arXiv:2603.09618v1 [math.AT] 10 Mar 2026

凝聚数学中的碎裂结构

Nima Rasekh 和 Qi Zhu

Abstract. 我们按照 Lurie 的意义构造了一种碎裂结构 [Lur18], on 的 ∞凝聚 anima 的 -拓扑斯。这种碎裂结构有助于我们更好地理解凝聚 anima 的各种性质——我们用它展示了 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 的一组明确的联合保守点。为了排除其他可能的碎裂结构候选，我们分析了极端不连通空间范畴 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 中的极限。特别是，我们证明 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 不具有所有纤维，从而回答了 Clausen 提出的问题。

Contents

1. 引言 2
2. 断裂拓扑斯与凝聚 anima 2.1. 断裂拓扑斯 2.2. 凝聚数学 3
3. 凝聚 anima 上的断裂结构 3.1. 构造断裂结构 3.2. 从凝聚 anima 到空间层 4
4. 断裂结构的其他候选 4.1. 紧豪斯多夫空间、有限拓扑集与（开）嵌入 4.2. 极端不连通空间与嵌入 4
参考文献 6
7
7
8
11
11
13
16



Figure 1. *Rob Crane* 的《破碎的心智》，作品来自New Irish Art。

Date：2026年3月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18N60、18B25、18F10、18F20、18F60、06E15。*Key words and phrases.* ∞-范畴论，∞-拓扑斯理论，凝聚数学，碎裂的 ∞-拓扑斯。

1. Introduction

1.1. 从小型与大型到断裂拓扑斯。 拓扑斯理论最初作为一种范畴方法而被引入，用于在各种背景下研究拓扑。然而，颇为出人意料的是，它允许两种并行的研究路径。一方面，有些拓扑斯刻画某个特定空间的数据，例如拓扑空间上的层拓扑斯，或概形的 ´étale拓扑斯。另一方面，有些拓扑斯则同时涵盖许多空间，例如所有拓扑空间所在位点上的层，或所有概形所在位点上的层。受其法语起源的启发，人们常非正式地分别将这两类拓扑斯称为小型和大型拓扑斯。

因此，拓扑斯理论自诞生之初便有一个核心主题：弥合这两种并行的方法。例如，早在 [AGV72b，第七卷´，命题 41] 中，作者便指出´概形上的 étale 层 X 全忠实地嵌入在其上的大 ´étale 拓扑斯中，该拓扑斯以 X为切片，从而得出以下关键观察 [AGV72b，第七卷´，命题 4 之后。1]:

> 对于 ´层上同调的研究，使用小型 *´étale* 位点 $X_{\text{ét}}$或大型 *étale* 位点 ´（*Sch*）$/X_{\text{ét}}$，本质上 ´是等价的。

他们还确立了拓扑空间的小型与大型拓扑斯之间的类似关系 [AGV72a，第 IV 卷´，4.10 节。4]。这一现象的其他例子还包括 Zariski 位点 [Sta26，标签 020Z],晶体位点 [Sta26，标签 07IJ], 以及 pro-´étale 位点 [Sta26，标签 098Q],等等。

因此，人们曾尝试以公理化方式描述小拓扑斯与大拓扑斯之间的关系，也就不足为奇了。一种成功的方法是 Lurie 提出的碎裂 ∞-拓扑斯理论 [Lur18],，其动机来自 Carchedi [Car20]。[1] 一个碎裂结构在一个 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$ 上是一个（不一定是全的）子范畴 $\mathcal{X}^{\text{corp}}$，使得包含函子具有一个满足各种公理的右伴随。详细定义见定义 2.1。这些条件特别意味着，对于对象 X 在$\mathcal{X}^{\text{corp}}$中，其切片范畴$\mathcal{X}^{\text{corp}}_{/X}$ 全忠实地嵌入 $\mathcal{X}_{/X}$ (注 2.3)。因此，直观地将 $\mathcal{X}$ 视为一个大拓扑斯，并将 $\mathcal{X}^{\text{corp}}$ 视为一个小拓扑斯时，碎裂结构便以公理化方式，在非常一般的框架下实现了人们预期的大拓扑斯与小拓扑斯之间的关系。

正如人们所预期的那样，许多出现大拓扑斯与小拓扑斯的情形实际上都是碎裂∞-拓扑斯的例子。这包括前面提到的一些例子，例如经典扎里斯基位和´étale 位点 [Lur18，例 20.6.4.1 和 20.6.4。2], ，也包括它们在谱代数几何中的类比 [Lur18，例 20.6.4.4 和 20.6.4。5]。除了代数几何之外，微分几何中也出现了更多碎裂结构的例子 [Clo24a、Clo24b], 整体等变同伦论 [CLL25],以及六函子形式体系理论 [CH26，第 7 节。3]。

1.2. 凝聚 anima 作为大型拓扑斯。 拓扑空间的概念在数学中无处不在，并在代数中扮演着重要角色，例如拓扑阿贝尔群。这些群出了名地难以处理，尤其是它们不构成阿贝尔范畴，而阿贝尔范畴是进行同调代数的关键要求。这阻碍了拓扑群自然出现的领域的发展，例如解析几何。为解决这一问题，凝聚数学理论应运而生凝聚数学，由 Clausen 和 Scholze [Sch19], 以及 Barwick 和 Haine 独立发展 [BH19],并在解析几何中取得了成功应用 [Sch20]。

从根本上说，凝聚数学的成功归功于拓扑斯理论的力量。通过选取一类理想的拓扑空间——在此情形下是极不连通紧豪斯多夫空间，记作 $\mathcal{E}\text{xtr}\mathcal{D}\text{isc}$——再取其上的层，便得到凝聚 anima 的 ∞-拓扑斯凝聚 *anima*

$$\mathcal{C}\text{ond}(\mathcal{A}\text{n}) \coloneqq \mathcal{S}\text{hv}_{\mathcal{A}\text{n}}(\mathcal{E}\text{xtr}\mathcal{D}\text{isc}).$$

我们将在第 2.2 小节中作更详细的回顾。这一构造既涵盖了值得关注的例子，尤其是所有紧生成拓扑空间，又具备层范畴固有的诸多理想性质。从历史上看，Johnstone 的工作中已可见此类方法的雏形；他出于类似目的引入了拓扑拓扑斯 [Joh79]。过去几年，这一理论日渐受到重视，并已应用于数学的多个领域，例如代数 [Aok24, Bri25], 分析 [Sch19], 几何 [Sch20, CS22, HHL+25]、表示论 [HM24], 集合论 [BLHv25] 以及拓扑 [Mor23, Cla25, Mai25]。

[1]另一个相关方法见 *cohesive* ∞*-topoi*，但这不是本文的重点。关于这两种方法之间关系的讨论，请参见 注 2.5 。

凝聚 anima 包含所有（紧生成）拓扑空间 [Sch19，命题 1。7]因此，从第 1.1 小节的视角来看，凝聚 anima 表现出大型拓扑斯的性质。因此，自然会提出这样的问题：凝聚 anima 中是否存在一个子范畴，能够给出一种碎裂结构，从而将我们关于凝聚 anima 是大型拓扑斯的直觉转化为严谨的陈述。

1.3. **凝聚 anima 上的碎裂结构**。本文实现了这一愿景，并在凝聚 anima 上构造了一种碎裂结构。借助 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n}) = \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc})$，我们选择极端不连通空间上的开嵌入集合作为相应小型拓扑斯的基。令 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}$ 表示由开嵌入生成的极端不连通空间宽子范畴，并赋予其由有限联合满射的开嵌入族给出的格罗滕迪克拓扑。我们的主要定理如下。

定理 A (定理 3.7)。限制函子的左 *Kan* 延拓

$$\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n}) \coloneqq \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}) \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n}),$$

诱导出一种碎裂的 ∞-拓扑斯结构。

更确切地说，我们指这个函子诱导出到 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 的某个子范畴上的等价，并且该子范畴的包含是一个碎裂结构。

小型与大型拓扑斯的理念，在转到切片拓扑斯之后，由以下结果清晰地展现出来。令 $よ_{\mathrm{open}}\colon \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc} \to \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 为 Yoneda 嵌入的层化。[2]

定理 B (命题 3.11)。对于每个 $S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$，都存在一个等价

$$\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/よ_{\mathrm{open}}S} \simeq \mathcal{S}\mathrm{hv}(S)$$

的 ∞-范畴。

碎裂结构及上述计算使我们得以推出若干形式上的推论，并更好地理解凝聚 anima。例如，按照 Clough [Clo24a]，，该框架为如下事实提供了一种新的构造性证明：$\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 有充足点，甚至还给出了这样一些点的显式集合。

定理 C (定理 3.14)。点的集合

$$\left\{ \mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n}) \longrightarrow \mathcal{A}\mathrm{n},\ F \mapsto \operatorname*{colim}_{\substack{U \subseteq S \text{ clopen} \\ s \in U}} F(U) \right\}_{S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc},\ s \in S}$$

是联合保守的。

1.4. **极端不连通空间的神奇拓扑**。在我们的小拓扑斯中，选择极端不连通空间上的开嵌入绝非随意之举。我们的最后一个主要结果旨在表明，在 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 上构造和研究碎裂结构，依赖于极端不连通空间非常特殊的点集拓扑性质。

原则上，还可以设想采用其他各种构造，在凝聚 anima 上建立断裂结构。我们可以改变嵌入的选择，甚至将基底扩展到 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$有限拓扑集或紧豪斯多夫空间，但我们将在推论 4.7中证明，扩展基底并非行之有效的方法。

若仍限于极端不连通空间，那么用所有单射取代开嵌入似乎是一个自然的选择。然而，我们将在推论 4.14 中证明，这样做同样无法得到断裂结构。主要问题在于范畴 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 因极端不连通空间的点集拓扑特征而具有一些表现不佳的性质。更准确地说，问题出在 Clausen 提出的以下猜想（猜想 4.10）上，而我们将证明该猜想。

