arXiv:2603.09569v1 [math.LO] 10 Mar 2026

无知与（不）把握

Ekaterina Kubyshkina*

Mattia Petrolo†

摘要

本文主张，无知本质上可以被理解为一种超内涵概念。面对两个在逻辑上或必然等价的命题时，主体可能不知道其中一个，却知道另一个。为了形式化地刻画这一直觉，我们采用一种主题敏感语义，以便对主体针对命题内容的态度进行建模。在这一框架下，我们重新审视了三个现有的逻辑系统；这些系统通常以标准克里普克语义为特征，用于刻画三种无知形式：是否无知、作为未知真理的无知，以及不信式无知。对于每种形式，我们都提出了一个可靠且完备的系统。为了凸显这一方法的优势，我们将其用于解决以无知术语重新表述的逻辑全知问题。由此得到的框架考察了主体把握命题内容的能力，在无知表征的标准关系式框架与关于内容在形成无知过程中所起作用的自然直觉之间架起了桥梁。

关键词： 超内涵性；主题敏感语义；是否无知；作为未知真理的无知；不信式无知

1 引言

超内涵语境最初由 Cresswell [1975] 引入，用以区分必然等价的内容。近几十年来，超内涵语境在逻辑和哲学研究中都受到了广泛关注。若干概念被认为在某种程度上具有超内涵性：信息、信念、知识、意义、解释（例如，参见 Fine[2017], Leitgeb [2019], Berto [2019], Berto & Hawke [2021]）。此外，Wansing [2017] 认为，希望、恐惧、假设和想象都具有超内涵特征。在此基础上，Berto & Nolan [2023]提出了这样的论点：“人们可能会得出一个普遍结论：

*米兰大学哲学系， ekaterina.kubyshkina@unimi.it

†里斯本大学LASIGE计算机科学与工程研究中心，mpetrolo@fc.ul.pt

thought 具有超内涵性。”本研究的一个主要目标，是通过在众多超内涵概念中引入一个新成员——无知——为支持这一论点提供新的证据。

从认识论的角度来看，无知通常被视为一种多层次概念。与知识和信念不同，后两者常被视为超内涵概念的典型例子，而无知通常被理解为一种表现出多种类型或形式的概念。例如，Peels [2020]区分出六种（命题性）无知：不信式无知、悬置无知、未决无知、未加考虑的无知、深层无知和完全无知。[1] 让我们将注意力集中于完全无知，尽管未加考虑的无知和深层无知也能达到同样的目的。Peels [2020]将完全无知描述为“p 是这样的：S 无法把握或思考 p”，其中 S 是认知主体，p 是真命题。由于这种无知形式，有人认为，无知从其最广泛的意义上说，不能被视为一种心理状态。这是因为完全无知至少缺少心理状态通常被认为具有的一项典型特征，即对命题持有某种态度这一特征（参见 Kubyshkina 与 Petrolo [2020]）。

此外，认识论学者对于无知的定义本身也未能达成共识。标准观点将无知仅仅定义为不知道（例如，见 Le Morvan [2012]），而新观点则将其定义为缺乏真信念（例如，见 Peels [2012]）。这些立场的一个关键区别在于，是否承认错误命题也是真正的无知实例：标准观点承认，新观点则不承认。因此，与标准观点不同，新观点认为无知必须是事实性的，也就是说，如果一个主体对 ϕ一无所知，那么 ϕ 就是真的。

最后，从逻辑角度看，目前无知尚缺乏一种具有公认语义属性和系统的标准形式化，与知识和信念的形式化相当。过去几十年间，已经出现了若干形式化无知不同方面的框架。下一节将详细介绍其中一些框架。目前只需指出，无知的多层次性质及围绕它的种种不同直觉，共同导致人们对这一难以捉摸的概念的根本基础存在深刻分歧。

如上所述，关于无知的认识论地位与逻辑地位的讨论，为将这一概念与超内涵现象文献中通常分析的其他心理状态区分开来的必然性提供了有力证据。鉴于无知的重大重要性与普遍存在——这在科学实例以及道德与社会语境中均显而易见——这构成了对该概念的超内涵性开展专门探究的主要动机之一。

计划如下。第2节介绍文献中常见的三种用于无知表征的形式框架。这些中的每一种

[1]我们不必假定这些无知形式是穷尽的。就此处的目的而言，承认无知并非单一且铁板一块的概念便已足够。

框架通过一种原始模态引入无知，从而能够对三种无知进行建模：是否无知、作为未知真理的无知，以及不信式无知。在第3节中，我们探讨将无知视为超内涵概念的理据，并给出用于刻画超内涵无知的语义。主要结果是针对每一种无知的可靠且完备的公理化。在第 4 节中，我们从无知的视角处理逻辑全知问题，并给出我们的系统在解决该问题上的一项应用。我们在第5节作结。

2 无知的形式化表征

近年来，无知的形式化表征不仅在逻辑领域（参见 Steinsvold [2008], Fan 等人 [2015]）和计算机科学领域（参见 van der Hoek与Lomuscio [2004]）受到广泛关注，也在形式认识论领域（参见 Kubyshkina 与 Petrolo [2021]）引起了关注。本节将概述三种通过原始模态来表征无知的逻辑。具体而言，我们将考察 $ignorance\ whether$、$ignorance\ as\ unknown\ truth$ 和 $disbelieving$，以及 的形式对应物。$ignorance$

本节采用标准的克里普克语义，不对标准表述作任何修改。$frame$ 是一个二元组（W，R），其中 W 是一个非空的可能世界集合，而 $R \subseteq W \times W$是一个可及关系。$model$是一个二元组（$\mathcal{F}$，v），其中 $\mathcal{F}$是框架，而 v: Prop $\to \mathcal{P}(W)$ 是一个赋值函数，它将 Prop 中的每个命题变元映射到一个可能世界集合。

我们首先考察 van der Hoek与Lomuscio[2004], 给出的定义，他们将无知视为“并不知晓”（即是否无知）。作者考虑对经典命题逻辑进行扩展，加入一个原始算子 I^w，并在克里普克模型上对其进行解释。其语义定义如下。

定义 1。 $Let\ \mathcal{M} = (W,\ R,\ v)\ then$

$1.\ \mathcal{M},\ w \models p\ iff\ w \in v(p); 2.\ \mathcal{M},\ w \models \neg\phi\ iff\ \mathcal{M},\ w \not\models \phi; 3.\ \mathcal{M},$
$w \models \phi \wedge \psi\ iff\ \mathcal{M},\ w \models \phi\ and\ \mathcal{M},\ w \models \psi; 4.\ \mathcal{M},$
$w \models I^w\phi\ iff\ there\ exist\ w',\ w'' \in W\ such\ that\ Rww',\ Rww'',$
$\mathcal{M}\quad and\ \mathcal{M}\quad ,$
$w' \models \phi,\ ,\ w'' \models \neg\phi.$

命题算子（$\vee$、 $\to$、 $\leftrightarrow$）按标准方式定义。形如“$I^w\phi$”的表达式应读作“主体不知道 ϕ 是否成立”。

Fan 等人 [2015] 表明，这种语义刻画了以下系统。[2] 我们将这个系统称为 IW，意为“是否无知”。

[2]严格来说，作者给出了非偶然算子 $\triangle$ 的结果。正如 [Fan, 2021, p. 1295], 所指出的：“正如知识是必然性的认知对应项，形式（iii） [作为未知真理的无知] 和（iv） [是否无知] 是偶然和偶然性的认知对应项。”在本小节中，我们讨论是否无知，并将

定义 2（系统IW）。

(CPL) All classical propositional tautologies and Modus Ponens

$(A1_{IW})$ $(\neg I^w(\phi \to \psi) \wedge \neg I^w(\neg\phi \to \psi)) \to \neg I^w\psi$ $(A2_{IW})$ $\neg I^w\phi \to (\neg I^w(\phi \to \psi) \vee \neg I^w(\neg\phi \to \chi)$ $(A3_{IW})$ $\neg I^w\phi \leftrightarrow \neg I^w\neg\phi$

(NEC_{IW}) *From* $\vdash \phi$ *infer* $\vdash \neg I^w\phi$

(RE_{IW}) *From* $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$ *infer* $\vdash \neg I^w\phi \leftrightarrow \neg I^w\psi$

注意，公式 $I^w\phi$ 可定义为 $\neg\Box\phi \wedge \neg\Box\neg\phi$，其中 $\Box$ 按标准方式定义。然而，正如 [Fan 等人所示， 2015], 在 K 框架上（即可及关系不受任何性质限制的框架），无法使用 I^w 定义$\Box$ 算子。

Steinsvold [2008]引入了第二种无知算子。在这种情况下，对 ϕ 的无知被视为 ϕ 为真、但主体并不知道它为真的情形。这种无知在语义上通过一个记作 I^u的原始模态来表示。在克里普克模型上，该算子的定义如下。

定义 3。 *Let* $\mathcal{M} =$（W， R， v）。

- $\mathcal{M}$,
  $w \models I^u\phi$ *iff* $\mathcal{M}$ $w \models \phi$ *and there exists* w' *such that* Rww' *and*， ，$\mathcal{M}, w' \models \phi$

将定义 1 的第 4 条替换为上述条款，即可得到相应的语义。正如 Fan [2015] 所示，该语义刻画了 IU 系统；IU 是“作为未知真理的无知”（Ignorance as Unknown truth）的缩写。

定义 4（IU 系统）。

(CPL) All classical propositional tautologies and Modus Ponens

(US) Uniform Substitution$(A1_{IU})$ $\neg I^u\top$ $(A2_{IU})$ $\neg p \to \neg I^u p$ $(A3_{IU})$ $(\neg I^u p \wedge \neg I^u q) \to \neg I^u(p \wedge q)$ (R_{IU}) *From* $\vdash \phi \to \psi$ *infer* $\vdash (\neg I^u\phi \wedge \phi) \to \neg I^u\psi$

与 I^w 类似，公式 $I^u\phi$ 可以定义为 $\phi \wedge \neg\Box\phi$，但 $\Box$ 无法在 K 框架上通过 $\Box$ 算子定义（见 Gilbert 与 Venturi [2016]）。

Kubyshkina 与 Petrolo [2021]提出了无知表征的第三种方案。我们将这种无知称为 *disbelieving ignorance*，并将与之相关的原始模态记作 I^d。[3] 主体是

我们将在下一小节讨论作为未知真理的无知。为统一记号，在介绍这些系统时，我们用算子 I^w 表示是否无知，用 I^u 表示作为未知真理的无知。[3]Kubyshkina 与 Petrolo [2021] 将 I^d 所表示的无知类型称为“事实型无知”。然而， I^d 并非唯一的事实性无知算子；例如， I^u 也是事实性的。因此，我们借用 Peels 2020] 的术语，将 I^d 视为一种特定类型的无知——不信式无知。

对 ϕ 不信无知，当且仅当 ϕ 为真，但主体相信 $\neg\phi$。例如，某主体相信她的兄弟在罗马，但他并不在罗马。因此，她不信无知于她的兄弟不在罗马这一事实。下面给出标准克里普克模型上 I^d 的定义。

定义 5 (算子 I^d)。 *Let* $\mathcal{M} = (W,\ R,\ v)$。

- $\mathcal{M}$,

  $w \models I^d\phi$ *iff* $\mathcal{M}$ $w \models \phi$ *and for all* w' *which are not* w *if* Rww'*, , , then* $\mathcal{M}, w' \models \neg\phi$

$I^d\phi$ 在世界 w中为真这一语义条款指出： ϕ在 w中为真，但在所有可从 w 到达的世界中均被视为假（这些世界不包括 w 本身）。这种刻画说明了“不信式无知”这一名称的由来：对于主体认为为真的一切命题， ϕ 都是假的。[4]

将定义 1 的第 4 条替换为上述条款，便得到相应的语义。正如 Gilbert 等人所示， [2022], 该语义刻画了 DI 系统，DI 是“不信式无知”（Disbelieving Ignorance）的缩写。

定义 6 (系统DI)。

(CPL) All classical propositional tautologies and Modus Ponens (US) Uniform Substitution$(A1_{DI})$ $I^dp \to p$*(*$A2_{DI}$*)* $(I^dp \wedge I^dq) \to I^d(p \vee q)$*(*$IR_{DI}$*) From* $\vdash \phi \to \psi$ *infer* $\vdash \phi \to (I^d\psi \to I^d\phi)$

正如 Gilbert 等人所表明的， [2022]、 I^d 与 $\Box$ 在 K 框架上（以及在任何自反框架上）不可相互定义。

显然，IW、IU、DI 系统均未将无知视为超内涵概念。在每种情况下，若 $\phi \leftrightarrow \psi$，则 $I\phi \leftrightarrow I\psi$，其中 I 代表 I^w、 I^u或 I^d。

3 无知的超内涵性

究竟是什么使我们一开始就有理由将无知视为一种超内涵概念？这个问题的答案取决于人们对无知本质所持的观点。在第 1 节中，我们将标-准观点刻画为把无知等同于不知道。如果接受这一观点，那么无知的超内涵性便源自知识的超内涵性。对于任意一个知识的超内涵情形——主体知道 ϕ ，却不知道 ψ，尽管 ϕ 和 ψ 在逻辑上等价——主体不知道 ψ ，却知道 ϕ。然而，若不接受标准观点，这一点就不那么明确了。这个论证取决于知识与无知的互补性，而这一点是可以质疑的。设想这样一种情形：某个主体不知道 $1+1=3$，因为她知道 $1+1 \neq 3$。如果假定标准观点，那么

[4]Steinsvold [2011] 引入了一个表示“犯错”的算子，记为 W，它也可以被解释为不相信无知算子。在 Gilbert 等人 [2022], 中已表明， W 与 I^d 产生同一组有效式。因此，本文所呈现的结果也可以扩展到包含 W 算子的系统。

