arXiv:2603.09639v1 [math.GT] 10 Mar 2026

魏尔-彼得森类中的无限圆模式

WAI YEUNG LAM

Abstract. 类似于魏尔-彼得森拟圆，我们研究由有限狄利克雷能量的离散调和函数参数化的欧几里得平面中的无限圆模式。这类圆模式构成一个无限维希尔伯特流形，与单位圆上半可微函数的索伯列夫空间同胚。该希尔伯特流形配备了一种黎曼度量，该度量由双曲体积泛函的海森矩阵诱导。我们通过希尔伯特变换的一种类似形式，将此黎曼度量与半可微函数索伯列夫空间上的辛形式联系起来。每种此类圆模式都会诱导一个从单位圆盘到其自身的拟共形同胚，其边界延拓属于万有特希尔伯特空间的魏尔-彼得森类。我们的结果有助于深入理解由双曲型无限圆模式铺砌的若尔当域；He 和 Schramm 曾着重研究这一课题。

1. Introduction

曲面之间的共形映射是低维拓扑的基础，并有广泛的应用。其特征是局部保角，即将无穷小圆映射为自身。一致化定理指出，每个非紧致单连通黎曼曲面都共形等价于复平面或单位圆盘。前者称为抛物型，后者称为双曲型。特别地，每个单连通真区域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 都是双曲型，并且共形等价于单位圆盘 $\mathbb{D}$；它存在一个黎曼映射 $g\colon \mathbb{D} \to \Omega$，且该映射是双全纯映射。

这一理论的一个细化方向涉及乔丹区域边界的正则性。若黎曼映射的对数导数具有有限狄利克雷能量 [44]，则边界 $\partial\Omega$ 是一个魏尔-彼得森拟圆。也就是说，共形因子 $u := \operatorname{Re} \log g'$ 是单位圆盘上的调和函数，并满足

$$\mathcal{E}_{\mathbb{D}}(u) := \iint_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 \, dxdy < \infty.$$

魏尔-彼得森拟圆通过共形焊接对应于万有 Teichm¨uller 空间中的魏尔-彼得森类。它们在 Teichm¨uller 理论、数理物理和几何函数论等领域得到了广泛研究。近年来，它们还与若尔当曲线的勒夫纳能量 [46]以及双曲三维流形的重整化体积 [12]联系起来。关于魏尔–彼得松曲线的全面综述，可参阅 Bishop 最近的著作[8, 9]。

在离散情形中，圆模式以具有指定交角的有限大小圆构形取代无穷小圆。Thurston 提出

将由具有相同组合学的两个圆模式诱导的映射视为离散保角映射 [43]。他猜想，这种方法能为黎曼映射定理提供一种自然的离散化形式，后来 Rodin 和 Sullivan [38] 验证了这一点。他们的收敛性证明依赖于抛物型无限圆模式的刚性。

相比之下，双曲型无限圆模式具有柔性，并且允许丰富的变形理论。He 和 Schramm [21, 定理 1。2]证明了：对于开圆盘的任意固定双曲型三角剖分，平面中的每个单连通真域都存在一个具有给定组合结构的无限圆堆积，其中的圆仅在边界处聚积。He 和 Schramm 强调了由双曲型圆堆积的区域的重要性，但对这类区域的刻画一直未得到发展。本文研究双曲型无限圆模式的变形空间，并建立其与普适 Teichm¨uller 空间之间的关系。

形式上，平面中的圆模式是平面图 $G=(V,\ E,\ F)$ 的顶点的一种实现，使得每个面都有一个经过其顶点的外接圆。它还诱导出对偶胞腔分解 $G^*=(V^*,\ E^*,\ F^*)$ 的一种实现，其中对偶顶点 $V^*\cong F$ 实现为各个面的外心。对于连接两个外心的每条对偶边 $\phi\psi$，我们测量相应外接圆之间的交角 $\Theta_{\phi\psi}=\Theta_{\psi\phi}$，从而定义一个映射$\Theta:\ E^*\to[0,2\pi)$。在欧氏变换意义下，圆模式由圆的欧几里得半径 $R:\ F\to\mathbb{R}_{>0}$ 以及交角 Θ唯一确定。此外，如果所有交角都属于 $[0,\pi)$，则称该圆模式为$Delaunay$。Delaunay 条件等价于双曲三空间中一个相应理想多面体曲面的局部凸性 [10]。