定理 D (定理 4.13)：范畴 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 不具备所有纤维。

事实上，令 $\beta\pi_1$ 为由向第一坐标的投影 $\beta(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \beta\mathbb{N}$ 诱导的映射。我们证明，位于元素 $p \in \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ 上方的纤维并非极端不连通。

[2]这里的层化步骤实际上并非平凡操作。更多详情请参见注记 3.2 。

致谢。本文源自第二作者的硕士论文，该论文由第一作者指导。我们感谢 Adrian Clough 的宝贵讨论，这些讨论最终促成了本项目。此外，我们感谢 Dustin Clausen、Catrin Mair 和 Peter Scholze 的真知灼见。我们也由衷感谢波恩的马克斯·普朗克数学研究所提供的热情接待和经费支持。

2. Fractured topoi and condensed anima

本节主要回顾断裂拓扑斯和凝聚 anima 的概念。我们还讨论断裂拓扑斯与余单子结构（引理 2.4）以及黏性 ∞-拓扑斯（注 2.5）之间的关系。

2.1. **断裂拓扑斯**。

按照第 1.1 小节中的讨论，我们现在回顾断裂 ∞-拓扑斯的概念。

定义 2.1 （[Lur18，定义 20.1.2。1]）。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-拓扑斯。子范畴 $j_!\colon \mathcal{X}^{\mathrm{corp}} \to \mathcal{X}$ 是一个断裂子范畴，若满足以下条件：

(i) 若 $X \in \mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$ 和 $f\colon X \to Y$ 在 $\mathcal{X}$ 中是等价，则 f 属于 $\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$。(ii) ∞-范畴 $\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$ 存在拉回，且这些拉回被 $j_!$保留。(iii) 包含函子 $j_!\colon \mathcal{X}^{\mathrm{corp}} \to \mathcal{X}$ 存在右伴随 $j^*\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$，该右伴随是保守的并保留小余极限。(iv) 对于 $\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$ 中的每个映射 $U \to V$，图式

$$\begin{array}{ccc} j_!j^*j_!U & \longrightarrow & j_!j^*j_!V \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_!U & \longrightarrow & j_!V \end{array}$$

由余单位 $j_!j^* \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ 诱导的映射是 $\mathcal{X}$中的一个拉回。

一个断裂 ∞-拓扑斯是一个对 $\mathcal{X}^{\mathrm{corp}} \to \mathcal{X}$，其中 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-拓扑斯，而 $\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$ 是 $\mathcal{X}$的一个断裂子范畴。$\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$ 中的对象称为实体的。

等价的定义见 [Clo24a，命题 1。14]。

注 2.2。由于 j^* 保留小余极限，且 $j_!\colon \mathcal{X}^{\mathrm{corp}} \to \mathcal{X}$ 是呈示范畴 ∞之间的映射，因此根据伴随函子定理，它存在一个右伴随 j_*。

注 2.3。对于每个对象 $X \in \mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$，函子 $(j_!)/X\colon \mathcal{X}^{\mathrm{corp}}_{/X} \to \mathcal{X}_{/X}$ 根据 [Lur18，命题 20.1.3，1]是全忠实的。因此，断裂的 ∞-拓扑斯恰好实现了第 1.1 小节中讨论的小拓扑与大拓扑的直观，其中第 1.1 小节中，$\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}_{/X}$ 扮演小拓扑斯的角色，而 $\mathcal{X}_{/X}$ 扮演大拓扑斯的角色。

碎裂 ∞拓扑斯具有许多有趣的性质。更多详情见 [Lur18，第 20.1 节。3] 我们确实证明了以下（余）单子性结论。

引理 2.4。设 $j_!\colon \mathcal{X}^{\mathrm{corp}} \to \mathcal{X}$ 是一个碎裂的 ∞-拓扑斯。伴随 $(j_!, j^*)$ 是单子性的，而伴随 (j^*, j_*) 是余单子性的。因此，j^* 创建所有极限和余极限。

证明。如 [Lur18，注 20.1.3 所述。8]，j^* 是保守的，并且作为右伴随保持所有极限，因此由 Barr–Beck 定理可得单子性 [Lur17，定理 4.7.3。5]。类似地，将 Barr–Beck 定理应用于 (j^*, j_*) 可得余单子性。最后一个结论是（余）单子伴随的标准推论 [RV15，定理 5。7]。□

除此之外，引理 2.4 我们还要作一项补充说明。回顾引言（第 1.1 小节）中提到，还有另一种尝试旨在公理化小拓扑与大拓扑之间的关系，这种尝试称为凝聚层拓扑理论，最早由 Lawvere 开创 [Law94，Law07] 随后由 Schreiber 进一步发展 [Sch13，SS20]。

众所周知，凝聚 anima 与凝聚方法并不兼容 [BH19，例 2.2。14]，因此我们不会进一步探讨这种方法。不过，我们注意到凝聚拓扑斯与分形 ∞-拓扑斯之间存在以下非平凡的相互作用。

注2.5。设 $j_!\colon \mathcal{X}^{\mathrm{corp}} \to \mathcal{X}$ 是一个分形 ∞-拓扑斯，并设 $X \in \mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$。因此我们有一个三重伴随 $j_! \dashv j^* \dashv j_*$ 根据注 2.2。转到切片范畴可得到一个三重伴随

$$\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}_{/X} \underset{\longleftarrow (j^*)_{/X} \longleftarrow}{\overset{(j_!)_{/X}}{\underset{(j_*)_{/X}}{\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\perp}}}}} \mathcal{X}_{/X}$$

在此设定下，$(j_!)_{/X}$ 是全忠实的（注 2.3），并且保持拉回。此外，$\mathrm{id}_X \in \mathcal{X}^{\mathrm{corp}}_{/X}$ 由定义 2.1（i）可知其为终对象，因而 $(j_!)_{/X}$ 保持终对象。因此 $(j_!)_{/X}$保持有限极限。

这些条件几乎足以给出 $(j_!)_{/X}$ 的进一步左伴随，从而得到一个四重伴随。若该左伴随还保持有限积，则我们将在 Lawvere–Schreiber [Sch13，定义 3.4.1，注 3.4 的意义下恢复一个凝聚结构。2]。

一个碎裂 ∞-拓扑斯一般难以手工构造。在 [Lur18] 中发展的机制使我们能够构造碎裂 ∞-拓扑斯，其来源是位点论概念。

定义 2.6 ([Lur18，定义 20.2.1.1、20.6.2。1])。 设 $(\mathcal{C}, \tau)$ 是一个 ∞-位点。

(i) $\mathcal{C}$ 上的一种可容许结构 是由 $\mathcal{C}$ 中称为容许态射的映射组成的集合 s，满足以下条件：(a) $\mathcal{C}$ 中的等价都是可容许的。(b) 若 $f\colon U \to X$ 在 $\mathcal{C}$ 中是可容许的，且 $g\colon X' \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个映射，则拉回方块

$$\begin{array}{ccc} U \times_X X' & \longrightarrow & U \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

存在，且 f' 是可容许的。

(c) 设

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & {\scriptstyle h}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & Z & \end{array}$$

是 $\mathcal{C}$ 中的一个交换三角形，其中 g 是可容许的。那么，f 可容许，当且仅当 h 可容许。

(d) 容许态射的集合在 $\mathrm{Fun}([1], \mathcal{C})$ 中对收缩封闭 .

我们将 $\mathcal{C}^{\mathrm{ad}}$ 记为由该可容许态射张成的 $\mathcal{C}$ 的宽子范畴 s.

(ii) 可容许结构 $\mathcal{C}^{\mathrm{ad}} \to \mathcal{C}$ 与 τ 相容，若对于每个 $X \in \mathcal{C}$ 及覆盖筛$\mathcal{C}^{(0)}_{/X} \to \mathcal{C}_{/X}$，都存在一个 τ-覆盖[3] $\{f_\alpha\colon U_\alpha \to X\}_\alpha$ 使得 f_α是可容许的且属于 $\mathcal{C}^{(0)}_{/X}$。

(iii) 几何位点 是一个三元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\mathrm{ad}}, \tau)$，其中 $(\mathcal{C}, \tau)$ 是一个 ∞-位点，且 $\mathcal{C}^{\mathrm{ad}}$ 是 $\mathcal{C}$ 上与 τ 相容的可容许结构。

设 $j\colon \mathcal{C}^{\mathrm{ad}} \to \mathcal{C}$ 是几何位点 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\mathrm{ad}}, \tau)$ 的一部分。存在一个格罗滕迪克拓扑 $\tau^{\mathrm{ad}} := j^*\tau$ on $\mathcal{C}^{\mathrm{ad}}$，其特征如下：对于任意 $C \in \mathcal{C}^{\mathrm{ad}}$，筛 $(\mathcal{C}^{\mathrm{ad}}_{/C})^{(0)} \subseteq \mathcal{C}^{\mathrm{ad}}_{/C}$ 是覆盖筛，当且仅当集合 $\{F(U) \to F(C)\}_{U \in (\mathcal{C}^{\mathrm{ad}}_{/C})^{(0)}}$ 是 τ-覆盖 $F(C)$；参见 [Lur18, 命题 20.6.1.1]。

定理 2.7 ([Lur18，定理 20.6.3。4])。 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\mathrm{ad}}, \tau)$ 为一个几何位点。与j 作前复合会诱导出一个伴随

$$\mathcal{S}\mathrm{hv}_{\tau^{\mathrm{ad}}}(\mathcal{C}^{\mathrm{ad}}) \underset{j^*}{\overset{j_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathcal{S}\mathrm{hv}_\tau(\mathcal{C})$$

