关于阶为 p^2q^2 的循环群上的某些双 Cayley 图及相关扩展

IqbalAdisna Atmaja[1], Yeni Susanti[1], Ahmad Erfanian[2]1加查马达大学，印度尼西亚2伊朗马什哈德菲尔多西大学

arXiv:2603.09575v1 [math.CO] 10 Mar 2026

摘要

我们研究定义在阶为 p^2q^2 的循环群上的双 Cayley 图的结构与组合性质，其中 p 和 q 是不同的素数。我们首先阐述其基本的群论基础。研究重点在于分析其连通性、围长、团数、色数、直径和独立数。我们证明这些双 Cayley 图是连通的、具有明确确定度数的双正则图，且围长为三。此外，我们证明其直径等于五。我们还将若干结果推广到满足连接集适当限制的任意有限群上的双 Cayley 图，并特别关注连接集由其所有对合构成的情形。这些结果阐明了 Cayley 图与其双 Cayley 推广之间在结构上的相似性与差异。

1 引言

由代数结构导出的图构造，是组合方法与代数推理之间的重要桥梁。该领域的核心构造之一是凯莱图，它由 Cayley 于 [3], 提出，通过连接集对群进行编码，并将代数关系转化为图中的邻接关系。因此，许多基本图不变量，如连通性、围长、团数、色数、直径和独立数，都与底层群的代数性质及连接集的选取密切相关。

设 G 是一个有限群，单位元为 e_G，且 $S \subseteq G$ 是一个满足 $e_G \notin S$的逆闭子集。凯莱图 Cay(G, S) 是顶点集为 G的图，其中两个顶点 x 和 y 相邻，当且仅当 $xy^{-1} \in S$。这类图是 $|S|$-正则且顶点传递的；当 S 生成整个群时，它们恰好是连通的。当 G 是循环群时，凯莱图可以得到特别明确的刻画，从而能够用模算术确定许多图参数，进而进行精确分析。

双 Cayley 图通过将群的两个不相交副本组合成一个图来扩展这一思想，其边由三个连接集决定。给定有限群 G和逆闭子集 $S_1, S_2, S_3 \subseteq G$，其中 S_1 和 S_2 不包含 e_G，双 Cayley 图 $\Gamma =$ BiCay(G; S_1, S_2, S_3) 的顶点集为 $\{0,1\} \times G$。邻接关系定义如下：$\{0\} \times G$ 和 $\{1\} \times G$ 上的诱导子图分别是 Cayley 图 Cay(G, S_1) 和 Cay(G, S_2)，而两部分之间的边由 S_3 决定

使得两个顶点 $(0, x)$ 和 $(0, y)$ 相邻，当且仅当 $xy^{-1} \in S_3$。因此，双 Cayley 图由两个 Cayley 子图组成，它们之间的相互作用受一个额外的连接集支配。与普通 Cayley 图相比，这种构造产生了具有更丰富组合性质的图。

本文聚焦于阶为 p^2q^2 的循环群上的双 Cayley 图，其中 p与 q 为互异素数。全文中，我们认定 $\mathbb{Z}_{p^2q^2} \cong \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}^{\nu}$，并将每个群元素表示为有序对 (g_p, g_q)。该分解由映射 $\bar{k} \mapsto (\bar{k} \pmod{p^2}\ \bar{k} \pmod{q^2})$ 实现。这使得凯莱图与双 Cayley 图中的邻接条件均可按分量进行分析。

我们对连接集的选取受到先前关于由指定阶元素定义的凯莱图工作的启发。在 [12], 中，Tolue 等人研究了由素数阶元素生成的凯莱图；而在 [10], 中，Susanti 与 Erfanian 分析了阶为 p^2q^2 的循环群上由素数平方阶元素生成的凯莱图，并得到了团数、色数与独立数的显式结果。这些结果表明，按元素阶限制连接集能够对图不变量实施强有力的控制。在双 Cayley 图的情形下，两个 Cayley 子图的存在引入了额外的相互作用，从而显著影响直径和独立数等整体性质。

本文分析了一类定义在循环群 $\mathbb{Z}_{p^2q^2}$ 上的双 Cayley 图，其连接集由元素阶决定。我们确定了它们的连通性、度结构、围长、团数、色数、直径和独立数。对于图 G，分别用 $\omega(G)$、$\chi(G)$、$\mathrm{diam}(G)$ 和 $\alpha(G)$ 表示其团数、色数、直径和独立数；顶点 v 的度则记作 $deg_G(v)$。分析的一个关键特点是将双 Cayley 图分解为两个结构不同的 Cayley 子图；这两个子图之间的相互作用决定了整个图的性质。

尽管主要结果是在循环群情形下推导出来的，但若干论证仅依赖于一般的群论性质，而非交换性。这一观察使得该理论的部分内容可在对连接集施加适当限制的条件下推广到定义在任意有限群上的双 Cayley 图，从而阐明哪些现象是双 Cayley 图构造本身所固有的，哪些则取决于循环群的算术性质。

1.1 相关工作

凯莱图由 Cayley [3], 提出，因其与群结构的紧密联系，成为《代数图论》中的一类核心图。其基本性质及应用已得到广泛研究（例如参见 [1, 6, 13]）。特别是，凯莱图的许多图不变量，如连通性和正则性，都由所选连接集的生成行为直接决定。

双 Cayley 图是凯莱图的自然推广。Conder 等人在 [4] 开展的后续工作研究了双 Cayley 图的结构性质，包括连通性条件、自同构群以及对称性相关方面。这些研究为任意有限群上的双 Cayley 图建立了一般框架，主要强调结构性质和传递性性质。

当底层群为循环群时，由于子群结构简单且有数论工具可用，Cayley 图和双 Cayley 图的分析变得更加容易（参见 [5, 8, 9]）。这一背景促使多项研究聚焦于由指定阶元素定义的 Cayley 图。Tolue 等人在 [12]

引入了素数阶 Cayley 图，并指出连通性、直径、围长、色数和团数等参数深受元素阶限制的影响。在此方向上，Susanti 和 Erfanian 在 [10] 研究了阶为 p^2q^2的循环群上的素数平方阶 Cayley 图，并得到了关于独立数和团数的明确结果。随后，Suparwati 在 [11] 以类似方法完善了关于素数立方阶循环群的结果。

这些工作表明，对连接集施加基于阶的限制，能够对凯莱图的组合结构实现强有力的控制。与此同时，关于双 Cayley 图的现有结果表明，其整体性质同样由底层群与所选连接集[7, 4]之间的相互作用所支配。然而，双 Cayley 图的精确组合不变量，尤其是在循环群上以及在元素阶约束下的情形，相关研究相对较少。

本文通过研究阶为 p^2q^2 的循环群上、连接集由元素阶定义的双 Cayley 图来填补这一空白。此外，我们指出在循环情形下得到的若干结果如何推广到更一般有限群上的双 Cayley 图，从而补充现有文献——这些文献主要关注对称性与连通性，而非显式的图参数。

2 结果与讨论

2.1 循环群上的双 Cayley 图

双 Cayley 图可视为通过放宽某些结构条件而得到的 Cayley 图的推广。因此，它允许该图具有两个不同的轨道，而不必继承凯莱图的全部性质。双 Cayley 图的精确定义如下。

定义 2.1. 设 G 为一个群，且 S_1、S_2、$S_3 \subseteq G$ 均非空，其中 S_1 和S_2 逆封闭，且不包含 G的单位元。群 G 上的双 Cayley 图$\Gamma = \mathrm{BiCay}(G; S_1, S_2, S_3)$ 是一个图，其顶点集为 $V(\Gamma) = \{0,1\} \times G$，边集定义如下：

$$(i,x)(j,y) \in E(\Gamma) \iff \begin{cases} xy^{-1} \in S_1 & i = j = 0 \\ xy^{-1} \in S_2 & i = j = 1 \\ xy^{-1} \in S_1 & i \neq j, \end{cases}$$

对于任意两个不同的顶点(i, x)、$(j, y) \in V(\Gamma)$。

双 Cayley 图 $\Gamma = \mathrm{BiCay}(G; S_1, S_2, S_3)$ 称为群 G上的双 Cayley 图 Γ。为了更清楚地说明，我们给出如下双 Cayley 图示例。

例 2.2. 令对称群$_3$ 表示其元素记作如下形式的对称群，

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

考虑子集 $S_1 = \{\rho_2, \rho_3\}$、 $S_2 = \{\theta_1, \theta_2\}$ 和 $S_3 = \{\rho_1\}$。相应的双 ***Cayley*** 图 $\mathrm{BiCay}(\mathrm{Sym}_3; S_1, S_2, S_3)$ 如图所示。

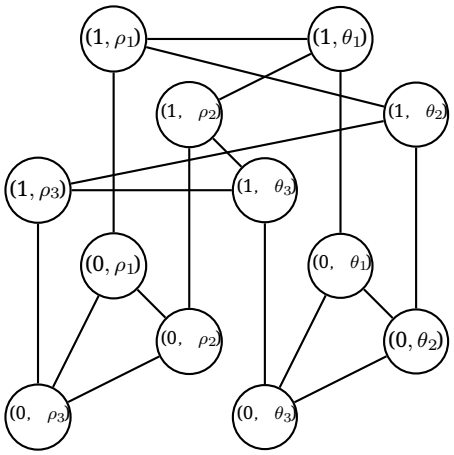


图 1：双 Cayley 图 BiCay(Sym$_3$, S_1, S_2, S_3)