就必须得出结论：该主体不知道 $1+1=3$。然而，有几位作者认为这并非无知的情形（例如，van Woudenberg [2009], Zimmerman [2018], Pritchard [2021], Peels [2023]）。原因可能在于假定无知具有事实性，也可能在于认为知道 ϕ 就意味着不对 $\neg\phi$ 无知。无论是哪种情况，这个例子都表明，尽管无知意味着非知识，但非知识并不总意味着无知。因此，如果否认知识与无知的互补性，就不能再保证无知的超内涵性源自非知识的超内涵性。

此外，从逻辑角度来看，第2节提出的三个系统并不只是将无知视为不知道，而是通过明确主体无知的原因，界定了更受限的无知形式。因此，算子 I^w、I^u 或 I^d 都与标准观点并不完全一致：I^w 和 I^u 被定义为不知道与其他条件的合取，而 I^d 则无法用知识来定义。这并不能证明 IW、IU、DI 系统与标准观点绝对不相容，但若假定标准观点必然是这三个系统的底层框架，则是不正确的。

最后，IW、IU 或 DI 系统都无法表示被理解为 $\Box$ 算子的认知对应项的知识。因此，由于在这些设定中知识无法表达，其超内涵性质便不能直接应用于无知。

为了论证无知是一种超内涵概念，且这一点独立于标准观点，让我们借用并改编 Stalnaker 的一个著名例子 [1984, 第 88] 页。[5] 英格兰的威廉三世并非不知道英格兰可以避免与法国开战，但他对核战争这一概念一无所知。因此，若声称他并非不知道英格兰能否通过使用核武器避免与法国开战，便显得奇怪。令 p 表示“英格兰可以避免与法国开战”，令 q 表示“英格兰可以避免与法国发生核战争”。因此，如果威廉三世不知道英格兰能否通过使用核武器避免与法国开战（$q\vee\neg q$），[6] 他也不知道 $p\wedge(q\vee\neg q)$。然而，这意味着他也应该不知道英格兰能否避免与法国开战，因为 p 在逻辑上等价于 $p\wedge(q\vee\neg q)$。因此，我们得到了这样一个例子：主体不知道一个命题，却知道另一个命题，尽管二者具有相同的内涵。总之，我们已经表明，无论是否接受标准观点，结论都成立：无知应被理解为一种超内涵概念。

以下各小节提出三个超内涵系统，用以表示是否无知、作为未知真理的无知以及不相信的无知。具体而言，我们通过增加一项关于把握或不把握该内容的补充条件，重新定义算子 I^w、I^u和I^d

[5]我们感谢一位匿名审稿人提醒我们注意Stalnaker的例子。[6]在此情形中，威廉三世对一个重言式一无所知。这并不意味着他在面对该公式时无法判定 $q\vee\neg q$ 是否成立，而是意味着他不具备启动通向这一结论的演绎探究的条件。根据Stalnaker的分析，威廉三世缺乏对核战争进行推理所必需的信息。

命题的。这使我们能够根据主体所把握的东西，区分主体对 ϕ 无知而对 ψ 并不无知的情形，即便 ϕ 与ψ 是等价的。

3.1 超内涵无知的逻辑：是否

让我们从考察 I^w 开始。正如前文所指出的，这种无知表现为：主体对于一个命题或其否定的真实性一无所知。本小节的首要目标是完善这一界定，将主体可能对之无知的命题主题的相关性纳入考量。具体而言，我们旨在阐明无知的附加条件：主体可能不知道是否，是因为她没有把握某个命题的主题。

我们对主题的理解与 Hawke等人 [2020], 相同；而 Hawke等人则遵循 Yablo 的观点，将主题视为“有意义的事物与它们所是的 *on* 或 *of* 或它们所 *address* 或 *concern*之物之间的关系”（Yablo [2014], , 第 1 页）。一个命题的主题就是该命题所谈论的内容。因此，要对这一观点进行建模，语义必须考虑两个组成部分：命题的内涵 ϕ （即可能世界的集合）及其主题。[7]

形式上，我们通过递归定义语言 $\mathcal{L}_{I^w}$ 如下：

$$\phi := p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid I^w\phi \mid \Box\phi$$

命题算子（$\vee$、 $\rightarrow$、 $\leftrightarrow$）按标准方式定义。形如“$I^w\phi$”的表达式应读作“主体不知道ϕ是否成立”。按照 Rossi 与 ¨Ozg¨un [2023], 所提供的框架，我们出于技术原因将 $\Box$ 算子纳入语言。概念上，它可以被理解为一种 *a priori* 模态，用以表示分析真理。值得注意的是，模态 I^w 和 $\Box$在该语言中都是原始的。

为了为语言 $\mathcal{L}_{I^w}$提供语义，我们使用 Rossi & Ozg¨un（2023）定义 [中的主题模型¨和主题敏感模型。

定义 7 （主题模型）。 *A topic is a tuple* $\mathcal{T} = (T, \oplus, t, \mathfrak{K})$ *where*

- T *is a non-empty set of possible topics;*
- $\oplus : T \times T \mapsto T$ *is an idempotent, commutative, associative topic-fusion operator;*
- $\mathfrak{K} \in T$ *is a designated topic representing the totality of topics grasped by the agent; and*
- $t :$ Prop T *is a topic function assigning a topic to each element in* Prop .

[7]不同作者对主题的处理方式各不相同。更多详情请参见 [Hawke等人， 2020]以及其中所引的参考文献。

定义 8（主题敏感模型）。 *A topic-sensitive model is a tuple* $\mathcal{M} = (W, R, v, \mathcal{T})$ *where* W *is a non-empty set of possible worlds,* $R \subseteq W \times W$ *is a binary accessibility relation between worlds,* $v : \mathrm{Prop} \mapsto \mathcal{P}(W)$ *is a standard valuation function that assigns to each propositional variable a set of possible worlds and* $\mathcal{T}$ *is a topic model as given in Def. 7.* ,

函数 t 扩展到语言 $\mathcal{L}_{I^w}$ 时，将 ϕ的主题定义为 $Var(\phi)$ 中各元素主题的融合： $t(\phi) = \oplus\{t(p) : p \in Var(\phi)\}$，其中 $Var(\phi)$ 表示在 ϕ中出现的命题变量集合。这意味着算子具有主题透明性： $t(\phi) = t(I^w\phi) = t\,\Box\phi = t\,\neg\phi \quad t\,\phi \wedge \psi = t\,\phi \oplus t\,\psi \sqsubseteq ()$ () and () () ()。主题部分关系定义如下：对于所有 $a, b \in T$, $a \sqsubseteq b$，当且仅当 $a \oplus b = b$。由此可知，$(T, \oplus)$ 是一个并半格，而 $(T, \sqsubseteq)$ 是一个偏序集。

定义 9（ $\mathcal{L}_{I^w}$的语义）。 *Let* $\mathcal{M} = (W, R, v, \mathcal{T})$ *then*

1. $\mathcal{M}, w \models p$ *iff* $w \in v(p)$;2. $\mathcal{M}, w \models \neg\phi$ *iff* $\mathcal{M}, w \not\models \phi$;3. $\mathcal{M}, w \models \phi \wedge \psi$ *iff* $\mathcal{M}, w \models \phi$ *and* $\mathcal{M}, w \models \psi$;4. $\mathcal{M}, w \models \Box\phi$ *iff for all* $w' \in W$, $\mathcal{M}, w' \models \phi$;5. $\mathcal{M}, w \models I^w\phi$ *iff* $t\,\phi \not\sqsubseteq \mathfrak{K}$ *or (there exist* $w', w'' \in W$ *such that* () Rww', Rww'', $\mathcal{M}, w' \models \phi$, *and* $\mathcal{M}, w'' \models \neg\phi$).

A formula ϕ *is valid in* $\mathcal{M}$, $(\mathcal{M} \models \phi)$ *if* $\mathcal{M}, w \models \phi$ *for all* $w \in W$. *We call a formula* ϕ *valid in a class of topic-sensitive models* $\mathfrak{C}$ *if* $\mathcal{M} \models \phi$ *for all* $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$.

如定义 9 的情形 4 所示， $\Box$ 是包含 $S5$ 属性的全局模态，而 I^w 的解释并不要求可及关系具备任何额外属性。

令 $Var(\phi)$ 表示 ϕ中出现的命题变量集合，

$\bar{\phi} = \bigwedge_{x \in Var\ \phi}\ x \vee \neg x$ [¨ 2021] [: ( )( )。与 Berto、 ¨Ozgun 以及 Rossi¨ & Ozg¨un 的做法类似， 2023], 我们需要这类表达式来简化该系统的公理化。给定一个模型 $\mathcal{M} = (W, R, v, \mathcal{T})$，要使 $\neg I^w\phi$ 在 w 处为真，就应有 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$；并且对于所有满足 Rww' 的世界 $w' \in W$， ϕ 要么在所有 w'中为真，要么 $\neg\phi$ 在所有 w'中为真。由于 $\bar{\phi}$ 处处为¯ ¯真，对于任意 $\phi \in \mathcal{L}_{I^w}$， $Var(\phi) = Var(\phi)$；而且，对于任意 $w \in W$ 和 $\mathcal{M}$， $\mathcal{M}, w \models \neg\phi$ 是¯ ¯不可能的，因此，形如 $\neg I^w\phi$ ($I^w\phi$) 的公式分别表达了诸如“主体（未）把握了主题 ϕ”这样的陈述。证明可概述如下：

$\mathcal{M}, w \models \neg I^w\phi$ 当且仅当 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$ 且 ($\mathcal{M}, w' \models \bar{\phi}$ 对于所有满足 w' Rww' 或 $\mathcal{M}, w' \models \neg\bar{\phi}$ 对于所有满足 w' Rww') 当且仅当 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$ 且 $\mathcal{M}, w' \models \bar{\phi}$ 对于所有满足 w' Rww'，当且仅当

$$t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}.$$

¯ ¯从把握的角度来理解 $\neg I^w\phi$ 和 $I^w\phi$ ，有助于理解 HIW 系统的公理；HIW 是“超意向性是否无知”的缩写。

定义 10（系统HIW）。

(CPL) All classical propositional tautologies and Modus Ponens

$(S5_{\Box})$ *All S5 axioms and rules for* $\Box$

$(I^w \leftrightarrow)$ $I^w\phi \leftrightarrow I^w\neg\phi$

$(A1_{I^w})$ $(\neg I^w\phi \wedge \neg I^w\bar{\psi} \wedge \neg I^w\bar{\chi}) \rightarrow (\neg I^w(\phi \rightarrow \psi) \vee \neg I^w(\neg\phi \rightarrow \chi))$

$(A2_{I^w})$ $\neg I^w\bar{\phi} \rightarrow \neg I^w(\phi \vee \neg\phi)$

$(A3_{I^w})$ $(\neg I^w\phi \wedge \neg I^w\psi) \rightarrow \neg I^w(\phi \wedge \psi)$

$(A4_{I^w})$ $\neg I^w\bar{\phi} \rightarrow \Box\neg I^w\bar{\phi}$

$(A5_{I^w})$ $I^w\bar{\phi} \rightarrow I^w\phi$

$(A6_{I^w})$ $(\neg I^w(\phi \rightarrow \neg\psi) \wedge \neg I^w\phi \wedge \neg I^w(\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow \neg I^w\psi$

$(A7_{I^w})$ $\neg I^w\bar{\phi} \rightarrow \neg I^w\bar{\psi}$, *if* $Var(\psi) \subseteq Var(\phi)$

(NEC_{I^w}) $From \vdash \phi$ $infer \vdash \neg I^w\bar{\phi} \rightarrow \neg I^w\phi$

(RE_{I^w}) $From \vdash \phi \leftrightarrow \psi$ $infer \vdash (\neg I^w\bar{\phi} \wedge \neg I^w\bar{\psi}) \rightarrow (\neg I^w\phi \leftrightarrow \neg I^w\psi)$

公理（$I^w \leftrightarrow$）是 I^w 的一条标准公理（参见 IW 系统的公理（A3$_{IW}$）），主张对 ϕ 是否无知等价于对 $\neg\phi$是否无知。公理（A1$_{I^w}$）是 IW 系统公理（A2$_{IW}$）的细化，主张：若主体并非对 ϕ是否无知，则在这些后果的主题已被把握的前提下，主体并非对 ϕ的任一后果、或对 $\neg\phi$是否无知。公理（A2$_{I^w}$）的意思是：若主体把握了 ϕ的主题，则主体并非对 ϕ 的排中律是否成立无知。公理（A3$_{I^w}$）的意思是：对 ϕ与 ψ的非无知蕴涵对其合取的非无知。公理（A4$_{I^w}$）的意思是：把握 ϕ的主题蕴涵主体在所有认知状态中都把握该主题。公理（A5$_{I^w}$）的意思是：若主体未把握某一命题的主题，则主体对该命题无知。公理（A6$_{I^w}$）的意思是：若主体并非对命题 ϕ无知，且并非对 ϕ 与某一命题 ψ之间的关系无知，则主体并非对ψ 是否成立无知。公理（A7$_{I^w}$）的意思是：若主体把握了 ψ的内容，则主体把握其所有子公式的内容。规则（NEC$_{I^w}$）与（RE$_{I^w}$）是针对在主题敏感语义学上解释的 $\neg I^w$之标准规则 NEC 与 RE 的细化。（NEC$_{I^w}$）主张：每当存在一条定理时，仅当主体把握该定理的主题，主体才并非对该定理是否为真无知。（RE$_{I^w}$）规则主张：每当存在两个等价命题时，仅当主体把握这些命题的主题，主体才相对于这两个命题处于相同的认知状态。正如第 4 节将表明的那样，这些细化明确凸显了超内涵无知的一个重要特征，而这一特征对于处理逻辑全知问题被证明是至关重要的。