本文中，我们研究拓扑开圆盘上的无限圆模式。每个这样的圆模式都通过沿公共弦粘合外接圆盘，在圆盘上确定一种平坦欧几里得结构。保持交角不变，同时改变各圆的欧几里得半径，我们便能在底层拓扑圆盘上得到不同的平坦欧几里得度量。每种这样的度量都支持一个具有相同组合学和指定交角的圆模式，但其在平面中的几何实现可能不同。我们的目标是研究圆模式的变形空间。回顾一下，如果图上的每个简单随机游动都有非零概率逃向无穷远，则称该图为瞬态的。

定义 1.1. 设(V,E,F) 是拓扑开圆盘Ω 的一个胞腔分解，其含义是，*1*-骨架图 $G=(V,E)$ 有一个无穷端。我们进一步假设 G 是瞬态的，且顶点度与面度均一致有界，并且对于某个小常数 $\epsilon_0>0$，存在函数 $\Theta:\ E^*\to(\epsilon_0,\pi-\epsilon_0)$满足

(A1) 对于对偶图中每一个恰好围住一个对偶面的闭合环 γ，

$$\sum_{\phi\psi\in\gamma}\Theta_{\phi\psi}=2\pi.$$

(A2) 对于对偶图中每个围成多个对偶面的闭合环 γ，

$$\sum_{\phi\psi\in\gamma}\Theta_{\phi\psi}>2\pi+\epsilon_0.$$

˜我们将由满足以下条件的函数组成的集合记为 $P(\Theta)$ $R:$ $F \to \mathbb{R}_{>0}$ 存在一个平面上的圆模式，其交角为 Θ，欧几里得半径为 R。

˜**定义 1.2.** 通过粘合外接圆盘，每个函数 $R \in P(\Theta)$ 都确定了拓扑圆盘 Ω 上的一个光滑欧几里得度量 $\sigma(\Theta, R)$，该度量支持一个交角为 Θ 、欧几里得半径为 R 的圆模式。我们称 $\sigma(\Theta, R)$ 为相应的圆图案度量。

对于每个圆图案度量 $\sigma(\Theta, R)$，都存在一个到欧几里得平面的局部等距映射

$$\mathrm{dev} : (\Omega, \sigma(\Theta, R)) \to \mathbb{R}^2$$

称为发展映射。此映射在欧几里得变换意义下唯一，但未必是全局单射。若圆模式嵌入于$\mathbb{R}^2$，即发展映射为单射，我们就称该圆模式是嵌入的。

给定的交角 Θ 起到离散共形结构的作用。通过改变半径，集合 $P(\Theta)$ 枚举了离散共形映射的全体。已知集合 $P(\Theta)$ 非空。

定理 1.3 (离散一致化 [20, 16])。 设 (V, E, F) 是拓扑开圆盘 Ω 的一个胞腔分解，且 $\Theta : E^* \to (\epsilon_0, \pi - \epsilon_0)$ 满足定义 *1.1*。那么存在一个函数 $R^\dagger \in \tilde{P}(\Theta)$，使得发展映射 dev 是到单位开圆盘 $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ 上的等距映射。

两个这样的函数 $R^\dagger, R^\ddagger \in \tilde{P}(\Theta)$ 对应于相差一个保持单位圆盘不变的莫比乌斯变换的圆模式。

假设图是瞬态的且具有有界顶点度，这保证我们得到的是到单位开圆盘的离散一致化，而非整个平面。图 1 展示了离散一致化下的一个圆模式。它由一个圆堆积及其对偶圆堆积构成（见 [43]）。交角为常数，且均等于 $\pi/2$。圆堆积的离散一致化由 He 和 Schramm [20] 建立，并由 Ge、Yu 和 Zhou [16] 推广到具有一般交角的圆模式。

我们将对偶图上狄利克雷有限函数构成的希尔伯特空间记为

$$\mathbf{D}(F) := \left\{ u : F \to \mathbb{R} \mid \mathcal{E}(u) := \sum_{\phi\psi \in E^*} |u_\phi - u_\psi|^2 < \infty \right\}$$

其中，$\mathcal{E}(u)$ 是 u 的组合狄利克雷能量。给定函数 u: $F \to \mathbb{R}$，我们通过为每个面 $\phi \in F$ 设置新的半径，来修改一致化圆模式的半径

$$R_\phi := e^{u_\phi} R^\dagger_\phi.$$

定义 1.4. 给定定理 *1.3* 中的一致化圆模式，我们定义魏尔-彼得森类中的圆模式空间

$$P(\Theta, R^\dagger) := \left\{ u \in \mathbf{D}(F) \;\middle|\; e^u R^\dagger \in \tilde{P}(\Theta) \right\}.$$

