与 Drinfeld生成元的相容性尤为良好 [24, 命题 4.1]。对于 $i \neq j \in I$，级数 $S_i(z)$ 与 $x_{j,\,m}^{\pm}$ 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都交换；而对于 $j = i$ ，我们有:

$$S_i(z)x_{i,m}^- S_i(z)^{-1} = x_{i,m}^- - x_{i,m+1}^- z^{-1}; \quad S_i(z)^{-1}x_{i,m}^+ S_i(z) = x_{i,m}^+ - x_{i,m+1}^+ z^{-1}.$$

注记 3. 在 [24, 定理 4.6], 中，*T*算子被定义为 *S* 级数与一个（相当简单的）线性自同构的复合。在表示层面上，人们认为这个 *T*算子类似于 [10] 中针对量子仿射代数引入的 *T*级数。它可用于构造新的 *R*矩阵，见 [24, 第 6]节。不过，本文主要关注代数层面，因此不再赘述这些算子。

现在，我们来讨论 S 级数的余积。 [24], 中证明了，余积可以写成如下紧凑形式。对于 $i \in I$:

$$\Delta(S_i(z)) = (1 \otimes S_i(z)) \times \Omega_i(z) \times (S_i(z) \otimes 1)$$

其中 $\Omega_i(z) \in 1 \otimes 1 + z^{-1} (Y \otimes Y) [[z^{-1}]]$。

对于 $\beta \in Q_+$，将 $\Omega_{i,\beta}(z) \in (Y_{-\beta} \otimes Y_\beta) [[z^{-1}]]$ 定义为 $\Omega_i(z)$ 的 $(-\beta, \beta)$ 分量。于是 $\Omega_i(z) = \sum \Omega_{i,\beta}(z)$，并且根据引理 5.1 [24], $\Omega_{i,0} = 1 \otimes 1$.$_{\beta \in Q_+}$

现在，我们引入**Theta级数** [24, 定义 5.2]:

$$\forall \beta \in Q_+ : \quad \Theta_{i,\beta}(z) = \Omega_{i,\beta}(z)(-z)^{\beta_i := \langle \omega_i^\vee, \beta \rangle}.$$

注意，$\Theta_{i,0}(z) = 1 \otimes 1$。接下来考虑以下级数:

$$\Theta_i(z) = \sum_{\beta \in Q_+} \Theta_{i,\beta}(z) \in \prod_{\beta \in Q_+} (Y_{-\beta} \otimes Y_\beta) ((z^{-1})).$$

$\Theta_i(z)$ 的意义在于，它可以解释为移位杨氏代数上模的结合子（见 [24, 第 5.2] 节）。由此性质可得**交织关系**：一个具有唯一解的方程组，而该解即为 Theta级数。这些关系的表达式可能相当复杂，但它们有一个重要推论：权分量 $\Theta_{i,\beta}(z)$ 是关于 z 的多项式。不过，在 A型中，这些关系是可计算的。

3. Formula for the coproduct of S-series in type A

我们为杨代数确立了本文的主要结果：S 级数余积的显式公式。我们利用 Theta级数是模同态这一事实，因此它们必须与生成元的作用交换。事实证明，在 A型中，这一交换性质给出了一组可计算的 n方程，用以确定 $\Theta_i(z)$。解出这组方程后，可得到 Theta级数的简洁表达式，它依赖于初等矩阵；由此我们推导出 S 级数余积的公式。

本文的第一个主要结果是 Theta级数的公式。

定理 3.1。 对于 $n \in \mathbb{N}$，杨代数 $Y(\mathfrak{sl}_{n+1})$ 的 ***Theta*级数由以下 n公式给出，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$:**

$$\Theta_i(z) = \exp\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant n+1} E_{kj} \otimes E_{jk} \right)$$

由此可以推导出 *S* 级数余积的公式:

$$\Delta(S_i(z)) = (1 \otimes S_i(z)) \exp\left(- \sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant n+1} E_{kj} \otimes E_{jk} z^{-1} \right) (S_i(z) \otimes 1)$$

其中 $E_{j,k}$ 是 $\mathfrak{sl}_{n+1} \subset Y(\mathfrak{sl}_{n+1})$ 的初等矩阵。

注释 4. 已知 $\Theta_i(z)$ 关于 z 局部多项式，但这个结果更加方便，因为它不依赖于 z。此外，请注意，求和中的各项彼此可交换。

为证明这一结果，我们需要一些预备结果。先来看 Theta 级数 $\Theta_i(z)$ 必须满足的方程组。

命题 3.2。 对于 $i \in I$，*Theta*级数 $\Theta_i(z)$ 是 $\prod (Y_{-\beta} \otimes Y_\beta)((z^{-1}))^{\beta \in Q_+}$ 中唯一一个其(0,0)权分量等于 $1 \otimes 1$ 且满足以下 n 方程（对 $j \in I$ 而言）的级数：

$$\text{For } j \neq i: \quad \left[x_{j,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{j,0}^+, \Theta_i(z)\right] = 0;$$

$$\left[x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z(1 \otimes x_{i,0}^+), \Theta_i(z)\right] = \Theta_i(z) \left(\sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} \right).$$

注 5. 这个命题基本上可由 [24, 定理 5.7] 的证明推出。为求完备，我们将在附录中进一步详述交织性质及其唯一性。

为了证明该定理，我们来求解这些方程。我们需要以下结果。首先，我们引入 $Y \otimes Y$ 的一个完备化：

$$Y \otimes_z Y := \sum_{\alpha,\beta \in Q} \left(\prod_{\gamma \in Q_+} \left(Y_{(\alpha-\gamma)} \otimes Y_{(\beta+\gamma)}\right)((z^{-1})) \right)$$

它是一个代数。注意， $\Theta_i(z) \in Y \otimes_z Y$。

引理 3.3. 固定 $i \in I$。设 $1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant n+1$。记 $y = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant n+1} E_{k,j} \otimes E_{j,k} \in Y \otimes Y$.

在 $Y \otimes_z Y$ 中，我们有以下关系：

$$\left[1 \otimes x_{i,0}^+, \exp(y)\right] = 0;$$

$$\left[x_{i,0}^+ \otimes 1, \exp(y)\right] = \exp(y) \left(\sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} - \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant i \\ i < k \leqslant n+1}} E_{k,j} \otimes E_{j,i+1} E_{i,k} \right)$$

$$\left[x_{i,1}^+, E_{j,k}\right] = E_{i,k} E_{j,i+1};$$

$$\left[1 \otimes x_{i,1}^+, \exp(y)\right] = \exp(y) \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant n+1} E_{k,j} \otimes E_{j,i+1} E_{i,k} \right).$$

证明。 首先注意，$\exp(y) \in \prod_{\gamma \in Q} Y_{-\gamma} \otimes Y_\gamma \subset Y \otimes_z Y$。

对于第一个关系，注意到 $\left[1 \otimes \overset{+}{x}_{i,0}^+, y\right] = 0$。因此，该公式由李括号的导子性质得出。

记 $x = x_{i,0}^+ \otimes 1$。对于第二个关系，我们有：

$$\exp(-y) x \exp(y) = \exp(\mathrm{ad}_{-y})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{ad}_{-y}^k(x)$$

其中 $\mathrm{ad}_{-y}(x) = [x, y]$。现在，我们来计算这个和的前几项：

$$[x, y] = \sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k};$$

$$[[x, y], y] = -2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant n+1} E_{k,j} \otimes E_{j,i+1} E_{i,k};$$

$$[[[x, y], y], y] = 0.$$

因此，对于 $k > 2$，我们有 $\mathrm{ad}_{-y}^{k}(x) = 0$。由此可以推得

$$[x, \exp(y)] = \exp(y)\left(\exp(-y)x\exp(y) - x\right) = \exp(y)\left(\mathrm{ad}_{-y}^{0}(x) + \mathrm{ad}_{-y}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_{-y}^{2}(x) - x\right)$$

$$= \exp(y)\left([x, y] + \frac{1}{2}[[x, y], y]\right)$$

这正是第二个公式。

对于第三个公式，我们使用 J 表示的定义关系，并利用定理2.3中引入的同构 φ 推导流表现的关系。事实上，一方面，对于 $1 \leq j \leq i$ 和 $i < k \leq n+1$：

$$\left[J(x_{i,0}^{+}), E_{j,k}\right] = J\left(\left[x_{i,0}^{+}, E_{j,k}\right]\right) = 0.$$

另一方面，根据定理2.3，我们有：

$$\varphi(J(x_{i,0}^{+})) = x_{i,1}^{+} + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=i+1}^{n+1}\left(E_{i,k}E_{k,i+1} + E_{k,i+1}E_{i,k}\right) - \sum_{j=1}^{i}\left(E_{j,i+1}E_{i,j} + E_{i,j}E_{j,i+1}\right)\right).$$

因此，对于 $1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant n+1$：

$$0 = \left[\varphi(J(x_{i,0}^{+})), E_{j,k}\right] = \left[x_{i,1}^{+}, E_{j,k}\right] - E_{i,k}E_{j,i+1}.$$

最后，对于第四个关系，注意

$$\left[1 \otimes x_{i,1}^{+}, y\right] = \sum_{1 \leq j \leq i < k \leq n+1} E_{k,j} \otimes E_{i,k}E_{j,i+1};$$

$$\left[\left[1 \otimes x_{i,1}^{+}, y\right], y\right] = 0.$$

然后，再次使用第二个关系所用的公式，我们有：

$$\left[1 \otimes x_{i,1}^{+}, \exp(y)\right] = \exp(y)\left[1 \otimes x_{i,1}^{+}, y\right]$$

这就是第四个公式。 □

现在我们可以证明该定理。

定理 *3.1* 的证明。仍记$y = \sum E_{k,j} \otimes E_{j,k}$。我们来验证 $\Theta_i(z) = \exp(y)$$1 \leq j \leq i < k \leq n+1$满足命题 3.2 的 n关系。最后一个关系是引理 3.3 的直接推论。我们来验证关于 $j \neq i$的关系。