注记 2.3。第（3）节将专门讨论循环群 $G = \langle a \rangle$ 上的双 ***Cayley*** 图 $\mathrm{BiCay}(G; S_1, S_2, S_3)$，其阶为 p^2q^2，其中 p 和 q 是不同的素数，且 $S_1 = \{x \in G: |x| = p$ 或 $q\}$， $S_2 = \{x \in G: |x| = p^2$ 或 $q^2\}$，并且 $S_3 = \{e_G\}$。为简便起见，图 $\mathrm{Cay}(G; S_1, S_2, S_3)$ 将简记为 Γ。

为提供更清晰的背景，我们给出如下关于循环群上的双 Cayley 图的示例。

例 *2.4.* 考虑阶为 p^2q^2 的循环群 G 。设 $p = 2$ 和 $q = 3$。我们有 G 与 $\mathbb{Z}_{36}$ 同构。可见 $S_1 = \{\bar{12}, \bar{18}, \bar{24}\}$、 $S_2 = \{\bar{4}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{16}, \bar{20}, \bar{27}, \bar{28}, \bar{32}\}$，且 $S_3 = \{\bar{0}\}$。因此，对于每个 $(0, \bar{x})$， $V(\Gamma) = \{0, 1\} \times \mathbb{Z}_{36}$，它与另外四个顶点相邻，即 $(0, \bar{x} + \bar{12})$、$(0, \bar{x} + \bar{18})$、$(0, \bar{x} + \bar{24})$ 和 $(1, \bar{x})$。与此同时，每个 $(1, \bar{y})$ 都与另外九个顶点相邻，即 $(1, \bar{y} + \bar{4})$、$(1, \bar{y} + \bar{8})$、$(1, \bar{y} + \bar{9})$、$(1, \bar{y} + \bar{16})$、$(1, \bar{y} + \bar{20})$、$(1, \bar{y} + \bar{27})$、$(1, \bar{y} + \bar{28})$、$(1, \bar{y} + \bar{32})$ 和 $(0, \bar{y})$。因此，诱导子图可表示如下。

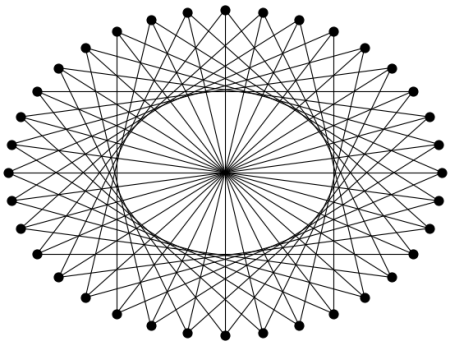


图 2：由 $\{0\} \times \mathbb{Z}_{36}$诱导的子图

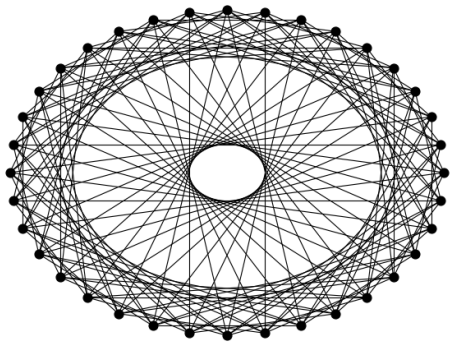


图 3：由 $\{1\} \times \mathbb{Z}_{36}$诱导的子图

双 *Cayley* 图 Γ 由图 *2* 和图 *3* 所示的两个子图构成。由于由 $\{0\}\times G$ 诱导的子图中的每个 $(0,\bar{x})$ 都与由 $\{1\}\times G$ 诱导的子图中的 $(1,\bar{x})$ 相邻，整个双 *Cayley* 图 Γ 如图所示。

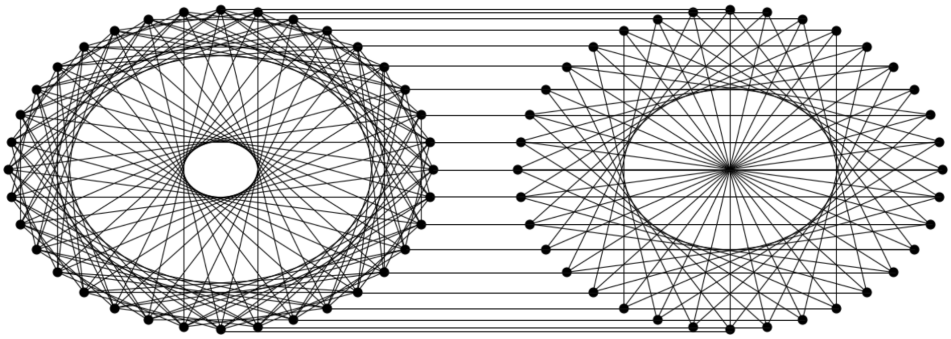


图 4：关于 $G\cong\mathbb{Z}_{36}$ 的双 Cayley 图

到目前为止，我们已经定义了双 Cayley 图，并说明了如何通过 S_1， S_2 和 S_3 来确定邻接关系。一个自然的问题是：这种结构与 Cayley 图本身有何关联？有趣的是，双 Cayley 图可以看作由两个定义在 G 上的 Cayley 图构造而成。这也解释了前缀“Bi”的由来，因为双 Cayley 图由两个这样的副本组成，并按照 S_3 将它们连接起来。

命题 2.5。 双 *Cayley* 图 $\Gamma=\mathrm{BiCay}(G;S_1,S_2,S_3)$ 由两个 *Cayley* 子图组成。

证明。 Γ 的顶点集分解为两个互不相交的集合 $\{0\}\times G$ 和 $\{1\}\times G$。显然，由 $\{0\}\times G$ 诱导的子图是 Cayley 图 Cay(G， S_1)，而由 $\{1\}\times G$ 诱导的子图是 Cayley 图 Cay(G， S_2)。因此，双 Cayley 图 $\Gamma=$BiCay($G;S_1$， S_2， S_3) 由两个 Cayley 子图组成。 □

注记 2.6. 由于 $\{0\}\times G$ 和 $\{1\}\times G$ 构成一个群，且与 G同构，因此本质上有 $V(\Gamma_0)=V(\Gamma_1)=G$。因此，我们可以将集合 S_1 和 S_2 视为 $\{0\}\times G$ 和 $\{1\}\times G$ 的子集（在同构意义下）。在后续讨论中，*Cayley* 子图 Γ_0 称为0-侧子图，*Cayley* 子图 Γ_1 称为1-侧子图。由于它们表示相同的结构，这些记法可分别与 Γ_0 和 Γ_1互换使用。

在描述双 Cayley 图 Γ的一般结构后，我们现在着手对 Γ进行基本计数。这些计数包括确定图中顶点的数量、边的数量以及每个顶点的度。所有这些结果都总结在以下命题中。

命题 2.7. 双 *Cayley* 图 Γ 有 $2p^2q^2$ 个顶点，是度为 $p(p-1)+q(q-1)+1$ 与 $p+q-1$ 的双正则图，并有 $p^2q^2(p^2+q^2)$ 2 条边。

我们考察双 Cayley 图 Γ的连通性。正如后文所讨论的，与其一次性分析整张图，我们可以通过聚焦于其一个导出 Cayley 子图，即 Γ_1，来确定其连通性。

命题 2.8. 双 *Cayley* 图 Γ 的 Γ_1 子图是连通的。

证明。注意，集合 S_2 含有阶为 p^2 和 q^2 的阶元，即分别为 a^{q^2} 和 a^{p^2}。注意到，$\langle a^{p^2},\ a^{q^2}\rangle = \langle a^{\gcd(p^2,q^2)}\rangle = \langle a^1\rangle = G$. 因此，我们看到 $G = \langle a^{p^2},\ a^{q^2}\rangle \subseteq \langle S_2\rangle$。这意味着集合 S_2 生成群 G。所以，Γ_1 子图是连通的。

□

利用子图 Γ_1 的连通性，我们可以推断整个双 Cayley 图 Γ 的连通性。以下定理对此作出正式表述。

定理2.9。双 *Cayley* 图 Γ 是连通的。

证明。令 (i,x),$(j,y) \in V(\Gamma)$。

(i) 若 $i = j = 1$，则 (i,x) 和 (j,y) 位于连通子图 Γ_1 上，因此存在一条连接它们的路径。

(ii) 若 $i = j = 0$，则存在路径 (i,x) –$(1,x)$ $-\cdots-$ $(1,y)$ $-(j,y)$ 连接这两者。从 $(1,x)$ 到 $(1,y)$ 的路径存在，因为 Γ_1 子图是连通的。

(iii) 若 $i \neq j$，不失一般性，令 $i = 0$，则存在路径 (i,x) $-(j,x)$ $-\cdots-$ (j,y) 连接这两者。

From 综上所有可能的情况，我们可以得出双 Cayley 图 Γ 是连通的 d. □

由于双 Cayley 图 Γ 是连通的，我们可以确定其欧拉性。见下述命题。

命题2.10。双 *Cayley* 图 Γ 不是欧拉图。

证明。由于 Γ_1 中顶点的每个度为 $p(p-1)+q(q-1)+1$，对于任意不同的素数 p,q，其值均为奇数，因此根据狄拉克定理 [13], ，我们可以得出图 Γ 不是欧拉图。