$P(\Theta, R^\dagger)$ 中的元素对应于由单位圆盘上的一致化圆模式经形变而产生的圆模式，这些圆模式可能嵌入 $\mathbb{R}^2$，也可能不嵌入。函数 $u \in P(\Theta, R^\dagger)$ 表示半径的对数变化，并充当度量变化的离散共形因子。我们建立了空间 $P(\Theta, R^\dagger)$ 作为无限维希尔伯特空间的若干基本性质

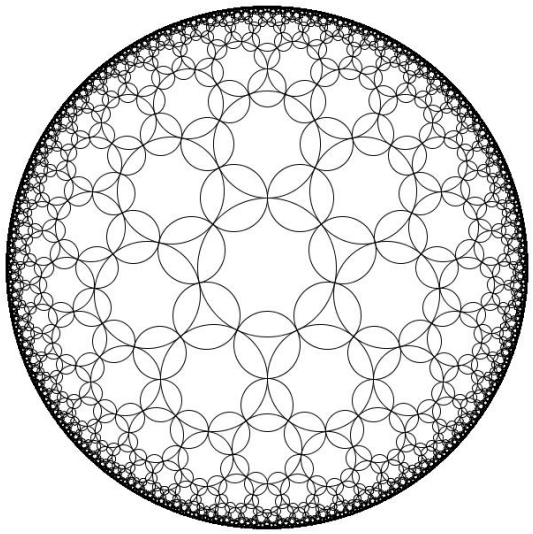


FIGURE 1. 一种具有恒定交角 $\Theta \equiv \pi/2$、填充单位圆盘的均匀化圆图样。它由一个圆堆积及其对偶圆堆积诱导而来。

流形，并将其与单位圆上半可微函数的索伯列夫空间联系起来。

我们通过分析 $P(\Theta, R^{\dagger})$到离散调和函数空间$\mathbf{HD}(F)$上的投影，研究其整体拓扑。若函数 $h \in \mathbf{D}(F)$满足离散拉普拉斯方程，即对每个面 $\phi \in F$，则称其为离散调和函数:

$$\sum_{\psi}(h_{\psi} - h_{\phi}) = 0$$

其中求和遍历所有与 ϕ相邻的对偶顶点 ψ 。由于底层图是瞬态的，狄利克雷有限函数空间可分解为正交子空间的罗伊登分解

$$\mathbf{D}(F) = \mathbf{HD}(F) \oplus \mathbf{D}_0(F),$$

其中$\mathbf{D}_0(F)$是有限支撑函数空间的闭包。令 p_F :$\mathbf{D}(F) \to \mathbf{HD}(F)$表示相应的、投影到调和分量上的正交投影。

定理 1.5。 空间 $P(\Theta, R^{\dagger})$ 在$\mathbf{D}(F)$ 中构成一个无限维希尔伯特空间子流形，并且通过投影 p_F与$\mathbf{HD}(F)$ 同胚。

证明表明，对于每个离散调和函数 $h \in \mathbf{HD}(F)$，都存在唯一的 $v \in \mathbf{D}_0(F)$，使得总和 $h + v \in P(\Theta, R^{\dagger})$。这通过一种变分方法得以证明，该方法涉及与圆模式相关的双曲多面体体积。Colin de Verdi`ere [14] 率先提出了这种变分方法，随后 Rivin [37], 、Leibon [31], 、Bobenko 和 Springborn [10], ，以及 Guo 和 Luo [18] 将其发展并应用于闭曲面上的有限圆模式。