令 $j < i$。那么，注意到

$$\left[x_{j,0}^{+} \otimes 1, y\right] = -\sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,j+1} \otimes E_{j,k}; \quad \left[1 \otimes x_{j,0}^{+}, y\right] = \sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,j+1} \otimes E_{j,k}$$

因此 $\left[x_{j,0}^{+}\otimes 1+1\otimes x_{j,0}^{+},y\right]=0$，根据李括号的导子性质，我们有

$$\left[x_{j,0}^{+}\otimes 1+1\otimes x_{j,0}^{+},\Theta_i(z)\right]=0.$$

同样，对于 $i<k$:

$$\left[x_{k,0}^{+}\otimes 1,y\right]=\sum_{j=1}^{i}E_{k,j}\otimes E_{j,k+1};\quad \left[1\otimes x_{k,0}^{+},y\right]=-\sum_{j=1}^{i}E_{k,j}\otimes E_{j,k+1}$$

因此，如上所述，$\left[x_{k,0}^{+}\otimes 1+1\otimes x_{k,0}^{+},\Theta_i(z)\right]=0$。证明至此完成。□

4. Quantum affine algebras, T-series and Theta series

ˆ 现在我们旨在为量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 建立类似的公式。结果相似，但需要采用不同类型的论证。[10]，中引入的 T级数具有相同类型的、以 Theta级数表示的因式分解公式。在这里，我们将利用万有R矩阵以及 Borel子代数的正正预基本模。相关计算更具临时性，这也反映在结果仅适用于特定类型 A_2。不过，我们预期该公式可以推广到类型 A_n，与杨代数的情形一样。

4.1. 量子仿射代数。 与杨氏代数一样，我们回顾两种表述：Drinfeld–Jimbo 表述和 Drinfeld新实现，以及它们之间的对应关系。

定义 4.1。 [6] 与 $\mathfrak{g}$ 相关联的量子仿射代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 是由生成元 E_i、F_i、K_i、K_i^{-1}定义的结合代数，这些生成元满足以下关系：对于 $i\in\hat{I}$，以及对于 i、$j\in\hat{I}$:

$$K_iK_i^{-1}=K_i^{-1}K_i=1;\quad K_iK_j=K_jK_i\quad K_0K_1\dots K_n=1$$

$$K_iE_j=q^{c_{ij}}E_jK_i;\quad K_iF_j=q^{-c_{ij}}F_jK_i;\quad [E_i,F_j]=\delta_{ij}\frac{K_i-K_i^{-1}}{q-q^{-1}};$$

$$\sum_{s=0}^{-c_{ij}}\left[\begin{array}{c}1-c_{ij}\\ s\end{array}\right]_q E_i^{1-c_{ij}-s}E_jE_i^s=\sum_{s=0}^{-c_{ij}}\left[\begin{array}{c}1-c_{ij}\\ s\end{array}\right]_q F_i^{1-c_{ij}-s}F_jF_i^s=0\ \textit{for}\ i\neq j$$

其中，最后几条关系称为量子 *Serre* 关系。

量子仿射代数具有 Hopf代数结构，其余积定义如下:

$$\Delta(E_i)=E_i\otimes 1+K_i\otimes E_i;\quad \Delta(F_i)=1\otimes F_i+F_i\otimes K_i^{-1};\quad \Delta(K_i)=K_i\otimes K_i.$$

ˆ 我们引入 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$的一个自同构 Φ 和一个反自同构 Ω，它们对 $i\in I$ 的定义如下:

$$\Phi(E_i)=F_i;\quad \Phi(F_i)=E_i;\quad \Phi(K_i)=K_i;\quad \Phi(q)=q^{-1};$$

$$\Omega(E_i)=F_i;\quad \Omega(F_i)=E_i;\quad \Omega(K_i)=K_i^{-1};\quad \Omega(q)=q^{-1}.$$

我们需要研究一些表示，它们不是整个量子仿射代数的表示，而是 Borel 子代数的表示。

定义 4.2. [7] 上***Borel***子代数，记作 $U_q(\mathfrak{b})$，是由 E_i, K_i *for* $i\in I$ 生成的 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})\hat{}$ 的 *Hopf* 子代数。下 ***Borel*** 子代数，记作 $U_q(\mathfrak{c})$，是由 F_i, K_i *for* $i\in I$ 生成的 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})\hat{}$ *Hopf* 子代数。

不过，使用量子仿射代数的 Drinfeld 新实现会更加方便。

定义 4.3。 [7] 与 $\mathfrak{g}$ 相关联的量子仿射代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的 ***Drinfeld*** 新实现是由生成元 $x_{i,\ m}^{\pm}, \phi_{i,\ m}^{\pm}$ 定义的结合代数，其中 $i \in I, m \in \mathbb{Z}$ 满足以下关于 $m, p \in \mathbb{Z}, i, j \in I$ 和 $\epsilon \in \{+,-\}$ 的关系：

$$\phi_{i,m}^{+} = 0 \text{ for } m < 0; \quad \phi_{i,m}^{-} = 0 \text{ for } m > 0; \quad \phi_{i,0}^{+}\phi_{i,0}^{-} = 1;$$

$$\left[\phi_{i,m}^{\pm}, \phi_{i,p}^{\epsilon}\right] = 0; \left[x_{i,m}^{+}, x_{i,p}^{-}\right] = \delta_{i,j}\frac{\phi_{i,m+p}^{+} - \phi_{i,m+p}^{-}}{q - q^{-1}};$$

$$\phi_{i,m+1}^{\epsilon}x_{j,p}^{\pm} - q^{\pm c_{ij}}\phi_{i,m}^{\epsilon}x_{j,p+1}^{\pm} = q^{\pm c_{ij}}x_{j,p}^{\pm}\phi_{i,m+1}^{\epsilon} - x_{j,p+1}^{\pm}\phi_{i,m}^{\epsilon};$$

$$x_{i,m+1}^{\pm}x_{j,p}^{\pm} - q^{\pm c_{ij}}x_{i,m}^{\pm}x_{j,p+1}^{\pm} = q^{\pm c_{ij}}x_{j,p}^{\pm}x_{i,m+1}^{\pm} - x_{j,p+1}^{\pm}x_{i,m}^{\pm};$$

$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_q (x_{i,0}^{\pm})^{1-c_{ij}-k} x_{j,0}^{\pm} (x_{i,0}^{\pm})^k = 0 \text{ if } i \neq j.$$

我们定义生成级数 $\phi_i^{\pm}(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_{i\ ,k}^{\pm} z^k$。

这两种表述之间的同构由 Beck [2] 给出。下面给出关于 $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 的公式^：

$$K_i^{\pm 1} = \phi_{i,0}^{\pm}; \quad E_i = x_{i,0}^{+}; \quad F_i = x_{i,0}^{-} \text{ for } i \in \{1,2\}$$

$$E_0 = K_0\left[x_{1,1}^{-}, x_{2,0}^{-}\right]_q = -K_0\left[x_{2,1}^{-}, x_{1,0}^{-}\right]_q; \quad F_0 = \Omega(E_0) = \left[x_{2,0}^{+}, x_{1,-1}^{+}\right]_{q^{-1}} K_0^{-1}$$

其中 $[x,y]_q = xy - qyx$。下一节中，我们将通过根向量看到更多例子。

注 6. 上***Borel***子代数 $U_q(\mathfrak{b})$ 包含生成元 $x_{i\ ,m}^{+}, x_{i\ ,r}^{-}, \phi_{i\ ,m}^{+}$，其中 $i \in I, m \geq 0, r > 0$。下 ***Borel*** 子代数 $U_q(\mathfrak{c})$ 包含生成元 $x_{i\ ,-m}^{-}, x_{i\ ,-r}^{+}, \phi_{i\ ,-m}^{-}$，其中 $i \in I, m \geq 0, r > 0$。

定义**Drinfeld-Cartan子代数** U_q^0 为 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 中由 $\phi_{i\ ,m}^{\pm}$ （其中$i \in I, m \in \mathbb{Z}$）生成的子代数。定义 Drinfeld-Cartan 元素 $(h_{i,s})_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, i\in I}$ 如下：

$$\phi_i^{\pm}(z) = \phi_{i,0}^{\pm} \exp\left(\pm(q-q^{-1})\sum_{\pm s>0} h_{i,s}z^s\right).$$

注意到 $\phi_{i,\ \pm 1}^{\pm} = \pm(q-q^{-1})\phi_{i,\ 0}^{\pm}h_{i,\ \pm 1}$ 对于 $s \in \mathbb{N}$、$h_{i,\ \pm s}$ 可以用 $\phi_{i,\ \pm s}^{\pm}$, $\phi_{i,\ 0}^{\pm}$, $h_{i,\ \pm k}$表示，其中 $k < s$。

Drinfeld-Cartan 元素彼此对易，并且可以验证：

$$x_{j,m+s}^{\pm} = \frac{s}{[c_{ij}s]_q}\left[h_{i,s}, x_{j,m}^{\pm}\right]; \quad .$$

4.2. **T级数和 Theta级数**。T级数最早由 Frenkel-Hernandez 引入，用于研究量子可积系统中的 Baxter 的 Q 算子。它们被定义为上Borel子代数上的正预基本模的传递矩阵（即单值矩阵的迹）的极限。在 [24], 中，Zhang 证明了 T级数的余积可以像杨代数情形一样，用 Theta级数进行因式分解。此外，Theta级数可以通过万有R矩阵计算。

回忆一下， $\tilde{C}(q) = \left(\tilde{C}_{ij}(q)\right)_{i,\ j\in I}$ 量子 Cartan 矩阵的逆以及 $[s]_q = \frac{q^s - q^{-s}}{q-q^{-1}}$。

定义 4.4。 [10, 命题 5。5] *T*级数 $T_i(z)$ 是以 z 为变量、系数取自 *Drinfeld-Cartan*子代数 U_q^0 的可逆幂级数，其定义如下：

$$T_i(z) := \exp\left(\sum_{s>0}\sum_{j\in I}\frac{\tilde{C}_{ij}(q^s)h_{j,-s}}{[s]_q}z^s\right).$$