且 $j_!$ 从 $\mathcal{S}\mathrm{hv}_{\tau^{\mathrm{ad}}}(\mathcal{C}^{\mathrm{ad}})$ 到断裂子范畴 $\mathcal{S}\mathrm{hv}_\tau(\mathcal{C})^{\mathrm{corp}} \subset \mathcal{S}\mathrm{hv}_\tau(\mathcal{C})$诱导出一个等价。

[3]我们的意思是，能够生成一个覆盖筛的一组映射，参见 [Lur18，第 20.6 节。1]。

碎裂的 ∞-拓扑斯的一个应用是研究点，进而研究 ∞-拓扑斯的超完备性。回顾一下， ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$ 的点 是一个几何态射 $x_*\colon \mathcal{A}\mathrm{n} \to \mathcal{X}$。如果存在一个点族 $x_*\colon \mathcal{A}\mathrm{n} \to \mathcal{X}$，使得相应左伴随 $\{x^*\colon \mathcal{X} \to \mathcal{A}\mathrm{n} : x \text{ point}\}$ 构成联合保守的族，则称 $\mathcal{X}$ 有充足点 。

命题 2.8 ([Clo24a, 命题 1.5])。 设 $j_!\colon \mathcal{X}^{\mathrm{corp}} \to \mathcal{X}$ 是一个带右伴随 ∞ 的分裂 j^*。设 $\{x_i\colon \mathcal{A}\mathrm{n} \to \mathcal{X}^{\mathrm{corp}}\}_i$ 是 $\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$ 中的一族联合保守点。那么，$\{j_* \circ x_i\colon \mathcal{A}\mathrm{n} \to \mathcal{X}\}_i$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一族联合保守点，其中 j_* 是 j^* 的右伴随。

证明。 这立即由 j^* 的保守性得出。 □

注 2.9。 特别地，若 $\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$ 有充足点，则 $\mathcal{X}$ 有充足点。

推论 2.10。 设 $j_!\colon \mathcal{X}^{\mathrm{corp}} \to \mathcal{X}$ 是一个分裂 ∞-拓扑斯，且 $\mathcal{X}^{\mathrm{corp}}$ 有充足点。那么，$\mathcal{X}$ 是超完备的。

证明。 这立即由 命题 2.8 得出，因为 ∞-拓扑斯若有充足点，则是超完备的 [Lur09，注 6.5.4。7]。 □

2.2. **凝聚数学**。 继续小节 1.2中的说明，凝聚 anima 应被视为拓扑空间上的良好层。我们仅简要回顾一下相关设定，以便读者熟悉所用记号。更详细的论述请参阅 [Sch19、HM24、Mai25] 。

考虑以下全子范畴链

$$\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc} \hookrightarrow \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in} \hookrightarrow \mathcal{CH}\mathrm{aus}.$$

紧豪斯多夫空间 $\mathcal{CH}$的（1-）范畴。我们回顾一下，极端不连通空间的（1-）范畴 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 由这样的紧豪斯多夫空间组成：其开集的闭包仍为开集。现在，我们可以在这些范畴上分别赋予有限联合满射族所生成的格罗滕迪克拓扑。对于不可数强极限基数 κ，只取 κ-小空间，便得到位点；应用基比较结果 [BGH18，命题 3.12，可知这些包含映射在超层上诱导等价。11]。

定义 2.11 ([Sch20，定义 11。7])。 凝聚 ∞-topos 凝聚 *anima* 定义为

$$\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n}) \coloneqq \mathcal{S}\mathrm{hv}_{\mathcal{A}\mathrm{n}}(\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}_\kappa).$$

在下文中，我们将忽略 κ，因为它与我们的考量无关；另见 [HM24，注 3.5。6]。

注 2.12。 需要提醒的是，范畴 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 的表现极其[4] 糟糕。在整个项目过程中，这给我们造成了许多麻烦。例如，无限极端不连通空间的二元积甚至都不存在于 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 中，见 [Lan22，命题 2。54]。我们稍后将证明，它并不具有所有纤维，见定理 4.13。此外还要指出，极端不连通空间中的每个收敛序列最终都是常值序列 [Gle58，定理 1。3]。这些对象与集合论密切相关，因为每个极端不连通空间都是离散空间的 Stone–ˇCech 紧致化的一个收缩 [Rai59，推论]。后者常见于集合论语境。

注 2.13。研究极端不连通空间的一个主要原因是，正如 Gleason 所指出的，它们恰好是 $\mathcal{CH}\mathrm{aus}$ by Gleason [Gle58，定理 2。5], 也就是说，任何映入极端不连通空间的连续满射都有截面。

引理2.14 ([BH19，第 2.2 节。9])。函子 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{n}$ 是凝聚 *anima*，当且仅当它保有限积。

Exam例 2.15。设 X 是一个拓扑空间。那么，受限可表预层

$$よX\colon \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{n},\ Y \mapsto \mathrm{Map}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}(Y, X)$$

是一个凝聚 anima，因为 $\mathrm{Map}^{\mathcal{T}\mathrm{op}}(-, X)$ 保持有限积。特别地， $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 上的格罗滕迪克拓扑是子正则的。

[4]双关语，有意为之。

3. A fractured structure on condensed anima

在本节中，我们证明第一个主要结果，即给出 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 的一个断裂子范畴。随后，我们探讨由此带来的一些形式上的和计算上的影响。

3.1. **构造碎裂结构。** 我们将通过 Lurie 的几何位点工具来完成此事（定理 2.7），因此我们先提出这样一个位点。

定义 3.1。 令 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}$ 为由 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 的宽子范畴构成的位点，其态射为开嵌入，覆盖为定义一个格罗滕迪克拓扑 τ_{open} 的有限联合满射开嵌入族。我们将由此得到的层的 ∞-范畴记为 $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n}) := \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}})$ 。

注 3.2。 请注意，与 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 不同， $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}$ 上的拓扑并非子正则。事实上，在离散拓扑空间 $\{a,b\}$ 这个简单情形中便可看出这一点。它有一个由 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 构成的覆盖，但首选映射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}}(\{a,b\},\{*\}) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}}(\{a\},\{*\}) \times \mathrm{Map}_{\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}}(\{b\},\{*\})$$

只是集合之间的单射，而非双射。因此，我们采用记号约定 $よ^{\mathrm{open}}(_)$ 来表示 $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 中的可表层。根据定义，它们是可表预层的层化。

在陈述主定理之前，我们先作一些初等的点集拓扑观察。

引理 3.3. 设 $F\colon I \to \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 是一个图表。若该图表在 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 中的极限存在，则它由 $\mathcal{C}\mathcal{H}\mathrm{aus}$ 中的极限给出。

证明。设 L_D 是 F 在 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 中的极限， L_C 是 F 在 $\mathcal{C}\mathcal{H}\mathrm{aus}$ 中的极限。于是 L_D 在 $\mathcal{C}\mathcal{H}$aus 中存在一个指向 F 的锥。根据 L_C 的泛性质，这对应于唯一的连续映射 $f\colon L_D \to L_C$。现在，遗忘函子 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ 有一个左伴随，即 Stone–ˇCech 紧化 [ML98, 定理 VI.9.1], ，因此 L_D 的底层集合与 L_C 的底层集合相同，并且 f 是集合之间的双射。由于 L_D、 L_C 是紧豪斯多夫空间， f 是一个同胚 [Mun00, 定理 26.6]。□

这一结果直接推出以下推论。

推论 3.4。 沿任意映射对开嵌入取拉回，在$\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$中仍是开嵌入，并且在 $\mathcal{C}\mathcal{H}\mathrm{aus}$中按拉回求值。

注 3.5。 这一结果尤其依赖于这样一个观察：极端不连通空间的既开又闭子空间仍是极端不连通的。尽管这是一个初等观察，但它实际上是关键的点集拓扑事实；没有这一事实，推论 3.4 便不成立。一个明确的反例见定理 4.13 。

引理 3.6。 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$中的开嵌入在收缩下封闭。

证明。 假设我们有一个收缩图表

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_1} & S & \xrightarrow{p_1} & A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow[i_2]{} & T & \xrightarrow[p_2]{} & B \end{array},$$

其中 f 是开嵌入。根据推论 3.4 ，只需证明左侧的方块是拉回方块。

根据引理 3.3，拉回是 $B \times_T S$ 在 T中的交。由于 $i_2 \circ g = f \circ i_1$ 是单射， g也是单射。由于 i_1 和 g 都是单射，诱导映射 $A \to B \times_T S$ 是单射。只需证明它也是满射；由 [Mun00，定理 266] 即可得出该映射是同胚。

设（b， s）属于 $B \times_T S$。我们希望证明（b， s）是 $p_1(s)$ 在映射 $A \to B \times_T S$ 下的像。事实上，我们有 $g \circ p_1(s) = p_2 \circ f(s) = p_2 \circ i_2(b) = b$ 并且

$$f \circ i_1 \circ p_1(s) = i_2 \circ g \circ p_1(s) = i_2 \circ p_2 \circ f(s) = f(s)$$

这意味着 $i_1 \circ p_1(s) = s$，因为 f 是单射。这就完成了证明。 □

定理 3.7。函子

$$\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n}) \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$$

由定理 2.7 诱导出一个到碎裂子范畴上的等价。

证明。 由定理 2.7 我们需要证明（$\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}$, τ_{open}）定义了一个几何位点。我们知道等价是开嵌入（显然），开嵌入在拉回下稳定（推论 3.4），开嵌入满足三角条件（经典习题），并且在收缩下封闭（引理 3.6）。因此（$\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}$）是一个可容许结构。