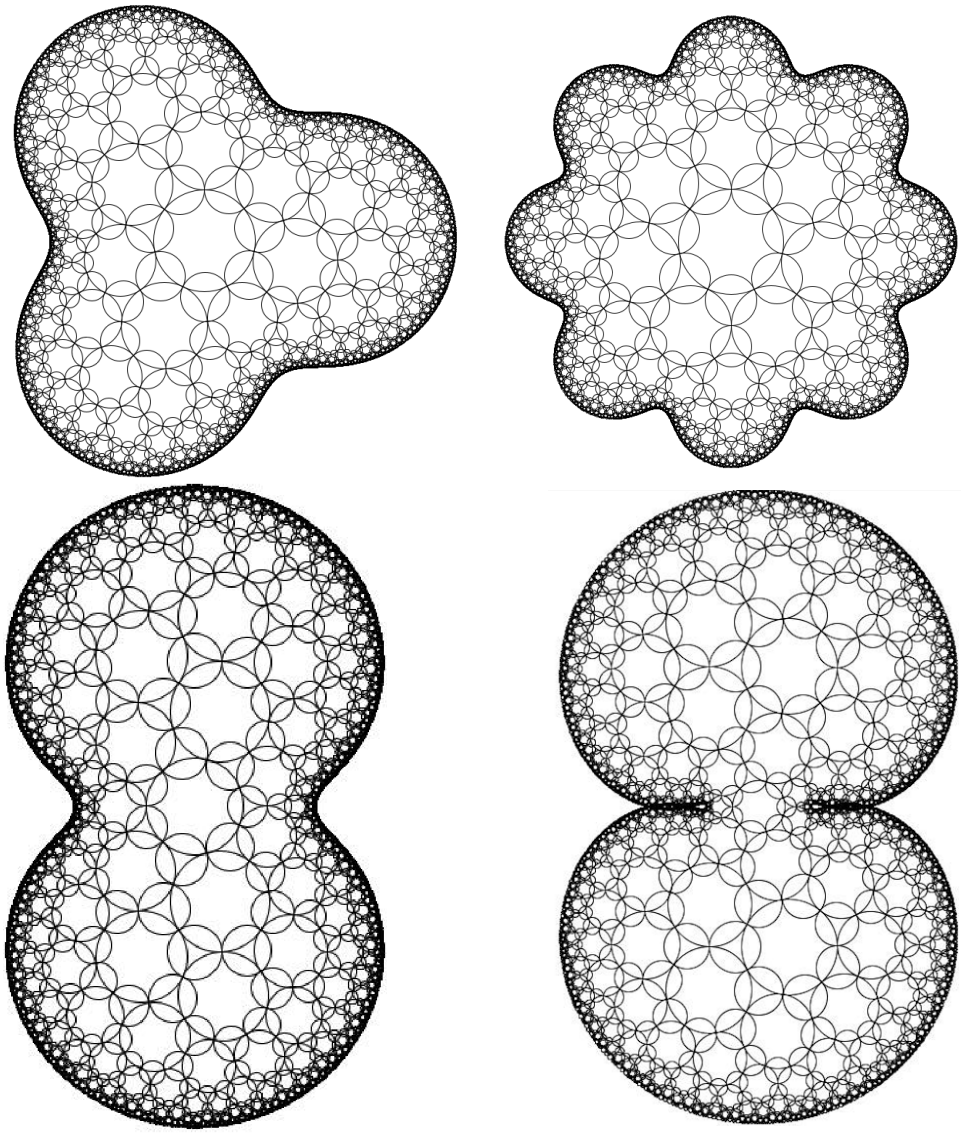


FIGURE 2. 变形空间 $P(\Theta, R^{\dagger})$ 中具有恒定交角 $\Theta \equiv \pi/2$ 的圆模式。每一个均由一个圆堆积与其对偶圆堆积的叠加产生。右下方的圆模式并未嵌入 $\mathbb{R}^2$ 中。

与此不同，我们将他们的框架拓展至无限圆模式，并将其用于研究形变空间。

$P(\Theta, R^{\dagger})$ 中的元素与调和函数类似，因为它们满足关于某些几何边权的离散拉普拉斯方程。它们存在定义在原图（V， E）上的共轭调和函数，从而得到圆模式空间的对偶参数化。该对偶参数化描述的不是半径的变化，而是中心角的变化

$\alpha^\dagger$ 在相邻圆的公共弦所对的外心处。与 $\mathbf{D}(F)$ 类似，原图 $\mathbf{D}(V)$ 上的狄利克雷有限函数空间可分解为正交子空间，即罗伊登分解

$$\mathbf{D}(V) = \mathbf{HD}(V) \oplus \mathbf{D}_0(V).$$

我们指出，两个函数 $u, \tilde{u} \in P(\Theta, R^\dagger)$ 表示相差常数缩放的圆模式，当且仅当 $u - \tilde{u}$ 是常值函数。这在 $P(\Theta, R^\dagger)$ 上定义了一个等价关系，并促使我们考虑商空间 $P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R}$，该商空间在整体缩放的意义下对圆模式进行参数化。