T级数与S 级数具有相同类型的交换关系，如引言中所给出。至于杨代数，我们可以定义**Theta级数**，依据 [24,定义9.2]:

$$\Delta(T_i(z)) = (1\otimes T_i(z))\times\Theta_i(z)\times(T_i(z)\otimes 1).$$

对于 $\beta\in Q_+$，用$\Theta_{i,\beta}(z)\in(U_q(\mathfrak{c})\otimes U_q(\mathfrak{c}))[[z]]$ 表示$(-\beta,\beta)$分量，即 $\Theta_i(z)$的相应分量。可以验证，我们有$\Theta_{i,0}(z)=1\otimes 1$ 以及 $\Theta_i(z)=\sum_{\beta\in Q_+}\Theta_{i,\beta}(z)$。

固定 $i\in I$。为计算 $\Theta_i(z)$，我们遵循第9节，见 [24]。 $\Theta_i(z)$的权分量可用单值矩阵表示。它们是将万有R矩阵作用于一个 $U_q(\mathfrak{b})$模（称为预基本模）而得到的。在下一节中，我们明确描述 $U_q(\mathfrak{b})$的、由根向量构成的子代数的一个基的构造，用以表示R矩阵，并遵循 [5]。

5. Root vectors and universal R-matrix

我们回顾文献 [5]中Borel子代数 $U_q(\mathfrak{b})$的根向量构造。稍后将用它研究Theta级数。利用 [2], 中所述的辫群作用，我们计算实正根及相关根向量。然后，我们用这一基表示万有R矩阵。

ˆ 考虑仿射李代数ˆ$\mathfrak{g}$的**实正根** R 集合。它是不相交的两个集合之并

$$\hat{R}_+ := \{m\delta+\alpha \mid \alpha\in R;\ m\geq 0\};\quad \hat{R}_- := \{r\delta-\alpha \mid \alpha\in R; r>0\}.$$

本节的目标是构造与这些实正根相对应的根向量。

首先，我们回顾辫群及其在量子仿射代数上的作用的基本性质。我们将利用它构造实正根及相应的根向量。

考虑由简单反射 s_i （$i\in I$）生成的Aut($P^\vee$)的子群 W_0。Weyl群定义为 $W=W_0\rtimes P^\vee$，其乘积为（s，x）（s'，y）=（ss'，s'^{-1}（x）+y）。对于 $s\in W_0$，记作 $s=$（s，0）；对于 $x\in P^\vee$，记作 $x=$（1，x）。考虑 $\theta=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，即 $\mathfrak{g}$的最高根，并记作 $s_0=$（s_θ，$\theta^\vee$）。考虑由（s_0，s_1，…，s_n）生成的 W的正规子群 $\tilde{W}$及其商群 $\mathcal{T}=W/\tilde{W}$。于是 $W=\tilde{W}\rtimes\mathcal{T}$，且 $\mathcal{T}$在 $\tilde{W}$上的作用由 $\tau s_i\tau^{-1}=s_{\tau(i)}$ˆ ˜给出，其中 $\tau\in\mathcal{T}$和 $i\in I$。最后，将 W的长度函数扩展到 W，定义为 l_W（τw）$=l_{\tilde{W}}$（w），其中 $\tau\in\mathcal{T}$˜和 $w\in W$。

现在，考虑辫群 $\mathcal{B}$，它由 $\mathcal{T}_w$ 生成，其中 $w\in W$，关系为 $\mathcal{T}_{ww'}=\mathcal{T}_w\mathcal{T}_{w'}$，若$l(ww')=l(w)+l(w')$。$w\in W$的约化表示是一个表达式 $w=\tau s_{i_1}\dots s_{i_N}$，其中$l(w)=n$，对于 $\tau\in\mathcal{T}$。例如，对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$，在 W中：

$$\omega_1^\vee=\tau_1 s_2 s_1;\quad \omega_2^\vee=\tau_2 s_1 s_2;\quad \mathcal{T}_{\omega_1^\vee}=\mathcal{T}_{s_0}\mathcal{T}_{s_2}\mathcal{T}_{\tau_1};\quad \mathcal{T}_{\omega_2^\vee}=\mathcal{T}_{s_0}\mathcal{T}_{s_1}\mathcal{T}_{\tau_2}$$

其中 $\tau_1=(012)$ 和 $\tau_2=(021)=\tau_1^{-1}$。

˜最后，回顾与 W 相关的辫群在 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 上的作用，记为 $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{s_i}$，其中$i \in I$。

$$\mathcal{T}_i(E_i) = -F_iK_i; \quad \mathcal{T}_i(E_j) = \sum_{s=0}^{-c_{ij}} (-1)^{s-c_{ij}} q^{-s} E_i^{-c_{ij}-s} E_j E_i^s \quad \text{if } j \neq i;$$

$$\mathcal{T}_i(F_i) = -K_i^{-1}E_i; \quad \mathcal{T}_i(F_j) = \sum_{s=0}^{-c_{ij}} (-1)^{s-c_{ij}} q^{s} F_i^s F_j F_i^{-c_{ij}-s} \quad \text{if } j \neq i;$$

$$\mathcal{T}_i(K_j) = K_{s_i(\alpha_j)}.$$

此外，这个作用与自同构 Φ 和反自同构 Ω 相容，具体而言：

$$\mathcal{T}_i\Phi = \Phi^{-1}\mathcal{T}_i; \quad \mathcal{T}_i\Omega = \Omega\mathcal{T}_i.$$

现在，按照 [5],，我们定义 $2\rho^\vee := \omega_2^\vee + \omega_1^\vee + \omega_2^\vee + \omega_1^\vee$。作为 Weyl群中的一个元素，可以写为：

$$2\rho^\vee = \omega_2^\vee\omega_1^\vee\omega_2^\vee\omega_1^\vee = s_0s_1s_2s_1s_0s_1s_2s_1.$$

应当牢记， $2\rho^\vee$ 的表达式选择十分重要：根向量和实正根的排列顺序都取决于它，通用 R矩阵的定义也同样如此。

接着，我们定义序列 $(i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5,\ i_6,\ i_7,\ i_8) = (0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1)$ 以及循环无限序列

$$\begin{array}{rccc} \iota & : & \mathbb{Z} & \to & \hat{I} \\ & & k & \mapsto & i_{k \bmod 8} \end{array}$$

按照 [5, 命题 3.2] 构造实正根。对于 $k \in \mathbb{Z}$，令

$$\beta_k := \begin{cases} s_{\iota(1)} \dots s_{\iota(k-1)}(\alpha_{\iota(k)}) & \text{if } k \geq 1 \\ s_{\iota(0)} \dots s_{\iota(k+1)}(\alpha_{\iota(k)}) & \text{if } k \leq 0 \end{cases}$$

ˆ ˆ ˆ 则 $\{\beta_k \mid k \leq 0\} = R_+$ 且 $\{\beta_k \mid k \geq 1\} = R_-$。例如， $R_\pm$ 的前几项为

$$\beta_1 = \delta - \alpha_1 - \alpha_2; \quad \beta_2 = \delta - \alpha_2; \quad \beta_3 = 2\delta - \alpha_1 - \alpha_2; \quad \beta_4 = \delta - \alpha_1.$$
$$\beta_0 = \alpha_1; \quad \beta_{-1} = \alpha_1 + \alpha_2; \quad \beta_{-2} = \alpha_2.$$

ˆ我们按以下方式固定 R 上的一个序

$$\beta_1 \prec \beta_2 \prec \beta_3 \prec \beta_4 \cdots \prec \beta_{-2} \prec \beta_{-1} \prec \beta_0.$$

我们定义**根　　向量** 与实正根 β_k 相关联，由 [5, 定义 7]按

$$E_{\beta_k} := \begin{cases} \mathcal{T}_{\iota(1)} \dots \mathcal{T}_{\iota(k-1)} \left(E_{\iota(k)}\right) & \text{if } k \geq 1 \\ \mathcal{T}_{\iota(0)}^{-1} \dots \mathcal{T}_{\iota(k+1)}^{-1} \left(E_{\iota(k)}\right) & \text{if } k \leq 0 \end{cases}$$

以及 $F_{\beta_k} = \Omega\left(E_{\beta_k}\right)$。已知对 $k \in \mathbb{Z}$有 $E_{\beta_k} \in U_q\left(\mathfrak{b}\right)$。

注记7. 与 $m\delta + \alpha_i$ 和 $r\delta - \alpha_i$ 相关联的根向量的一般公式对$m \geq 0$、 $r \geq 1$、 $i \in I$在 [10]中给出：

$$E_{m\delta+\alpha_i} = x_{i,m}^+; \quad F_{m\delta+\alpha_i} = x_{i,-m}^-; E_{r\delta-\alpha_i} = -K_i^{-1}x_{i,r}^-; \quad F_{r\delta-\alpha_i} = -x_{i,-r}^+K_i.$$

令 $U_q^+(\mathfrak{b})$ 为 $U_q(\mathfrak{b})$ 中由根向量 E_{β_k} for $k \leq 0$ 生成的子代数。那么它有一组基

$$\{E_{\beta_0}^{a_0}E_{\beta_{-1}}^{a_{-1}}E_{\beta_{-2}}^{a_{-2}}\dots \mid a_0, a_{-1}, a_{-2} \cdots \in \mathbb{N} \text{ such that almost all } a_k = 0\}.$$

类似地，根向量 E_{β_k} for $k>0$ 中的其他单项式张成 $U_q(\mathfrak{b})$ 的另一个子代数 $U_q^-(\mathfrak{b})$。令 $U_q^0(\mathfrak{b})$ 为 $U_q(\mathfrak{b})$ 中由 $K_i^{\pm 1}$, $h_{i,\,s}$ for $i\in I$, $s>0$ 生成的子代数。那么乘法定义了一个线性同构

$$U_q^+(\mathfrak{b})\otimes U_q^0(\mathfrak{b})\otimes U_q^-(\mathfrak{b})\cong U_q(\mathfrak{b}).$$

在接下来的几节中，我们将关注一些按如下方式计算的特定根向量。

命题 5.1. 对于 $i\in I$，我们在 $U_q(\mathfrak{b})$ 中有以下公式：

$$E_{\alpha_i}=x_{i,0}^+;\quad F_{\alpha_i}=x_{i,0}^-;\quad E_{\delta-\alpha_i}=-K_i^{-1}x_{i,1}^-;\quad F_{\delta-\alpha_i}=-x_{i,-1}^+K_i$$
$$E_{\alpha_0}=E_0;\quad F_{\alpha_0}=F_0;\quad E_{\alpha_1+\alpha_2}=-\left[x_{2,0}^+,x_{1,0}^+\right]_{q^{-1}};\quad F_{\alpha_1+\alpha_2}=-\left[x_{1,0}^-,x_{2,0}^-\right]_q$$

其中 $[x,y]_q=xy-qyx$。

证明。 前两个根向量为 $E_{\alpha_1}=E_1$；$E_{\alpha_0}=E_0$.