定理 1. *The system*HIW *is sound.*

定理 2. *The system*HIW *is complete.*

证明见附录 A.1 和 A.2。

现在，让我们从超意向性是否无知的角度，重新考虑本节开头所给出的威廉三世的例子。我们需要构建一个模型，以区分以下两个命题：

（1^{HIW}）威廉三世对 p是否无知。

(2^{HIW}) 威廉三世不知道 $p \wedge (q \vee \neg q)$ 是否成立。

设 $\mathcal{M} = (W, R, v, \mathcal{T})$，其中 $W = \{w, w'\}$，$R = \{(w, w), (w, w')\}$,$v(p) = v(q) = \{w, w'\}$，且 $\mathcal{T} = (T, \oplus, t, \mathfrak{K})$，其中 $T = \{a, b\}$，$b \sqsubset a$，$t \quad = b \quad t \quad = a \qquad b = \mathfrak{K}$ (p)，(q)，以及 。在这个模型中，我们有 $\mathcal{M} \models p \leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q))$。我们有 $\mathcal{M}, w \models \neg I^w p$，因为对于所有满足如下条件的 w'：若 Rww'，则 $\mathcal{M}, w' \models p$ 和 $t(p) \sqsubseteq \mathfrak{K}$；并且 $\mathcal{M}, w \models I^w(p \wedge ($ $q \vee \neg q))$，因为 $\mathfrak{K} \sqsubset t(q) = a$，也就是说 $t(q) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}$。因此，尽管 p 与 $p \wedge (q \vee \neg q)$ 等价，威廉三世并不知道 p 是否成立，但他不知道 $p \wedge (q \vee \neg q)$ 是否成立，因为他没有把握主题 q。

3.2 将超内涵无知视为未知真理的逻辑

现在让我们考虑 I^u。与 I^w 的情形类似，我们的目标是为这个算子的定义补充主题性。下文将探讨一种可能的细化方案：我们认为，主体对某个命题感到无知，原因可能是该命题为真但主体并不知道，也可能是主体没有把握该命题的内容。

语言 $\mathcal{L}_{I^u}$ 按如下方式递归定义：

$$\phi := p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid I^u\phi \mid \Box\phi$$

其他命题算子按标准方式定义。形如‘$I^u\phi$’的表达式应读作‘主体不知道 ϕ。’

语义定义在主题敏感模型上。对于 I^u，我们只需将 I^w 的情形替换为以下定义。

定义 11（$\mathcal{L}_{I^u}$的语义）。 *Let* $\mathcal{M} = (W, R, v, \mathcal{T})$ *then*

- $\mathcal{M}, w \models I^u\phi$ *iff* $t(\phi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}$ *or* $(\mathcal{M}, w \models \phi$ *and there exist* $w' \in W$ *such that* Rww' *and* $\mathcal{M}, w' \models \neg\phi$.

$^{-}$ $^{-}$与 I^w 类似，形式为 $\neg I^u\phi$ $(I^u\phi)$ 的表达式应读作“主体已经（没有）把握 ϕ 这一主题”：

$$\begin{gathered}\mathcal{M}, w \models \neg I^u\bar{\phi} \text{ iff } t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K} \text{ and} \\ (\mathcal{M}, w \not\models \bar{\phi} \text{ or } \mathcal{M}, w' \models \bar{\phi} \text{ for all } w', \text{ s.t. } Rww') \text{ iff} \\ t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K} \text{ and } \mathcal{M}, w' \models \bar{\phi} \text{ for all } w', \text{ s.t. } Rww', \text{ iff} \\ t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}.\end{gathered}$$

现在我们定义 HIU 系统，该名称代表“作为未知真理的超内涵无知”。

定义 12 (系统HIU)。

(CPL) All classical propositional tautologies and Modus Ponens

(S5$_\Box$*) All S5 axioms and rules for* $\Box$$_{-}$

$(A1_{I^u})$ $(I^u\phi \wedge \neg I^u\phi) \rightarrow \phi_{-}$

$(A2_{I^u})$ $\neg I^u\phi \rightarrow \neg I^u(\phi \vee \neg\phi)(A3_{I^u})$ (

$\neg I^u\phi \wedge \neg I^u\psi) \rightarrow \neg I^u(\phi \wedge \psi)$

$(A4_{I^u})$ $\neg I^u\bar{\phi} \to \Box\neg I^u\bar{\phi}$

$(A5_{I^u})$ $I^u\bar{\phi} \to I^u\phi$

$(A6_{I^u})$ $(\phi \wedge \neg I^u\bar{\phi} \wedge \neg I^u\bar{\psi} \wedge I^u(\phi \vee \psi)) \to I^u\phi$

$(A7_{I^u})$ $(\neg I^u(\phi \vee \psi) \wedge \neg I^u(\phi \to \psi)) \to \neg I^u\psi$

$(A8_{I^u})$ $\neg I^u\bar{\phi} \to \neg I^u\bar{\psi}$, *if* $Var(\psi) \subseteq Var(\phi)$

(NEC_{I^u}) $From \vdash \phi$ $infer \vdash \neg I^u\bar{\phi} \to \neg I^u\phi$

(RE_{I^u}) $From \vdash \phi \leftrightarrow \psi$ $infer \vdash (\neg I^u\bar{\phi} \wedge \neg I^u\bar{\psi}) \to (\neg I^u\phi \leftrightarrow \neg I^u\psi)$

公理 (A1$_{I^u}$) 重新界定了无知与事实性的关系。与 IU 不同，HIU 中的算子 I^u 并非事实性的：无知 ϕ 并不意味着 ϕ为真。[8] 然而，(A1$_{I^u}$) 保留了一种事实性，因为它声称，若某人不知道 ϕ，但掌握了 ϕ这一主题，那么 ϕ 为真。公理 (A2$_{I^w}$) - (A5$_{I^u}$) 的解读分别与公理 (A2$_{I^w}$) - (A5$_{I^w}$) 的解读相似。公理 (A6$_{I^u}$) 表明，若 ϕ 为真，主体不知道对于某个 ψ 而言 $\phi \vee \psi$，但她掌握了 ϕ 和 ψ这两个主题，那么她就不知道 ϕ。公理 (A7$_{I^u}$) 表明，若某主体并非不知道 $\phi \vee \psi$，也并非不知道 $\phi \to \psi$，那么她就并非不知道 ψ。公理 (A8$_{I^u}$) 的解读与公理 (A7$_{I^w}$) 的解读相似。规则 (NEC$_{I^u}$) 和 (RE$_{I^u}$) 分别与 (NEC$_{I^w}$) 和 (RE$_{I^w}$) 相似，并且它们有助于在下一节处理逻辑全知问题。

定理 3. *The system* HIU *is sound.*

定理 4. *The system* HIU *is complete.*

证明见附录 B.1 和 B.2。

不难看出，本节开篇所举的威廉三世例子，可以像在 HIW 中那样，通过构造一个模型来处理：在该模型中，两个逻辑等价命题 p $p \wedge q \vee \neg q$ 和 ( )，根据主体的无知状态而彼此可区分。

3.3 超内涵性不相信无知的逻辑

现在，让我们转而关注 I^d。与 I^w 和 I^u不同，这个算子无法还原为标准的 $\Box$。因此，它代表一种独特的形式体系，在纳入超内涵性时也带来了不同的挑战。

语言 $\mathcal{L}_{I^d,\ G}$ 定义如下：

$$\phi := p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid I^d\phi \mid G\phi \mid \Box\phi$$

命题算子按标准方式定义。形如“$I^d\phi$”的表达式应理解为“主体不信无知于 ϕ”。形如“$G\phi$”的表达式应理解为“主体把握主题 ϕ”。不同于 HIW 和 HIU，算子 G被引入为一种

[8]可以重新定义 I^u，使其仍然是事实性的。不过，这项任务留待未来研究。

原始算子。之所以作此选择，是因为I^d 算子的语义条件并不容易直接用于定义把握。

语义定义在主题敏感模型上。我们将 I^w （或 I^u）的情形替换为 I^d，并加入算子 G，如下所示。

定义 13 （$\mathcal{L}_{I^d,\ G}$ 的语义）。 *Let* $\mathcal{M} = (W,\ R,\ v,\ \mathcal{T})$ *then*

- $\mathcal{M}, w \models I^d\phi$ *iff* $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$ *and* $\mathcal{M}$, $w \models \phi$ *and for all* w' *which arenot* w, *if* Rww', *then* $\mathcal{M}, w' \models \neg\phi$;
- $\mathcal{M}, w \models G\phi$ *iff* $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$.

请注意， I^d 的定义不同于 I^w 和I^u的定义。对于 I^w 和 I^u，主体没有把握命题主题这一点，构成判定该主体不知道该命题的充分条件。然而，对于不信式无知，这种考量似乎并不自然。具体而言，我们认为，要对 ϕ处于不信无知状态，主体应当把握 ϕ的主题。例如，主体只有在（错误地）确信“罗马是意大利的首都”并非事实时，才会对这一事实处于不信无知状态。这种确信预设了主体把握了该命题的主题。否则，如果主体没有把握“罗马是意大利的首都”这一命题的主题，她体验到的将是另一种无知，即完全无知。

现在我们定义 HDI 系统，它代表“超内涵不相信无知”。

定义 14 （系统HDI）。

(CPL) All classical propositional tautologies and Modus Ponens
(S5$_\Box$*) All S5 axioms and rules for* $\Box$*(G1)* $G\phi \leftrightarrow G\neg\phi$
(G2) $G\phi \leftrightarrow GI^d\phi$*(G3)* $G\phi \leftrightarrow G\Box\phi$*(G4)* $(G\phi \wedge G\psi) \leftrightarrow G(\phi \wedge \psi)$
(G5) $G\phi \rightarrow \Box G\phi$*(HIR) From* $\vdash \phi \rightarrow \psi$, *infer* $\vdash \phi \rightarrow (I^d\psi \rightarrow ($
$G\phi \rightarrow I^d\phi))$*(A1*$_{I^d}$*)* $I^d\phi \rightarrow \phi$*(A2*$_{I^d}$*)* $(I^d\phi \wedge I^d\psi) \rightarrow I^d(\phi \vee \psi)$
(A3$_{I^d}$*)* $I^d\phi \rightarrow G\phi$

公理（G1）-（G4）将把握算子定义为主题透明。公理（G5）的解读与公理（A4$_{I^w}$）或（A4$_{I^u}$）相同。规则（HIR）的意思是：每当 ψ 是 ϕ的逻辑后承时， ϕ为真、对 ψ 不信式无知且把握 ϕ，就意味着对 ϕ不信式无知。公理（A1$_{I^d}$）表达了不信式无知的事实性。公理（A2$_{I^d}$）指出，如果某人对 ϕ 和 ψ都不信无知，那么她就对它们的析取不信无知。

定理5. *The system* HDI *is sound.*

定理6. *The system* HDI *is complete.*

证明见附录C.1和C.2。

鉴于 HDI 系统所刻画的无知类型，直接讨论本节开头所举的威廉三世例子似乎并不恰当。具体来说，在最初的例子中，威廉三世并非对 p 和 $p \wedge (q \vee \neg q)$ 都不信无知。不过，我们可以举出其他例子，说明 HDI 中可以区分等价命题。设想这样一种情形：威廉三世不相信与英格兰开战可以避免（p），但他并非对 $p \wedge (q \vee \neg q)$ 不信无知，因为他不理解核战争这一概念。在此背景下，请考虑以下命题。

(1^{HDI}) 威廉三世不相信 p。

(2^{HDI}) 威廉三世不相信 $p \wedge (q \vee \neg q)$。

在这种情形下，似乎（1^{HDI}）为真，但（2^{HDI}）并非如此。在 HDI 中，可以如下建模。设 $\mathcal{M} = (W, R, v, \mathcal{T})$，其中 $W = \{w, w'\}$, $R = \{(w, w')\}$, $v(p) = v(q) = \{w\}$，且 $\mathcal{T} = (T, \oplus, t, \mathfrak{K})$，其中 $T = \{a, b\}$, $b \sqsubset a$, $t(q) = a$，且 $t(p) = b = \mathfrak{K}$。在这个模型中，显然 $\mathcal{M} \models p \leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q))$。我们还有 $\mathcal{M}, w \models I^d p$，因为对于所有不满足 w if Rww' then $\mathcal{M}$ 的 w'，$\mathcal{M}, w' \models p$，$w' \models \neg p$，且 $t(p) \sqsubseteq \mathfrak{K}$；并且 $\mathcal{M}, w \models \neg I^d p \wedge (q \vee \neg q)$，因为 $t(q) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}$。因此，尽管 p 和 $p \wedge (q \vee \neg q)$ 等价，当威廉三世不相信 p 时，他并不因此不相信 $p \wedge (q \vee \neg q)$，因为他没有把握主题 q。

4 无知与逻辑全知

各种研究探讨了超内涵性与逻辑全知这一复杂问题之间的联系（例如参见 Fagin 等人 [1995]）。具体而言，超内涵性已经成为解决这一困扰认知逻辑的知名问题的一种自然方案。逻辑全知最初由辛提卡 [1962] 在其颇具影响力的著作中指出，通常出现在对逻辑蕴涵封闭的认知逻辑系统中：

(LI) 如果 $\phi \to \psi$ 且 $K\phi$，那么 $K\psi$。

简言之，通过标准克里普克语义建模的智能体被假定为完美的推理者。然而，在试图对现实世界中的主体（如人类或计算机）的知识进行建模时，这一假设便难以成立，因为他们的推理能力存在固有的实际局限。关于逻辑全知的近期研究指出，它是认知逻辑中一种更广泛、也更普遍的现象。这源于这样一种观察：系统中的算子 K 满足多种原则的封闭性，包括逻辑等价、合取或析取，而不只是逻辑蕴涵（参见 Fagin 等人 [1995]）。逻辑全知的一般表述（LO）如下：

(LO_K) 如果一个主体知道 ϕ，那么她就知道 ϕ 的所有后果。

这一表述强调了主体的理想化本质：主体拥有关于其知识所有后果的知识，尤其是知道所有重言式。因此，这一情形给所选用的形式体系带来了普遍挑战。一方面，考虑到人类的能力或注意力有限，以及计算机的时间和空间资源受限，由该系统建模的主体不应在逻辑上推导出超出我们对现实世界中的主体合理预期的内容。另一方面，该主体应保留在特定情境下推导出我们能够合理预期其推导出的所有内容的能力。因此，解决逻辑全知问题，关键在于为理想化程度与系统所建模主体的逻辑能力找到适当的平衡。尽管逻辑全知通常以认知（或信念）术语来表述，但它也引出了一个更广泛的探究：当我们聚焦于无知的表征时，这一挑战会如何显现？从这一视角出发，将（LO_K）改用无知术语表述，一种自然的改写如下：

(LO_I) 如果一个主体并非不知道 ϕ，那么她也并非不知道 ϕ 的所有推论。

为正式分析 **(LO_I)**，我们将考察它的三种形式：蕴涵下封闭 **($LO_I^{\rightarrow}$)**、全知规则 **(LO_I^{NEC})** 和等价下封闭 **(LO_I^{RE})**。[9]

$(LO_I^{\rightarrow})$ if $\models \phi \rightarrow \psi$, then $\models \neg I\phi \rightarrow \neg I\psi$;

(LO_I^{NEC}) if $\models \phi$, then $\models \neg I\phi$;

(LO_I^{RE}) if $\models \phi \leftrightarrow \psi$, then $\models \neg I\phi \leftrightarrow \neg I\psi$.