□

围长揭示了图的环结构，具体指出其中所包含的最短环的长度。在推导双 Cayley 图的围长之前，我们首先给出以下命题，该命题将在随后的证明中发挥关键作用。

命题 2.11。图 Γ 中的每个长度为3的环都必须完全位于同一侧，即 Γ_0 或 Γ_1。

证明。不失一般性，假设该环从 0-侧开始。假设该环从顶点 $(0,g) \in V(\Gamma)$ 出发；若该环经过 1-侧，则路径返回到 $(0,g)$ 的最短步数为 4。可能的最短路径为 $(0,g) \to (1,g) \to (1,h) \to (0,h) \to (0,g)$，前提是对于某些 $h \in G$ 和 $h \neq g$，$(1,g)$ 与 $(1,h)$ 相邻，且 $(0,g)$ 与 $(0,h)$ 相邻。因此，不可能存在长度为 3、从一侧跳到另一侧的环。

□

我们断言存在一个长度为 3 的环，因此该图的围长确实为 3。这个环必定位于某一侧。由此可得，整个双凯莱结构的围长是两侧围长中的较小值。

我们可以继续证明上述断言。形式化地说，该断言如下述定理所述。

定理 2.12. Γ 的围长为3。

证明。给定 $|G| = p^2q^2$，不失一般性，假设 $p < q$，这意味着 $q \geq 3$。由于 q 是整除 $|G|$ 的素数，因此存在 G 的唯一子群 H，其阶 H 等于 q。由此可知，H 也是一个循环群，并且包含 $q-1$ 个非单位元。这些非单位元的阶为 q。因此，至少存在两个不同的元素 s，$t \in H \setminus \{e_G\}$，使得对于每个 $g \in G$，都存在一个长度为 3 的环，即 $(0, g) \to (0, gs) \to (0, gt) \to (0, g)$。因此，$\Gamma$ 的围长为 3。

□

注 2.13. 我们注意到，连接子图 Γ_0 和子图 Γ_1 的边，恰好是对每个$g \in G$，形如$(0, g)$和$(1, g)$ 的顶点之间的边。因此，Γ_0 中的任何顶点至多与 Γ_1中的一个顶点相邻，反之亦然。这意味着，任何大小大于2的团（如果存在）都必须完全包含在图的某一个部分中，即 Γ_0 或 Γ_1。

因此，只需考察每个 Γ_0 和 Γ_1 的团数，即可确定整个图的团数。还需注意的是，子图 Γ_1 中的每个顶点都具有形式 $(1, g)$，其中 $g \in G$。在 Γ_1中，第一个坐标，也就是数字 1，对判定相邻关系不起作用。因此，便于省略该坐标，将每个顶点 $(1, g)$ 简记为 g。对于子图 Γ_0，同样可以采用这种记法。因此，在子图 Γ_0中，顶点 $(0, g)$ 简记为 g。

定理 2.14。Γ 的团数为 $\max\{p, q\}$。

证明。我们将确定每个子图上的团。我们看到，在 Γ_0上，任意两个顶点 g，$h \in V(\Gamma_0)$ 相邻，当且仅当阶 gh^{-1} 是 p 或 q。现在，我们将这些顶点视为 $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$中的元素对。注意，如果 g 和 h 具有不同的p-连通分支和 q-连通分支，那么 gh^{-1} 的阶同时整除 p和 q，因此 gh^{-1} 的阶不等于 p 或 q。这意味着该团完全位于以下两者之一：$Q_\alpha := \{(x_p, \alpha) : x_p \in \mathbb{Z}_{p^2}\}$ 或 $P_\beta := \{(\beta, x_q) : x_q \in \mathbb{Z}_{q^2}\}$.

假设团 T 完全位于 Q_α上。我们可以将 Q_α 视为 $\mathbb{Z}_{p^2}$的子集。令$\bar{k}^i$，$\bar{k}^j \in \mathbb{Z}_{p^2}$。可以证明，$|\bar{k}^i(\bar{k}^j)^{-1}| = p$ 发生，当且仅当 $p \mid i-j$ 但 $p^2 \nmid i-j$。因此，这种团集的最大可能大小为 $T = \{\bar{k}^r, \bar{k}^{r+p}, \bar{k}^{r+2p}, \ldots, \bar{k}^{r+(p-1)p}\} \subseteq \mathbb{Z}_{p^2}$。因此，团数为 p。若团位于 P_β 上，则团数为 q。于是，Γ_0 的团数为 $\max\{p, q\}$。

按照同样的逻辑，我们假设 R 在 Γ_1 上的团完全位于 Q_α上。我们看到，对于任意两个顶点 $\bar{k}^i$，$\bar{k}^j \in \mathbb{Z}_{p^2}$, $|\bar{k}^i(\bar{k}^j)^{-1}| = p^2 \iff p \nmid i-j$. 因此，这样的最大团集为 $R = \{\bar{k}^0, \bar{k}, \bar{k}^2, \ldots, \bar{k}^{p-1}\} \subseteq \mathbb{Z}_{p^2}$. 如果 Γ_1 上的团位于 P_β上，则团的大小为 q。因此，Γ_1 上的团数与 Γ_0相同，即 $\max\{p, q\}$。

由于 p，$q \geq 2$，且不同侧上不存在大小超过 2 的团，因此我们可以得出结论：Γ 的团数确实为 $\max\{p, q\}$。 □

关于团数的这一结果也与此前关于围长的结果一致。对于任意素数 p 和 q，有 $\omega(\Gamma) = \max\{p, q\} \geq 3$。因此，最小团的大小为 3，也就是一个长度为 3 的环。由此可知，围长也是 3，这一点我们已经证明过。

已知色数的下界为 $\omega(\Gamma) = \max\{p, q\}$。现在我们证明 Γ 的色数为 $\max\{p, q\} + 1$。

我们定义 G 的两个子集，它们有助于确定 1-侧的色数。定义 $S_A = \{x \in G : |x| = p^2\}$ 和 $S_B = \{x \in G : |x| = q^2\}$. 。显然，集合 S_A 和 S_B 都是逆封闭的，且不包含 G的单位元。下面给出命题。

命题 2.15。 Γ的子图 Γ_1 是两个 ***Cayley*** 图的笛卡尔积$A := \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{p^2}, S_A)$ 和 $B := \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{q^2}, S_B)$。

证明。令 $g = (g_p, g_q)$、 $h = (h_p, h_q) \in G$。当且仅当 gh^{-1} 的阶为 p^2 或 q^2 时，顶点 g 和 h 在 Γ_1 中相邻。换言之，若出现以下任一情形， g 和 h 就彼此相邻，

(i) $|g_p h_p^{-1}| = p^2$ and $g_q = h_q$, or

(ii) $|g_q h_q^{-1}| = q^2$ and $g_p = h_p$.

这种邻接关系与图 A 和图 B 的笛卡尔积中的邻接关系一致。因此，子图 Γ_1 恰好是 A 和 B 的笛卡尔积。我们将其记作 $A \square B$。

□

只需找出 A 和 B 的色数，即可确定 Γ_1 的色数。为此，我们先考察 Cayley 图 A 和 B 的结构。

命题 2.16. ***Cayley*** 图 A 同构于完全 p 部图 $K_{p,p,\ldots,p}$，***Cayley*** 图 B 同构于完全 q 部图 $K_{q,q,\ldots,q}$。

证明. 我们证明 Cayley 图 $A = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{p^2}, S_A)$ 的情形。当且仅当 $|\bar{k}^{i-j}| = p^2$，两个顶点 $\bar{k}^i$, $\bar{k}^j \in V(A)$ 相邻，等价地， $i \neq j \pmod p$。

设 $A_i = \{\bar{k}^n : n \equiv i \pmod p\}$。于是， $V(A) = \bigcup^{p-1}_{i=0} A_i$，其中 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 对于 $i \neq j$。令$\bar{k}^n, \bar{k}^{n'} \in A_i$，可得 $\bar{k}^n \bar{k}^{n'} \notin E(A)$。另一方面，设 $\bar{k}^{m_i} \in A_i$ 且 $\bar{k}^{m_j} \in A_j$，其中 $i \neq j$，由此可得 $k^{m_i} k^{m_j} \in E(A)$。这正是完全p部图的定义，记为 $K_{p,p,\ldots,p}$。类似地，我们还可得 B 是完全q部图 $K_{q,q,\ldots,q}$。

□

命题 2.17。 Γ_1 的色数为 $\max\{p, q\}$。

现在，我们来定义 Γ_1的正常着色。首先，我们在 Cayley 图 A和 B上定义正常着色。我们定义 $c_A : V(A) \to \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ 和 $c_B : V(B) \to \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$，其中 $k = \max\{p, q\}$ 且

$$c_A(\bar{k}^i) \equiv i \pmod k, \quad \text{and } c_B(\bar{k}^j) \equiv j \pmod k$$

对于每个 $\bar{k}^i \in V(A)$和 $\bar{k}^j \in V(B)$。这是 A 和 B 的正常着色，因为每个剩余类都被分配了不同的颜色。接下来，我们可以将着色定义为 $col : V(A \square B) \to \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$，即

$$col((\bar{k}^i, \bar{k}^j)) \equiv (c_A(\bar{k}^i) + c_B(\bar{k}^j)) \pmod k$$

对于每个 $(\bar{k}^i, \bar{k}^j) \in V(A \square B)$。这是对 Γ_1 的一种正常着色，且仅使用 $k = \max\{p, q\}$ 种颜色。