我们也可以轻松计算：

$$E_{\alpha_1+\alpha_2}=\mathcal{T}_1^{-1}(E_2)=\Phi\mathcal{T}_1(F_2)=\Phi(-F_2F_1+qF_1F_2)=q^{-1}E_1E_2-E_2E_1=-\left[x_{2,0}^+,x_{1,0}^+\right]_{q^{-1}}.$$

按定义，$E_{\alpha_2}=E_2$并无理由成立。让我们仔细检查一下。

$$\begin{aligned}E_{\alpha_2}&=\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2^{-1}(E_1)=\Phi\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(F_1)=\Phi\mathcal{T}_1\left(-F_1F_2+qF_2F_1\right)\\&=\Phi\left(K_1^{-1}E_1(-F_2F_1+qF_1F_2)-q(-F_2F_1+qF_1F_2)K_1^{-1}E_1\right)\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}K_1^{-1}E_1(-F_2F_1+qF_1F_2)=&-qF_2F_1K_1^{-1}E_1-q^{-1}F_2\left(\frac{1-K_1^{-2}}{q-q^{-1}}\right)+q^2F_1F_2K_1^{-1}E_1\\&+\frac{q}{q-q^{-1}}F_2-q^{-1}F_2\frac{K_1^{-2}}{q-q^{-1}}\end{aligned}$$

最终得到：

$$E_{\alpha_2}=\Phi(F_2)=E_2=x_{2,0}^+.$$

现在，我们要计算 $E_{\delta-\alpha_1}$。我们将进行与计算 E_{α_2} 时相同类型的计算，但希望得到一个用 Drinfeld 新实现表示的表达式。根据 [2,定义 4.6]:

$$x_{1,1}^-=\mathcal{T}_{\omega_1^\vee}(F_1)=\mathcal{T}_0\mathcal{T}_2(F_2)=\mathcal{T}_0(-K_2^{-1}E_2)=K_0^{-1}K_2^{-1}\left(E_0E_2-q^{-1}E_2E_0\right)=K_1\left[E_0,E_2\right]_{q^{-1}}.$$

另一方面，可以验证：

$$E_{\delta-\alpha_1}=\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(E_1)=\mathcal{T}_0(E_2)=-\left[E_0,E_2\right]_{q^{-1}}=-K_1^{-1}x_{1,1}^-.$$

为了计算与下 Borel 子代数相关的根向量，我们对这些结果应用 Ω:

$$F_{\alpha_1}=F_1;\quad F_{\alpha_0}=F_0;$$
$$F_{\alpha_1+\alpha_2}=qF_2F_1-F_1F_2=-\left[x_{1,0}^-,x_{2,0}^-\right]_{q^{-1}}$$
$$F_{\alpha_2}=F_2.$$

对于 $F_{\delta-\alpha_1}$，我们需要计算：

$$\Omega(x_{1,1}^-)=\Omega\left(K_1\left(-E_0E_2+q^{-1}E_2E_0\right)\right)=F_2F_0K_1^{-1}-qF_0F_2K_1^{-1}.$$

由于根据 [2],中的定义4.6

$$x_{1,-1}^+=\mathcal{T}_{\omega_1^\vee}(E_1)=\mathcal{T}_0\mathcal{T}_2(E_2)=\mathcal{T}_0(-F_2K_2)=\left[F_2,F_0\right]_qK_1^{-1}$$

因此

$$\Omega(x_{1,1}^-) = x_{1,-1}^+.$$

因此:

$$F_{\delta-\alpha_1} = \Omega(-K_1^{-1}x_{1,1}^-) = -x_{1,-1}^+K_1.$$

□

为结束本节，我们来定义万有R矩阵的三角部分。回顾一下 $x \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的 $\mathfrak{q}$-指数定义:

$$\exp_q(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(k)_q!}.$$

考虑 $U_q(\mathfrak{b}) \otimes U_q(\mathfrak{c})$ 的以下完备化。

$$U_q(\mathfrak{b})\tilde{\otimes}U_q(\mathfrak{c}) := \sum_{\alpha,\beta\in Q}\left(\prod_{\gamma\in Q_+} U_q(\mathfrak{b})_{\alpha+\gamma}\otimes U_q(\mathfrak{c})_{\beta-\gamma}\right) \subset \prod_{\alpha,\beta\in Q} U_q(\mathfrak{b})_\alpha \otimes U_q(\mathfrak{c})_\beta.$$

它是一个代数。

定义5.2。 [5,(11.2)][24,(8.3)] 万有*R*矩阵的三角部分 是 z 中系数属于 $U_q(\mathfrak{b})\tilde{\otimes}U_q(\mathfrak{c})$ 的幂级数:

$$\mathcal{R}^+(z) = \prod_{m\geqslant 0,\ \alpha\in R} \exp_q\left((q^{-1}-q)E_{m\delta+\alpha}\otimes F_{m\delta+\alpha}z^m\right);$$

$$\mathcal{R}^-(z) = \prod_{r>0;\ \alpha\in R} \exp_q\left((q^{-1}-q)E_{r\delta-\alpha}\otimes F_{r\delta-\alpha}z^r\right)$$

其中因　　子按上述固定的顺序递减排列 .

现在，我们定义一个 $U_q(\mathfrak{b})$-模，后续将对这些 R 矩阵的第一个因子应用该模。

6. Positive prefundamental module

我们回顾基于 [18] 的 $U_q(\mathfrak{b})$ 上的最低 ℓ-权模的相关结果。我们关注正预基本模这一族，它们是 $U_q(\mathfrak{b})$ 的表示，但并非整个量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 的表示。在这里，我们确定正预基本表示上所有根向量的作用。

我们先回顾 $U_q(\mathfrak{b})$ 的表示的权重结构。对于一个 $U_q(\mathfrak{b})$-模，取 $\lambda \in (\mathbb{C}^\times)^I$，考虑:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \phi_{i,0}^+ \cdot v = \lambda(i)v\}.$$

如果 $V_\lambda \neq 0$，则称其为权为 λ 的权空间。若模 V 是其权空间的直和，则称其为权重分次模。此外，注意到根格 Q 可通过 $\alpha_j \mapsto \alpha_j = (q^{c_{ij}})_{i,\ j\in I}$ 嵌入 $\mathfrak{t}^\times$ 中。由于 q 不是单位根，该映射是单射。记 Q 的像为 Q。如果一个模的所有权都属于 Q，则称该模为 **根分次** 模。对于 $v \in V_\lambda$，记 $\mathsf{wt}(v) := \lambda$。

ℓ-权 $\mathfrak{t}_l := (\mathbb{C}[[z]]^\times)^I$ 的集合，是 I 中可逆幂级数的 z-元组集合。对于 $j \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}$，我们定义 **正预基本** ℓ-权 $\Psi_{j,\ a} := \left((1-az)^{\delta_{ij}}\right)_{i\in I}$。

对于 $\mathbf{P} = (P_i(z))_{i\in I} \in \mathfrak{t}_\ell^\times$，最低 ℓ-权 Verma 模 $M(\mathbf{P})$ 是由向量 v_0 生成的 $U_q(\mathfrak{b})$-模，满足

$$\phi_i^+(z)\cdot v_0 = P_i(z)\ v_0; \quad E_\alpha \cdot v_0 = 0 \text{ for } \alpha \in \hat{R}_-.$$

由三角分解可得

$$M(\mathbf{P}) = U_q^+(\mathfrak{b}) \cdot v_0.$$

我们将 $L(\mathbf{P})$ 记为其不可约商。如果 ℓ-权是正预基本的，我们就称这个不可约模为**正预基本模**。

为了计算单值矩阵，我们关注正预基本模这一特殊情形。对于 $\mathfrak{sl}_3$，我们只考虑 ℓ-权 $\Psi_{1,1} = (1-z,1)$，因为我们将从 T_1 的余乘公式推导出 T_2 的余乘公式。将与 $\Psi_{1,1}$相关的正预基本模记为 L_1 。那么，它由一个向量$v_{0,0}$ 生成，并满足：

$$\phi_1^{\pm}(z) \cdot v_{0,0} = (1-z)v_{0,0}; \quad \phi_2^{\pm}(z) \cdot v_{0,0} = v_{0,0}$$
$$E_{r\delta-\alpha_1} \cdot v_{0,0} = 0 \quad E_{r\delta-\alpha_2} \cdot v_{0,0} = 0 \quad E_{r\delta-\alpha_1-\alpha_2} \cdot v_{0,0} = 0 \text{ for } r \geq 1.$$

然而，Frankel-Hernandez [10] 证明，大多数根向量在此模上的作用是平凡的。其余向量的作用可以明确计算。

引理 6.1。 [18][10,定理 6。3]

(1) 以下生成元在 L_1 上作用为0，其中 $j \in I, r \geqslant 1$:

$$x_{j,r}^+; \quad E_{(r+1)\delta-\alpha_1}; \quad E_{r\delta-\alpha_2}; \quad E_{(r+1)\delta-(\alpha_1+\alpha_2)}; \quad \phi_{j,\delta_{i,j}+r}^{\pm}.$$

(2) 我们有如下权分解：

$$L_1 = \bigoplus_{a,b\in\mathbb{N}} (L_1)_{\overline{a\alpha_1}} \oplus (L_1)_{\overline{b(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