剩下需要验证 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}$ 与 τ相容。设 $\{g_\alpha \colon S_\alpha \to S\}_{\alpha\in J}$是 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$中的一个覆盖筛，这意味着存在有限子集 $J' \subseteq J$，使得 $g \colon = (g_\alpha)_{\alpha\in J'} \colon \coprod_{\alpha\in J'} S_\alpha \to S$是满射。因为 S 是极端不连通的，所以存在截面 $s \colon S \to \coprod_{\alpha\in J'} S_\alpha$ （注记 2.13）。对 $\alpha \in J'$，我们记$s_\alpha = s|_{s^{-1}(S_\alpha)} \colon s^{-1}(S_\alpha) \to S_\alpha$。于是，该复合

$$g_\alpha \circ s_\alpha = (g \circ s)|_{s^{-1}(S_\alpha)} = (\mathrm{id}_S)|_{s^{-1}(S_\alpha)} \colon s^{-1}(S_\alpha) \to S$$

是包含映射 $s^{-1}(S_\alpha) \hookrightarrow S$。这是一个开嵌入，并且属于覆盖筛 $\{g_\alpha\}_{\alpha\in J}$，因为它是通过对映射到 g_α 进行前复合得到的。此外， $s^{-1}(S_\alpha) \subseteq S$ 是既开又闭的，因此再次是极端不连通的（注 3.5）。此外，$\{g_\alpha \circ s_\alpha\}_{\alpha\in J'}$ 是一个映射有限族，它们是联合满射的。因此，它是一个 τ-覆盖，由可容许态射组成，这表明可容许结构与 τ相容。 □

我们以这一结果的一个形式推论结束本节。

推论 3.8。 *∞-topos* $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 在 $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$上是（余）单子的。特别地，函子$j^* \colon \mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n}) \to \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 生成所有（余）极限。

证明。 这由结合 引理 2.4 和 定理 3.7即可得到。 □

3.2. **从凝聚 anima 到空间层**。 尽管碎裂结构的形式推论是良好的第一步，但通过更深入地理解 $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$，我们可以得到关于 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$的强大得多的结果。

Here 我们利用了极端不连通空间上拓扑的特定性质 ，

注 3.9。 设 S 是一个投射有限集。那么，我们可以在 S的开子集（或开闭子集）上构造三个不同的位点：

- ($\mathcal{O}$开$_S$, τ)： S的开子集所成的偏序集，配备联合满射映射族拓扑。
- ($\mathcal{C}$开闭$_S$, τ)： S的开闭子集所成的偏序集，配备联合满射映射族拓扑。
- ($\mathcal{C}$开闭$_S$, τ_{fin})： S的开闭子集所成的偏序集，配备有限联合满射映射族拓扑。

此外，显然的包含函子

$$(\mathcal{C}\mathrm{lopen}_S, \tau^{\mathrm{fin}}) \xhookrightarrow{\iota_f} (\mathcal{C}\mathrm{lopen}_S, \tau) \xhookrightarrow{\iota_c} (\mathcal{O}\mathrm{pen}_S, \tau)$$

在 ∞层范畴之间诱导出一个等价

$$\mathcal{S}\mathrm{hv}(S) = \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{O}\mathrm{pen}_S, \tau) \xrightarrow[\simeq]{(\iota_c)^*} \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{C}\mathrm{lopen}_S, \tau) \xrightarrow[\simeq]{(\iota_f)^*} \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{C}\mathrm{lopen}_S, \tau^{\mathrm{fin}}).$$

事实上，由于 S 是紧致的，因此 S 的任意闭开覆盖都有有限子覆盖，从而证明 $(\iota_f)^*$ 是一个等价。此外，根据 [AT08，命题 3.1，7], 每个全不连通局部紧豪斯多夫空间都有一个闭开基，这意味着 ι_c 是 [Aok23，定义 A 下方所述意义上的一个基。2]因此，根据 [Aok23，推论 A，8], $(\iota_c)^*$ 也构成一个等价。

我们还需要考察最后一个位点。

引理 3.10。 设 S 是一个极端不连通空间。那么，函子

$$\rho_S \colon (\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}})_{/S} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{lopen}_S, \ (i \colon U \to S) \mapsto i(U)$$

是范畴等价。

证明。 根据定义 $\mathcal{C}\mathrm{lopen}_S$ 是一个偏序集。此外，由于 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}_{/S}$ 中的态射是包含映射，范畴 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}_{/S}$ 是一个预序。现在，根据存在一个函子$\mathcal{C}\mathrm{lopen}_S \to (\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}})_{/S}$ 这一事实即可得到结论，该函子将一个开闭子集 $U \subseteq S$ 映射为开嵌入 $U \to S$，而这必然就是逆函子。□

命题 3.11. 设 $S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$，并设 $\pi_S\colon \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}_{/S} \to \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}$ 为投影函子。则下列函子是 ∞-范畴的等价：

$$\mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{O}\mathrm{pen}_S, \tau) \xrightarrow[\simeq]{(\iota_f \circ \iota_c)^*} \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{C}\mathrm{lopen}_S, \tau^{\mathrm{fin}}) \xrightarrow[\simeq]{(\rho_S)^*} \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}_{/S}) \xrightarrow[\simeq]{(\pi_S)_!} \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/\text{よ}_{\mathrm{open}}(S)}.$$

因此，它们复合成等价 $\eta_S\colon \mathcal{S}\mathrm{hv}(S) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/\text{よ}_{\mathrm{open}}(S)}$。

证明。 函子 $(\iota_f \circ \iota_c)^*$ 是等价，这由 注 3.9 得出。此外，$(\rho_S)^*$ 是等价，因为ρ_S 是等价，这由 引理 3.10 得出。最后，$(\pi_S)_!$ 是等价，这由 [Jan24，引理 2 得出。2]□

推论 3.12. 假设 $X \in \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 由可表对象的余极限给出，即经由等价 $f\colon \mathrm{colim}_i \text{よ}_{\mathrm{open}} S_i \xrightarrow{\simeq} X$。则，

$$\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/X} \xrightarrow[\simeq]{f^*} \lim_i \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/\text{よ}_{\mathrm{open}} S_i} \xrightarrow[\simeq]{(\eta_{S_i})^{-1}} \lim_i \mathcal{S}\mathrm{hv}(S_i)$$

是 ∞-范畴之间的等价。

证明。第一个等价直接由 ∞-拓扑斯中的下降 [Lur09，定理 6.1.3 得出。9] 第二个则由命题 3.11得出。□

现在我们利用这些计算，给出 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 的一组充足点的明确描述。充足点的存在本身已可由德利涅完备性定理 [Lur18，定理 A.4.0 得出。5]，参见 [BH19，推论 2.4。5]然而，据我们所知，文献中尚无对这些点的明确刻画。

引理 3.13。 设 $S \in \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$。则 $\mathcal{S}\mathrm{hv}(S)$ 是超完备的。

证明。根据 [Lur09，注 7.2.3，3] S 的覆盖维数为 ≤ 0，因为每个有限集的覆盖维数都是 ≤ 0。因此， $\mathcal{S}\mathrm{hv}(S)$ 根据 [Lur09，定理 7.2.3，具有同伦维数 ≤ 0 。由于$\mathcal{S}\mathrm{hv}(S) \simeq \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{C}\mathrm{lopen}_S, \tau^{\mathrm{fin}})$（见注 3.9），它由 $U \in \mathcal{C}\mathrm{lopen}_S$ 的可表对象 $\text{よ}_{\mathrm{open}} U$ 在余极限下生成。因为 U 也是一个投射有限集， $\mathcal{S}\mathrm{hv}(S)_{/\text{よ}_{\mathrm{open}} U} \simeq \mathcal{S}\mathrm{hv}(U)$ 同样具有同伦维数 ≤ 0 。这表明 $\mathcal{S}\mathrm{hv}(S)$ 局部同伦维数为 ≤ 0。Jardine定理 [Lur09，推论 7.2.1，12]蕴含它是超完备的。□

定理 3.14. 点的集合

$$\left\{ \mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n}) \longrightarrow \mathcal{A}\mathrm{n},\ F \mapsto \operatorname*{colim}_{\substack{U \subseteq S \ \mathrm{clopen} \\ s \in U}} F(U) \right\}_{S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc},\ s \in S}$$

是联合保守的。

证明。主要工具是碎裂结构（定理 3.7）。我们将给出 $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 中联合保守点的一个集合，由 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 中联合保守点的一个集合诱导，该结论由 命题 2.8 得出。

首先，设 $S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$。那么， $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/\text{よ}_{\mathrm{open}} S} \simeq \mathcal{S}\mathrm{hv}(S)$ 由 命题 3.11 可知。根据 引理 3.13，它是超完备的。因此，点的集合 $s\colon \mathcal{A}\mathrm{n} \to \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/\text{よ}_{\mathrm{open}} S}$，其中 $s \in S$，由 [Lur17，引理 A.3。9] 可知是保守的。于是，我们得到一组点

$$\mathcal{A}\mathrm{n} \underset{s_*}{\overset{s^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}} \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/\text{よ}_{\mathrm{open}} S} \underset{\longrightarrow}{\overset{-\times \text{よ}_{\mathrm{open}} S}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}} \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$$

遍历 $S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 和 $s \in S$。现在我们将验证这组映射是联合保守的。

设 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 中的一个映射，并假设对于所有 $S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 和 $s \in S$， $s^*(f \times \text{よ}_{\mathrm{open}} S)$ 都是一个等价。由 s^* 的保守性，我们推得 $f \times \text{よ}_{\mathrm{open}} S$ 是一个等价，

对于 $S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$。此外，$\mathrm{colim}_{S\in\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}} よ_{\mathrm{open}}S \simeq *$ 根据 [Cis19，命题 6.2。13]。现在我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} \underset{S\in\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}}{\mathrm{colim}}(X \times よ_{\mathrm{open}}S) & \xrightarrow[\simeq]{\underset{S\in\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}}{\mathrm{colim}}(f\times よ_{\mathrm{open}}S)} & \underset{S\in\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}}{\mathrm{colim}}(Y \times よ_{\mathrm{open}}S) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ X \times * \simeq X \times \underset{S\in\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}}{\mathrm{colim}} よ_{\mathrm{open}}S & \longrightarrow & Y \times \underset{S\in\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}}{\mathrm{colim}} よ_{\mathrm{open}}S \simeq Y \times * \end{array}$$