命题 2.18。 Γ_0 的色数为 $\max\{p,q\}$。

证明。 不失一般性，假设 $p > q$。定义着色 $c_0 : V(\Gamma_0) \to \{0,1,\ldots,p-1\}$ 如下：

$$c_0(g) \equiv \left\lfloor \frac{g}{pq^2} \right\rfloor \pmod{p}$$

对所有 $g \in V(\Gamma_0)$ 均成立。可以证明， c_0 是 Γ_0的一个正常 p 着色。 □

定义 2.19。 设 G是一个阶为 p^2q^2的循环群。对于 G的子群，我们采用以下记号。令 K_p、 K_q、 H_p和 H_q 分别表示阶为 p、 q、 p^2和 q^2的唯一子群。

在接下来关于循环群上的双 Cayley 图的色数的讨论中，我们假设 $p > q$，因此 $\max\{p,q\} = p$。当 $p < q$时，论证是对称的。

命题 2.20。 K_p 的每个左陪集大小均为 p，并且在 Γ中构成一个团 $_0$

证明。 固定一个陪集 $C = gK_p = \{gh : h \in K_p\}$。若 gh_1， $gh_2 \in C$ 且 $h_1 \neq h_2$，则$gh_1(gh_2)^{-1} = h_1h_2^{-1} \in K_p \setminus \{e_G\}$。因此 $|gh_1(gh_2)^{-1}| = p$。根据 Γ_0 中的邻接规则，(0，gh_1) 与 (0， gh_2) 相邻。因此， C中的所有对都相邻，这意味着 C是一个大小为 p的团。 □

共有 pq^2 个不同的 K_p 陪集，每个大小为 p。接下来，我们给出在 Γ_0 的任意正常 p-着色中，颜色如何出现在 K_p 陪集上的特征

命题 2.21。 若 c_0 是 Γ_0 的一个正常 p-着色，则在每个 K_p 陪集上，这 p 个顶点获得全部 p 种不同颜色，即每种颜色在每个陪集中恰好出现一次。

定理 2.22。 双 *Cayley* 图 Γ 不可进行 $\max\{p,q\}$-着色。

证明。 令 $\max\{p,q\} = p$。为导出矛盾，假设存在对 Γ_0 和 Γ_1 的适当p-着色 c_0， c_1 ，使得对所有 $g \in G$，都有 $c_0(g) \neq c_1(g)$。这是必要条件，因为对所有 $g \in G$，$(0,g)$ 与 $(1,g)$ 相邻。

为 c_0 固定一种颜色 $t \in \{0,1,\ldots,p-1\}$。恰有 pq^2 个元素 g 满足 $c_0(g) = t$。由此可知，这些元素都不能满足 $c_1(g) = t$。因此，这些 pq^2 个元素分布在 c_1 下剩余的 $p-1$ 种颜色中。

令 $A_t = \{g \in G : c_0(g) = t\}$。已知 $|A_t| = pq^2$。对每个$s \in \{0,1,\ldots,p-1\}$，定义非负整数 $n_{t,\ s} = |\{g \in G : c_0(g) = t$ 且 $c_1(g) = s\}|$. 。由于每个 $g \in A_t$ 都有某个 $c_1(g)$，我们有

$$\sum_{s=0}^{p-1} n_{t,s} = |A_t| = pq^2.$$

但是，由约束条件 $c_1(g) \neq c_0(g)$，可得 $n_{t,t} = 0$。因此，

$$\sum_{s=0,s\neq t}^{p-1} n_{t,s} = pq^2. \qquad (*)$$

(∗) 左边有 $p-1$ 项，因此这 $p-1$ 个整数的平均值为 $\frac{pq^2}{p-1}$。所以，至少有一个满足 $s \neq t$ 的 $\overline{n_{t,s}}$ 大于平均值。这意味着存在 $s \neq t$ 使得

$$n_{t,s} \geq \left\lceil \frac{pq^2}{p-1}. \right\rceil \geq q^2 + 1.$$

因此，对于每个 t，都存在某个 $s \neq t$，其中至少有 q^2+1 个元素满足 $c_0(g) = t$ 且 $c_1(g) = s$。我们称这样的数对 $(t,\ s)$ 为 t 的着色对。

现在，将 G 划分为 q^2 个不同的 H_p 的陪集，每个陪集的大小为 q^2。任取一个着色对 $(t,\ s)$。至少有 q^2+1 个元素满足 $(c_0(g)\ c_1(g)) = (t,\ s)$。这些 q^2+1 个元素被放入 q^2 个不同的 H_p 陪集中。根据抽屉原理，必定有一个 H_p 陪集至少包含其中两个元素。因此，存在不同的元素 $x,\ y$，它们位于同一个 H_p 陪集中，且满足 $c_0(x) = c_0(y) = t$ 且 $c_1(x) = c_1(y) = s$。

由于 x 和 y 位于同一个 H_p 陪集中，且 c_0 是正常着色，因此有 $|xy^{-1}| = p^2$。这意味着 $(1,\ x)$ 与 $(1,\ y)$ 相邻。但我们已经有 $c_1(x) = c_1(y) = s$。这与假设 c_1 是 Γ_1 的正常着色相矛盾。因此，不存在这样的着色对 $c_0,\ c_1$。由此可知，整个双 Cayley 图不可 p 着色，即不可 $\max\{p,q\}$ 着色。 □

定理 2.23. 双 *Cayley* 图 Γ 的色数为 $\max\{p,q\}+1$.

证明. 令 $k = \max\{p,q\}$。定义着色 $c_\Gamma\colon V(\Gamma) \to \{0,1,\ldots,k\}$ 如下：

$$c_\Gamma((i,g)) = \begin{cases} col(g) \pmod k, & i = 1 \\ c_0^*(g), & i = 0 \end{cases}$$

对所有 $(i,g) \in V(\Gamma)$，其中 $c_0^*\colon V(\Gamma_0) \to \{0,1,\ldots,k\}$ 定义为

$$c_0^*(g) = \begin{cases} c_0(g) \pmod k, & c_0(g) \neq col(g) \\ k, & c_0(g) = col(g). \end{cases}$$

这种着色显然确保了 Γ中所有相邻顶点都被赋予不同的颜色。

□

直径是一项基本的图不变量，用于衡量图中任意两个顶点之间的最大距离。了解直径有助于洞察 Γ的整体结构，尤其是信息或连通性在图中的传播效率。我们先介绍若干关于各子图结构性质的结果。

命题 2.24. 子图 Γ_0 是一个非连通图，由 pq 个两两不相交的连通分支组成。

为简化记号，我们可以用 $\equiv_n$ 表示模 n 的等价关系。此外，对于每个 $(g_p, g_q) \in V(\Gamma_0)$，由以下形式的集合诱导的子图

$$\mathbf{C}_{(g_p,g_q)} = \{(x',y') \in G : g_p \equiv_p x', g_p \neq_{p^2} x' \text{ and } g_q \equiv_q y', g_q \neq_{q^2} y'\}$$

是 Γ_0的不相交分量。在后续讨论中，所述连通分支记为$G_{(g_p,g_q)}$。下文将对每个连通分支作进一步刻画。

命题 2.25. 对任意 $g=(g_p,g_q)\in G$，诱导子图$G_{(g_p,g_q)}$ 同构于笛卡尔积图 $K_p\square K_q$。

设 $V(K_p\square K_q)=\{(u_i,v_j): i=0,1,\ldots,p-1;\ j=0,1,\ldots,q-1\}$，该图同构由双射映射 $\zeta: V(K_p\square K_q)\to V(G_{(g_p,g_q)})$ 实现，其定义为

$$\zeta((u_i,v_j))\equiv(g_p+ip\ (\mathrm{mod}\ p^2),g_q+jq\ (\mathrm{mod}\ q^2))$$

对所有 $(u_i,v_j)\in V(K_p\square K_q)$。

结合 $\mathrm{diam}(G_1\square G_2)=\mathrm{diam}(G_1)+\mathrm{diam}(G_2)$ 这一事实（前提是 G_1与 G_2 连通），我们有如下断言。

命题 2.26. 设 $(g_p,g_q)\in G$，并设 (x,y)、(x',y') 为 $G_{(g_p,g_q)}$ 中的不同顶点。则 $d_{G_{(g_p,g_q)}}((x,y),(x',y'))=\mathbf{1}_{x\neq x'}+\mathbf{1}_{y\neq y'}$，其中 $\mathbf{1}$ 为特征函数。

定理 2.27. 任一连通分支$G_{(g_p,g_q)}$ 的直径为 Γ_0 2。

定理 2.28. 双 *Cayley* 图 Γ 的子图 Γ_1 的直径为4 .