其中每个权空间的维数均为 1。

(3) 由上一点可得 $E_2 \cdot v_{0,\ 0} = 0$。

现在我们给出这个正预基本模的显式表示。

命题 6.2。 L_1 模是一个带有基 $(v_{a,b})_{a,\ b\in\mathbb{Z}_+}$ 以及如下作用的 $U_q(\mathfrak{b})$-模，其中 $m \geqslant 0$ 且 $r \geqslant 1$:

$$x_{1,m}^+ \cdot v_{a,b} = \delta_{m=0} v_{a+1,b}; \quad x_{1,r}^- \cdot v_{a,b} = \delta_{r=1} q^b \frac{(a)_q}{q-q^{-1}} v_{a-1,b};$$
$$x_{2,m}^+ \cdot v_{a,b} = -\delta_{m=0} q^{-a}(a)_q v_{a-1,b+1}; \quad x_{2,r}^- \cdot v_{a,b} = 0;$$
$$E_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot v_{a,b} = q^a v_{a,b+1}; \quad E_0 \cdot v_{a,b} = -q^{-a-2(b-1)} \frac{(b)_q}{q-q^{-1}} v_{a,b-1};$$
$$K_1 \cdot v_{a,b} = -\phi_{1,1}^{\pm} \cdot v_{a,b} = q^{2a+b} v_{a,b}; \quad K_2 \cdot v_{a,b} = q^{b-a} v_{a,b}; \quad K_0 \cdot v_{a,b} = q^{-2b-a} v_{a,b}$$

其余所有根向量以及 $(\phi_{j\ ,\delta_{1,j}+r}^{\pm})_{j\in I, r\geq 1}$ 均作用为 0。

证明。 考虑第4节中给出的 $U_q^+(\mathfrak{b})$ 的根向量基。我们有， L_1 由以下集合张成

$$\{E_{\beta_0}^{a_0} E_{\beta_{-1}}^{a_{-1}} E_{\beta_{-2}}^{a_{-2}} \cdots v_{0,0} \quad | \quad a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots \in \mathbb{N}, \text{ almost all } a_k = 0.\}$$

此外，根据前一个引理，以下向量张成 L_1:

$$v_{a,b} := E_1^a E_{\alpha_1+\alpha_2}^b \cdot v_{0,0} \text{ for } a, b \in \mathbb{N}.$$

由于每个 $v_{a,b}$ 的权为 $a\alpha_1 + b\overline{(\alpha_1+\alpha_2)}$，我们推知所有 $v_{a,b}$ 都是非零且权各不相同的向量，并且张成 L_1，从而构成 L_1 的一组基。

首先，根据定义，$x_{1,\ 0}^+ \cdot v_{a,\ b} = v_{a+1,\ b}$。利用量子 Serre 关系，我们得到 $E_{\alpha_1+\alpha_2}E_1 = qE_1E_{\alpha_1+\alpha_2}$，由此推得 $E_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot v_{a,\ b} = q^a v_{a,\ b+1}$。

为了计算$x_{2,0}^{+}$的作用，我们利用 $E_{\alpha_1+\alpha_2}$ 的表达式。具体来说：

$$E_2E_1 = q^{-1}E_1E_2 - E_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

此外，由量子 Serre 关系可知 $E_2E_{\alpha_1+\alpha_2} = qE_{\alpha_1+\alpha_2}E_2$。记 $E_2\cdot v_{a,b} = \lambda_{a,b}v_{a-1,b+1}$。于是：$\lambda_{a,b} = q^{-1}\lambda_{a-1,b} - q^{a-1}$。由于 $\lambda_{0,b} = 0$ （我们已经通过分次论证得知 $E_2 \cdot v_{0,0} = 0$），最终得到 $\lambda_{a,b} = -q^{-a}(a)_q v_{a-1,b+1}$。

现在，记 $x_{1,1}^{-}\cdot v_{a,b} = \lambda_{a,b}v_{a-1,b}$。由 $x_{1,1}^{-}E_1 = E_1x_{1,1}^{-} - \frac{\phi_1^+}{q-q^{-1}}$可知，我们推得

$$\lambda_{a,b} = \frac{q^{2(a-1)+b}}{q-q^{-1}} + \lambda_{a-1,b}.$$

此外，可以验证 $x_{1,1}^{-}E_{\alpha_1+\alpha_2} = -E_2x_{1,1}^{-}E_1 + q^{-1}x_{1,1}^{-}E_1E_2$，进而推得 $\lambda_{0,b} = 0$。因此，上述方程有唯一解，其形式为：

$$\lambda_{a,b} = q^b\frac{(a)_q}{q-q^{-1}}.$$

最后，记 $E_0\cdot v_{a,b} = \lambda_{a,b}v_{a,b-1}$。可以验证 $E_0E_1 = q^{-1}E_1E_0 - K_2^{-1}x_{2,1}^{-}$。由于 $x_{2,1}^{-}$ 在 L_1 上作用为 0，我们推出 $\lambda_{a,b} = q^{-a}\lambda_{0,b}$。然后，利用 E_0 和 E_2的量子 Serre 关系：

$$q^{-(a-2)}\lambda_{0,b+2} - (q+q^{-1})q^{-(a-1)}\lambda_{0,b+1} + q^{-a}\lambda_{0,b} = 0.$$

根据定义，我们知道 $\lambda_{0,0} = 0$。我们只需确定 $\lambda_{0,1}$。由于 $E_0E_2 = q^{-1}E_2E_0 + K_1^{-1}x_{1,1}^{-}$，因此：

$$E_0E_{\alpha_1+\alpha_2} = q^{-2}E_{\alpha_1+\alpha_2}E_0 - K_1^{-1}x_{1,1}^{-}E_1 + q^{-2}E_1K_1^{-1}x_{1,1}^{-} - q^{-1}K_2^{-1}x_{2,1}^{-}E_2 + q^{-1}E_2K_2^{-1}x_{2,1}^{-}$$

因此 $\lambda_{0,1} = -\frac{1}{q-q^{-1}}$。最后，我们有

$$\lambda_{a,b} = -q^{-a-2(b-1)}\frac{(b)_q}{q-q^{-1}}.$$

□

现在，我们可以定义与 L_1相关的单值矩阵。这些矩阵是通过将泛R矩阵的第一因子作用于上Borel子代数的表示上来定义的 [12,(4.32)][24, 定义 8.11]。

令 M 为一个最低 ℓ权的 $U_q(\mathfrak{b})$-模。令 $b_0 \in M$ 为一个最低 ℓ权向量。将其扩充为权基 $\mathbf{B}$。与 M 相关联的**单值矩阵** $(t_{b_1,b_2}^{\pm}(z))_{b_1,b_2\in\mathbf{B}}$ 是系数取自 $U_q(\mathfrak{c})$的形式级数，定义如下：

$$\mathcal{R}^{\pm}(z)\cdot(b_2\otimes 1) = \sum_{b_1\in\mathbf{B}} b_1\otimes t_{b_1,b_2}^{\pm}(z) \text{ for } b_2\in\mathcal{B}.$$

通过这一构造，Zhang 证明了 [24, (9.52)]，Theta级数可以用单值矩阵的各项表示。对于 $M = L_i$，例如，对于 $\beta\in Q_+$，有：

$$\Theta_{i,\beta}(z) = \sum_{b\in\mathbf{B}:\ \mathrm{wt}(b)=\overline{\beta}} t_{b,b_0}^{+}(z)\otimes t_{b_0,b}^{-}(z)K_\beta^{-1} \tag{4}$$

其中 $K_\beta := K_1^{a_1}\dots K_n^{a_n}$对于 $\beta = \sum_{j\in I} a_j\alpha_j$。

我们将以基 $\mathbf{B} = (v_{a,b})_{a,b\in\mathbb{N}}$应用这一结果。注意，$\mathrm{wt}(v_{a,b}) = a\alpha_1 + b(\alpha_1+\alpha_2)$。

7. Formula for the coproduct of T-series in type A_2

我们确立了本文的第二个主要结果：类型 A_2 中 T级数的余积公式。我们计算与 L_1 相关的单值矩阵，并推导出 Theta级数的公式。随后，我们应用一个在 $\mathfrak{sl}_3$ 中交换单根的态射，得到 $\Delta(T_2(z))$ 的公式。最后，我们检验本文公式与 Finkelberg-Tsymbaliuk 余积公式 [9]之间的相容性。

ˆ定理 7.1. 量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 的 *T*级数的余积可写为，对于 $i \in \{1,2\}$

$$T_i(z) = (1 \otimes T_i(z)) \times \Theta_i(z) \times (T_i(z) \otimes 1)$$

其中 *Theta*级数 $\Theta_i(z)$ 由以下两个公式给出：

$$\Theta_1(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x^-_{1,0} \otimes x^+_{1,-1}z\right)\exp_q\left((q-q^{-1})\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}} z\right);$$

$$\Theta_2(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x^-_{2,0} \otimes x^+_{2,-1}z\right)\exp_q\left((q-q^{-1})\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{1,0}, x^+_{2,-1}\right]_{q^{-1}} z\right).$$

此外，这两个公式中的 *q*指数函数彼此对易。

证明。首先，我们证明可以从 $\Theta_1(z)$ 的公式推导出 $\Theta_2(z)$ 的公式。事实上，考虑 $U_q\left(\hat{\mathfrak{sl}}_3\right)$ 的 Hopf代数自同构：

$$\psi : \left| \begin{array}{ll} E_1 \mapsto E_2; & E_2 \mapsto E_1; \\ F_1 \mapsto F_2; & F_2 \mapsto F_1; \\ K_1 \mapsto K_2; & K_2 \mapsto K_1. \end{array} \right.$$