首先，让我们考察在标准克里普克框架上解释的系统 IW、IU 和 DI 中的这些原则。

命题1. $(LO_I^{\rightarrow})$ *is not valid in* `IW`, `IU`, *and* `DI`.

Proof. 我们通过构造一个反模型来证明该命题。

设 $\mathcal{M} \models \phi \rightarrow \psi$ 对任意 $\mathcal{M}$ 均成立（即 $\phi \rightarrow \psi$ 有效）。我们需要构造一个模型 $\mathcal{M}'$，使得 $\mathcal{M}', w \not\models I\phi \rightarrow I\psi$，其中 I 表示 I^w、I^u 或 I^d。

令 $\mathcal{M}' = (W, R, v)$，其中 $W = \{w, w'\}$，$R = \{(w, w'), (w, w)\}$，$v(p) = \{\}$，且 $v(q) = \{w\}$。

显然，对于和 $\mathcal{M}$，我们有：$\mathcal{M} \models (p \wedge \neg p) \rightarrow q$。

容易验证，$\mathcal{M}', w \models \neg I^w(p \wedge \neg p)$ 和 $\mathcal{M}, w \not\models \neg I^w q$，即 $\mathcal{M} \not\models \neg I^w(p \wedge \neg p) \rightarrow \neg I^w q$。同样，容易验证 $\mathcal{M} \not\models \neg I^u(p \wedge \neg p) \rightarrow \neg I^u q$ 和 $\mathcal{M} \not\models \neg I^d(p \wedge \neg p) \rightarrow \neg I^d q$。

□

命题2. (LO_I^{NEC}) *is valid in* `IW`, `IU`.

[9]为保持一般性，我们用 I 表述这些原则，它可以用 I^w, I^u 和 I^d 实例化。

Proof. 对于IW的情形，设(i) $\mathcal{M} \models \phi$ 对任意的 $\mathcal{M}$（即 ϕ 是有效的），并且对某个 w (ii) $\mathcal{M}, w \not\models \neg I^w \phi$。由(ii)，我们有存在 w' 使得 Rww' 且 $\mathcal{M}, w' \models \neg\phi$，这与(i)矛盾。IU的情形类似。

□

命题3. (LO_I^{NEC}) *is not valid in DI.*

Proof. 我们通过构造一个反模型来证明这个命题。

令 $\mathcal{M} \models \phi$ 对任意 $\mathcal{M}$（即 ϕ 有效）。我们需要构造一个模型 $\mathcal{M}'$，使得 $\mathcal{M}', w \not\models \neg I^d \phi$。

令 $\mathcal{M}' =$（W，R，v），其中 $W = \{w\}$、$R = \{\}$、v（p）$= \{w\}$。

显然，对任意 $\mathcal{M}$ $\mathcal{M} \models p \vee \neg p$ $\mathcal{M}' \not\models$，都有，然而（$p \vee \neg p$）$^{\neg I^d}$。

□

命题4. (LO_I^{RE}) *is valid in IW, IU, and DI.*

Proof. 我们只考虑 IW 的情况，另外两种情况类似。

设 (i) $\mathcal{M} \models \phi \leftrightarrow \psi$ $\mathcal{M}$ $\phi \to \psi$ $\mathcal{M}$ $w \models$ 对所有 $\neg I^w \phi$ w w' 情况成立（即有效），且 (ii) ,对某些情况成立。情况 (ii) 等价于：要么对所有情况，若 Rww' 则 $\mathcal{M}, w' \models \phi$；要么对所有 w'，若 Rww' 则 $\mathcal{M}, w' \models \neg\phi$。根据 (ii)，这等价于：要么对所有 w'，若 Rww' 则 $\mathcal{M}, w' \models \psi$；要么对所有 w'，若 Rww' 则 $\mathcal{M}, w' \models \neg\psi$，也就是说 $\mathcal{M}, w \models \neg I^w \psi$。因此，$w$作为任意模型中的任意世界，我们有 $\mathcal{M} \models \neg I^w \phi \leftrightarrow \neg I^w \psi$ 对所有 $\mathcal{M}$成立。

□

有趣的是，$(LO_I^{\rightarrow})$ 在 IW、IU 和 DI 中不成立，而 (LO_I^{NEC}) 在 DI 中不成立。这意味着，一旦用无知来表述，标准克里普克语义已经提供了若干条件，可以避免某些形式的逻辑全知。然而，这并非取决于无知的超内涵特征，而是取决于每个算子的具体定义。现在我们将证明，超内涵框架能够使我们避免逻辑全知的所有三种形式。

命题5。$(LO_I^{\rightarrow})$，(LO_I^{NEC}) *and* (LO_I^{RE}) *are not valid in HIW, HIU , and HDI.*

Proof. $(LO_I^{\rightarrow})$ 的情形可由 IW、IU 和 DI 的相应结果直接得出。

HDI 中 (LO_I^{NEC}) 的情形可由 DI 的结果直接得出。HIW 和 HIU 的情形如下。

设 $\mathcal{M} \models \phi$ 对所有 $\mathcal{M}$ 成立（即 ϕ 有效）。我们需要构造一个 $\mathcal{M}'$，使得 $\mathcal{M}'$，$w \not\models \neg I\phi$，其中 I 表示 I^w 或 I^u。

设 $\mathcal{M}' = (W, R, v, \mathcal{T})$，其中 $W = \{w\}$，$R = \{\}$，$v(p) = \{w\}$；再设 $\mathcal{T} = (T, \oplus, t, \mathfrak{K})$，其中 $T = \{a, b\}$，$b \sqsubset a$，$t(\phi) = a$，且 $b = \mathfrak{K}$。显然，对于任意 $\mathcal{M}$，都有 $\mathcal{M} \models p \vee \neg p$。然而，$\mathcal{M}', w \models I^w(p \vee \neg p)$ 和 $\mathcal{M}' \models I^u(p \vee \neg p)$，因为 $\mathfrak{K} \sqsubset t(p) = a$，也就是说 $t(p) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}$。因此，$\mathcal{M}' \not\models \neg I^w(p \vee \neg p)$ 且 $\mathcal{M}' \not\models \neg I^u(p \vee \neg p)$。

(LO_I^{RE}) 的情形如下。

设对所有 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M} \models \phi \leftrightarrow \psi$（即 $\phi \rightarrow \psi$ 有效）。我们构造一个 $\mathcal{M}'$，使得 $\mathcal{M}'$，$w \not\models \neg\phi \leftrightarrow \neg I\psi$，其中 I 表示 I^w、I^u 或 I^d。

设 $\mathcal{M}' = (W, R, v, \mathcal{T})$，其中 $W = \{w\}$、$R = \{\}$、$v(p) = v(q) = \{w\}$，以及 $\mathcal{T} = (T, \oplus, t, \aleph)$，其中 $T = \{a, b\}$、$b \sqsubset a$、$t(\psi) = a$，且 $t(\phi) = b = \aleph$。显然，对任意 $\mathcal{M}$，都有 $\mathcal{M} \models (p \vee \neg p) \leftrightarrow (q \vee \neg q)$。然而，我们有 $\mathcal{M}'$、$w \models \neg I^w(p \vee \neg p)$，因为 $\mathcal{M}' \models p \vee \neg p$ 且 $t(p) \sqsubseteq \aleph$，以及 $\mathcal{M}'\ w \models I^w\ q \vee \neg q$ $t\ q \not\sqsubseteq \aleph$ $\mathcal{M}' \not\models \neg I^w\ p \vee \neg p$ $\leftrightarrow$，（）$\neg I^w$，因为（）。因此，（）（$q \vee \neg q$）。I^u.....的情形相同。在.....的情形下，I^d，我们可以容易地验证 $\mathcal{M}'\ w \models I^d\ p \vee \neg p$ $\mathcal{M}'\ w \models \neg I^d\ q \vee \neg q$ $\mathcal{M}' \not\models$，（）以及，（）$\neg I^d$。因此，（$p \vee \neg p$）$\leftrightarrow \neg I^d$（$q \vee \neg q$）。

□

本节所考察的、导致逻辑全知的原则之所以无效，取决于主题敏感模型的内部结构。尽管这里展示的结果或许并不令人意外，但它们表明，用于表示超内涵无知的三种形式框架表现良好，也符合人们对无知作为一种超内涵概念的自然预期。

5 结论

在本文中，我们通过在标准克里普克语义的真值条件中补充对主题性的说明，将无知视为一种超内涵概念。由于无知有多种类型，我们的出发点是这样的直觉：在特定语境中，人们愿意分析的具体无知形式，可能会受到所讨论主题的影响。因此，我们采用主题敏感语义学来表示各种形式的无知。这种语义学天然具有超内涵性，能够区分在逻辑上或必然等价的命题。因此，我们得以提出三个可靠且完备的系统，分别刻画主体可能处于无知状态的不同含义。最后，我们以无知的术语重新阐述了著名的逻辑全知问题，并表明在这些设定中可以避免某些形式的全知。

这一研究方向的自然发展包括探索其他形式的无知，其中主题性在形式化中发挥着关键作用。例如，可以定义 *complete ignorance whether*。正如引言中所强调的，当主体未能把握命题内容时，就会产生完全无知。从这一角度来看，我们可以将把握缺失这一必要条件纳入是否无知的定义，从而刻画这种无知。这种形式化将产生一个不同于 HIW 的系统。同样，也可以提出涉及把握的 I^u 和 I^d 的其他定义，而我们将这一探索留待未来的研究。

A 系统 HIW 的证明

A.1 HIW 的可靠性

定理 1。HIW 系统是可靠的。

Proof. (经典命题逻辑)和(S5$_\Box$)的情形都是标准的。

(I^w ↔)的情形如下。给定 $\mathcal{M}=(W,R,v,\mathcal{T})$，$\mathcal{M},w\models I^w\phi$ 对任意 $w\in\mathcal{M}$，当且仅当 $t(\phi)$ 或者（存在 $w',w''\in W$ 使得 Rww', Rww'', $\mathcal{M},w'\models\phi$，且 $\mathcal{M},w''\models\neg\phi$）当且仅当 $\mathcal{M},w\models I^w\neg\phi$。

对于(A1$_{I^w}$)的情形，设 $\mathcal{M},w\models\neg I^w\phi\wedge\neg I^w\psi\wedge\neg I^w\bar{\chi}$，其中 $w\in\mathcal{M}$ $t\ \phi\ \sqsubseteq\mathfrak{K}$ $t\ \psi\ \sqsubseteq\mathfrak{K}$ $t\ \chi\ \sqsubseteq$ 任意。这意味着(i) ( )，(ii) ( )，(iii) ( )，并且满足以下条件之一：(iv) ,对所有满足条件的 s，或者(v) ,对所有满足 Rww' 的 w' s。如果是(iv)，则显然，对于所有满足 Rww' 的 w' s，有(vi) $\mathcal{M},w'\models\neg\phi\to\chi$。由(i)、(iii)和(vi)，可得(vii) $\mathcal{M},w\models\neg I^w(\neg\phi\to\chi)$。如果是(v)，则显然，对于所有满足 Rww' 的 w' s，有(viii) $\mathcal{M},w'\models\phi\to\psi$。由(i)、(ii)和(viii)，可得(ix) $\mathcal{M},w\models\neg I^w(\phi\to\psi)$。于是，$\mathcal{M},w\models\neg I^w(\phi\to\psi)\vee\neg I^w(\neg\phi\to\chi)$。

对于(A2$_{I^w}$)的情形，令 $\mathcal{M},w\models\neg I^w\phi\wedge\neg I^w\psi$，其中 $w\in\mathcal{M}$ 任意。这意味着 $t(\phi)\sqsubseteq\mathfrak{K}$，$t(\psi)\sqsubseteq\mathfrak{K}$，对于任意 $w'\in\mathcal{M}$，$\mathcal{M},w'\models\phi\vee\neg\phi$，因此 $\mathcal{M},w\models\neg I^w(\phi\vee\neg\phi)$。

对于 (A3$_{I^w}$) 的情形，令 $\mathcal{M},w\models\neg I^w\phi\wedge\neg I^w\psi$，其中 $w\in\mathcal{M}$ 任意。这意味着：(i) $t(\phi)\sqsubseteq\mathfrak{K}$；(ii) $t(\psi)\sqsubseteq\mathfrak{K}$；并且以下两种情况之一成立：(iii) 对所有满足 Rww' 的 w'，$\mathcal{M},w'\models\phi$ 且 $\mathcal{M},w'\models\psi$；或者 (iv) 对所有满足 Rww' 的 w'，$\mathcal{M},w'\not\models\phi$；或者对所有满足 Rww' 的 w'，$\mathcal{M},w'\not\models\psi$。由 (i) 和 (ii) 可得 (v) $t(\phi\wedge\psi)\sqsubseteq\mathfrak{K}$。设 (iii) 成立。那么由 (iii) 和 (v) 可得 $\mathcal{M},w\models\neg I^w(\phi\wedge\psi)$。设 (iv) 成立。那么对于所有满足条件的 w'，Rww'，我们有 $\mathcal{M},w'\not\models\phi\wedge\psi$；因此，结合 (v)，$\mathcal{M},w\models\neg I^w(\phi\wedge\psi)$。