在得到上述结果后，我们现在考察子图 Γ_0 和 Γ_1中任意两个顶点之间的距离性质，以确定双 Cayley 图 Γ 的一般直径。

设 $g=(g_p,g_q)$，$h=(h_p,h_q)\in G$。我们首先考察 Γ_1中这两个顶点之间的距离。可得

$$d_{\Gamma_1}((g_p.g_q),(h_p,h_q))=\begin{cases}1, & g_p=h_p \text{ or } g_q=h_q\\ 2, & g_p\not\equiv_p h_p \text{ and } g_q\not\equiv_q h_q\\ 3, & g_p\not\equiv_p h_p \text{ and } g_q\equiv_q h_q \quad (\text{vice versa})\\ 4, & g_p\equiv_p h_p \text{ and } g_q\equiv_q h_q.\end{cases}$$

现在，在 Γ_0中，若两个顶点位于同一连通分支，则距离至多为 2。若它们位于不同的连通分支，则有

(*i*) 若满足以下任一条件，则两者之间的距离为 5；

(a) $g_p\not\equiv_p h_p$ 和 $g_q\equiv_q h_q$，$g_q\not\equiv_{q^2} h_q$，
(b) $g_p\equiv_p h_p$，$g_p\not\equiv_{p^2} h_p$ 和 $g_q\not\equiv_q h_q$，
(c) $g_p\not\equiv_p h_p$ 和 $g_q\equiv_q h_q$，$g_q\not\equiv_{q^2} h_q$，
(d) $g_p\equiv_p h_p$，$g_p\not\equiv_{p^2} h_p$ 和 $g_q\not\equiv_q h_q$。

(ii) 若 (i) 不成立，则二者之间的距离至多为 4，即 $g_p\not\equiv_p h_p$ 和$g_q\not\equiv_q h_q$。

另一种可能的情况是，这两个顶点位于不同的子图中，此时最大距离为 $1+\mathrm{diam}(\Gamma_1)$，等于 5。因此，这些观察结果正式表述如下定理。

定理 2.29。 Γ 的直径为5。

我们研究双 Cayley 图 Γ 的独立集及独立数相关性质。首先考察 Γ 在其各个子图上的独立集，即 Γ_0 和 Γ_1。确定每个子图中的独立集后，我们将进一步分析这些结果与整个双 Cayley 图 Γ 的独立集之间的关系。

定理 2.30。 子图 Γ_0 的独立数为 pq 最小值$\{p, q$ $\}$.

证明。 我们已经证明， Γ_0 由 pq 个连通分支组成，每个连通分支都同构于笛卡尔积图 $K_p \square K_q$。显然， $\alpha(K_p \square K_q) = \min\{p, q\}$。因此，最大的独立集为 $pq \min\{p, q\}$。 □

下一步是考察子图 Γ_1的独立集和独立数。回顾一下，子图 Γ_1 满足同构关系 $\Gamma_1 \cong A \square B$ ，其中$A \cong K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p}$ ，且$B \cong K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q}$。图 A 和 B 分别是具有 p 个部分和q 个部分的多部图。

因此， A 和 B 的顶点集可以表示为

$$V(A_i) = \{(i, \alpha) : \alpha = 0, 1, 2, \ldots, p-1\} \text{ and } V(B_j) = \{(j, \beta) : \beta = 0, 1, 2, \ldots, q-1$$

其中， A_i 表示多部图 p的第 i个部分，$K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p}$ ； 而 B_j 表示多部图 q的第 j个部分，$K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q}$。 然后

$$\bigcup_{i=1}^{p} V(A_i) = V(A) = V(K_{p,p,\ldots,p}) \text{ and } \bigcup_{j=1}^{q} V(B_j) = V(B) = V(K_{q,q,\ldots,q}).$$

因此， $\Gamma_1 = A \square B$ 的顶点集可以写作

$$V(A \square B) = \{((i, \alpha), (j, \beta)) : i, \alpha = 0, 1, \ldots, p-1; j, \beta = 0, 1, \ldots, q-1\}.$$

可以看出，不同顶点 $((i,\ \alpha),\ (j,\ \beta))$ 和 $((i',\ \alpha'),\ (j',\ \beta'))$ 相邻，当且仅当 $i = i'$ & $j \neq j'$ 或 $i \neq i$ & $j = j$。

注释 2.31。在本小节余下部分中，记号 $A \square B$ 和$K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p} \square K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q}$ 可以互换使用，因为它们指的是相同的图结构。这意味着，为便于分析，可以互换使用相应的顶点。顶点 $((i, \alpha), (j, \beta)) \in V(K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p} \square K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q})$ 将简写为$(i, \alpha;\ j, \beta)$。

为了明确展示 $A \square B$ 和$K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p} \square K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q}$的图同构，我们可以如下定义函数 f。定义 f: $V(A \square B) \to V(K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p} \square K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q})$，使得

$$f(g_p, g_q) = (i, \alpha; j, \beta)$$

对于所有满足 $g_p = i + p\alpha$ and $g_q = j + q\beta$ with $i, \alpha \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$and $j, \beta \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ 的 $(g_p, g_q) \in V(A \square B)$。

以下命题为在 Γ_1 中构造独立集提供了动机。

命题 2.32。 设 $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ *and* $j \in 0, 1, \ldots, q-1$。则集合 $C(i, j) \subseteq V(K_{p,p,\ldots,p} \square K_{q,\ q,\ldots,q})$ 定义为

$$C(i, j) = \{(i, \alpha; j, \beta) : \alpha = 0, 1, \ldots, p-1; \beta = 0, 1, \ldots, q-1\}$$

是图 $K_{p,p,\ldots,p} \square K_{q,q,\ldots,q}$ 的一个独立集，其大小为 $|C(i, j)| = pq$。

上述命题在子图 Γ_1 中给出了一个大小为 pq 的独立集。此外，通过合并若干集合 C（i， j），可以扩展 Γ_1 中的独立集；适当地选择这些并集，即可得到 Γ_1 中更大的独立集。

命题 2.33. 设 $i, i' \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ 和 $j, j' \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$。当且仅当 $i \neq i'$ 和 $j \neq j'$ 时，$C(i, j)$ 中的任意顶点都不与 $C(i', j')$ 中的每个顶点相邻。

注记 2.34. 集合 $\bigcup_{i=0}^{\min\{p,q\}} C(i, i)$ 是一个大小为 $pq \min\{p, q\}$ 的独立集。

注记 2.34 为在子图 Γ_1 中构造最大的独立集提供了动机。这一推理基于这样一个事实：Γ_1 中的每个独立集都可以由集合 $C(i, j)$ 的一个子集或整个集合构成。

命题 2.35. 设 $S \subseteq V(K_{p,p,\ldots,p} \square K_{q,q,\ldots,q})$ 是一个独立集。设 $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$，$j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$。定义 $S_{i,j} = S \cap C(i, j)$，则指标集合 $\mathcal{I} = \{(i, j) : S_{i,j} \neq \emptyset\}$ 中不存在第一或第二坐标相同的指标。

接下来将介绍若干使子集 $S \subseteq V(K_{p,\ p,\ \ldots\ldots p} \square K_{q,\ q,\ \ldots\ldots q})$ 构成独立集的条件。考虑以下命题。

命题 2.36. 对于每个 $(i, \alpha) \in V(K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p})$，选取一个子集 $T_{(i,\alpha)} \subseteq V(K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q})$，使得存在唯一的 $j' \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ 满足 $T_{(i,\alpha)} \subseteq B_{j'}$。独立集 $S \subseteq V(K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p} \square K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q})$ 可表示为

$$S = \{(i, \alpha; j, \beta) : (j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}\}.$$

集合 S 是独立集，当且仅当对于每个 $(j, \beta) \in V(K_{q,\ q,\ \ldots\ldots,\ q})$，存在唯一的 $i' \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$，使得 $\{(i, \alpha) \in V(K_{p,\ p,\ \ldots\ldots,\ p}) : (j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}\} \subseteq A_{i'}$。

证明。($\Rightarrow$) 假设 S 是一个独立集。令 $(j, \beta) \in V(K_{q,q,\ldots,q})$。为导出矛盾，假设存在 (i, α)、$(i', \alpha') \in V(K_{p,p,\ldots,p})$，满足 $i \neq i'$，或者它们位于不同的部分 A_i，使得 $(j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}$ 且 $(j, \beta) \in T_{(i',\alpha')}$。这意味着 $(i, \alpha;\ j, \beta)$、$(i', \alpha';\ j, \beta) \in S$。这与 S 的独立性矛盾，因为这两个顶点相邻。因此，对于每个满足 $(j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}$ 的 (i, α)，它们必定位于同一个 A_i 部分。换言之，对于每个 $(j, \beta) \in V(K_q, q, \ldots, q)$，都存在唯一的 $i' \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$，使得$\{(i, \alpha) \in V(K_{p,p,\ldots,p}) : (j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}\} \subseteq A_{i'}$。

($\Leftarrow$) 假设存在 $j' \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ 和 $i' \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$，使得对于每个 $(i, \alpha) \in V(K_{p,p,\ldots,p})$ 以及 $(j, \beta) \in V(K_{q,q,\ldots,q})$，均有 $T_{(i,\alpha)} \subseteq B_{j'}$，且 $\{(i, \alpha) \in V(K_{p,p,\ldots,p}) : (j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}\} \subseteq A_{i'}$。令 $(i, \alpha;\ j, \beta), (i', \alpha';\ j', \beta') \in S$，考虑所有可能的情形。