ˆ 为简便起见，我们也将 $\psi(0) = 0, \psi(1) = 2, \psi(2) = 1$记作。可以验证 $\psi\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{\psi(i)}\psi$ 对于 $i \in I$成立。于是，利用 [2], 中的定义4.6，可得 $s > 0$

$$\psi(x^+_{1,-s}) = (-1)^s x^+_{2,-s};$$

由于 $\left[x^+_{i,-s}, x^-_{i,0},\right] = \frac{\phi^-_i}{q^{-1}-q}{}_{,}{}^{-s}$，我们推得 $\psi(\phi^-_{1,-s}) = (-1)^s\phi^-_{2,-s}$。然后，对 s应用归纳法，可得 $\psi(h_{1,-s}) = (-1)^s h_{2,-s}$，因此我们有 $\psi(T_1(z)) = T_2(-z)$，以及由 $T_1(z)$得到的 $T_2(z)$公式。

现在，我们来证明 $\Theta_1(z)$的公式。考虑第一个正预基本模 L_1以及 $(v_{a,b})_{a,b\in\mathbb{N}}$，其基由命题 6.2 描述。为了得到与 L_1相关的单值矩阵的正部和负部，我们需要计算以下内容：

$$\mathcal{R}^+(z)\cdot(v_{0,0}\otimes 1) = \sum_{a,b\in\mathbb{N}} v_{a,b}\otimes t^+_{v_{a,b},v_{0,0}}(z);$$

$$\mathcal{R}^-(z)\cdot(v_{a,b}\otimes 1) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}} v_{k,l}\otimes t^-_{v_{k,l},v_{a,b}}(z)$$

注意，对于负部，我们只关注 $t^-_{v_{0,\ 0},\ v_{a,\ b}}(z)$。

让我们从正部开始。由于根据命题 6.2， $\mathcal{R}^+(z)$ 中几乎所有项在 M 上都消失，因此项 $\mathcal{R}^+(z)\cdot(v_{0,\ 0}\otimes 1)$ 等于

$$\sum_{a,b,c\in\mathbb{N}} \frac{\left((q^{-1}-q)E_1\otimes F_1\right)^a}{(a)_q!}\frac{\left((q^{-1}-q)E_{\alpha_1+\alpha_2}\otimes F_{\alpha_1+\alpha_2}\right)^b}{(b)_q!}\frac{\left((q^{-1}-q)E_2\otimes F_2\right)^c}{(c)_q!}\cdot(v_{0,0}\otimes 1)$$

但根据同一个命题：

$$E_2^c\cdot v_{0,0} = \delta_{c=0}v_{0,0};\quad E^b_{\alpha_1+\alpha_2}\cdot v_{0,0} = v_{0,b};\quad E_1^a\cdot v_{0,b} = v_{a,b}.$$

因此:

$$\mathcal{R}^+(z)\cdot(v_{0,0}\otimes 1)=\sum_{a,b\in\mathbb{N}} v_{a,b}\otimes\frac{(q^{-1}-q)^a}{(a)_q!}F_1^a\frac{(q^{-1}-q)^b}{(b)_q!}F^b_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

最后，我们得到

$$t^+_{v_{a,b},v_{0,0}}(z)=\frac{(q^{-1}-q)^a}{(a)_q!}(x^-_{1,0})^a\frac{(q-q^{-1})^b}{(b)_q!}\left[x^-_{1,0},x^-_{2,0}\right]_q^b$$

现在来计算负部。同样，我们知道， $\mathcal{R}^-(z)$ 的几乎所有项在 M 上都消失，因此:

$$\mathcal{R}^-(z)\cdot(v_{a,b}\otimes 1)=\sum_{k,l\in\mathbb{N}}\frac{\left((q-q^{-1})E_{\delta-\alpha_1}\otimes F_{\delta-\alpha_1}z\right)^k}{(k)_q!}\frac{\left((q-q^{-1})E_0\otimes F_0z\right)^l}{(l)_q!}\cdot(v_{a,b}\otimes 1).$$

然而，由于:

$$E_0^l\cdot v_{a,b}\in\mathbb{C}v_{a,b-l}\text{ and }E^k_{\delta-\alpha_1}\cdot v_{a,b-l}\in\mathbb{C}v_{a-k,b-l}$$

我们只关心 $k=a$ 和 $l=b$ 的项:

$$E_0^b\cdot v_{a,b}=(-1)^b\frac{(b)_q!}{(q-q^{-1})^b}q^{-ab-b(b-1)}v_{a,0};\quad E^a_{\delta-\alpha_1}\cdot v_{a,0}=(-1)^a\frac{(a)_q!}{(q-q^{-1})^a}q^{-a(a-1)}.$$

最后:

$$t^-_{v_{0,0},v_{a,b}}(z)=q^{-a(a-1)}F^a_{\delta-\alpha_1}z^aq^{-ab-b(b-1)}F_0^bz^b.$$

最后，我们只需用 Drinfeld新实现的生成元重写这个表达式:

$$F^a_{\delta-\alpha_1}=(-x^+_{1,-1}K_1)^a=(-1)^aq^{a(a-1)}(x^+_{1,-1})^aK_1^a;$$
$$K_1^aF_0^b=q^{ab}F_0^bK_1^a;$$
$$F_0^b=\left(\left[x^+_{2,0},x^+_{1,-1}\right]_q^{-1}K_0^{-1}\right)^b=q^{b(b-1)}\left(\left[x^+_{2,0},x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}\right)^b(K_0^{-1})^b.$$

因此:

$$t^-_{v_{0,0},v_{a,b}}(z)=(-1)^a\left(x^+_{1,-1}\right)^a\left(\left[x^+_{2,0},x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}\right)^bK_1^a(K_0^{-1})^bz^{a+b}.$$

利用等式 (4)，我们有:

$$\Theta_{1,a\alpha_1+b(\alpha_1+\alpha_2)+c\alpha_2}=\delta_{c=0}\frac{(q-q^{-1})^a}{(a)_q!}(x^-_{1,0})^a\frac{(q-q^{-1})^b}{(b)_q!}\left[x^-_{1,0},x^-_{2,0}\right]_q^b\otimes(x^+_{1,-1})^a\left[x^+_{2,0},x^+_{1,-1}\right]^b_{q^{-1}}z^{a+b}$$

so

$$\Theta_1(z)=\exp_q\left((q-q^{-1})x^-_{1,0}\otimes x^+_{1,-1}z\right)\exp_q\left((q-q^{-1})\left[x^-_{1,0},x^-_{2,0}\right]_q\otimes\left[x^+_{2,0},x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}z\right).$$

此外，q-指数中的各项彼此对易。例如，对于 $\Theta_1(z)$，注意到

$$x^-_{1,0}\left[x^-_{1,0},x^-_{2,0}\right]_q=q^{-1}\left[x^-_{1,0},x^-_{2,0}\right]_qx^-_{1,0};\quad x^+_{1,-1}\left[x^+_{2,0},x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}=q\left[x^+_{2,0},x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}x^+_{1,-1}.$$

因此，q指数函数彼此交换。 □

可以验证，这些公式与 Finkelberg-Tsymbaliukin [9, 定理 1014] 中给出的 Drinfeld-Cartan 元素的余积公式相容。

在类型 A_2 中，量子 Cartan 矩阵的逆为 $\tilde{C}(q) = \frac{1}{[3]_q}\begin{pmatrix}[2]_q & 1\\ 1 & [2]_q\end{pmatrix}$。现在，我们考察 $T_1(z)$（分别为 $T_2(z)$）中 z 的系数，并将其记为 $T_{1,\,1}$（分别为 $T_{2,\,1}$）。于是有

$$T_{1,1} = \frac{[2]_q}{[3]_q}h_{1,-1} + \frac{1}{[3]_q}h_{2,-1}; \quad T_{2,2} = \frac{1}{[3]_q}h_{1,-1} + \frac{[2]_q}{[3]_q}h_{2,-1}.$$

注意到 $[2]_q^2 - 1 = [3]_q$，于是得到

$$\begin{cases} h_{1,-1} &= [2]_q T_{1,1} - T_{2,1} \\ h_{2,-1} &= [2]_q T_{2,1} - T_{1,1} \end{cases}.$$

另一方面，考察定理 7.1 中的系数 z：

$$\begin{aligned}
\Delta(T_{1,1}) =& \frac{[2]_q}{[3]_q}\square(h_{1,-1}) + \frac{1}{[3]_q}\square(h_{2,-1}) + (q-q^{-1})x^-_{1,0}\otimes x^+_{1,-1} \\
&+ (q-q^{-1})\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}} \\
\Delta(T_{2,1}) =& \frac{[2]_q}{[3]_q}\square(h_{2,-1}) + \frac{1}{[3]_q}\square(h_{1,-1}) + (q-q^{-1})x^-_{2,0}\otimes x^+_{2,-1} \\
&+ (q-q^{-1})\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{1,0}, x^+_{2,-1}\right]_{q^{-1}}
\end{aligned}$$

其中 $\square(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$。注意到

$$\left[x^+_{1,0}, x^+_{2,-1}\right]_{q^{-1}} = -\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}; \quad [2]_q\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q + \left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_q = -q^2\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_{q^{-3}}$$

于是可以计算得到：

$$\begin{aligned}
\Delta(h_{1,-1}) =& \Delta\left([2]_q T_{1,1} - T_{2,1}\right) \\
=& \square(h_{1,-1}) + (q^2-q^{-2})x^-_{1,0}\otimes x^+_{1,-1} - (q-q^{-1})x^-_{2,0}\otimes x^+_{2,-1} \\
&- (q^3-q)\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_{q^{-3}} \otimes \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}} \\
\Delta(h_{2,-1}) =& \Delta\left([2]_q T_{2,1} - T_{2,1}\right) \\
=& \square(h_{2,-1}) + \left(q^2-q^{-2}\right)x^-_{2,0}\otimes x^+_{2,-1} - (q-q^{-1})x^-_{1,0}\otimes x^+_{1,-1} \\
&+ (q^3-q)\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_{q^{-3}} \otimes \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}.
\end{aligned}$$

这些是在 [9]中得到的公式。

8. Appendix : shifted Yangians and Theta series as associators

在本节中，我们将证明命题 3.2，其证明仿照 [24, 定理5.7]的证明。我们需要移位 Yangian 这一概念，它是一族推广标准杨氏代数的代数。它由 Brundan-Kleshchev [4]在A型中以及 [21, 3] 在完全一般的情形下引入。Theta级数可以解释为移位 Yangian 的特定表示的结合子。由这一性质，我们验证 Theta级数必须满足命题 3.2 中的方程。