定理 1.6. 存在一个希尔伯特子流形 $P(\Theta, \alpha^\dagger) \subset \mathbf{D}(V)$，它通过中心角的形变对具有交角 Θ的圆模式进行参数化。空间 $P(\Theta, \alpha^\dagger)$ 经由投影 p_V同胚于 $\mathbf{HD}(V)$。

此外，存在一个同胚

$$\mathcal{C}^\Theta : P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R} \to P(\Theta, \alpha^\dagger)/\mathbb{R}$$

它将产生相同几何圆模式（在整体缩放与旋转的意义下）的形变对等同起来。这里 $P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R}$ 与 $P(\Theta, \alpha^\dagger)/\mathbb{R}$ 表示关于常值函数的商空间。我们称 $\mathcal{C}^\Theta$ 为共轭映射。

为了证明 $P(\Theta, \alpha^\dagger)$ 到 $\mathbf{HD}(V)$ 的投影是双射，我们采用一种类似的、涉及双曲体积的变分方法。由于角度参数被限制在区间 $(0, \pi)$ 内，这种对偶参数化更为复杂。为此，我们必须证明：对每个 $\epsilon > 0$，$\mathbf{HD}(V)$ 中的每个离散调和函数，都存在一个 $\mathbf{D}_0(V)$ 中的扰动，使得所得函数在原图 (V, E) 上是 ϵ-Lipschitz 的。

两个希尔伯特流形 $P(\Theta, R^\dagger)$ 和 $P(\Theta, \alpha^\dagger)$ 都可以用单位圆盘上具有有限狄利克雷能量的光滑调和函数来参数化。单位圆盘上的一致化圆模式为原图和对偶图确定了测地胞腔分解，其中原图顶点实现为圆的交点，而对偶顶点则是外心。我们证明，这些测地分解的角度和边长比具有一致界。因此，按照 Angel、Barlow、Gurel-Gurevich 和 Nachmias[2]以及 Chelkak [13]的研究，这些测地分解是良好的 。因此，通过添加对角线，任意离散函数都可以扩展为圆盘上的分段线性函数，其经典狄利克雷能量与其组合能量相当。利用经典狄利克雷有限函数空间的 Roy-den 分解，我们将这些分段线性扩展投影到光滑调和函数空间 $\mathbf{HD}(\mathbb{D})$。基于 Hutchcroft [22], 的结果，我们证明，这一构造分别给出从 $P(\Theta, R^\dagger)$ 和 $P(\Theta, \alpha^\dagger)$ 到 $\mathbf{HD}(\mathbb{D})$ 的同胚。

定理 1.7。 在单位圆盘上的一致化圆模式中，我们将圆的交点的位置记作

$$z_V : V \to \mathbb{D}$$

以及外心的位置

$$z_F : F \to \mathbb{D}.$$

于是存在从希尔伯特流形到单位圆盘上经典调和狄利克雷函数希尔伯特向量空间的同胚

$$\Phi_V : P(\Theta, \alpha^\dagger) \to \mathbf{HD}(\mathbb{D}), \quad \Phi_F : P(\Theta, R^\dagger) \to \mathbf{HD}(\mathbb{D})$$