根据上述观察，顶部映射是一个等价。由于∞-拓扑斯是笛卡尔闭的，竖直映射都是等价。因此，底部映射是一个等价。

根据 命题 2.8 点的集合

$$\mathcal{A}\mathrm{n} \underset{s_*}{\overset{s^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}} \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/よ_{\mathrm{open}}S} \overset{-\times よ_{\mathrm{open}}S}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}} \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n}) \underset{j_*}{\overset{j^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}} \mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$$

在 $S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 上取值，而 $s \in S$ 是联合保守的。顶部复合映射具有上述明确公式。□

现在我们可以应用 推论 2.10，以给出超完备性的新证明；此前这一结果已在 [BH19，推论 2.4 中证明。3]。

推论 3.15。 ∞-拓扑斯 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n}) = \mathcal{S}\mathrm{hv}_{\mathcal{A}\mathrm{n}}(\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc})$ 是超完备的。

也可以利用碎裂结构来恢复有关上同调的结果。

推论 3.16。 设 $S \in \mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$。那么， $\mathcal{S}\mathrm{hv}(S)$ 的形状与 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})/よS$的形状相同，且均由 S 的底层同伦类型给出。

证明。 几何态射 $j^*\colon \mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/よS} \to \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})_{/よ_{\mathrm{open}}S} \simeq \mathcal{S}\mathrm{hv}(S)$ 还存在一个左伴随，因此根据 [Clo24b，命题 17]., 它保形状。第二部分由以下事实得出：根据 S， [Mai25，例 1.213]， $\mathcal{S}\mathrm{hv}(S)$ 的形状就是 的底层同伦类型。□

注 3.17. 根据 [Mai25，定理 1.2.18，推论 1.2.33], , 对于每个仿紧紧生成空间 X， $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})/よX$ 的形状都与 $\mathcal{S}\mathrm{hv}(X)$ 的形状相同；对于 CW复形 [, 该形状是 X 的底层同伦类型（见 [Hoy18，例 2.4]）；对于有限拓扑集 [, 亦然（见 [Mai25，例 1.2.13]）。另一方面，存在一个局部可缩紧豪斯多夫空间 X，使得 $\mathcal{S}\mathrm{hv}(X)$ 的形状与 X 的底层同伦类型不同，见 [Car21，例 2.2.4]。

推论 3.18. 关于 $\mathbb{Z}$ 的凝聚上同调与层上同调对极端不连通空间是一致的。

证明。拓扑斯论上同调仅依赖于形状，参见例如 [Mai25，构造 1.3。1]。因此，由推论 3.16即得。 □

注 3.19。 运用多种更为专门的方法，推论 3.18 对紧豪斯多夫空间也是已知的 [Sch19，定理 3。2]，仿紧紧生成空间或局部可缩空间[Mai25，命题 1.3。5],或局部紧豪斯多夫空间 [Hai22，推论 4。12]。

根据 [CS22，命题 2.8，习题 1], 紧豪斯多夫空间在 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{S}\mathrm{et})$中是紧致的。此结果对极端不连通空间的一个 ∞-范畴提升，可在验证 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$中的滤余极限已可在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}\mathrm{n})$中借助引理 2.14算出之后，直接通过米田型论证看出。尽管如此，碎裂结构提供了另一种一般性的处理方法。

推论3.20。 极端不连通空间在 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$中是紧致的。

证明。 注意到 $\mathcal{S}\mathrm{hv}(S) \simeq \mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{open}}(\mathcal{A}\mathrm{n})/よ_{\mathrm{open}}S$ 根据 命题 3.11 并且 $よ_{\mathrm{open}}S$ 在其中是紧致的，这由 [Lur09、注记7.3.1.5、推论 7.3.4 可知。11], 我们可以采用与 [Clo24a定理 2 相同的证明。15]。 □

4. Further candidates for fractured structures

在 第3节 中，我们借助极端不连通空间和开嵌入观察到了一种碎裂结构。然而，凝聚对象可以通过不同的位点实现，而每个位点都带有不同的“包含映射”概念。因此，我们面临的问题是，是否还有其他选择。

在本节中，我们观察到进一步的潜在候选实际上并不满足所需条件。有趣的是，这要求我们深入点集拓扑的技术层面。

4.1. 紧豪斯多夫空间、有限拓扑集与（开）嵌入。 通过从更大的对象集合出发，即从位点 $\mathcal{CH}\mathrm{aus}$ 或 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$ 之一出发，并尝试为它们配备几何位点结构，可以实现 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\mathrm{open}}$ 的一种自然扩大。回想一下，

$$\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n}) = \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}) \simeq \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in})^{\mathrm{hyp}} \simeq \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{CH}\mathrm{aus})^{\mathrm{hyp}},$$

因此，我们在此还必须谨慎处理超完备化。

注 4.1. 虽然一般很难判定范畴 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$ 与 $\mathcal{CH}\mathrm{aus}$ 上的任意层是否超完备，根据 [Lur09，引理 6.5.2.9]每个截断层都是超完备的。

第 一步是构造可容许结构。考虑宽子范畴

$$\mathcal{CH}\mathrm{aus}^{\mathrm{inj}}, \mathcal{CH}\mathrm{aus}^{\mathrm{open}} \subset \mathcal{CH}\mathrm{aus} \quad \text{and} \quad \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}, \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{open}} \subset \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$$

由单射（分别由开嵌入）生成。它们可以赋予格罗滕迪克拓扑τ_{inj} （分别为）τ_{open} ，其覆盖由单射（分别由开嵌入）构成的有限联合满射族给出。类似于（但不如其复杂的）定理 3.7的论证可得：

引理4.2。 宽子范畴

$$\mathcal{CH}\mathrm{aus}^{\mathrm{inj}}, \mathcal{CH}\mathrm{aus}^{\mathrm{open}} \subset \mathcal{CH}\mathrm{aus} \quad \textit{and} \quad \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}, \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{open}} \subset \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$$

各自定义了可容许结构。

人们自然希望它们能细化为几何位点，并分别具有τ_{inj} 和τ_{open}。本小节旨在说明，这些可容许结构与τ_{inj}（分别与τ_{open}）不兼容。

定义 4.3。 设 $f\colon X \to Y$ 是紧豪斯多夫空间之间的映射。若存在有限个闭[5] 子空间$Z_1, \cdots, Z_n \subseteq Y$及映射 $g_i\colon Z_i \to X$，使得 $f \circ g_i = \mathrm{id}_{Z_i}$对所有 i和 $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i = Y$均成立，则称其有有限个联合满射局部截面。

回顾 [ML98，定理 VI.9。1] 遗忘函子 $U\colon \mathcal{CH}\mathrm{aus} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ 有一个由 Stone–Čech 紧化 β 给出的左伴随 ˇ，它可分解为遗忘函子 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc} \to \mathcal{CH}\mathrm{aus}$。关于拓扑空间 βS的更多细节，请参见 注 4.12。

现在，我们考虑带有离散拓扑的 $\mathbb{N}$ ，以及其到一点紧化$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$中的包含映射。伴随给出一个连续映射 $e\colon \beta\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。在介绍主要结果之前，我们先对满射作如下技术性观察。

注 4.4. 设 $p\colon Y \to X$ be 是 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$ 中的一个满射映射。那么，よ(p) 是 $\mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in})$ 中的有效满射。事实上，由 p 生成的筛是一个覆盖筛。因此，根据 [Lur09, 命题 6.2.3.20]，在 $\mathcal{X} = \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in})$、 $\mathcal{C} = \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$、 $f =$ よ: $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in} \to \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in})$ 这一特例中，且由于 よ 是恒等函子的像，よ(p) 是一个有效满射。

下面给出一个关于断裂结构的观察。

命题 4.5. 假设以下任一位点包含映射

$$\mathcal{CH}\mathrm{aus}^{\mathrm{inj}}, \mathcal{CH}\mathrm{aus}^{\mathrm{open}} \subset \mathcal{CH}\mathrm{aus} \quad \textit{and} \quad \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}, \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{open}} \subset \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$$

通过以下方式诱导出一个碎裂结构

$$\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{inj}}(\mathcal{A}\mathrm{n}) \coloneqq \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}) \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$$

（其他变体也同样如此）。随后 $e\colon \beta\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 具有有限个联合满射局部截面。

[5]由于我们考察的是 $\mathcal{CH}\mathrm{aus}$ 中的态射，因此考虑闭子空间。

证明。 我们将给出 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$ 的论证；将所有出现的 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$ 替换为 $\mathcal{CH}\mathrm{aus}$ 后，完全相同的论证也适用于 $\mathcal{CH}\mathrm{aus}$。

考虑有限拓扑集之间的映射 $e\colon \beta\mathbb{N} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$。作为紧豪斯多夫空间之间的映射，它的像是闭集。根据构造，它覆盖了全部 $\mathbb{N}$，因此也必定覆盖 ∞。所以，e 是满射。现在考虑映射 $よ(e)$。由于该位点是子正则的，$よ(e)$ 是层之间的映射。此外，$よ(e)$ 是 0-截断层之间的映射，因此也是超层之间的映射，这意味着它属于 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$，见注 4.1。最后，由于 e 是满射，根据注 4.4，$よ(e)$ 是 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 中的有效满射。

由于 j^* 保持余极限和极限，因此它保持有效满射，所以

$$j^*(よ(e))\colon j^*(よ(\beta\mathbb{N})) \longrightarrow j^*(よ(\mathbb{N}\cup\{\infty\}))$$

是 $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{inj}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 中的有效满射。暂且将 $よ_{\mathrm{inj}}$ 记作 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}$ 上的 Yoneda 嵌入，以便与 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$ 上的 Yoneda 嵌入区分开来，并将其层化记作 $よ_{\mathrm{inj},\ \mathrm{sh}}$[6]。我们考虑 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}$ 上预层之间的以下拉回方块：