定义8.1. 设 $\mu=\sum m_i\omega_i^\vee\in P^\vee$ 为一个余权。移位杨氏代数 Y_μ 是由生成元$x_{i,m}^-$、 $x_{i,m}^+$、 $\xi_{i,p}$ 定义的结合$_{i\in I}$代数，其中 $i\in I$、 $m\in\mathbb{N}$、 $p\in\mathbb{Z}$满足下列关系：

$$\left[\xi_{i,p},\xi_{j,p'}\right]=0,\quad \left[x_{i,m}^+,x_{j,m'}^-\right]=\delta_{i,j}\xi_{i,m+m'},$$
$$\left[\xi_{i,p+1},x_{j,m}^\pm\right]-\left[\xi_{i,p},x_{j,m+1}^\pm\right]=\pm\frac{1}{2}c_{ij}\left(\xi_{i,p}x_{j,m}^\pm+x_{j,m}^\pm\xi_{i,p}\right),$$
$$\left[x_{i,m+1}^\pm,x_{j,m'}^\pm\right]-\left[x_{i,m}^\pm,x_{j,m'+1}^\pm\right]=\pm\frac{1}{2}c_{ij}\left(x_{i,m}^\pm x_{j,m'}^\pm+x_{j,m'}^\pm x_{i,m}^\pm\right),$$
$$ad_{x_{i,0}^\pm}^{1-c_{ij}}(x_{j,0}^\pm)=0\qquad if\ i\neq j,$$
$$\xi_{i,-m_i-1}=1;\quad \xi_{i,p}=0\ for\ p<-m_i-1.$$

定义生成级数

$$\xi_i(z):=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\xi_{i,p}z^{-p-1};\quad x_i^\pm(z):=\sum_{m\in\mathbb{N}}x_{i,m}^\pm z^{-m-1}$$

它们是系数属于 Y_μ 的*Laurent*级数，首项分别为 z^{m_i} 和$x_{i,\ 0}^\pm z^{-1}$。

若余权 $\sum m_i\omega_i^\vee\in P^\vee$ 满足：对于所有 $i\in I$， $m_i\geq 0$ （分别为 $m_i\leq 0$）$_{i\in I}$，则称其为支配（分别为反支配）的。

推广　　在 [8],中引入了标准余积的一种推广，称为移位余乘法　　s.

定理8.2。 [8,推论3.16、定理4.12、命题4.14]

(1) 对于反支配余权 ϵ,η ，移位同态$\iota_{\epsilon,\eta}^\mu$：$Y_\mu\longrightarrow Y_{\mu+\epsilon+\eta}$ 定义如下：

$$x_{i,n}^+\mapsto x_{i,n-\langle\epsilon,\alpha_i\rangle}^+;\quad x_{i,n}^-\mapsto x_{i,n-\langle\eta,\alpha_i\rangle}^-;\quad \xi_{i,p}\mapsto\xi_{i,p-\langle\epsilon+\eta,\alpha_i\rangle}$$

是单射。

(2) 存在唯一一族代数同态

$$\Delta_{\mu,\nu}:Y_{\mu+\nu}\longrightarrow Y_\mu\otimes Y_\nu$$

对于所有满足 $\mu,\nu\in\mathbb{Z}$ 的情形，其中$\Delta_{0,0}$ 是标准杨氏代数的余积，

$$\Delta_{\mu,\nu}(x_{i,n}^+)=x_n^+\otimes 1\ if\ n<-\langle\mu,\alpha_i\rangle,\quad \Delta_{\mu,\nu}(x_{i,n}^-)=1\otimes x_{i,n}^-\ si\ n<-\langle\nu,\alpha_i\rangle$$

并且下列图表对 ϵ、 η 反支配权交换：

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mu+\nu} & \xrightarrow{\Delta_{\mu,\nu}} & Y_\mu\otimes Y_\nu \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{\epsilon,\eta}^{\mu+\nu}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\epsilon,0}^{\mu}\otimes\iota_{0,\eta}^{\nu}} \\ Y_{\mu+\nu+\epsilon+\eta} & \xrightarrow{\Delta_{\mu+\epsilon,\nu+\eta}} & Y_{\mu+\epsilon}\otimes Y_{\nu+\eta} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mu+\epsilon+\nu} & \xrightarrow{\Delta_{\mu+\epsilon,\nu}} & Y_{\mu+\epsilon}\otimes Y_\nu \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mu,\epsilon+\nu}} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mu,\epsilon}\otimes Id} \\ Y_\mu\otimes Y_{\nu+\epsilon} & \xrightarrow{Id\otimes\Delta_{\epsilon,\nu}} & Y_\mu\otimes Y_\epsilon\otimes Y_\nu \end{array}$$

然后，我们需要研究 [24, 5.3]中引入的交织性质。让我们简要回顾移位 Yangian 的表示论中的一些概念。

固定一个余权 $\mu = \sum m_i \omega_i^\vee$和 V一个 Y_μ-模。对于一个 Y_μ-模 V，我们考虑多项式$i\in I$空间 $V[z]$。通过标量扩张，它是 $Y_\mu[z]$ 上的一个模。沿着

$$\begin{array}{rccc} \tau_z & : & Y_\mu[z] & \to & Y_\mu[z] \\ & & x_{i,p}^{\pm} & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{p}{n} x_{i,p-n} z^n \\ & & \xi_{i,p}^{\pm} & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{p}{n} \xi_{i,p-n} z^n \end{array}$$

拉回后得到一个 $Y_\mu[z]$-模，记作 V_z，称为变形模。参数 z 称为谱参数。

我们简要回顾一下文献[24]中移位杨氏代数表示论的基本性质。 $\mathcal{L}_\mu$ 中 ℓ**-权（余权** μ ）的集合是由 I 元组组成的集合 $\mathbf{P} = (P_i(z))_{i\in I} \in \mathbb{C}((z^{-1}))^I$ ，其中每个 $P_i(z)$ 的首项为 z^{m_i}。可以定义相应的 Verma 模 $M(\mathbf{P})$ ，它是由满足以下条件的向量 v_0 生成的Y_μ-模：

$$\xi_i(z)\cdot v_0 = P_i(z) v_0; \quad x_i^+(z)\cdot v_0 = 0 \text{ for } i \in I.$$

它有唯一的不可约商，记作 $L(\mathbf{P})$，称为**最高** ℓ**-权表示**。对于 $i \in I$，定义 i**阶预基本模** L_i 为其 Y_μ 的最高 ℓ-权模，且其 ℓ-权为 $\Psi_i := \left(z^{\delta_{ij}}\right)_{j\in I}$。

现在，让我们遵循 [24], 与 $\mu = \nu = 0$ 以及余权 $\zeta = \omega_i^\vee \mathbf{p} = \Psi_i$的 ℓ-权的构造。对于 M， N 两个根分次 Y模， M与 N的完备张量积定义为：

$$M \otimes_z N := \sum_{\alpha,\beta\in Q} \left(\prod_{\gamma\in Q_+} \left(M_{(\alpha-\gamma)} \otimes N_{(\beta+\gamma)}\right)((z^{-1})) \right).$$

它包含 $Y\otimes Y[z]$-模 $M\otimes N[z]$。注意， $\Theta_i(z) \in Y\otimes_z Y$。

现在，考虑代数同态

$$\begin{array}{rccc} \pi_{i,z} & : & Y_{\omega_i^\vee} & \to & \mathbb{C}[z] \\ & & x_j^{\pm}(w) & \mapsto & 0 \\ & & \xi_j(w) & \mapsto & (w-z)^{\delta_{ij}} \end{array}.$$

变形模 $L_i(z)$ 是沿着该同态的正则表示 $\mathbb{C}[z]$ 的拉回。

我们引入两个从 $Y_{\omega_i^\vee}$到 $Y[z]$的代数同态 F_i 和 G_i：

$$F_i := (\pi_{i,z}\otimes \mathrm{Id})\,\Delta_{\omega_i^\vee,0}; \quad G_i := (\mathrm{Id}\otimes \pi_{i,z})\,\Delta_{0,\omega_i^\vee}$$

其中，它们在 Y的生成元上的作用由 [24,给出。例 3.4]:

$$F_i : x_j^+(w) \mapsto (w-z)^{\delta_{ij}} x_j^+(w); \quad x_j^-(w) \mapsto x_j^-(w); \quad \xi_j(w) \mapsto (w-z)^{\delta_{ij}}\xi_j(w)$$
$$G_i : x_j^+(w) \mapsto x_j^+(w); \quad x_j^-(w) \mapsto (w-z)^{\delta_{ij}} x_j^-(w); \quad \xi_j(w) \mapsto (w-z)^{\delta_{ij}}\xi_j(w).$$

最后，考虑两个根分次 Y-模 M， N。沿同态$(G_i\otimes \mathrm{Id})\Delta_{\omega_i^\vee,\,0}$取 $M\otimes N[z]$的拉回，得到一个 $Y_{\omega_i^\vee}$-模$(M\otimes (L_i)_z)\otimes N$；沿同一同态取$M\otimes_z N$的拉回，得到一个 $Y_{\omega_i^\vee}$-模，它是前一个模的完备化，记为$(M\otimes (L_i)_z)\otimes N$。类似地，利用同态$(\mathrm{Id}\otimes F_i)\Delta_{0,\,\omega_i^\vee}(x)$，可以构造完备化$M\otimes ((L_i)_z\otimes N)$。根据 [24, 定理5.6]，， $\Theta_i(z)$在 $M\otimes_z N$上的作用

定义了$(M \otimes (L_i)_z)$与$\otimes N \to M \otimes ((L_i)_z \otimes N)$之间的一个$Y_{\omega_i^\vee}$-模态射，其中元素$x \in Y_{\omega_i^\vee}$在两个模上的作用为：

$$(G_i \otimes \mathrm{Id})\,\Delta_{\omega_i^\vee,0}(x) \text{ and } (\mathrm{Id} \otimes F_i)\Delta_{0,\omega_i^\vee}(x)$$