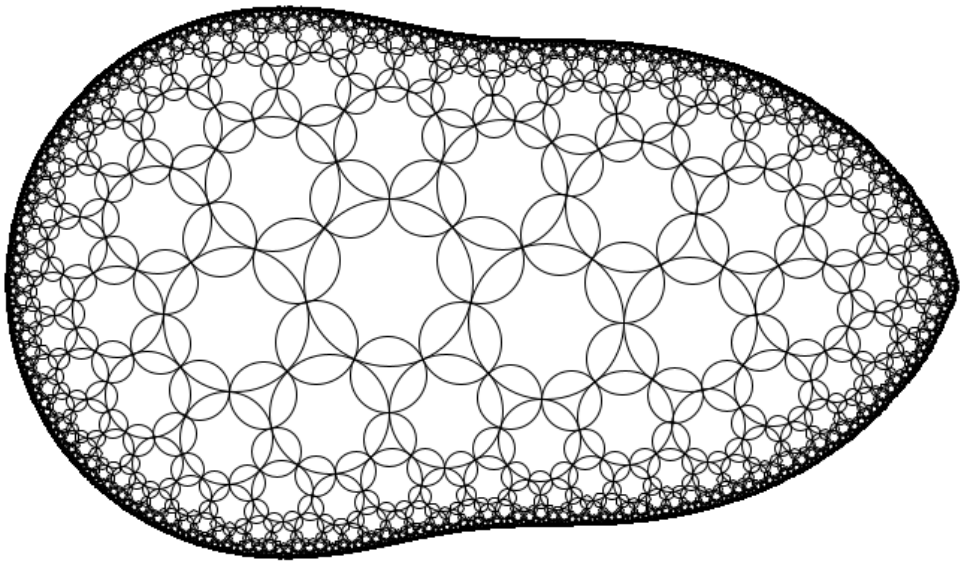


FIGURE 3. 与 $u \in P(\Theta, R^\dagger)$对应的一个圆模式，其边界值 $u_{\partial\mathbf{D}} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$在 $z = 1$上的一点处为无限。具体而言，边界值为 $u_{\partial\mathbb{D}}(z) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=2}^{\infty} {}_{n}{}^{z^n \log n}\right)$。

使得对于每个 $u \in P(\Theta, \alpha^\dagger)$ 和 $v \in P(\Theta, R^\dagger)$，都有

$$\Phi_V(u) \circ z_V - u \in \mathbf{D}_0(V), \quad \Phi_F(v) \circ z_F - v \in \mathbf{D}_0(F).$$

我们进一步讨论离散函数在单位圆上的边界值，这将引出希尔伯特变换的一个类似物。一个经典结果是，单位圆盘上的每个狄利克雷有限调和函数，在单位圆上都有定义良好的边界值，且该边界值是半可微函数。这诱导出到单位圆上半可微函数的索伯列夫空间的一个有界线性同构 $\mathcal{B}\colon \mathbf{HD}(\mathbb{D}) \to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$。

推论1.8。 边界值映射

$$\mathcal{B}_V := \mathcal{B} \circ \Phi_V : P(\Theta, \alpha^\dagger) \to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D}),$$
$$\mathcal{B}_F := \mathcal{B} \circ \Phi_F : P(\Theta, R^\dagger) \to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$$

是同胚，并将常值函数映射为常值函数。

特别地，共轭映射 $\mathcal{C}^\Theta$ 在由如下复合定义的商空间上诱导出一个非线性同胚 $\overline{\mathfrak{H}}^\Theta : \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D}) \,/\mathbb{R} \to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D}) \,/\mathbb{R}$

$$\mathfrak{H}^\Theta := \overline{\mathcal{B}}_V \circ \mathcal{C}^\Theta \circ \overline{\mathcal{B}}_F^{-1}$$

它是希尔伯特变换的一种类似物，能够捕捉圆模式空间的各种信息。

我们在希尔伯特流形 $P(\Theta, R^\dagger)$ 和 $P(\Theta, \alpha^\dagger)$ 上赋予黎曼度量，该度量由关于几何边权的离散狄利克雷能量诱导，或者等价地，由双曲体积泛函的海森矩阵诱导。也就是说，每个对应于 $u \in P(\Theta, R^\dagger)$ 的圆模式都会诱导一个图拉普拉斯算子 Δ_{c^*}，其

关于几何边权重 c^* 为: $E^* \to \mathbb{R}$。切空间 $T_u P(\Theta, R^\dagger)$ 可识别为离散调和函数 $\ker \Delta_{c^*}$ 所构成的空间。我们将 $T_{[u]}\left(P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R}\right)$ 上的黎曼度量定义为由离散狄利克雷能量诱导的度量

$$\mathcal{E}_{c^*}(v) := \sum_{\phi\psi \in E^*} c^*_{\phi\psi}(v_\phi - v_\psi)^2.$$

类似地，空间 $P(\Theta, \alpha^\dagger)/\mathbb{R}$ 也配备了由关于几何边权的离散狄利克雷能量所诱导的黎曼度量，而这些几何边权源自另一个泛函的海森矩阵。

推论 1.9. 共轭映射 $\mathcal{C}^\Theta: P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R} \to P(\Theta, \alpha^\dagger)/\mathbb{R}$ 是关于由带有几何边权的离散狄利克雷能量所诱导的黎曼度量的等距同构。

模去常值函数后的半可微函数的索伯列夫空间$H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})/\mathbb{R}$ 是一个希尔伯特流形。其黎曼度量由单位圆盘上光滑调和延拓的经典狄利克雷能量确定。我们探讨边界值映射 $\mathcal{B}_F$ 下 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})/\mathbb{R}$ 上的黎曼度量与 $P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R}$ 上的黎曼度量之间的关系。