对于 (A4$_{I^w}$) 的情况，令 (i) $\mathcal{M},w\models\neg I^w\bar{\phi}$，其中 $w\in\mathcal{M}$ 任意。假设 (ii) $\mathcal{M},w\not\models\Box\neg I^w\bar{\phi}$。由 (i) 可得 (iii) $t(\phi)\sqsubseteq\mathfrak{K}$。由 (ii) 可得 (iv) 存在 $w'\in\mathcal{M}$，使得 $\mathcal{M},w'\models I\bar{\phi}$。由 (iii)、(iv) 以及 I^w 的定义可得，存在 w'，使得 $\mathcal{M},w'\models\neg\bar{\phi}$；根据 $\bar{\phi}$ 的构造，这与之矛盾。

对于(A5)任意的情况，令这意味着 $t(\phi)\not\sqsubseteq\mathfrak{K}$，由此可得 $\mathcal{M},w\models I^w\phi$。

对于 (A6$_{I^w}$) $\mathcal{M}\ w\models\neg I^w\ \phi\to\neg\psi\ \wedge\neg I^w\phi\wedge\neg I^w\ \psi\to\phi$ 的情形，任取 $w\in\mathcal{M}$ $\mathcal{M}\ w\models\neg I^w\ \phi\to\neg\psi$，令 (i) , ( ) ( )。由，我们有 $\mathcal{M},w\models\neg I^w\phi$ 和 $\mathcal{M},w\models\neg I^w\psi$，即 (ii) $t(\phi)\sqsubseteq\mathfrak{K}$，以及 (iii) $t(\psi)\sqsubseteq\mathfrak{K}$。由 (i)、(ii)、(iii)，可得 (iv) 对所有满足 Rww' 的 w'，要么 $\mathcal{M},w'\models\phi\to\neg\psi$，要么对所有满足 Rww' 的 w'，$\mathcal{M},w'\not\models\phi\to\neg\psi$；并且 (v) 对所有满足 Rww' 的 w'，要么 $\mathcal{M},w'\models\phi$，要么对所有满足 Rww' 的 w'，$\mathcal{M},w'\not\models\phi$；以及 (vi) 对所有满足 Rww' 的 w'，要么 $\mathcal{M},w'\models\psi\to\phi$，要么对所有满足 Rww' 的 w'，$\mathcal{M},w'\not\models\psi\to\phi$。假设 (vii) $\mathcal{M},w\models I^w\psi$。由 (vii) 和 (iii)，这意味着存在 w'' 和 w'''，使得 Rww''，Rww'''、(viii) $\mathcal{M},w''\models\psi$，以及 (ix) $\mathcal{M},w'''\models\neg\psi$。由 (ix)、(v) 和 (vi)，对于所有满足 Rww' 的 w'，都有 (x) $\mathcal{M},w'\models\phi$。由 (viii)、(v) 和 (iv)，对于所有满足 Rww' 的 w'，都有 $\mathcal{M},w'\models\neg\phi$，这与 (x) 矛盾。因此，$\mathcal{M},w\models\neg I^w\psi$。

¯对于 (A7$_{I^w}$) 的情形，任取 $w \in \mathcal{M}$，令 $\mathcal{M}, w \models \neg I^w \phi$，这意味着 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。根据 $\bar{\phi}$ 和 t 的定义，这意味着对于任意满足 $Var(\psi) \subseteq Var(\phi)$ 的 ψ，都有 $t(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$，即若 $Var(\psi) \subseteq Var(\phi)$，则 $\mathcal{M}, w \models \neg I^w \bar{\psi}$。

对于 (NEC$_{I^w}$) 的情况，假设 (i) 对任意 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M} \models \phi$（即 ϕ 有效），并令 (ii) 对任意 $w \in \mathcal{M}$，$\mathcal{M}, w \models \neg I^w \bar{\phi}$。由 (ii) 可得 (iii) $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。由 (i) 可得 $\mathcal{M}, w \models \phi$，并且对于所有 w'，若 Rww'，则 $\mathcal{M}, w' \models \phi$。这意味着，考虑到 (ii)，$\mathcal{M}, w \models \neg I^w \phi$。

对于 (RE$_{I^w}$) 的情况，假设 (i) 对任意 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M} \models \phi \leftrightarrow \psi$，并令 (ii) 对任意 $w \in \mathcal{M}$，$\mathcal{M}, w \models \neg I^w \bar{\phi} \wedge \neg I^w \bar{\psi}$。由 (ii) 可得 (iii) $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$ 和 (iv) $t(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。令 (v) $\mathcal{M}, w \models \neg I^w \phi$。由 (v) 和 (iii) 可得，对于所有满足 Rww' 的 w'，要么 (vi) $\mathcal{M}, w' \models \phi$，要么 (vii) $\mathcal{M}, w' \models \neg\phi$。若为 (vi)，则由 (i) 可得，对于所有满足 Rww' 的 w'，都有 $\mathcal{M}, w' \models \psi$；也就是说（考虑到 (iv)），$\mathcal{M}, w \models \neg I^w \psi$。(vii) 的推理以及反向方向的推理相同。因此，$\mathcal{M}, w \models \neg I^w \phi \leftrightarrow \neg I^w \psi$。

□

A.2 HIW的完备性

为了进行完全性证明，我们还需要以下命题，它是 (A6$_{I^w}$) 的推广，也是 [Fan 等人， 2015] 中命题 4.4 的类比。不过请注意，它的证明与命题 4.4 的证明不同。

命题 6。 *For all* $k \geq 1$：

$$\vdash (\neg I^w(\textstyle\bigwedge_{j=1}^k \phi_j \to \neg\psi) \wedge \bigwedge_{j=1}^k \neg I^w \phi_j \wedge \bigwedge_{j=1}^k \neg I^w(\psi \to \phi_j)) \to \neg I^w \psi$$

Proof.

1. $(\neg I^w(\bigwedge_{j=1}^k \phi_j \to \neg\psi) \wedge \neg I^w \bigwedge_{j=1}^k \phi_j \wedge \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^k \phi_j)) \to \neg I^w \psi$（依据（A6$_{I^w}$）；2. $\bigwedge_{j=1}^k \neg I^w \phi_j \to \neg I^w \bigwedge_{j=1}^k \phi_j$（由（A3$_{I^w}$）应用 $k-1$ 次得到）；3. $\bigwedge_{j=1}^k \neg I^w(\psi \to \phi_j) \to \neg I^w \bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j)$（由（A3$_{I^w}$）应用$k-1$ 次得到）；4. $\bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j) \leftrightarrow (\psi \to \bigwedge_{j=1}^k \phi_j)$（重言式）；5. $(\neg I^w \bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j) \wedge \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^k \phi_j)) \to (\neg I^w \bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j) \leftrightarrow \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^k \phi_j))$（由第4步，依据（RE$_{I^w}$）；6. ~~$\neg I^w \bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j) \leftrightarrow \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^k \phi_j)$~~（根据 $\bar{\chi_1}$ 和$\bar{\chi_2}$ 的定义，对于其中仅出现相同命题变元的任意 χ_1 和 χ_2）；7. $\neg I^w \bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j) \to \neg I^w \bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j)$（由（A5$_{I^w}$）通过逆否变换）；8. $\neg I^w \bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j) \to (\neg I^w \bigwedge_{j=1}^k (\psi \to \phi_j) \wedge \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^k \phi_j))$（由第6、7步，根据经典命题逻辑）；

9. $\neg I^w \bigwedge_{j=1}^{k}(\psi \to \phi_j) \to (\neg I^w \bigwedge_{j=1}^{k}(\psi \to \phi_j) \leftrightarrow \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j))$（由第5、8步，根据传递性）；10. $\neg I^w \bigwedge_{j=1}^{k}(\psi \to \phi_j) \to \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j)$（由第9步，根据经典命题逻辑）；11. $\bigwedge_{j=1}^{k} \neg I^w(\psi \to \phi_j) \to \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j)$（由第3、10步，根据传递性）；12. $\neg I^w(\bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \to \neg\psi) \to \neg I^w(\bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \to \neg\psi)$（重言式）；13. $(\neg I^w(\bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \to \neg\psi) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \neg I^w \phi_j \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \neg I^w(\psi \to \phi_j)) \to (\neg I^w(\bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \to \neg\psi) \wedge \neg I^w \bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \wedge \neg I^w(\psi \to \bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j))$（由第2、11、12步，根据经典命题逻辑）；14. $(\neg I^w(\bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \to \neg\psi) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \neg I^w \phi_j \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \neg I^w(\psi \to \phi_j)) \to \neg I^w \psi$（由第1、13步，根据传递性）。

□

完备性通过构造典范模型来证明。我们以标准方式定义极大一致集。如果 $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{I^w}$，则集合 $\Gamma \nvdash^{\mathtt{HIW}} \bot$是一致的；如果 Γ，则其为极大集，即不存在 $\Gamma' \subseteq \mathcal{L}_{I^w}$ 使得 $\Gamma \subset \Gamma'$ 且 $\Gamma' \nvdash^{\mathtt{HIW}} \bot$。下面的引理可以用标准方法证明。

引理 1 *Every consistent set of HIW can be extended to a maximally consistent one.* (林登鲍姆引理)。

令 $\mathcal{X}^C$ 为所有 HIW-极大一致集的集合。对于每个$\Gamma \in \mathcal{X}^C$，我们定义：

- $\Gamma[\Box] := \{\phi \mid \Box\phi \in \Gamma\}$;
- $\Gamma[I^w] := \{\phi \mid \neg I^w \phi \wedge \neg I^w(\psi \to \phi) \in \Gamma\}$。

我们在 $\mathcal{X}^C$ 上定义 $\sim$ 为

$$\Gamma \sim \Delta \text{ iff } \Gamma[\Box] \subseteq \Delta.$$

根据定义，并且由于 $\Box$ 是一个 S5 模态，很容易验证 $\sim$ 是一个等价关系。基于同样的理由，可以直接证明以下命题。

命题 7 *For any two maximally consistent sets Γ and Δ s.t. $\Gamma \sim \Delta$, $\Gamma[\Box] = \Delta[\Box]$.*

现在我们可以为给定的一组公式定义典范模型。

定义 15（Γ_0 的典范模型）. *Given a maximal consistent setΓ_0 of HIW, the canonical model for Γ_0 is a tuple $\mathcal{M}^C = \{W^C, R^C, v^C, \mathcal{T}^C\}$,where*

- $W^C = \{\Gamma \in \mathcal{X}^C \mid \Gamma_0 \sim \Gamma\}$;
- $R^C \subseteq W^C \times W^C$ *s.t. for all* $\Gamma, \Delta \in W^C$

$$\begin{gathered}(1)\ \neg I^w \bar{\psi} \wedge I^w \psi \in \Gamma \text{ and} \\ (2)\ \Gamma R^C \Delta \text{ iff } \Gamma[I^w] \subseteq \Delta, \\ \text{where } \Gamma[I^w] := \{\phi \mid \neg I^w \phi \wedge \neg I^w(\psi \to \phi) \in \Gamma\};\end{gathered}$$

- $v^C(p) = \{\Gamma \in W^C \mid p \in \Gamma\}$;
- $\mathcal{T}^C$ *is such that*

- $T^C = \{a, b\}$ *where* $a = \{p \in \texttt{Prop} \mid I^w\bar{p} \in \Gamma_0\}$ *and* $b = \{p \in \texttt{Prop} \mid \neg I^w\bar{p} \in \Gamma_0\}$*;*
- $\oplus^C : T^C \times T^C \mapsto T^C$ *s.t.* $a \oplus^C a = a$*,* $b \oplus^C b = b$*,* $a \oplus^C b = b \oplus^C a = a$*;*
- $\mathfrak{K}^C = b$*;*
- $t^C : \texttt{Prop} \mapsto T^C$ *s.t. for all* $c \in T^C$ *and* $p \in \texttt{Prop}$: $t^C(p) = c$ *iff* $p \in c$*, and* t^C *extends to the whole language by* $t^C(\phi) = \oplus^C\{t^C(p) \mid p \in Var(\phi)\}$.

为证明真值引理，下列命题是有用的。

命题 8 *For all* $\phi \in \mathcal{L}_{I^w}$ *and for any* $\Gamma \in W^C$*:* $\neg I^w\bar{\phi} \in \Gamma$ *iff*。() $\forall p \in Var\ \phi : \neg I^w\bar{p} \in \Gamma$.

Proof. 证明与引理 9 [Rossi 和 ¨Ozg¨un, 2023]的证明十分相似。

(⇒) 令 $\neg I^w\bar{\phi} \in \Gamma$。那么，根据（A7$_{I^w}$），$\neg I^w p \in \Gamma$ 对所有 $p \in Var(\phi)$ 均成立。(⇐) 令 $Var(\phi) = \{p_1, ..., p_n\}$。那么，$\bar{\phi} = \bar{p_1} \wedge ... \wedge \bar{p_n}$。令 $\neg I^w\bar{p_i} \in \Gamma$ 对所有 $p_i \in \{p_1, ..., p_n\}$。那么，$\bigwedge_{i \leq n} \neg I^w\bar{p_i} \in \Gamma$，因为 Γ 是一个极大一致集。根据（A3$_{I^w}$），$\neg I^w \bigwedge_{i \leq n} \bar{p_i} \in \Gamma$，也就是说 $\neg I^w\bar{\phi} \in \Gamma$。

□

命题 9。 *Given a canonical topical-sensitive model* $\mathcal{M}^C = \{W^C, R^C, v^C, \mathcal{T}^C\}$*, for any* $\Gamma \in W^C$*, and* $\phi \in \mathcal{L}_{I^w}$*:*

$$\neg I^w\bar{\phi} \in \Gamma \text{ iff } t^C(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C.$$

Proof. 证明与推论 10 [Rossi 和 ¨Ozg¨un 2023]的证明相同。我们只需将 K 替换为 $\neg I^w$，将引理 9 替换为命题 8，并将 Ax3$_K$ 替换为（A4$_{I^w}$）。

□

规范关系的定义 R^C 以及真值引理的证明均与 [Fan 等人，2015，第 84-85]页的内容 closely。

引理 2 *Let* $\mathcal{M}^C = \{W^C, R^C, v^C, \mathcal{T}^C\}$ *be the canoni-*（真值引理）。 *cal model for* Γ_0*. Then for all* $\phi \in \mathcal{L}_{I^w}$ *and* $\Gamma \in W^C$ *we have* $\mathcal{M}^C$, , , $\Gamma \models \phi$ *iff* $\phi \in \Gamma$.