(i) 若 $(i, \alpha) = (i', \alpha')$，则 $(j, \beta), (j', \beta') \in T_{(i,\alpha)} \subseteq B_{j'}$。因此，$(j, \beta)$ 和 (j', β') 位于同一 $B_{j'}$ 部分。因此，$j = j'$，这意味着 (j, β) 和 (j', β') 在 $K_{q,q,\ldots,q}$ 中不相邻。于是，$(i, \alpha; j, \beta)$ 和 $(i', \alpha';\ j', \beta')$ 不相邻。(ii) 若 $(j, \beta) = (j', \beta')$，则 $(i, \alpha), (i', \alpha') \in \{(i, \alpha) \in V(K_{p,p,\ldots,p}) : (j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}\} \subseteq A_{i'}$。因此，$(i, \alpha)$ 和 (i', α') 位于同一 A_i 部分。因此，$i = i'$，这意味着 (i, α) 和 (i', α') 在 $K_{p,p,\ldots,p}$ 中不相邻。于是，$(i, \alpha; j, \beta)$ 和 $(i', \alpha'; j', \beta')$ 不相邻。(iii) 若 $(i, \alpha) \neq (i', \alpha')$ 且 $(j, \beta) \neq (j', \beta')$，那么显然，$(i, \alpha; j, \beta)$ 和 $(i', \alpha';\ j', \beta')$ 不相邻。

因此，S 是一个独立集。

□

类似于命题 2.36 中提出的方法，可以观察到，独立集可表示为 $S = \{(i, \alpha; j, \beta) : (i, \alpha) \in R_{(j,\beta)}\}$ 其中 $R_{(j,\beta)} \subseteq V(K_{p,p,\ldots,p})$，且存在唯一的 $i' \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ 满足 $R_{(j,\beta)} \subseteq A_{i'}$。这一观察还可用于确定图 $K_{p,p,\ldots,p} \square K_{q,q,\ldots,q}$ 中任意独立集 S 可能达到的最大大小。结果见以下命题。

命题 2.37. 考虑图 $K_{p,p,\ldots,p} \square K_{q,q,\ldots,q}$。对于任意独立集 S，其中 $K_{p,p,\ldots,p} \square K_{q,q,\ldots,q}$，有 $|S| \leq pq$ 最小$\{p, q\}$.

证明. 根据命题 2.36，任意独立集 $S \subseteq V(K_{p,p,\ldots,p} \square K_{q,q,\ldots,q})$ 都可以表示为以下形式之一

$$S = \{(i, \alpha; j, \beta) : (j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}\} \text{ or } S = \{(i, \alpha; j, \beta) : (i, \alpha) \in R_{(j,\beta)}\}.$$

我们先考察第一种形式的独立集。对于所有 $(i, \alpha) \in A_i$，存在唯一的 $j' \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$，使得 $T_{(i,\alpha)} \subseteq B_{j'}$，这意味着对于所有 $(i, \alpha) \in A_i$，都有 $|T_{(i,\alpha)}| \leq q$。现在，$\sum_{(i,\alpha) \in A_i} |T_{(i,\alpha)}| \leq pq$. 因此，

$$|S| = \sum_{i=1}^{p} \sum_{(i,\alpha) \in A_i} |T_{(i,\alpha)}| \leq \sum_{i=1}^{p} pq = p^2 q.$$

另一方面，当独立集属于第二种形式时，类似地有

$$|S| = \sum_{j=1}^{q} \sum_{(j,\beta) \in B_j} |R_{(j,\beta)}| \leq \sum_{j=1}^{q} pq = pq^2.$$

因此，$|S| \leq p^2 q$ 和 $|S| \leq pq^2$ 同时成立，这意味着 $|S| \leq pq \min\{p, q\}$。 □

根据注记 2.34 和独立集大小的上界，我们得出以下结论。

定理 2.38。 子图 Γ_1 的独立数为 $pq \min\{p, q\}$。

双 Cayley 图 Γ的子图 Γ_0 和 Γ_1 的独立数已经确定。然而，要确定双 Cayley 图 Γ 的整体独立数，还需要考察这些子图中的独立集是如何构造的。对于 Γ_0 的独立集，构造相对简单，只需从每个连通分支中选取 $\min\{p, q\}$ 个两两不相邻的顶点即可。相比之下，在子图 Γ_1 中构造独立集则更为复杂。为此，下面给出一个命题，用以刻画子图 Γ_1中最大独立集的成员性质。

命题 2.39。 如果 S 是$K_{p、p、\ldots\ldots、p} \square K_{q、q、\ldots\ldots、q}$ 中的最大独立集，那么 S 就是 $C(i, j)$ 的最小$\{p, q\}$ 个集合的并，其中所有指标 i 和 j 均互不相同。

证明。 不失一般性，设 S 具有形式 $S = \{(i, \alpha; j, \beta) : (j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}\}$. 根据定义，对于每个 $T_{(i,\alpha)}$，存在唯一的 $j' \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$，使得 $T_{(i,\alpha)} \subseteq B_{j'}$。根据独立性，存在唯一的 $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$，使得集合 $\{(i, \alpha) \in V(K_{p,p,p}) : (j, \beta) \in T_{(i,\alpha)}\}$ 属于同一个

部分 $A_{i'}$。为明确记号，分别将那些唯一的 i' 和 j' 记为 $\theta(j)$ 和 $\gamma(i)$。这意味着，对于所有的 $(i,\ \alpha) \in V(K_{p,\ p,\ p})$ 和 $(j,\ \beta) \in V(K_{q,\ q,\ q})$，我们有$T_{(i,\alpha)} \subseteq B_{\gamma(i)}$ 且 $\{(i,\ \alpha) \in V(K_{p,\ p,\ p}) : (j,\ \beta) \in T_{(i,\alpha)}\} \subseteq A_{\theta(j)}$。

接下来，考虑 $p < q$ 的情形，

$$|S| = \sum_{k=1}^{p} \sum_{(i,\alpha)\in A_i} |T_{(i,\alpha)}| = p^2 q \iff |T_{(i,\alpha)}| = q \text{ for all } (i,\alpha) \in A_i.$$

这意味着 $T_{(i,\alpha)} = B_{\gamma(i)}$，或者等价地说，$T_{(i,\alpha)}$ 是图 $K_{q,q,\ldots,q}$ 的整个部分 $B_{\gamma(i)}$。

对于指标 $j \in \{0,1,\ldots,q\}$，定义集合 $U_j = \{(i,\alpha) \in V(K_{p,p,\ldots,p}) :\ \gamma(i) = j\}$,也就是说，该集合中 (i,α) 对应于整个部分 B_j。因此，集合 $\{(i,\alpha) : (j,\beta) \in T_{(i,\alpha)}\}$ 是 U_j。根据独立性，U_j 包含于部分 $A_{\theta(j)}$ 中。因此，每个对应于指标 $\gamma(i)$ 的 (i,α) 都包含于同一个部分 $A_{\gamma(i)}$ 中。

接下来，我们声称每个指标 j 只对应于一个部分 $A_{\theta(j)}$。为导出矛盾，假设在每个 A_i 和 $A_{i'}$ 中都存在一个顶点，它们具有 $i \neq i'$，且对应于同一个指标 j，即 $\gamma(i) = \gamma(i')$。取顶点 $(i,\alpha) \in A_i \cap U_j$ 和顶点 $(i',\alpha') \in A_{i'} \cap U_j$。注意，对于所有 $(j,\beta) \in B_{\gamma(i)}$，顶点 $(i,\alpha;\ j,\beta)$、$(i',\alpha';\ j,\beta) \in S$ 相邻。这与 S 是独立集这一事实矛盾。因此，对于所有 $i \neq i'$，必有 $\gamma(i) \neq \gamma(i')$。换言之，指标 j 只对应于一个部分 $A_{\theta(j)}$。等价地，函数 $\varphi :\ \mathcal{A} \to \{0,1,\ldots q-1\}$ 满足

$$\varphi(A_i) = \gamma(i)$$

其中 $\mathcal{A} = \{A_i :\ i = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ p-1\}$ 是单射。

为达到极大性，每个 $(i,\ \alpha) \in A_i$ 都对应于整个部分 $B_{\varphi(A_i)}$。因此，

$$\bigcup_{(i,\alpha)\in A_i} \left(\{(i,\alpha))\} \times T_{(i,\alpha)}\right) = C(i,\varphi(A_i)) \subseteq S.$$

因此，在 $p < q$ 的情况下，最大的独立集为 $\bigcup_{i=1}^{p} C(i,\ \varphi(A_i)$). □

推论2.40。设 $S \subseteq V(K_{p,\ p,\ldots,p} \square K_{q,\ q,\ldots,q})$ 是任意一个极大独立集。那么

$$S = \bigcup_{(i,j)\in\mathcal{I}} C(i,j).$$

在得到子图Γ_0 和 Γ_1的极大独立集构造后，现在可以确定整个双 Cayley 图 Γ 的独立数。不过，在此之前应注意以下观察。子图 Γ_1 中的独立集由集合 $C(i,\ j)$ 构成。在同构 $\Gamma_1 \cong K_{p,\ p,\ldots,p} \square K_{q,\ q,\ldots,q}$ 下，每个集合 $C(i,\ j)$ 都对应于以下子集。

$$C(i,j) \mapsto \{(i+p\alpha, j+\beta) : \alpha = 0,1,\ldots,p-1; \beta = 0,1,\ldots,q-1\} \subseteq \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}.$$

仔细考察后可以发现，前述集合实际上是以顶点 $(i,\ j)$ 为指标的子图 Γ_0 的连通分支。考虑 $(i,\ j) \in \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$，可得 $V(G_{(i,j)}) = \{(i+p\alpha,\ j+\beta) :\ \alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1;\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ q-1\}$，其中 $G_{(i,j)}$ 表示子图 Γ_0 的一个连通分支，前文曾将其称为 $G_{(g_p,g_q)}$。因此，每个子图 Γ_0 和 Γ_1 中的独立集，都由具有相似结构形式的顶点集确定，区别仅在于各自的连通分支之间的连接方式。由此结构对应关系可得以下结果。

定理 2.41. Γ 的独立数为 $2pq\min\{p,q\}-\min\{p^2,q^2\}$.