我们考虑双线性配对 $b: \mathbf{D}(F) \times \mathbf{D}(V) \to \mathbb{R}$。给定任意两个函数$u \in \mathbf{D}(F)$ 和 $v \in \mathbf{D}(V)$，存在一个自然配对

$$b(u, v) := \frac{1}{2} \sum_{ij \in \vec{E}} (u_\psi - u_\phi)(v_j - v_i) = \sum_{ij \in E} (u_\psi - u_\phi)(v_j - v_i)$$

其中， ϕ 表示从 i到 j 的有向边的左侧面， ψ 表示右侧面。第一个求和遍历所有有向边，第二个求和遍历所有无向边。

定理 1.10。 给定单位圆盘上的一致化圆模式。设$u \in \mathbf{D}(F)$ 和 $v \in \mathbf{D}(V)$ 分别具有边界值 $u_{\partial\mathbb{D}}$、 $v_{\partial\mathbb{D}} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$。则

$$b(u, v) = 2\pi \cdot \omega(u_{\partial\mathbb{D}}, v_{\partial\mathbb{D}})$$

其中， ω 是$\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$上的辛形式。

若 $u_{\partial\mathbb{D}}, v_{\partial\mathbb{D}}$ 是单位圆上的光滑函数，则辛形式 ω 可写为

$$\omega(u_{\partial\mathbb{D}}, v_{\partial\mathbb{D}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} u_{\partial\mathbb{D}}\, d(v_{\partial\mathbb{D}}).$$

一般而言，对于 $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 中的函数，辛形式通过这些函数的傅里叶系数来定义。

我们用 $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 上的辛形式 ω 和非线性同胚 $\mathfrak{H}^\Theta$ 来表示 $P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R}$ 上的黎曼度量。

推论 1.11. 设 $u \in P(\Theta, R^\dagger)$ 具有几何边权 $c^*: E^* \to \mathbb{R}$。则对任意 $v, w \in T_u(P(\Theta, R^\dagger)) \cong \ker \Delta_{c^*}$，我们有

$$\sum c^*_{\phi\psi}(v_\phi - v_\psi)(w_\phi - w_\psi) = 2\pi \cdot \omega\left(v_{\partial\mathbb{D}}, d\mathfrak{H}^\Theta_{u_{\partial\mathbb{D}}}(w_{\partial\mathbb{D}})\right).$$

$P(\Theta, R^\dagger)$ 中的圆模式与万有 Teichm¨uller 空间中的魏尔-彼得森类密切相关。事实上， $P(\Theta, R^\dagger)$ 中的每个圆模式都按如下方式确定一个自然的单位圆盘拟共形映射。

设 $u: F \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $e^u R^\dagger \in \tilde{P}(\Theta)$ 的函数。存在一个分段线性映射

$$f_u : (\Omega, \sigma(\Theta, R^\dagger)) \to (\Omega, \sigma(\Theta, e^u R^\dagger))$$

从一致化圆模式到变形圆模式的映射，它将外心映到外心，并将交点映到交点。我们将 f_u 视为离散黎曼映射。当 f_u 是拟共形的时，存在一个经典黎曼映射，将单位圆盘 $\mathbb{D} \cong (\Omega, \sigma(\Theta, R^\dagger))$映到变形圆模式

$$g_u : \mathbb{D} \to (\Omega, \sigma(\Theta, e^u R^\dagger)).$$

我们通过单位圆盘的一个自同胚，考察离散黎曼映射与经典黎曼映射之间的差异

$$g_u^{-1} \circ f_u : \mathbb{D} \to \mathbb{D}.$$

我们将此映射的贝尔特拉米微分与半径的对数变化u联系起来。由于 g_u 是共形的，我们有贝尔特拉米微分 $\mu(g_u^{-1} \circ f_u) = \mu(f_u)$。

定理 1.12. 设 $u: F \to \mathbb{R}$ 满足欧几里得半径 $e^u R^\dagger$ 定义了 $P(\Theta)$中的一个圆模式。那么

(1) 映射 f_u 是拟共形的，当且仅当对数缩放因子u 具有有界离散梯度，即

$$\sup_{\phi\psi \in E^*} |u_\phi - u_\psi| < \infty.$$

(2) 若 u具有有限组合狄利克雷能量（即 $u \in P(\Theta, R^\dagger)$），则 f_u 的贝尔特拉米微分相对于 $\mathbb{D}$上的双曲度量是 L^2-可积的。反之，若 f_u 的贝尔特拉米微分在双曲度量下是 L^2-可积的，且一致化圆模式的双曲半径具有一致下界，则 u 具有有限组合狄利克雷能量。