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\quad l \quad} & P & \longrightarrow & j^*(よ(\beta\mathbb{N})) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle j^*(よ(e))} \\ よ_{\mathrm{inj}}(\mathbb{N}\cup\{\infty\}) & \xrightarrow[i]{} & よ_{\mathrm{inj,sh}}(\mathbb{N}\cup\{\infty\}) & \longrightarrow & j^*よ(\mathbb{N}\cup\{\infty\}) \end{array}.$$

这里右边的方块实际上是层的拉回方块。由有效满射在 $\mathcal{C}\mathrm{ond}^{\mathrm{inj}}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 中的拉回稳定性，q 同样是层的有效满射。此外，由构造，i 是预层的局部等价（即层化后成为等价）。由层化的左正合性 [Lur09，推论 6.2.1.6，命题 6.2.2.7]，l 因而也是预层的局部等价。这意味着 p 的层化是有效满射 q。

我们来考虑 p 在 $\mathrm{Fun}((\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}})^{\mathrm{op}},\ \mathcal{A}\mathrm{n})$ 中的像分解，并将其记为

$$R \twoheadrightarrow S \hookrightarrow よ_{\mathrm{inj}}(\mathbb{N}\cup\{\infty\}).$$

由于 q 是有效满射，第二个映射 $S \hookrightarrow よ^{\mathrm{inj}}(\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ 在层化后成为等价。这意味着 S 是 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 的覆盖筛，参见 [Lur09，引理 6.2.2.16]。

展开拉回方块可知，$S \hookrightarrow よ^{\mathrm{inj}}(\mathbb{N}\cup\{\infty\})$恰好由到 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 的单射构成，且这些单射都可以提升到 $\beta\mathbb{N}$。根据 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}$ 上拓扑的定义，这意味着存在有限族单射 $k_\alpha\colon V_\alpha \hookrightarrow \mathbb{N}\cup\{\infty\}$，它们联合满射，且每个 k_α 都可以提升到 $\beta\mathbb{N}$。这恰好就是 e 具有有限个联合满射局部截面的条件。□

引理 4.6。 映射 $e\colon \beta\mathbb{N} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 不具有有限个联合满射局部截面。

证明。 假设存在有限个联合满射局部截面，即闭子空间Z_1、$\cdots$、$Z_n \subseteq \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 以及映射 $g_i\colon Z_i \to \beta\mathbb{N}$，满足 定义 4.3中的性质。假设$Z_i$ 对某个 i 是无限集。特别地，它必定包含 ∞，因为它包含一个严格递增且收敛到 ∞ 的自然数序列。根据假设，$g_i\colon Z_i \to \beta\mathbb{N}$ 是紧豪斯多夫空间之间的闭嵌入。因此，$\beta\mathbb{N}$ 也必定有一个由两两不同元素组成的收敛序列。然而，这是不可能的，因为 $\beta\mathbb{N}$ 是极端不连通的（注 2.12）。□

结合命题 4.5 与引理 4.6 可得以下结果。

推论 4.7。 这些可容许性结构

$$\mathcal{CH}\mathrm{aus}^{\mathrm{inj}}, \mathcal{CH}\mathrm{aus}^{\mathrm{open}} \subset \mathcal{CH}\mathrm{aus} \quad \textit{and} \quad \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}, \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{open}} \subset \mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}$$

不会在 $\mathcal{C}\mathrm{ond}(\mathcal{A}\mathrm{n})$ 上诱导出碎裂结构。

注 4.8。 此外，该论证还表明，所提出的构造不会在 $\mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in})$ 和 $\mathcal{S}\mathrm{hv}(\mathcal{CH}\mathrm{aus})$ 上产生断裂结构；事实上，相应的右伴随不保持有效满射。这是我们在证明命题 4.5时所用到的关于断裂结构的唯一性质。

[6]与注记 3.2类似，这个预层不一定是层，因为 $\mathcal{P}\mathrm{ro}\mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{inj}}$ 上的位点不是子正则的。

注 4.9。 满射

$$[0,1]^{\mathbb{N}} \to (S^1)^{\mathbb{N}},\ (x_0, x_1, \cdots) \mapsto \left(e^{2\pi i x_0}, e^{2\pi i x_1}, \cdots\right)$$

同样也不容许有限个联合满射局部截面。若仅讨论 $\mathcal{C}\mathcal{H}$aus 情形，这本已足够。

局部截面的重要性是促使我们考虑极端不连通空间的一个动因，因为它们正是 $\mathcal{C}\mathcal{H}$aus(注记 2.13)中的投射对象。

4.2. 极端不连通空间与嵌入。 仍着眼于极端不连通空间这一位点，我们可以问：能否将开嵌入的条件放宽为嵌入。这是一个自然的问题，因为后者更为一般，并且仍具有良好的范畴性质。然而，我们将看到这也行不通。具体而言，我们希望通过证明下述由 Dustin Clausen 提出的猜想，说明沿单射的拉回在 $\mathcal{E}$xtr$\mathcal{D}$isc 中未必存在。

猜想 4.10 (Clausen)。 范畴 $\mathcal{E}$xtr$\mathcal{D}$isc 并不容许所有纤维。

在陈述主要结果之前，我们先建立一些记号，并回顾关于 Stone–Čech 紧化的若干将始终相关的事实。集合 S 上的滤子是 S 的子集构成的一个非空族，且对有限交与超集封闭。S 上的超滤子是一个滤子，使得对所有 $A \subseteq S$，它要么包含 A，要么包含 $S \setminus A$。对给定元素 $s \in S$，族 $\{A \subseteq S\colon\ s \in A\}$ 是超滤子的一个例子，称为主超滤子。我们只回顾关于超滤子的下述结果。

引理 4.11 （塔斯基定理 [HJ99，定理 7。5]）。 设 S 为一个集合。则 S 上的每个滤子都可以扩张为一个超滤子。此外，所得超滤子是非主超滤子，当且仅当它包含所有余有限子集。

Le ˇ 让我们回顾一下集合 S的 Stone–Čech 紧化 βS 的一些详细性质 .

ˇ注 4.12。 对于每个集合 S，我们都可以关联一个 ***Stone–Čech*** 紧化 βS。 βS 的底层集合是超滤子的集合，而拓扑由以下集合生成 $A^* := \{u \in \beta S\colon\ A \in u\}$，其中 $A \subseteq S$。此外，存在一个（连续）映射 $S \to \beta S$，将 s 映射到主超滤子$u_s := \{A \subseteq S : s \in A\}$。

现在我们得到了以下主要结果。

定理 4.13。 设 p 是 $\mathbb{N}$上的一个非主超滤子。令 $\pi_1\colon\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 表示到第一因子的投影。那么，映射 $\beta\pi_1\colon\ \beta(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \beta\mathbb{N}$ 在 $\mathcal{E}$xtr$\mathcal{D}$isc中的 p 上没有纤维。

因此， 在 $\mathcal{E}$xtr$\mathcal{D}$isc上的单射无法构成碎裂结构 ure.

推论 4.14。 在 $\mathcal{E}$xtr$\mathcal{D}$isc 上的单射不构成可容许结构。

ˇ 证明需要进一步深入探讨 Stone–Čech 紧化的技术细节。先回顾以下引理。更多细节请参见 [HS12，定理 3.18(b)] 。

引理 4.15。 设 S 是一个集合范畴。那么， βS 的一个子集既开又闭，当且仅当它具有 A^*的形式，其中 $A \subseteq S$ 为某个对象。

设 p 是 $\mathbb{N}$上的一个超滤子。我们将 p 在映射 $\beta\pi_1\colon\ \beta(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \beta\mathbb{N}$ 下的原像（纤维）记为 F_p。注意，对于任意 p， F_p 是一个紧豪斯多夫空间，也是 $\beta(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$的闭子空间。关于 F_p，我们有以下引理，它可由定义直接展开得到。

引理 4.16. 设 p 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子， u 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$上的一个超滤子。那么，

$$u \in F_p \iff (\textit{for all } A \subseteq \mathbb{N} : A \in p \iff A \times \mathbb{N} \in u).$$

证明。 根据定义， $u \in F_p$ 当且仅当 $\beta\pi_1(u) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \times \mathbb{N} \in u\} = p$。这个等式恰好表明， $A \in p$ 当且仅当 $A \times \mathbb{N} \in u$。□

现在我们建立一些记号约定。设 $J \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是一个子集。 k阶切片 J，记作 $\mathcal{S}\mathrm{l}_k(J)$，是子集 $\{n \in \mathbb{N}\colon (n,\ k) \in J\}$。设 p 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子，且 $C_k = F_p \cap (\mathbb{N} \times \{k\})^*$。根据 引理 4.15， C_k 是 F_p 的开闭子集。它们与切片之间的关系如下所述。

引理 4.17。 设 p 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子，且 $J \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $C_k \subseteq F_p \cap J^*$ 当且仅当 $\mathcal{Sl}_k(J) \in p$。

证明。 首先，设 $\mathcal{Sl}_k(J) \in p$。设 $u \in C_k = F_p \cap (\mathbb{N} \times \{k\})^*$。于是，由定义， $u \in F_p$ 且 $\mathbb{N} \times \{k\} \in u$。由引理 4.16，由于 $\mathcal{Sl}_k(J) \in p$ 且 $u \in F_p$，我们有 $\mathcal{Sl}_k(J) \times \mathbb{N} \in u$。由于滤子对有限交封闭，我们有

$$\mathcal{Sl}_k(J) \times \{k\} = (\mathcal{Sl}_k(J) \cap \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \cap \{k\}) = (\mathcal{Sl}_k(J) \times \mathbb{N}) \cap (\mathbb{N} \times \{k\}) \in u.$$