简而言之，每个子图中构造最大独立集时都存在重叠顶点。因此，我们无法在每个子图中取完整大小，即 $pq\min\{p,q\}$独立集。这些重叠顶点在每个构造中占总数的$(\min\{p,q\})^2$。

2.2 推广至任意有限群

在前几节中，我们着重研究了循环群上的双 Cayley 图，并明确推导出若干结构性质和组合性质。这些结果为理解代数环境良好时双 Cayley 图的行为提供了具体基础。现在，我们转向更一般的框架，考察任意有限群上的双 Cayley 图。在确立了循环群情形的结果后，我们希望将这些结果推广至任意有限群上的双 Cayley 图。接下来将介绍的一般性结果包括基本计数性质、连通性、团数，以及关于色数的结果概述。

注记 2.42. 需要指出的是，除非另有说明，本节所讨论的双 *Cayley* 图中，集合 S_3 仅包含有限群的单位元。

命题 2.43. 设 G 为有限群，令 S_1、$S_2\subseteq G$ 满足 $e_G\notin S_1$、S_2 和 $S_1^{-1}=S_1$、$S_2^{-1}=S_2$，且 $S_3=\{e_G\}$。令 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S_1,S_2,S_3)$，则 $|V(\Gamma)|=2|G|$ 且 $|E(G)|=\frac{|G|}{2}(|S_1|+|S_2|+2)$。

前述命题可通过基本集合论和握手引理轻易得出。

注记 2.44. 沿用前文记号，我们仍采用循环群情形中的记法，分别用 Γ_0 和 Γ_1 表示 *Cayley* 图 $\mathrm{Cay}(G,S_1)$ 和 $\mathrm{Cay}(G,S_2)$。此外，Γ 表示双 *Cayley* 图 $\mathrm{Cay}(G;S_1,S_2,S_3)$。

命题 2.45. 设 G 是一个有限群，且 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S_1,S_2,S_3)$ 是其对应的双 *Cayley* 图。那么

$$deg_\Gamma((i,g))=\begin{cases}|S_1|+1 & if\ i=0\\ |S_2|+1 & if\ i=1\end{cases}$$

对所有 $(i,g)\in V(\Gamma)$均成立。

定理 2.46. 设 G 是一个有限群，且 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S_1,S_2,S_3)$ 是其对应的双 *Cayley* 图。则下列断言成立

(i) Γ 是正则的，当且仅当 $|S_1|=|S_2|$。

(ii) Γ 是双正则的，当且仅当 $|S_1|\neq|S_2|$。

我们证明，整个双 Cayley 图的连通性完全取决于其中一个 Cayley 子图的连通性。因此，只需分别考察每个子图的连通性。以下定理对此结果作出正式表述。

定理 2.47。 设 G是一个有限群。当且仅当 Γ_0 或 Γ_1 连通时，其对应的双 *Cayley* 图 Γ 连通。

这是一个相当直观的结果，因为只要任一子图是连通的，我们就可以平凡地构造一条路径：只需跳到那个连通的子图，然后在需要时再回到另一侧。反之，如果 Γ_0 与 Γ_1 都不连通，那么就不存在使整个图连通的构型。就其纯粹的代数性质而言，下面的注记是上述定理的直接推论。

注记 2.48. 设 G 为一个有限群，并设 S_1、$S_2 \subseteq G$ 使得 $e_G \notin S_1$、S_2 且 $S_1^{-1} = S_1$、$S_2^{-1} = S_2$，以及 $S_3 = \{e_G\}$。双 *Cayley* 图 Γ 连通当且仅当 S_1 或 S_2 生成 G。

与图连通性密切相关，任意有限群上的双 Cayley 图的欧拉性可刻画如下。

定理 2.49. 设 G 为一个有限群，并设 Γ 为相应的双 *Cayley* 图。则 Γ 是欧拉图当且仅当 S_1 与 S_2 都含有奇数个元素。

命题 2.50. 设 G 是一个有限群，Γ 是其对应的双 *Cayley* 图。若存在大小大于 2 的团，则该团必完全位于其中一侧。

这里的方法与循环群情形非常相似，因此仍然适用。

根据该命题，我们现在可以确定整个双凯莱结构的团数。前述定理对此作了正式陈述。

定理 2.51. 设 G 是一个有限群，Γ 是其对应的双 *Cayley* 图。则 $\omega(\Gamma) = \max\{\omega(\Gamma_0)\ \omega(\Gamma_1)\ 2\}$.

证明。 首先，我们要证明 $\omega(\Gamma) \geq \max\{\omega(\Gamma_0)\ \omega(\Gamma_1)\ 2\}$。我们分别证明各部分。由于 Γ_0 是 Γ 的诱导子图，Γ_0 中的任何团在 Γ 中仍然是团。因此，$\omega(\Gamma) \geq \omega(\Gamma_0)$。类似的论证给出 $\omega(\Gamma) \geq \omega(\Gamma_1)$。此外，对于任意 $g \in G$，$(0, g)$ 和 $(1, g)$ 构成一条边，该边是一个大小为 2 的团。因此，$\omega(\Gamma) \geq 2$。由此得到所需的 $\omega(\Gamma) \geq \max\{\omega(\Gamma_0)\ \omega(\Gamma_1)\ 2\}$。

接下来，我们希望证明 $\omega(\Gamma) \leq \max\{\omega(\Gamma_0)\ \omega(\Gamma_1)\ 2\}$。令 K 为Γ中的一个团。考虑 K 与两侧相交的所有可能情形。若 $K \subseteq V(\Gamma_0)$，则 K是 Γ_0中的一个团，因此 $|K| \leq \omega(\Gamma_0)$。类似地，若 $K \subseteq V(\Gamma_1)$，则 K 是Γ_1中的一个团，因此 $|K| \leq \omega(\Gamma_1)$。最后，若 $K \cap (V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1)) \neq \emptyset$，则由命题 2.50 可知 $|K| \leq 2$。在所有情形下，我们都有 $|K| \leq \max\{\omega(\Gamma_0)\ \omega(\Gamma_1)\ 2\}$. 。由于 K 是任意的，因此可得 $\omega(\Gamma) \leq \max\{\omega(\Gamma_0)\ \omega(\Gamma_1)\ 2\}$. 。因此可以得出结论：$\omega(\Gamma) = \max\{\omega(\Gamma_0)\ \omega(\Gamma_1)\ 2\}$. □

我们已经分析了由某些循环群导出的双 Cayley 图的色数，并构造了显式的着色。现在，我们将这一研究扩展到任意有限群上的双 Cayley 图。

定理 2.52. 设 G 为一个有限群，Γ 为其对应的双 *Cayley* 图。那么$\max\{\chi(\Gamma_0)\ \chi(\Gamma_1)\} \leq \chi(\Gamma) \leq 1 + \max\{\chi(\Gamma_0)\ \chi(\Gamma_1)\}$.

证明. 我们将证明 Γ的色数下界。由于Γ_0 和 Γ_1 都是 Γ的诱导子图，因此将 Γ的任意正常着色限制在任一侧，都能得到该诱导子图的正常着色。因此， $\chi(\Gamma) \geq \chi(\Gamma_0)$，且$\chi(\Gamma) \geq \chi(\Gamma_1)$. 由此取最大值即可得到所需的下界。

接下来，我们将建立 Γ的色数上界。令 $k = \max\{\chi(\Gamma_0), \chi(\Gamma_1)\}$。令 $c_0 : V(\Gamma_0) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ 和 $c_1 : V(\Gamma_1) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ 分别为 Γ_0 和 Γ_1的正常着色。回顾交叉边的结构，即对于所有 $g \in G$，$(0, g)$ 与 $(1, g)$ 相邻。因此，仅当对于某个 $g \in G$ 有$c_0((0, g)) = c_1((1, g))$时，才会发生颜色冲突。定义着色 $c : V(\Gamma) \to \{1, 2, \ldots, k+1\}$ 如下：

$$c((i,g)) = \begin{cases} c_0((0,g)) & \text{if } i = 0 \\ c_1((1,g)) & \text{if } i = 1 \text{ and } c_1((1,g)) \neq c_0((0,g)) \\ k+1 & \text{if } i = 1 \text{ and } c_1((1,g)) = c_0((0,g)). \end{cases}$$

由于每一侧的色数均小于或等于 k，因此 c 是双 Cayley 图 Γ的正常着色。因此，我们有 $\chi(\Gamma) \leq 1 + \max\{\chi(\Gamma_0), \chi(\Gamma_1)\}$. 所以，我们有 $\max\{\chi(\Gamma_0), \chi(\Gamma_1)\} \leq \chi(\Gamma) \leq 1 + \max\{\chi(\Gamma_0), \chi(\Gamma_1)\}$. □