Proof. 证明对 ϕ的复杂度进行归纳。命题变量、布尔算子和 □ 的情形是标准的。 ϕ的情形如下： $= I^w\psi$

（⇒）假设 $\mathcal{M}^C$，$\Gamma \models I^w\psi$。这意味着，要么 $t(\psi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，要么存在 Γ' 和 Γ''，使得 $\Gamma R^C\Gamma'$、$\Gamma R^C\Gamma''$、$\mathcal{M}^C$，$\Gamma' \models \psi$，且 $\mathcal{M}^C$，$\Gamma'' \models \neg\psi$。如果 $t(\psi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，那么根据命题 9，$\neg I^w\bar{\psi} \notin \Gamma$，也就是说 $I^w\bar{\psi} \in \Gamma$，于是根据 (A5$_{I^w}$) $I^w\psi \in \Gamma$（这正是我们要找的）。

令 $t(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$ 根据归纳假设 C我们有 (i) $\psi \in \Gamma'$ 和 (ii) $\neg\psi \in \Gamma''$ $\Gamma R^C\Gamma'$ χ $\neg I^w\bar{\chi} \wedge$。根据 的定义，存在 $I^w\chi \in \Gamma$ θ $\neg I^w\theta \wedge \neg I^w\ \chi \to \theta\ \in \Gamma$ $\theta \in \Gamma'$ 使得 (iii) 和 (iv) 对所有 都成立；若 ( )，则 。令 (v) $\neg I^w\psi \in \Gamma$。由 (v) 和 (i)，我们有 (vi) $\neg I^w\neg\psi \in \Gamma$ 和 (vii) $\neg\psi \notin \Gamma'$。由 (iv)、(vi) 和 (vii)，我们有 (viii) $I^w(\chi \to$

$\neg\psi \in \Gamma$ $\neg I^w\bar{\chi} \in \Gamma$ $\neg I^w\bar{\psi} \in$)。由 (viii)、
Γ I^w $I^w\ \psi \to \neg\chi \in \Gamma$
(iii) (、我们的假设、以及 (RE), 我们有 (ix) ( )。然后，根据 (ii)，按照与 (i) 情形相同的方法，我们得到 (x) $I^w(\neg\psi \to \chi') \in \Gamma$，其中某个 χ'。由 $\neg I^w\bar{\chi} \in \Gamma$、$\neg I^w\bar{\chi'} \in \Gamma$、(ix)、(x) 和 (A1$_{I^w}$)，我们得到 $I^w\psi \in \Gamma$，这与 (v) 矛盾。

(⇐) 假设 $I^w\psi \in \Gamma$。若 $t^C(\psi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，则根据 I^w 的定义，我们有 $\mathcal{M}^C,\ \Gamma \models I^w\psi$。若 $t^C(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，则根据命题 9，我们有 $\neg I^w\bar{\psi} \in \Gamma$。因此，我们有 $\neg I^w\bar{\psi} \wedge I^w\psi \in \Gamma$ 和 $\neg I^w\neg\psi \wedge I^w\neg\psi \in \Gamma$。接下来，我们需要构造 $\Gamma',\ \Gamma'' \in W^C$，使得 $\Gamma R^C\Gamma'$、$\Gamma R^C\Gamma''$、$\psi \in \Gamma'$ $\neg\psi \in \Gamma''$ ，并且。这有助于证明:

(1) $\{\chi \mid \neg I^w\chi \wedge \neg I^w(\psi \to \chi) \in \Gamma\} \cup \{\psi\}$ is consistent.
(2) $\{\chi \mid \neg I^w\chi \wedge \neg I^w(\neg\psi \to \chi) \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$ is consistent.

对于情形 (1)，假设它不一致，即 (i) 存在 χ_1, ..., χ_n 使得 $\vdash \chi_1 \wedge ... \wedge \chi_n \to \neg\psi$ 且 (ii) 对所有 $k \in [1, n]$, $\neg I^w\chi_k \wedge \neg I^w(\psi \to \chi_k) \in \Gamma$。由 (ii) 和 (A5$_{I^w}$)，我们得到对所有 $k \in [1, n]$, $\neg I^w\bar{\chi_k} \in \Gamma$。接着，由 ($NEC_{I^w}$), $\neg I^w($ $\chi_1 \wedge ... \wedge \chi_n \to \neg\psi) \in \Gamma$。根据命题 6，我们有 $\neg I^w\psi \in \Gamma$，这就产生了矛盾。

由 (1)、R^C 的定义以及引理 1，我们得出存在 Γ'，使得 $\Gamma R^C\Gamma'$ 且 $\psi \in \Gamma'$。
对于情形 (2)，推理相同。因此，存在 Γ''，使得 $\Gamma R^C\Gamma''$ 且 $\psi \in \Gamma''$。根据归纳假设以及 I^w 的定义，这意味着 $\mathcal{M}^C,\ \Gamma \models I^w\psi$。

□

定理 2。HIW 系统是完备的。

Proof. 设 $\nvdash \phi$。则 $\{\neg\phi\}$ 是一致的。根据引理 1，存在一个极大一致集 Γ_0，使得 $\phi \notin \Gamma_0$。根据引理 2，我们有 $\mathcal{M}^C,\ \Gamma_0 \not\models \phi$。

□

B 系统 HIU的证明

B.1 HIU的可靠性

定理7。 *The system* HIU *is sound.*

Proof. (CPL) 和 (S5$_\Box$) 的情形是标准的。

对于 (A1$_{I^w}$) 的情形，设 $\mathcal{M}, w \models I^u\phi \wedge \neg I^u\bar{\phi}$ 对任意的 $w \in \mathcal{M}$ 成立。于是，$t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$，因此 $\mathcal{M}, w \models \phi$。

对于 (A2$_{I^u}$) 的情形，设 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\bar{\phi}$，这意味着 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。显然，对于任意 $w' \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}, w' \models \phi \vee \neg\phi$，因此 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u(\phi \vee \neg\phi)$。

对于 (A3$_{I^u}$) 的情况，令 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\phi \wedge \neg I^u\psi$，其中 $w \in \mathcal{M}$ 任意。这意味着 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$, $t(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$，且满足以下任一条件：(i) $\mathcal{M}, w \not\models \phi$；或 (ii) 对所有满足 Rww' 的 w'，都有 $\mathcal{M}, w' \models \phi$，并且满足以下任一条件：(iii) $\mathcal{M}, w \not\models \psi$；或 (iii) 对所有满足 Rww' 的 w'，都有 $\mathcal{M}, w' \models \psi$。若满足 (i) 或 (iii)，则有 $\mathcal{M}, w \not\models \phi \wedge \psi$，从而 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u(\phi \wedge \psi)$。若满足 (ii) 和 (iv)，则对所有满足 Rww' 的 w'，都有 $\mathcal{M}\ w' \models \phi \wedge \psi$ $\mathcal{M}\ w \models \neg I^u\ \phi \wedge \psi$,, 从而 ,( )。

对于 (A4$_{I^u}$) 的情况，令 (i) $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\bar{\phi}$，其中 $w \in \mathcal{M}$ 任意。假设 (ii) $\mathcal{M}, w \not\models \Box\neg I^u\bar{\phi}$。由 (i) 可得 (iii) $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。由 (ii) 可得 (iv) 存在满足 $\mathcal{M}, w' \models I^u\bar{\phi}$ 的 $w' \in \mathcal{M}$。由 (iii)、(iv) 以及 I^u 的定义可知，存在满足 $\mathcal{M}, w' \models \neg\bar{\phi}$ 的 w'，这与 $\bar{\phi}$ 的构造矛盾。

对于 (A5$_{I^u}$) 的情形，令 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u t(\phi)^- \not\sqsubseteq \mathfrak{K}$，因此 $\mathcal{M}, w \models I^u\phi$。

对于 (A6$_{I^u}$) 的情形，令 $\mathcal{M}, w \models \phi \wedge \neg I^u\phi \wedge \neg I^u\psi \wedge I^u(\phi \vee \psi)$，其中 $w \in \mathcal{M}$ 任意。这意味着 (i) $\mathcal{M}, w \models \phi$，(ii) $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$，(iii) $t(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$，(iv) $\mathcal{M}, w \models \phi \vee \psi$，以及 (v) 存在 w'，使得 Rww' 且 $\mathcal{M}, w' \not\models \phi$ 且 $\mathcal{M}, w' \not\models \psi$。因此，由 (i) 和 (v) 可得 $\mathcal{M}, w \models I^u\phi$。

对于 (A7$_{I^u}$) 这种情况，令 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u(\phi \vee \psi) \wedge \neg I^u(\phi \to \psi)$，其中 $w \in \mathcal{M}$ 任意。这意味着以下两种情况之一成立：(i) $\mathcal{M}, w \models \neg(\phi \vee \psi)$；或 (ii) 对所有 w'，若 Rww'，则 $\mathcal{M}, w' \models \phi \vee \psi$；并且以下两种情况之一成立：(iii) $\mathcal{M}, w \models \neg(\phi \to \psi)$；或 (iv) 对所有 w'，若 Rww'，则 $\mathcal{M}, w' \models \phi \to \psi$。假设 $\mathcal{M}, w \models I^u\psi$。那么，(v) $\mathcal{M}\ w \models \psi$ w'' Rww'' $\mathcal{M}\ w'' \models ,$, 且 (vi) 存 $\neg\psi$ 在 s.t.w 和 ,。由 (v) 可知，(i) 和 (iii) 均不成立。因此，条件 (ii) 和 (iv) 成立。由 (vi) 和 (ii)，可得 (vii) $\mathcal{M}, w'' \models \phi$。由 (vii) 和 (iv)，可得 $\mathcal{M}, w'' \models \psi$，这就产生了矛盾。

对于 (A8$_{I^u}$) 的情形，令 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\phi$ 其中 $w \in \mathcal{M}$ 任意，这意味着 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。根据 $\bar{\phi}$ 和 t 的定义，这意味着对于任意满足 $Var(\psi) \subseteq Var(\phi)$ 的 ψ，$t(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$，也就是说，如果 $Var(\psi) \subseteq Var(\phi)$，则 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\bar{\psi}$。

对于 (NEC$_{I^u}$) 的情形，假设 (i) 对任意 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M} \models \phi$（即 ϕ 有效），并令 (ii) $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\bar{\phi}$，其中 $w \in \mathcal{M}$ 任意。由 (ii) 可得 (iii) $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。由 (i) 可得 $\mathcal{M}, w \models \phi$，并且对于所有 w'，若 Rww'，则 $\mathcal{M}, w' \models \phi$。这意味着，结合 (ii)，$\mathcal{M}, w \models \neg I^u\phi$。

对于 (RE$_{I^u}$) 这一情形，假设 (i) $\mathcal{M} \models \phi \leftrightarrow \psi$ 对任意 $\mathcal{M}$ 成立，并设 (ii) $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\bar{\phi} \wedge \neg I^u\bar{\psi}$ 对任意 $w \in \mathcal{M}$成立。由 (ii) 可得 (iii) $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$ 以及 (iv) $t(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。令 (v) $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\phi$。由 (v) 与 (iii)，我们或者得到 (vi) $\mathcal{M}, w \models \neg\phi$，或者得到 (vii)：对所有 w'，若 Rww' 则 $\mathcal{M}, w' \models \phi$。若 (vi) 成立，则由 (i) 与 (vi) 可得 $\mathcal{M}, w \models \neg\psi$，从而由 (iv) 可得 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\psi$。若 (vii) 成立，则由 (i)，对所有 w'，若 Rww' 则 $\mathcal{M}, w' \models \psi$，从而（考虑到 (iv)）可得 $\mathcal{M}, w \models \neg I^u\psi$。反向的推理相同。因此，$\mathcal{M}, w \models \neg I^u \leftrightarrow \neg I^u\psi$。

□

B.2 HIU 的完备性

为了证明完备性，我们需要以下命题，它是（A7$_{I^u}$）的推广。

命题 10. *For all $k \geq 1$：*

$$\vdash (\bigwedge_{j=1}^{k} \neg I^u(\phi_j \vee \psi) \wedge \neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \to \psi)) \to \neg I^u\psi$$

Proof.