分别地。

我们验证 $\Theta_i(z)$与生成元$x_{j,0}^+$ 对 $j \in I$的作用的交换性。若 $i \neq j$，则余乘积由下式给出

$$\Delta_{\omega_i^\vee,0}(x_{j,0}^+) = \Delta_{0,\omega_i^\vee}(x_{j,0}^+) = x_{j,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{j,0}^+.$$

然后，注意到 F_i 与 G_i 使生成元$x_j^+(z)$对 $j \neq i$保持不变，交换关系可写为

$$\left[x_{j,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{j,0}^+, \Theta_i(z)\right] = 0.$$

我们想计算$\Delta_{\omega_i^\vee,0}(x_{i,0}^+)$与$\Delta_{0,\omega_i^\vee}(x_{i,0}^+)$。由余积的定义可知，$\Delta_{0,\omega_i^\vee}(x_{i,0}^+) = 1 \otimes x_{i,0}^+ + x_{i,0}^+ \otimes 1$。对于第二个余积，我们使用标准的锯齿论证。移位余乘积定义的交换性质给出，其中 $\mu = \omega_i^\vee$；$\nu = \eta = 0$与 $\epsilon = -\omega_i^\vee$：

$$\left(\iota_{-\omega_1^\vee,0}^{\omega_1^\vee} \otimes \iota_{0,0}^0\right) \Delta_{\omega_1^\vee,0}(x_{i,0}^+) = \Delta\left(\iota_{-\omega_1^\vee,0}^{\omega_1^\vee}(x_{i,0}^+)\right).$$

但我们知道 $\iota_{-\omega_1^\vee,0}^{\omega_1^\vee}(x_{i,0}^+) = x_{i,1}^+$。由 [16], 我们有：

$$\Delta(x_{i,1}^+) = x_{i,1}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ + h_{i,0} \otimes x_{i,0}^+ - \sum_{j=i+2}^{n} E_{j,i+1} \otimes E_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} E_{ik} \otimes E_{k,i+1}.$$

此外，可以验证：

$$\left(\iota_{-\omega_1^\vee,0}^{\omega_1^\vee} \otimes \iota_{0,0}^0\right)\left(x_{i,0}^+ \otimes 1 \otimes x_{i,1}^+ + \xi_{i,-1} \otimes x_{i,0}^+ + \sum_{j=1}^{i-1} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+2}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k}\right) = \Delta(x_{i,1}^+).$$

于是，由移位态射的单射性：

$$\Delta_{\omega_i^\vee,0}(x_{i,0}^+) = x_{i,0}^+ \otimes 1 \otimes x_{i,1}^+ + \xi_{i,-1} \otimes x_{i,0}^+ + \sum_{j=1}^{i-1} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+2}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k}.$$

因此，生成元$x_{i,0}^+$ 在 [24,定理 5.6]的两个模上均作用为

$$x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+ - \sum_{k=i+1}^{n} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} + \sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1}$$

and

$$x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z(1 \otimes x_{i,0}^+).$$

由于 $\Theta_i(z)$是一个模同态，它必须与这些作用交换。于是：

$$\Theta_i(z)\left(x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+ - \sum_{k=i+1}^{n} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} + \sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1}\right)$$
$$= \left(x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z(1 \otimes x_{i,0}^+)\right)\Theta_i(z)$$

这可写成命题 3.2 中的第二个公式。

最后，为了证明带有 $\Theta_{i,0} = 1$ 的这个系统的解的唯一性，我们采用与 [13, 第4节2] 和 [24, 定理 5.7 的步骤 2] 类似的论证。注意，将前一个方程投影到 $Y_{\alpha_i-\beta} \otimes Y_\beta$ for $\beta \in Q_+$ 上，可得 $i \neq j$:

$$\left[x_{j,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{j,0}^+, \Theta_{i,\beta}(z)\right] = 0$$

另一方面:

$$\left[x_{i,0}^+ \otimes 1, \Theta_{i,\beta}(z)\right] = -\left[1 \otimes x_{i,1}^+ - z(1 \otimes x_{i,0}^+), \Theta_{i,\beta-\alpha_i}(z)\right] + \sum_{j=1}^{i-1} \Theta_{i,\beta-\gamma_j-\alpha_i}(z)\,(E_{i,j} \otimes E_{j,i+1})$$
$$- \sum_{k=i+2}^{n+1} \Theta_{i,\beta-\eta_k-\alpha_i}(z)\,(E_{k,i+1} \otimes E_{i,k}) + \Theta_{i,\beta-\alpha_i}(z)\left(h_{i,0} \otimes x_{i,0}^+\right)$$

其中 $\gamma_j = \alpha_j + \cdots + \alpha_{i-1}$ 和 $\eta_k = \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_k$。将权 β 的高度定义为 $h(\beta) = \langle \beta, \sum \omega_i^\vee \rangle \in \mathbb{N}$。于是，通过对 $h(\beta)$ 进行归纳法，$\Theta_i(z)$ 可由条件 $\Theta_{i,\,0}(z) = i \in I 1 \otimes 1$ 唯一确定。

References

[1] Vladimir V. Bazhanov、Anthony N. Hibberd 和 Sergey M. Khoroshkin。 W_3 共形场论、量子布辛涅斯克理论与边界仿射Toda理论的可积结构。 *Nucl. Phys., B*, 622(3):475–547，2002。[2] Jonathan Beck。辫群作用与量子仿射代数。 *Commun. Math. Phys.*，165(3):555–568，1994。[3] Alexander Braverman、Michael Finkelberg 和 Hiraku Nakajima。 $3d\ \mathcal{N} = 4$ 箭丛规范理论的库仑分支与仿射格拉斯曼流形中的切片。 *Adv. Theor. Math. Phys.*，23(1):75–166，2019。[4] Jonathan Brundan 和 Alexander Kleshchev。 *Representations of shifted Yangians and finite W-algebras*, *Mem. Am. Math. Soc.* 第918卷，普罗维登斯（罗得岛州）：美国数学会（AMS），2008。[5] Ilaria Damiani。非扭结仿射型量子代数的 R-矩阵。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 31 4 493 523，1998 ( ): – 。[6] V. G. Drinfel'd。Hopf代数与量子杨-巴克斯特方程。 *Sov. Math.*, *Dokl.*，32:256–258，1985年。[7] V. G. Drinfel'd。杨代数与量子化仿射代数的新实现。 *Sov. Math. Dokl.* 36 2 212 216, , , ( ): – 。[8] 1988 Michael Finkelberg、Joel Kamnitzer、Khoa Pham、Leonid Rybnikov 和 Alex Weekes。移位杨氏代数与量子开Toda格的余乘法。 *Adv. Math.*，327:349–389，2018。[9] Michael Finkelberg 和 Alexander Tsymbaliuk。乘法切片、相对论Toda与移位量子仿射代数。 *Representations and nilpotent orbits of Lie algebraic systems.*，330:133–304，2019。[10] Edward Frenkel 和 David Hernandez。Baxter关系与量子可积模型的谱。 *Duke Math. J.* 164 12 2407 2460, 2015 , ( ): – 。[11] Edward Frenkel 和 Nicolai Reshetikhin。量子仿射代数表示的 q-特征与 W-代数的变形。载于 *Recent developments in quantum affine algebras and related topics. Proceedings of the international conference on representations of affine and quantum affine algebras and their applications, North Carolina State University Raleigh NC USA May 21–24 1998* 163 205 , , , , , 第–页。普罗维登斯（罗得岛州）：美国数学会（AMS），1999。[12] I. B. Frenkel 和 N. Yu. Reshetikhin。量子仿射代数与全纯差分方程。 *Commun. Math. Phys.* 146 1 1 60, 1992 , ( ): – 。[13] Sachin Gautam、Valerio Toledano Laredo 和 Curtis Wendlandt。杨代数的亚纯 R-矩阵。载于 *Representation theory, mathematical physics, and integrable systems. In honor of Nicolai Reshetikhin*，第201–269页。Cham：Birkh¨auser，2021。[14] Sachin Gautam 和 Curtis Wendlandt。杨氏代数有限维表示的极点。 *Sel. Math. New Ser.* 29 1 68, 2023 13 , , ( ): 。编号/序号[15] A. Gerasimov、S. Kharchev、D. Lebedev 和 S. Oblezin。关于一类杨代数表示与单极子模空间。 *Commun. Math. Phys.*，260(3):511–525，2005。[16] Nicolas Guay、Hiraku Nakajima 和 Curtis Wendlandt。仿射 Kac-Moody 代数的杨代数余积。 *Adv. Math.*，338:865–911，2018。

[17] Nicolas Guay、Vidas Regelskis 和 Curtis Wendlandt。正交与辛杨氏代数三种表示之间的等价性。 *Lett. Math. Phys.*，109(2):327–379，2019。[18] David Hernandez 和 Michio Jimbo。渐近表示与 Drinfeld 有理分式。 *Compos. Math.*，148 5 1593 1623，2012 ( ): – 。[19] David Hernandez 和 Huafeng Zhang。移位杨氏代数与多项式 R-矩阵。 *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*，60 1 1( ): –69，2024年。[20] Il-Seung Jang、Jae-Hoon Kwon 和 Euiyong Park。 $A_n^{(1)}$型和 $D_n^{(1)}$型的幺幂量子坐标环与前基本表示。 *Int. Math. Res. Not.*，2023(2):1119–1172，2023。[21] Joel Kamnitzer、Ben Webster、Alex Weekes 和 Oded Yacobi。杨氏代数与仿射格拉斯曼流形中切片的量子化。 *Algebra Number Theory*，8(4):857–893，2014。[22] J´erˆome Milot。量子仿射代数的截断与余乘积以及$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$的杨代数之间的相容性。预印本，arXiv:2506.10544 [math.QA] (2025)，2025。[23] A. I. Molev。杨氏代数及其应用。载于 *Handbook of algebra. Volume 3*，第907–959页。阿姆斯特丹：Elsevier，2003。[24] Huafeng Zhang。量子环代数与杨代数的Theta级数。 *Commun. Math. Phys.*，405(10):68，2024年。编号/序号230。

Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, France
Email address: jerome.milot@univ-lille.fr