现在，我们将研究扩展到一个更为广泛且在结构上更具趣味性的情形。与此前研究的情形不同，在此前的情形中，第三个连接集被限制为仅包含单位元；而现在，我们允许它编码群中更丰富的内部对称。具体而言，我们关注这样的情形：选取连接集 S_3 为有限群 G 的所有对合集合。该选择在双凯莱结构的两个连通分支之间引入了额外的相互作用，并且正如将要看到的，这会导致所得图的若干性质发生显著变化。

回顾一下，如果元素 $a \in G$ 的阶为二，则称其为对合；等价地，a 是满足 $a^2 = e_G$ 和 $a \neq e_G$ 的元素，因此 a 是其自身的逆元。 G 的所有对合集合记为 $I(G)$。自然地，集合 $I(G)$ 是逆封闭的。在这一情形下，我们特意选取了 $S_3 = I(G)$。下面将介绍相关双凯莱图 $\mathrm{Cay}(G; S_1, S_2, I(G))$ 的若干特征，不过其范围仅限于从一般结构到团数。

设 G 为有限群， $I(G)$ 为其对合的集合。设 S_1 和 S_2 为双 Cayley 图 $\Gamma_{I(G)} = \mathrm{BiCay}(G; S_1, S_2, I(G))$ 的标准连接集。现在，我们引入一种不同于 Γ_0 和 Γ_1 子图的新子图结构。由于所选集合 S_3 比此前讨论的更为复杂，我们引入子图 Γ^{ce}，并称之为交叉边子图。交叉边子图定义为这样一个图：从中移除 $\mathrm{Cay}(G, S_1)$ 和 $\mathrm{Cay}(G, S_2)$ 中的所有边。

命题 2.53。 交叉边子图 Γ^{ce} 是一个 $|I（G）$|-正则图。

显然，对于每个 $(0, g) \in V(\Gamma^{ce})$，它都与所有 $s \in I(G)$ 对应的 $(1, gs)$ 相邻，因此 $(0, g)$ 的度为 $|I(G)|$。以下定理将说明整个双 Cayley 图 Γ 的基本计数结果。

定理 2.54. 设 G 是一个有限群，且 $\Gamma_{I(G)} = \mathrm{Cay}(G; S_1, S_2, I(G))$ 是相应的双 *Cayley* 图。则 $|V(\Gamma_{I(G)})| = 2|G|$ 和 $|E(\Gamma_{I(G)})| = \frac{|G|}{2}(|S_1| + |S_2| + 2|I(G)|)$。 ___

显然，关于度和正则性的前述结果仍然成立，因此以下结论也成立。

命题 2.55。 设 G 为一个有限群，且 $\Gamma_{I(G)}$ 为其关联的双 *Cayley* 图。则

$$deg_{\Gamma_{I(G)}}((i,g)) = \begin{cases} |S_1| + |I(G)| & if\ i = 0 \\ |S_2| + |I(G)| & if\ i = 1 \end{cases}$$

对所有 $(i,\ g) \in V(\Gamma)$，均成立。

定理 2.56。 设 G 为一个有限群，且 $\Gamma_{I(G)}$ 为其关联的双 *Cayley* 图。则以下断言成立

(i) $\Gamma_{I(G)}$ 是正则的，当且仅当 $|S_1| = |S_2|$。

(ii) $\Gamma_{I(G)}$ 是双正则的，当且仅当 $|S_1| \neq |S_2|$。

命题 2.57。 交叉边子图 Γ^{ce} 是连通的，当且仅当 $I(G)$ 生成整个群。

如果一个群由其对合生成，例如对称群 Sym_3，那么对于任意选择的连接集 S_1 和 S_2，相应的双 Cayley 图 Γ 总是连通的。这是命题 2.57 的直接推论。此外，这也促使我们进一步刻画整个双凯莱结构的连通性。

定理 2.58. 设 G 为有限群， $\Gamma_{I(G)}$ 为相应的双 *Cayley* 图。令 $H = \langle S_1 \cup S_2 \cup I(G) \rangle$.。 $\Gamma_{I(G)}$ 的连通分支恰为所有 $g \in G$对应的 $\{0,1\} \times gH$。特别地， $\Gamma_{I(G)}$ 连通，当且仅当 H 生成 G。

一般而言，讨论双 Cayley 图中团的下界时，由于子图 Γ_0 和 Γ_1 都是诱导子图，我们可以直接得出 $\omega(\Gamma_{I(G)}) \geq \max\{\omega(\Gamma_0)\ \omega(\Gamma_1)\}$.

在这种情况下，由于连接两侧的边不一定构成完美匹配，因此可以从两侧共同构造大小大于 2 的团。为此，我们将定义一个新术语来描述由两侧顶点组成的团。

定义 2.59. 若团 $C \subseteq V(\Gamma_{I(G)})$ 同时包含来自0侧和1侧的顶点，则称其为混合团。

定义 2.60. 若子集 $S \subseteq G$满足 $S \cap (H \setminus \{e_G\}) = \emptyset$对 G的每个非平凡初等阿贝尔 *2*-子群 H 都成立，则称其为对合分离的。

我们将提出若干关于混合团刻画的论断，不过目前只能给出带有一些限制的结果。

命题 2.61. 设 G 是一个有限群， $\Gamma_{I(G)}$ 是与之关联的双 *Cayley* 图，且 S_1 和 S_2 均为对合分离的。设 C 是一个混合团，其中包含顶点$(1, h)$ （分别地，$(0, h)$）。假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$,

$$(0, g_i) = (0, a_i h) \in C, \quad i = 1, 2, \ldots, k \ \ (resp.\ (1, g_i) = (1, h a_i) \in C)$$

其中每个 $a_i \in I$（G）。如果存在不同的指标 $i \neq j$，使得对合 a_i和 a_j 可交换，则 $|C \cap$（$\{0\} \times G$）$| \leq 2$ （分别为 $|C \cap$（$\{1\} \times G$）$| \leq 2$）。

证明。我们证明 $\{0\}\times G$的界限；关于 $\{1\}\times G$的论证类似。反设存在一个混合团 C，使得 $|C\cap(\{0\}\times G)|\geq 3.$。于是存在三个互不相同的元素 $(0,g_1)$、$(0,g_2)$、$(0,g_3)\in C$以及至少一个顶点 $(1,h)\in C$。由于 C是一个团，因此对每个 $i=1$、2、...、k，都有 $hg_i^{-1}\in I(G)$。记 $a_i:=hg_i^{-1}$。因此，每个 a_i都是一个对合。现在，对于任意 i、$j\in\{1,2,3\}$、$g_jg_i^{-1}=(hg_j^{-1})^{-1}(hg_i^{-1})=a_j^{-1}a_i=a_ja_i.$因此，对于所有互不相同的 i、j、$a_ia_j\in S_0.$

由于存在指标 i，j使得 a_i 与 a_j 可交换，考虑子群 $H=\langle a_i,\ a_j\rangle.$显然，$a_ia_j\in H\setminus\{e_G\}$，且其本身是由可交换对合生成的子群，因此 H 是初等阿贝尔 2-子群。因此，$a_ia_j\in S_0\cap(H\setminus\{e_G\})$，这与 S_0 的对合分离性质相矛盾。由此假设不成立，我们得出 $|C\cap(\{0\}\times G)|\leq 2.$ □

尽管可以得到更强的结果，但对合分离性质和可交换对合这一限制，让我们得以窥见关于团数的更一般结果。此外，如果满足适当条件，即确实存在这一限制，则有

$$\omega(\Gamma_{I(G)})\leq\max\{\omega(\Gamma_0),\omega(\Gamma_1),4\}.$$

其中 4 是 Γ^{ce} 的团数。

3 结论

本文给出了关于连接集由元素阶定义的循环群上的双 Cayley 图的一些结果。我们针对若干结构参数和组合参数获得了明确结果，揭示了基于阶的限制如何影响图的整体性质。分析还表明，这些结果可以自然地推广到更一般的有限群上的双 Cayley 图。

参考文献

[1] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R. 1976年。《图论及其应用》。Macmillan，伦敦。[2] Burton, D. M. 2011年。《初等数论》。麦格劳-希尔。[3] Cayley, A. 1878年。《群论：图形表示》，《美国数学杂志》，174-176。[4] Conder, M., Zhou, J., Feng, Y., Zhang, M. 2016年。《边传递双 *Cayley* 图》。康奈尔大学，纽约。[5] Dummit, D. S., & Foote, R. M. 2004年。《抽象代数》第*3*版。约翰·威立父子公司，纽约。[6] Godsil, C. & Royle, G. 2001年。《代数图论》。施普林格，纽约。[7] Liang, X. & Meng, J. 2008年。《双 *Cayley* 图的连通性》。《组合艺术》，88，27-32。[8] Malik, D. S., Mordeson, J.M., & Sen, M. K. 1997年。《抽象代数基础》。麦格劳-希尔，纽约

[9] Rose, J. S., 1978年。《群论教程》。剑桥大学出版社，剑桥。[10]Susanti, Y., & Erfanian, A. 2019年。《循环群的素数平方阶凯莱图》。《亚欧数学杂志》。[11] Suparwati, T., Susanti, Y., Wahyuni, S., & Erfanian, A. 2026年。《循环群上的素数立方阶凯莱图》。《亚欧数学杂志》。[12] Tolue, B. 2015年。《素数阶凯莱图》。UPB科学通报，77(3)，207-218。[13] Wilson, R. J. 1972年。《图论导论》。Oliver & Boyd，爱丁堡。