1. $(\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \vee \psi) \wedge \neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k} \phi_j \to \psi)) \to \neg I^u\psi$ (from (A7$_{I^u}$));

2. $\bigwedge_{j=1}^{k}\neg I^u(\phi_j\vee\psi)\rightarrow\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)$（由 (A3$_{I^u}$) 应用 $k-1$ 次）；3. $\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\leftrightarrow(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi)$（重言式）；4. $(\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\wedge\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi))\rightarrow(\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\leftrightarrow\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi))$（由 3，根据 ~~(RE$_{I^u}$)~~；5. ~~$\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\leftrightarrow\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi)$~~（根据 $\bar{\chi_1}$ 与 $\bar{\chi_2}$的定义，对于其中仅出现相同命题变元的任意 χ_1 与 χ_2）；6. $\neg I^u\underline{\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)}\rightarrow\neg I^u\underline{\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)}$（由 (A5$_{I^u}$) 及逆否）；7. $\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\rightarrow(\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\wedge\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi))$（由 5、6，根据经典命题逻辑）；8. $\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\rightarrow(\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\leftrightarrow\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi))$（由 4、7，根据传递性）；9. $\neg I^u\bigwedge_{j=1}^{k}(\phi_j\vee\psi)\rightarrow\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi))$（由 8，根据经典命题逻辑）；10. $\bigwedge_{j=1}^{k}\neg I^u(\phi_j\vee\psi)\rightarrow\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi)$（由 2、9，根据传递性）；11. $\underline{\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j}\rightarrow\psi)\rightarrow\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\rightarrow\psi)$（重言式）；12. $(\bigwedge_{j=1}^{k}\neg I^u(\phi_j\vee\psi)\wedge\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\rightarrow\psi))\rightarrow(\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\vee\psi)\wedge\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\rightarrow\psi))$（由 10、11，根据经典命题逻辑）；13. $(\bigwedge_{j=1}^{k}\neg I^u(\phi_j\vee\psi)\wedge\neg I^u(\bigwedge_{j=1}^{k}\phi_j\rightarrow\psi))\rightarrow\neg I^u\psi$（由 1、12，根据传递性）。

□

我们像之前一样定义极大一致集，但现在我们将其视为对 HIU 的原则封闭。林登鲍姆引理可以按标准方法证明。

引理 3 *Every consistent set of can be*（林登鲍姆引理）。HIU *extended to a maximally consistent one.*

和之前一样，令 $\mathcal{X}^C$ 为所有 HIU 极大一致集的集合。对于每个 $\Gamma\in\mathcal{X}^C$，我们定义：

- $\Gamma[I^u]:=\{\phi\mid\neg I^u\bar{\psi}\rightarrow\neg I^u(\phi\vee\psi)\in\Gamma\text{ for any }\psi\in\Gamma\}$.

典范模型现在定义如下。

定义 16（Γ_0 的典范模型）。 *Given a maximal consistent setΓ_0 of HIW, the canonical model forΓ_0 is a tuple $\mathcal{M}^C=\{W^C,R^C,v^C,\mathcal{T}^C\}$, where*

- $W^C=\{\Gamma\in\mathcal{X}^C\mid\Gamma_0\sim\Gamma\}$;
- $R^C\subseteq W^C\times W^C$ *s.t. for all* $\Gamma,\Delta\in W^C$,

$$\Gamma R^C\Delta\ \textit{iff}\ \Gamma[I^u]\subseteq\Delta;$$

- $v^C(p)=\{\Gamma\in W^C\mid p\in\Gamma\}$;

- $\mathcal{T}^C$ *is such that*
  - $T^C = \{a, b\}$ *where* $a = \{p \in \texttt{Prop} \mid I^u\bar{p} \in \Gamma_0\}$ *and* $b = \{p \in \texttt{Prop} \mid \neg I^u\bar{p} \in \Gamma_0\}$*;*
  - $\oplus^C : T^C \times T^C \mapsto T^C$ *s.t.* $a \oplus^C a = a$, $b \oplus^C b = b$, $a \oplus^C b = b \oplus^C a = a$*;*
  - $\mathfrak{K}^C = b$*;*
  - $t^C : \texttt{Prop} \mapsto T^C$ *s.t. for all* $c \in T^C$ *and* $p \in \texttt{Prop} : t^C(p) = c$ *iff* $p \in c$*, and* t^C *extends to the whole language by* $t^C(\phi) = \oplus^C\{t^C(p) \mid p \in Var(\phi)\}$*.*

命题 11 *For all* $\phi \in \mathcal{L}_{I^u}$ *and for any* $\Gamma \in W^C$ $\neg I^u\bar{\phi} \in \Gamma$ *iff* $\forall p \in Var(\phi)$ $\neg I^u\bar{p} \in \Gamma$.

Proof. 证明与引理 9 [Rossi & Özgün, 2023]的证明十分相似。

($\Rightarrow$) 设 $\neg I^u\bar{\phi} \in \Gamma$。那么，根据（$\text{A8}_{I^u}$），$\neg I^u p \in \Gamma$ 对所有 $p \in Var(\phi)$均成立。

($\Leftarrow$) 设 $Var(\phi) = \{p_1, ..., p_n\}$。那么，$\bar{\phi} = \bar{p_1} \wedge ... \wedge \bar{p_n}$。设 $\neg I^u\bar{p_i} \in \Gamma$ 对所有 $p_i \in \{p_1, ..., p_n\}$均成立。那么，$\bigwedge_{i \leq n} \neg I^u\bar{p_i} \in \Gamma$，因为 Γ 是一个极大一致集。根据（A3_{I^u}），$\neg I^u \bigwedge_{i \leq n} \bar{p_i} \in \Gamma$，也就是说 $\neg I^u\bar{\phi} \in \Gamma$。

□

命题 12. *Given a canonical topic-sensitive model* $\mathcal{M}^C = \{W^C, R^C, v^C, \mathcal{T}^C\}$*, for any* $\Gamma \in W^C$*, and* $\phi \in \mathcal{L}_{I^u}$*:*

$$\neg I^u\bar{\phi} \in \Gamma \text{ iff } t^C(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C.$$

Proof. 证明与推论 10 [Rossi & Özgün, 2023] 的证明相同。我们只需将 K 替换为 $\neg I^u$，将引理 9 替换为命题 B.2，并将 Ax3_K 替换为 (A4_{I^u})。

□

引理 4 *Let* $\mathcal{M}^C = \{W^C, R^C, v^C, \mathcal{T}^C\}$ *be the canonical model for* Γ_0*. Then for all* $\phi \in \mathcal{L}_{I^u}$ *and* $\Gamma \in W^C$ *we have* $\mathcal{M}^C, \Gamma \models \phi$ *iff* $\phi \in \Gamma$.

Proof. 证明通过对 ϕ 的复杂度进行归纳。命题变量、布尔算子和 □ 的情形都是标准的。$\phi{:=}\, I^u\psi$ 的情形如下。

($\Rightarrow$) 假设 $\mathcal{M}^C, \Gamma \models I^u\psi$。这意味着要么 $t^C(\psi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，要么存在 Γ'，使得 $\Gamma R^C \Gamma'$ 且 $\mathcal{M}^C, \Gamma' \models \neg\psi$。如果 $t^C(\psi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，那么根据命题 12，$\neg I^u\psi \notin \Gamma$，也就是说 $I^u\psi \in \Gamma$，因此根据 (A5_{I^u})，$I^u\psi \in \Gamma$。

令 $t^C(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C$。根据归纳假设，我们有 (i) $\psi \in \Gamma$ 和 (ii) $\neg\psi \in \Gamma'$。根据 $\Gamma R^C \Gamma'$ 的定义，这意味着存在 $\chi \in \Gamma$，使得 $\neg I^u\bar{\chi} \to \neg I^u(\psi \vee \chi) \notin \Gamma$，因此 (iii) $\neg I^u\bar{\chi} \in \Gamma$ 和 (iv) $I^u(\psi \vee \chi) \in \Gamma$。根据 $t^C(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，由命题 12 可得 (v) $\neg I^u\bar{\psi} \in \Gamma$。由 (i)、(v)、(iii) 和 (iv)，根据 (A6_{I^u})，可得 $I^u\psi \in \Gamma$。

(⇐) 假设 $I^u\psi \in \Gamma$。如果 $t^C(\psi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，那么根据 I^u 的定义，我们有 $\mathcal{M}^C, \Gamma \models I^u\psi$。如果 $t^C(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C$，那么根据命题 12，我们有 $\neg I^u\bar{\psi} \in \Gamma$。根据 (A1$_{I^u}$)，可得 $\psi \in \Gamma$。接着，我们证明存在 $\Gamma' \in W^C$，使得 $\Gamma R^C \Gamma'$ 和 $\neg\psi \in \Gamma'$。这有助于证明：

$_{-}\{\chi \mid \neg I^u\phi \to \neg I^u(\chi \vee \phi) \in \Gamma$ 对于任意 $\phi \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$ 都是一致的 .
假设它并不一致 . 因此，(i) 存在 $\chi_1,$ $\cdots\chi_n$ s .t. $\vdash(\chi_1 \wedge ... \wedge \chi_n) \to \psi$并且 (ii) 对所有 $k \in [1, n]$、任意 $\phi \in \Gamma$，都有 $\neg I^u\bar{\phi} \to \neg I^u(\chi_k \vee \phi) \in \Gamma$。由 $\neg I^u\bar{\psi} \in \Gamma$、$\psi \in \Gamma$（来自 (A1$_{I^u}$)）以及 (ii)，我们得到 $\neg I^u(\chi_k \vee \psi) \in \Gamma$。根据典范模型的定义和命题 12，我们得到 $\neg I^u\bar{\chi_k} \in \Gamma$。然后，根据 (NEC$_{I^u}$)，我们得到 $\neg I^u((\chi_1 \wedge ... \wedge \chi_n) \to \psi) \in \Gamma$。根据命题 10，我们得到 $\neg I^u\psi \in \Gamma$，这就产生了矛盾。因此，根据 R^C 的定义和引理 3，我们得出存在 Γ'，使得 $\Gamma R^C \Gamma'$ 且 $\neg\psi \in \Gamma'$。根据归纳假设和 I^u 的定义，这意味着 $\mathcal{M}^C,\ \Gamma \models I^u\psi$。

□

定理 8. *The system* HIU *is complete.*

Proof. 设 $\nvdash \phi$。那么 $\{\neg\phi\}$ 是一致的。根据引理 3，存在一个极大一致集 Γ_0，使得 $\phi \notin \Gamma_0$。根据引理 4，我们有 $\mathcal{M}^C,\ \Gamma_0 \not\models \phi$。

□

C 系统 HDI 的证明

C.1 HDI 的可靠性

定理 9. *The system* HDI *is sound.*

Proof. 经典命题逻辑（CPL）和（S5$_{\Box}$）的情形，以及标准情形。

根据 G 的定义和主题模型的定义，（G1）至（G4）的情形都显而易见。

对于（G5）的情形，令 $\mathcal{M}, w \models G\phi$，其中 $w \in \mathcal{M}$任意。这意味着 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。假设 $\mathcal{M}, w \not\models \Box G\phi$，也就是说，存在$w' \in \mathcal{M}$ 使得 $\mathcal{M}, w' \models \neg G\phi$，即 $t(\phi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}$，矛盾。

对于规则（HIR）的情形，令（i） $\mathcal{M} \models \phi \to \psi$，其中 $\mathcal{M}$ 任意（即 $\phi \to \psi$ 有效），并假设（ii） $\mathcal{M}, w \models \phi$，（iii） $\mathcal{M}, w \models I\psi$，以及（iv） $\mathcal{M}, w \models G\phi$，其中 $w \in \mathcal{M}$任意。由（iv）可得（v） $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$。令（vi） $\mathcal{M}, w \models \neg I^d\phi$。于是，要么 $t(\phi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}$（这与（v）矛盾），要么$\mathcal{M}, w \models \neg\phi$（这与（ii）矛盾），要么（viii）存在 w'使得 $w \neq w'$, Rww' $\mathcal{M}\ w' \models \phi$ and , 。由（viii）和（i）可得（ix）存在w'使得 $w \neq w'$, $Rww'$and $\mathcal{M}, w' \models \psi$。由（iii）可知，对于所有满足 $w \neq w''$的 w''，若 Rww''，则 $\mathcal{M}, w'' \models \neg\psi$，这与（ix）矛盾。

对于（A1$_{I^d}$）的情况，令 $\mathcal{M},\ w \models I^d\phi$其中 $w \in \mathcal{M}$ 为任意值。根据 I^d 的定义，这意味着 $\mathcal{M},\ w \models \phi$。

对于 (A2$_{I^d}$) 的情况，令 $\mathcal{M}, w \models I^d\phi \wedge I^d\psi$，其中 $w \in \mathcal{M}$ 为任意值。这意味着 $t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$，$t(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$(因此 $t(\phi \vee \psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$)，$\mathcal{M}, w \models \phi$，$\mathcal{M}\ w \models \psi$ $\mathcal{M}\ w \models \phi \vee \psi$ w' $w \neq w'$,(因此 ,), 并且对于所有满足条件的 , 如果

Rww' 那么 $\mathcal{M}, w' \models \phi$，且 $\mathcal{M}, w' \models \psi$ (因此 $\mathcal{M}, w' \models \phi \vee \psi$)。因此，$\mathcal{M}$, $w \models I^d(\phi \vee \psi)$。

对于（$\mathrm{A3}^d_I$）的情形，令 $\mathcal{M}$, $w \models I^d\phi$ 任意取 $\mathcal{M}$。那么，根据 I^d 的定义，$t(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}$，这意味着 $\mathcal{M}$, $w \models G\phi$。

□

C.2 HDI 的完备性

对于完全性证明，我们需要以下命题，该命题是（$\mathrm{A2}_{Id}$）的推广。该命题可由（$\mathrm{A2}_{Id}$）直接证明。

命题13。 *For all $k \geq 1$:*

$$\bigwedge_{j=1}^{k} I^d\phi_j \to I^d \bigvee_{j=1}^{k} \phi_j$$

我们像之前一样定义极大一致集，但现在我们考虑在 HDI 原则下对它们进行闭包。林登鲍姆引理可以按标准方法证明。

引理 5 *Every consistent set of can be*（林登鲍姆引理）。HDI *extended to a maximally consistent one.*

与前文一样，令 $\mathcal{X}^C$ 为所有 HDI 极大一致集的集合。对于每个 $\Gamma \in \mathcal{X}^C$，我们定义：

- $\Gamma[I^d] := \{\neg\phi \mid I^d\phi \in \Gamma\}$.

$\Gamma[I^d]$ 的定义采用 Gilbert 等人 [2022]提出的定义。

我们还需要以下命题。

命题 14. *Let Γ be a* HDI *maximally consistent set. If $I^d\phi \notin \Gamma$, $G\phi \in \Gamma$ and $\phi \in \Gamma$,, then $\{\phi\} \cap \Gamma[I^d]$ is consistent. If $\Gamma[I^d]$ is non-empty, then $\{\phi\} \cap \Gamma[I^d] \subseteq \Gamma'$ for some -maximally consistent set Γ' such that* HDI $\Gamma \neq \Gamma'$.