但是，由切片的定义， $\mathcal{Sl}_k(J) \times \{k\} \subseteq J$，因此由向上闭包，我们还有 $J \in u$，或者等价地，$u \in J^*$。因此 $u \in F_p \cap J^*$，证明完毕。

现在，另一方面，假设 $\mathcal{Sl}_k(J) \notin p$。我们在 C_k 中构造一个不属于 $F_p \cap J^*$ 的超滤子。由于 p 是超滤子， $B := \mathbb{N} \setminus \mathcal{Sl}_k(J) = \{n \in \mathbb{N} \mid (n, \ k) \notin J\} \in p$。注意，由构造

$$(B \times \{k\}) \cap J = \emptyset. \tag{4.18}$$

考虑 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的子集族：

$$\mathcal{F} := \{A \times \mathbb{N} : A \in p\} \cup \{\mathbb{N} \times \{k\}, B \times \{k\}\}.$$

注意， $\mathcal{F}$ 对有限交封闭。事实上，我们只需考虑形如 $(A \times \mathbb{N}) \cap (\mathbb{N} \times \{k\})$ 和 $(A \times \mathbb{N}) \cap (B \times \{k\})$ 的交。我们只考虑第二种情形，第一种情形类似。这里，对于 $A \in p$，我们有

$$(A \times \mathbb{N}) \cap (B \times \{k\}) = (A \cap B) \times \{k\} \neq \emptyset$$

因为 $A \cap B \in p$，所以非空。因此， $\mathcal{F}$ 具有有限交性质，并由塔斯基定理（引理 4.11）可扩张为 $u_{\mathcal{F}}$ 上的超滤子 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$。

根据构造， $u_{\mathcal{F}}$ 对所有 $A \times \mathbb{N}$ 都包含 $A \in p$，因此根据 $u_{\mathcal{F}} \in F_p$，引理 4.16。此外， $\mathbb{N} \times \{k\} \in u_{\mathcal{F}}$，所以 $u_{\mathcal{F}} \in C_k = F_p \cap (\mathbb{N} \times \{k\})^*$。另一方面， $B \times \{k\} \in u_{\mathcal{F}}$ 并且根据 $B \times \{k\}) \cap J = \emptyset$ 方程 (4.18)，所以 $J \notin u_{\mathcal{F}}$，换言之， $u_{\mathcal{F}} \notin J^*$。因此， $u_{\mathcal{F}} \in C_k$ 且 $u_{\mathcal{F}} \notin F_p \cap J^*$，证毕。□

现在我们固定 F_p 中的一个开子集。

记号 4.19： 我们将并集 $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ 记作 $U_p := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$。

显然， U_p 是 F_p 中的开集，因为它是开子集 C_k 的并集。现在我们可以陈述关键引理了。

引理 4.20。 设 p 是 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子。则对于每个开闭子集 $V \subseteq F_p$，满足 $U_p \subseteq V$，都存在 F_p 的一个开闭子集 V'，满足 $U_p \subseteq V' \subsetneq V$。

证明。 设 $V = F_p \cap J^*$ 对某个 $J \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，满足 $U_p \subseteq V$。于是， $\mathcal{Sl}_k(J) \in p$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立，由引理 4.17。根据 引理 4.11，我们有 $T_k := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} \in p$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立。这意味着对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有

$$B_k := T_k \cap \bigcap_{0 \leq j \leq k} \mathcal{Sl}_j(J) \in p,$$

因为滤子在有限交下封闭。注意 $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} T_k = \emptyset$。现在，对所有 $k \in \mathbb{N}$，令 $E_k := B_k \setminus B_{k+1}$。这些集合具有以下性质：

- 首先， $E_k \subseteq B_k \subseteq \mathcal{Sl}_k(J)$，因此，根据切片的定义， $E_k \times \{k\} \subseteq J$。
- 其次， $E_k \notin p$，因为 $B_{k+1} \in p$ 且 $B_{k+1} \cap E_k = \emptyset$，而超滤子不能包含空集 t.
- 最后，$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \setminus B_{k+1} = B_0 \in p$。

现在，令 $R := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E_k \times \{k\}) \subseteq J$，并记 $J' := J \setminus R$。根据定义， $V' := F_p \cap (J')^*$ 在 F_p 中是既开又闭的。为完成该证明，我们证明 $U_p \subseteq V'$ 与 $V' \subsetneq V$。

我们首先检查 $U_p \subseteq V'$。固定一个 $k \in \mathbb{N}$。根据构造， $\mathcal{Sl}_k(J') = \mathcal{Sl}_k(J) \setminus E_k$。由于 $E_k \notin p$，我们有

$$\mathcal{Sl}_k(J') = \mathcal{Sl}_k(J) \setminus E_k = \mathcal{Sl}_k(J) \cap (\mathbb{N} \setminus E_k) \in p.$$

因此， $U_p \subseteq V'$ 根据引理 4.17。

现在，我们讨论 $V' \subsetneq V$。根据定义， $J' = J \setminus R$ 因此

$$V' = F_p \cap (J')^* = F_p \cap (J \setminus R)^* \subseteq (F_p \cap J^*) \setminus (F_p \cap R^*) \subseteq F_p \cap J^* = V.$$

由上一行还可得，包含关系不是等式，当且仅当 $F_p \cap R^* \neq \emptyset$。

设 $\mathcal{F}=\{A\times\mathbb{N}\mid A\in p\}\cup\{R\}$。注意到 $\mathcal{F}$对有限交封闭。事实上，我们只需考虑形如 $(A\times\mathbb{N})\cap R$的交。不过，我们可以计算得

$$\pi_1((A\times\mathbb{N})\cap R)=A\cap\pi_1(R)=A\cap\bigcup_{k\in\mathbb{N}}E_k=A\cap B_0\in p.$$

由于 $\pi_1((A\times\mathbb{N})\cap R)$ 非空，由此可知 $(A\times\mathbb{N})\cap R$ 同样非空。于是我们可以将 $\mathcal{F}$延拓为一个超滤子 $u_{\mathcal{F}}$，它定义在 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上，依据塔斯基定理（引理 4.11）。由 引理 4.16， $u_{\mathcal{F}}\in F_p$，并且根据定义， $R\in u_{\mathcal{F}}$，即 $u_{\mathcal{F}}\in R^*$。因此， $u_{\mathcal{F}}\in F_p\cap R^*$ 证明完毕。□

这条引理与闭包的泛性质立即给出如下推论。

推论 4.21. 设 p 为 $\mathbb{N}$上的非主超滤子。则 U_p （记号 *4.19*）在F_p中不是开集。

现在我们可以综合以上所有步骤，从而完成定理 4.13的证明。

定理的证明定理 *4.13*。 根据 引理 3.3，若纤维存在，则它必定是 $\mathcal{CH}$中的纤维。因此，只需证明紧豪斯多夫空间 $F_p=(\beta\pi_1)^{-1}(p)$ 并非极端不连通。现在，根据 推论 4.21，存在一个开子集 $U_p\subseteq F_p$，使得U_p 在 F_p中不是开集，因此 F_p 不是极端不连通的。□

注 4.22。 假设 p 是非主的，这一点至关重要。事实上，取 p 上的一个主超滤子 $m\in\mathbb{N}$。那么，根据 引理 4.16，超滤子 u 属于纤维 F_p，当且仅当它包含 $A\times\mathbb{N}$，对于 $A\in p$而言，在此情形下这等价于包含 $\{m\}\times\mathbb{N}$。这意味着该纤维恰好是（$\{m\}\times\mathbb{N})^*$。根据 引理 4.15， $(\{m\}\times\mathbb{N})^*$ 在 $\beta(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ 中既开又闭，因此它仍然是极端不连通的（注 3.5）。

事实上，我们可以更具体地描述这个纤维。令 $(\{m\},\mathrm{id})\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$为将 n映射到 $(m,\ n)$ 的映射。

命题 4.23。 映射 $\beta(\{m\},\mathrm{id})\colon\beta\mathbb{N}\to\beta(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ 是一个单射，其像为 $\beta\pi_1$ 在 m 上的主超滤子所对应的纤维。因此，该纤维同胚于 $\beta\mathbb{N}$。

证明。 首先，映射 $\beta(\{m\},\mathrm{id})\colon\beta\mathbb{N}\to\beta(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ 是一个单射，因为它是 $\beta\pi_1$ 的截面。现在，令 u_0 为 $\mathbb{N}$ 上的任意超滤子。那么，

$$\begin{aligned}\beta(\{m\},\mathrm{id})(u_0)&=\{A\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid(\{m\},\mathrm{id})^{-1}(A)\in u_0\}\\&=\{A\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid\{k\in\mathbb{N}\mid(m,k)\in A\}\in u_0\}.\end{aligned}$$

其中包含 $\{m\}\times\mathbb{N}$。因此，根据 备注 4.22 ， $\beta(\{m\},\mathrm{id})$ 的像包含于 $\beta\pi_1$ 在 m 上的主超滤子所对应的纤维中。现在我们来验证它是满射。设 u 是一个包含 $\{m\}\times\mathbb{N}$的超滤子。令 $u_0:=\{B\subseteq\mathbb{N}\mid\{m\}\times B\in u\}$，则它非空，因为它包含 $\mathbb{N}$，并且显然满足超滤子的其余条件。利用上面对$\beta(\{m\},\mathrm{id})(u_0)$ 的计算，我们得到

$$\beta(\{m\},\mathrm{id})(u_0)=\{A\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid\{k\in\mathbb{N}\mid(m,k)\in A\}\in u_0\}=u,$$

含义 u 属于 $\beta(\{m\},\ \mathrm{id})$ 的像。最后，由 [Mun00，定理 26。6] 可知 $\beta(\{m\},\ \mathrm{id})$ 是到其像上的一个同胚。□

最后，我们再补充一个关于 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 中极限的观察。虽然这对我们的目的并非必需，但本身也可能具有一定意义。除了推论 3.4之外，这是我们在$\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 中能得到的唯一极限。这里我们主要依赖 [GH09]。