Proof. 假设 $\{\phi\} \cap \Gamma[I^d]$ 不一致。那么，$\Gamma[I^d]$ 非空。否则 $\{\phi\} \cap \Gamma[I^d] = \{\phi\}$，并且由于 $\phi \in \Gamma$，$\{\phi\} \cap \Gamma[I^d]$ 将是一致的。于是，我们有 $\vdash \neg(\phi \wedge \neg\psi_1 \wedge ... \wedge \neg\psi_n)$，其中 $\neg\psi_k \in \Gamma[I^d]$ 对 $k \in [1, n]$ $\vdash \phi \to \psi_1 \vee ... \vee \psi_n$ $\vdash \phi \to I^d \psi_1 \vee ... \vee$ 成 $\psi_n \to G\phi \to I^d\phi$ $I^d \psi_1 \vee ... \vee \psi_n \to G\phi \to I^d\phi \in \Gamma$ 立。接着，( )。由 (HIR)，((( ) ( ))，因此 (( ) ( ))（因为 $\phi \in \Gamma$）。根据对每个 ψ_i都有 $I^d\psi_i \in \Gamma$ 这一事实，我们有 $I^d\psi_1 \wedge ... \wedge I^d\psi_n \in \Gamma$。由命题13， $I^d(\psi_1 \vee ... \vee \psi_n) \in \Gamma$。由于有了 $G\phi \in \Gamma$，我们得到 $I^d\phi \in \Gamma$，这与 Γ的一致性相矛盾。

由于 $\{\phi\} \cap \Gamma[I^d]$ 是一致的，因此它包含于某个 HDI 极大一致集 Γ' 中。设 $\Gamma[I^d]$ 非空。于是，存在一个公式 ψ，使得 $\neg\psi \in \Gamma[I^d]$，从而 $I^d\psi \in \Gamma$。根据 ($\mathrm{A1}_{Id}$)， $\psi \in \Gamma$，而 $\neg\psi \in \Gamma'$。因此，$\Gamma \neq \Gamma'$。

□

典范模型现定义如下。

定义 17（Γ_0 的典范模型）。 *Given a maximal consistent setΓ_0 of HIW, the canonical model for Γ_0 is a tuple $\mathcal{M}^C = \{W^C, R^C, v^C, \mathcal{T}^C\}$, where*

- $W^C = \{\Gamma \in \mathcal{X}^C \mid \Gamma_0 \sim \Gamma\}$;
- $R^C \subseteq W^C \times W^C$ *s.t. for all* Γ、$\Delta \in W^C$、

$$\Gamma R^C \Delta \textit{ iff } \Gamma[I^d] \subseteq \Delta;$$

- $v^C(p) = \{\Gamma \in W^C \mid p \in \Gamma\}$;
- $\mathcal{T}^C$ *is such that*
  - $T^C = \{a, b\}$ *where* $a = \{p \in \texttt{Prop} \mid Gp \in \Gamma_0\}$ *and* $b = \{p \in \texttt{Prop} \mid \neg Gp \in \Gamma_0\}$;
  - $\oplus^C : T^C \times T^C \mapsto T^C$ *s.t.* $a \oplus^C a = a$, $b \oplus^C b = b$, $a \oplus^C b = b \oplus^C a = a$;
  - $\mathfrak{K}^C = b$;
  - $t^C : \texttt{Prop} \mapsto T^C$ *s.t. for all* $c \in T^C$ *and* $p \in \texttt{Prop}$: $t^C(p) = c$ *iff* $p \in c$, *and* t^C *extends to the whole language by* $t^C(\phi) = \oplus^C\{t^C(p) \mid p \in Var(\phi)\}$.

命题 15 *For all* $\phi \in \mathcal{L}_{I^d\ G}$ *and for any* $\Gamma \in W^C$ $G\phi \in \Gamma$ *iff*。 ,: ( ) : $\forall p \in Var\ \phi$ $Gp \in \Gamma$.

Proof. ($\Rightarrow$ $G\phi \in \Gamma$ 1 4 $Gp \in \Gamma$ $p \in$) 令。根据 (G) – (G), 对于所有 (ϕ), 我们都有。
($\Leftarrow$) 对于所有 $p \in Var(\phi)$, 令 $Gp \in \Gamma$。考虑公式 $\phi \vee \neg\phi$, 即 $\bigwedge_{p \in Var\ \phi}$ $p \vee \neg p$ 1 4 $G \bigwedge_{p \in Var\ \phi}$ $p \vee$ ()。根据 (G)、(G) 以及我们 $\neg p \in \Gamma$ $G\ \phi \vee \neg\phi \in \Gamma$ 1 4 $G\phi \in \Gamma$ 的假设, ()( ), 即 ( ), 也就是说, 根据 (G) 和 (G), 。
□

命题16。 *Given a canonical topic-sensitive model* $\mathcal{M}^C = \{W^C, R^C, v^C, \mathcal{T}^C\}$, *for any* $\Gamma \in W^C$, *and* $\phi \in \mathcal{L}_{I^d,\ G}$:

$$G\phi \textit{ iff } t^C(\phi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C.$$

Proof. 证明与推论 10 [Rossi & ¨Ozg¨un的证明相同。 2023] 我们只需将 $K\bar{\phi}$ 替换为 $G\phi$, 将引理 9替换为引理15, 并将Ax3$_K$ 替换为(G5)。
□

引理 6 *Let* $\mathcal{M}^C = \{W^C, R^C, v^C, \mathcal{T}^C\}$ *be the canon-*（真值引理）。 *ical model for* Γ_0. *Then for all* $\phi \in \mathcal{L}_{I^d\ G}$ *and* $\Gamma \in W^C$ *we have* , . , $\mathcal{M}^C\ \Gamma \models \phi$ *iff* $\phi \in \Gamma$. ,

Proof. 证明采用对 ϕ复杂度的归纳法。命题变量、布尔算子和 □ 的情形都是标准的。 G 的情形直接由命题16和 G的定义推出。 ϕ: $= I^d\psi$ 的情形如下。

($\Rightarrow$) 假设 $I^d\psi \notin \Gamma$。显然, 要么 $t^C(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C$, 要么 $t(\psi) \not\sqsubseteq \mathfrak{K}^C$。在第二种情况下, 我们得到 $\mathcal{M}, \Gamma \not\models I^d\psi$, 这是根据 I^d 的定义。因此, 假设 $t^C(\psi) \sqsubseteq \mathfrak{K}^C$, 即 $G\psi \in \Gamma$。由于 Γ 是极大的, 要么 ψ, 要么 $\neg\psi \in \Gamma$。在第二种情况下, $\psi \notin \Gamma$, 从而根据归纳假设, $\mathcal{M}^C, \Gamma \not\models \psi$。于是, $\mathcal{M}^C, \Gamma \not\models I^d\psi$。

设 $\psi \in \Gamma$，这意味着 $\mathcal{M}^C, \Gamma \models \psi$。根据命题 14，
$\{\psi\} \cap \Gamma[I^d]$ Γ' 是一致的，
并且包含在某个中。因此，根据 R^C 的定义，$\Gamma R^C \Gamma'$ 并且 $\mathcal{M}^C, \Gamma' \models \psi$。当
$\Gamma[I^d] \neq \emptyset$ 时，$\Gamma \neq \Gamma'$，从而 $\mathcal{M}^C, \Gamma \not\models I^d\psi$。
若 $\Gamma[I^d] = \emptyset$，则考虑任意一个不出现在 ψ 中的 p。或者 $p \in \Gamma$，或者
$\neg p \in \Gamma$。注意到 p 不出现在 ψ 中，我们有 $\{\psi \wedge p\}$ 和 $\{\psi \wedge \neg p\}$ 是
相容的。于是，无论是 $p \in \Gamma$ 还是 $\neg p \in \Gamma$，都存在某个 Γ'，使得
$\psi \in \Gamma'$ 且 $\Gamma' \neq \Gamma$。根据归纳假设 $\mathcal{M}^C$， $\Gamma' \models \psi$。由于 $\Gamma[I^d] = \emptyset$、
$\Gamma[I^d] \subseteq \Gamma'$ $\Gamma R^C \Gamma'$ $\mathcal{M}^C$ $\Gamma \models \psi$ $\mathcal{M}^C$ $\Gamma' \models \psi$ 和 。
因此，，但，对某个 $\Gamma' \neq \Gamma$ 和 $\Gamma R^C \Gamma'$ 成立。因此， $\mathcal{M}^C$， $\Gamma \not\models I^d\psi$。

(⇐) 假设 $I^d\psi \in \Gamma$ 3_{I^d} $G\psi \in \Gamma$ t^C ψ $\sqsubseteq$。
$\mathfrak{K}^C$ 1_{I^d} $\psi \in \Gamma$ $\mathcal{M}^C$ $\Gamma \models \psi$
由 (A)，我们有，即 ( )。由 (A)，因此，。考虑任意一个满足 $\Gamma R^C \Gamma'$ 的 $\Gamma' \in W$。
那么，$\Gamma[I^d] \subseteq \Gamma'$，因此 $\neg\psi \in \Gamma'$。由于 $\Gamma' \in W$，且因此它是相容的，$\psi \notin \Gamma'$，
因此 $\mathcal{M}^C$， $\Gamma' \not\models \psi$。因此， $\mathcal{M}^C$， $\Gamma \models I^d\psi$。

□

定理 10。 *The system* HDI *is complete.*

Proof. 设 $\not\vdash \phi$。则 $\{\neg\psi\}$ 是一致的。根据引理 5，存在一个极大一致集 Γ_0，
使得 $\phi \notin \Gamma_0$。根据引理 6，我们有 $\mathcal{M}^C$， $\Gamma_0 \not\models \phi$。

□

参考文献

Berto, F.（2019）。简单超强内涵信念修正。 *Erkenntnis*，84 3 559575( ): - 。

Berto, F., Hawke, P.（2021年）。相对于信息的可知性。 *Mind*，130 157 133( ): - 。

Berto, F ., Nolan, D . (2023). 超内涵性 . *TheStanford Encyclopedia of Philosophy*（2023年冬季版），Edward N. Zalta与Uri Nodelman（编），网址 = https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hyperintensionality/。

Berto, F . ¨, Ozg¨un, A . (2021年). 动态超内涵信念修正 . *The Review of Symbolic Logic*, 14(3)：766-811。

Cresswell, M . J. (1975年). 超外延逻辑 . *Studia Logica*，34：25-38 .

Fagin, R., Halpern, J . Y., Moses, Y ., Vardi, M . (1995) . *Reasoning about knowledge* . 马萨诸塞州剑桥: MIT出版社。

Fan, J.（2015）。本质与偶然逻辑。arXiv:1506.01872。

Fan, J., Wang, Y., van Ditmarsch, H. (2015). 偶然性与是否知晓。 *The Review of Symbolic Logic*, 8(1): 75-107.

Fan, J. (
2021 *Journal of Philosophical*).
Logic 50 1293 1312
析取无知逻辑。 , : - . Fine, K. (
2017 *Companion to the Philosophy*).
of Language 2
真值制作者语义学。载于 (第 卷)，Bob Hale、Crispin Wright 和 Alexander Miller（编），第2版，奇切斯特，英国：Wiley Blackwell，第556-577页。Gilbert, D., Kubyshkina, E., Petrolo, M., Venturi, G. (2022). 无知与犯错的逻辑。 *Logic journal of the IGPL*, 30(5): 870-885. Gilbert, D., Venturi, G. (
2016 *Review*).
of Symbolic Logic 9 1 167 180
自反不敏感模态逻辑。 , ( ): - . Hawke, P., ¨Ozg¨un, A., Berto, F. (2020). 逻辑全知的根本问题。 *Journal of Philosophical Logic*, 49: 727-766. Hintikka, J. (1962). *Knowledge and belief*。纽约州伊萨卡：康奈尔大学出版社。van der Hoek, W., Lomuscio, A. (
2004 *Electronic*).
Notes in Theoretical Computer Science 85 2 117 133
无知逻辑。 , ( ): - . Kubyshkina, E., Petrolo, M. (
2020 *Prin-*).
cipia: an international journal of epistemology 24 2 247 254
无知不可能是什么。 , ( ): - . Kubyshkina, E., Petrolo, M. (
2021 *Syn-*).
these 198 5917 5928
事实型无知逻辑。 , : - . Leitgeb, H. (2019). HYPE：一个超内涵逻辑系统（及其在语义悖论中的应用）。 *Journal of Philosophical Logic*, 48(2): 305-405. Le Morvan, P. (2012). 论无知：为标准观点辩护。*Philosophia*, 40(2): 379-393. Peels, R. (2012). 无知的新观点未被驳倒。 *Philosophia*, 40 4 741 750( ): - . Peels, R. (
2020 *The Oxford Handbool of Asser-*).
tion
断言无知。载于 , Sanford Goldberg（编），牛津：牛津大学出版社，第605-624页。Peels, R. (2023). *Ignorance: A philosophical study*。牛津大学出版社。Pritchard, D. (
2021 *American Philosophical*).
Quarterly 58 2 111 123
无知与探究。 , ( ): - . Rossi, N., ¨Ozg¨un, A. (2023). 一种关于正向认知可能性的超内涵进路。 *Synthese*, 202, 44，在线优先发表。Stalnaker, R. C. (1984). *Inquiry*。马萨诸塞州剑桥：MIT出版社。Steinsvold, C. (
2008 *Notre*).
Dame Journal of Formal Logic 49 4 385 392
关于无知逻辑与边界的札记。 , ( ): - .

Steinsvold, C. (
2011 *Notre Dame*). 错误:
Journal of Formal Logic 52 245 253
无知逻辑。 , : - . Wansing, H. (2017). 关于想象逻辑的评论：迈向理解想象中的信念控制。 *Synthese*, 194(8): 2843-2861. van Woudenberg, R. (2009). 无知与强制：错误信念的两种免责条件。 *American Philosophical Quarterly*, 46(4): 373-386. Yablo, S. (2014). *Aboutness*. 新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社。Zimmerman, M. J. (
2018 *Interna-*).
tional Journal of Philosophical Studies 26 4 225 232
Peels 关于无知作为道德免责的论述。, ( ): - .