命题 4.24。 范畴 $\mathcal{E}\mathrm{xtr}\mathcal{D}\mathrm{isc}$ 在交下封闭。

证明。 由 [GH09，定理 39]，有限拓扑集与布尔代数之间的斯通对偶可限制为极端不连通空间与完备布尔代数之间的对偶，即每个子集既有上确界也有下确界。此外，由 [GH09，定理 37]，闭子空间对应于布尔代数的商，并且由 [GH09，习题24.12]，对完备理想取商对应于极端不连通子空间。另外，由 [GH09，定理 33]，对两个理想之并取商对应于相应子空间的交。最后，由 [GH09，定理 21]，两个完备理想的并仍是完备理想。因此，证明完毕。□

References

[AGV72a] Michael Artin、Alexander Grothendieck与Jean-Louis Verdier。*Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos* 269 *Lecture Notes in Mathematics* ，第Vol.卷，收录于。Springer-Verlag，柏林-纽约，1972年。Bois-Marie代数几何研讨班S´，G´几何´代数几何´，1963–1964（SGA 4），由M. Artin、A. Grothendieck与J. L. Verdier主持´。合作者：N. Bourbaki、P. Deligne与B. Saint-Donat。（见第2页）[AGV72b] Michael Artin、Alexander Grothendieck与Jean-Louis Verdier。*Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2* 270 *Lecture Notes in Mathematics* 1972 ，第Vol.卷，收录于。Springer-Verlag，柏林-纽约，。Bois-Marie代数几何研讨班S´，G´几何´代数几何´，1963–1964（SGA 4），由M. Artin、A. Grothendieck与J. L. Verdier主持´。合作者：N. Bourbaki、P. Deligne与B. Saint-Donat。（见第2页）[Aok23] Ko Aoki。滤过对象与层的张量三角几何。 *Math. Z.*，303(3)：论文编号62，27，2023年。（见第8页）[Aok24] Ko Aoki。经由固化的（半）拓扑 K-理论。 *arXiv preprint*，2024年。arXiv:2409.01462。（见第2页）[AT08] Alexander Arkhangel'skii与Mikhail Tkachenko。 *Topological groups and related structures*，*Atlantis Studies in Mathematics*第1卷。Atlantis Press，巴黎；世界科学出版社私人有限公司，哈肯萨克，新泽西州，2008年。（见第8页）[BGH18] Clark Barwick、Saul Glasman与Peter Haine。外流论。 *arXiv preprint*，2018年。arXiv:1807.03281。（见第6页）[BH19] Clark Barwick与Peter Haine。pyknotic对象，I. 基本概念。2019年。arXiv:1904.09966。（见第2、4、6、9和10页）[BLHv25] Jeffrey Bergfalk、Chris Lambie-Hanson与Jan ˇSaroch。Whitehead问题与凝聚数学，2025年。arXiv:2312.09122。（见第2页）[Bri25] Emma Brink。凝聚群上同调。 *arXiv preprint*，2025年。arXiv:2512.03648。（见第2页）[Car20] David Joseph Carchedi。作为结构化∞-拓扑斯的高阶轨形与Deligne-Mumford代数栈。 *Mem.*， （）：v，。 *Amer. Math. Soc.* 264 1282 +120 2020 2（见第 页）[Car21] David Carchedi。关于高阶代数栈的 ´平展同伦型。 *High. Struct.*，5(1)：121–185，2021年。（见第10页）[CH26] Bastiaan Cnossen与Marc Hoyois。高阶拓扑斯理论讲义。 *Unpublished note*，2026年。在线获取：https://drive.google.com/file/d/1vLD4BlS6zlu1SW4Hmvd2V6tgxV5a96Q0/view。（见第2页）[Cis19] Denis-Charles Cisinski。 *Higher categories and homotopical algebra* 180 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* ，第 卷，收录于。剑桥大学出版社，剑桥，。（见第 页）[Cla25] Dustin Clausen。p进李群的对偶与线性化。 *arXiv preprint*，2025年。arXiv:2506.18174。（见第2页）[CLL25] Bastiaan Cnossen、Tobias Lenz与Sil Linskens。部分参数化可呈现性与等变谱的万有性质。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，378(10)：6913–6974，2025年。（见第2页）[Clo24a] Adrian Clough。可微层I：断裂 ∞-拓扑斯与紧致性。 *Unpublished note*，2024年。在线获取：https://adrianclough.github.io/Differentiable sheaves I.pdf。（见第2、3、4、6和10页）[Clo24b] Adrian Clough。可微层I：局部可缩性与余终性。 *Unpublished note*，2024年。在线获取：https://adrianclough.github.io/Differentiable sheaves II.pdf。（见第2和10页）[CS22] Dustin Clausen与Peter Scholze。凝聚数学与复几何。 *Unpublished note*，2022年。在线获取：https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf。（见第2和10页）[GH09] Steven Givant与Paul Halmos。 *Introduction to Boolean algebras*。《数学本科生教材》。Springer，纽约，2009年。（见第15页）[Gle58] Andrew M. Gleason。射影拓扑空间。 *Illinois J. Math.*，2：482–489，1958年。（见第6页）[Hai22] Peter Haine。紧豪斯多夫空间上层的下降。2022年。arXiv:2210.00186。（见第10页）[HHL+25] Peter J. Haine、Tim Holzschuh、Marcin Lara、Catrin Mair、Louis Martini与Sebastian Wolf，附录由Bogdan Zavyalov撰写。概形的凝聚同伦型。 *arXiv preprint*，2025年。arXiv:2510.07443。（见第2页）[HJ99] Karel Hrbacek与Thomas Jech。 *Introduction to set theory* 220 *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics* ，第 卷，收录于。Marcel Dekker, Inc.，纽约，第三版，。（见第 页）[HM24] Claudius Heyer与Lucas Mann。六函子形式体系与光滑表示。 *arXiv preprint*，2024年。arXiv:2410.13038。（见第2和6页）[Hoy18] Marc Hoyois。高阶伽罗瓦理论。 *J. Pure Appl. Algebra*，222(7)：1859–1877，2018年。（见第10页）[HS12] Neil Hindman与Dona Strauss。 *Algebra in the Stone-Čech compactification*。De Gruyter教材。Walter de Gruyter & Co.，柏林，扩展版，2012年。理论与应用。（见第13页）[Jan24] Mikala Ørsnes Jansen。拓扑 ∞-代数栈的分层同伦论：工具箱。 *J. Pure Appl. Algebra*，228 11 9 （）：论文编号107710，28，2024年。（见第 页）[Joh79] P. T. Johnstone。关于一个拓扑拓扑斯。 *Proc. London Math. Soc. (3)*，38(2)：237–271，1979年。（见第2页）[Lan22] Markus Land。凝聚数学。 *Unpublished note*，2022年。在线获取：https://www.markus- land.de/app/download/13470165/Verdichtete+Mathematik.pdf。（见第6页）[Law94] F. W. Lawvere。凝聚拓扑斯与Cantor的"lauter Einsen"。第2卷，第5–15页。1994年。数学与语言基础中的范畴。（见第4页）[Law07] F. William Lawvere。公理化凝聚。 *Theory Appl. Categ.*，19：第3期，41–49，2007年。（见第4页）[Lur09] Jacob Lurie。 *Higher topos theory*， *Annals of Mathematics Studies*第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。（见第6、9、10、11和12页）[Lur17] Jacob Lurie。高阶代数，2017年9月。在线获取：http://www.math.ias.edu/ lurie/papers/HA.pd f.

（见第4 页与第9页）

[Lur18] Jacob Lurie。谱代数几何，2018年2月。在线获取：https://www.math.ias.edu/ lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。（见第1、2、4、5和9页） [Mai25] Johanna Catrin Cornelia Ute Christina Margarethe Luise Katharina Mair。*The Taste of Condensed Mathematics in Homotopy Theory* ¨ 2025 2, 。博士论文，达姆施塔特工业大学，达姆施塔特，4月。（见第6页和第10页） [ML98] Saunders Mac Lane。*Categories for the working mathematician*，*Graduate Texts in Mathematics*第5卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1998年。（见第7页和第11页） [Mor23] Itamar Mor。经由前有限伽罗瓦下降得到的 $K(n)$-局部谱的Picard 群与 Brauer 群。*arXiv preprint*，2023年。arXiv:2306.05393。（见第2页） [Mun00] James R. Munkres。*Topology*。普伦蒂斯霍尔公司，上萨德尔河镇，新泽西州，第二版，2000年。（见第7页和第15页） [Rai59] John Rainwater。关于投射分解的一个注记。*Proc. Amer. Math. Soc.*，10:734–735，1959年。（见第6页） [RV15] Emily Riehl与Dominic Verity。代数的拟范畴、同伦极限及相关一般构造的完备性结果。*Homology Homotopy Appl.*，17(1):1–33，2015年。（见第4页） [Sch13] Urs Schreiber。凝聚无穷拓扑斯中的微分上同调。2013年。arXiv:1310.7930。（见第4页和第5页） [Sch19] Peter Scholze。凝聚数学讲义。*Unpublished notes*，2019年。在线获取：https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf。（见第2、3、6和10页） [Sch20] Peter Scholze。解析几何讲义。*Unpublished note*，2020年。在线获取：https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf。（见第2页和第6页） [SS20] Hisham Sati与Urs Schreiber。真 orbifold 上同调。2020年。arXiv:2008.01101。（见第4页） [Sta26] Stacks 项目作者。Stacks 项目。在线获取：https://stacks.math.columbia.edu，2026 年。（见第 2 页）

Institut für Mathematik und Informatik, Universität Greifswald, Greifswald, Germany
Email address: nima.rasekh@uni-greifswald.de

Max Planck Institute for Mathematics, 53111 Bonn, Germany
Email address: qzhu@mpim-bonn.mpg.de