图 1 中的一致化圆模式由于对称性，其双曲半径具有一致下界。一般而言，为了保证一致化圆模式中的双曲半径具有一致下界，我们认为图 G 必须满足强等周不等式 （见 [42]）。

前一个定理意味着，当 u具有有界梯度时，映射 $g_u^{-1} \circ f_u$ 是单位圆盘的拟共形同胚。这样的映射可以延拓为单位圆上的拟对称同胚，从而在万有 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}$中定义一个元素。

推论 1.13. 我们考虑一类更广泛的圆模式

$$P_{\mathrm{QC}}(\Theta, R^\dagger) := \left\{ u : F \to \mathbb{R} \;\middle|\; e^u R^\dagger \in \tilde{P}(\Theta) \text{ and } \sup_{\phi\psi \in E^*} |u_\phi - u_\psi| < \infty \right\}$$

其中包含 $P(\Theta, R^\dagger)$。存在一个良定义映射

$$\pi : P_{\mathrm{QC}}(\Theta, R^\dagger) \to \mathcal{T}$$
$$u \mapsto g_u^{-1} \circ f_u|_{\partial\mathbb{D}}$$

且 P（$\Theta, R^\dagger$）的像包含于魏尔-彼得森类 $\mathcal{T}_{\mathrm{WP}} \subset \mathcal{T}$中。

我们猜想，映射 π 在$P(\Theta,\ R^\dagger)$与魏尔-彼得森类 $\mathcal{T}_{\mathrm{WP}}$之间诱导出一个全局同胚。支持这一猜想的依据是这两个空间具有相同的拓扑结构：Shen [41] 证明了 $\mathcal{T}_{\mathrm{WP}}$ 由索伯列夫空间 $H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ 参数化，而推论 1.8 表明，我们的空间 $P(\Theta,\ R^\dagger)$ 也具有完全相同的结构。此外，我们的猜想是 Kojima-Mizushima-Tan 猜想的无限维类比；该猜想提出，每个闭黎曼曲面都存在唯一的复射影结构，使其支持一个具有指定交角的圆模式[26, 27]。要解决我们的猜想，可能需要取得两项关键进展。首先，离散希尔伯特变换 $\mathfrak{H}^\Theta$ 预计将发挥关键作用，仿照经典希尔伯特变换在共形焊接中的作用。其次，必须确立边界的正则性；具体而言，我们预期，对于$P(\Theta,\ R^\dagger)$中的任意圆模式，圆会聚集于一条具有 Weil-Petersson 拟圆正则性的曲线上。由于这些步骤需要采用一套不同的分析工具，我们将留待未来工作研究。

1.1. 更多相关工作。 我们的结果涉及无穷图上的位势论、离散几何、双曲几何和 Teichm¨uller 理论的交汇，为无穷平面图上的离散调和函数提供了一种新颖的几何对应，并建立了与普遍 Teichm¨uller 空间的深刻联系。

通过图的几何表示研究随机游走。 有限狄利克雷能量的离散调和函数是基本对象，它们支配着简单随机游走的行为，并刻画图边界。一种强有力的方法依赖于平面图的几何表示，尤其是通过单值化圆填充和正方形铺砌 [5, 6, 17, 3]。在这些框架中，人们构造特定的几何实现，以捕捉底层图的概率性质。

我们的工作大幅拓展了这一视角。我们不再只研究单个单值化圆填充，而是证明，所有具有有限狄利克雷能量的离散调和函数构成的希尔伯特空间，能够参数化一个无限维的圆模式变形空间。这建立了一种新的几何对应，并与普遍 Teichm¨uller 空间建立了联系。尤其是，我们的框架为随机几何提供了一种新颖的离散模型，为研究随机共形结构和刘维尔量子引力提供了新的几何工具（参见 Berestycki 和 Powell 所著的书 [7]）。

平面图的边界响应矩阵。 非线性同胚 $\mathfrak{H}^\Theta$ 可视为狄利克雷-诺伊曼算子的类比，该算子也被称为有限平面图的边界响应矩阵。在有限情形下，这一矩阵与簇代数和组合学都存在深刻联系 [23]。值得注意的是，通过米克尔六圆定理 [24]，映射 $\mathfrak{H}^\Theta$ 和有限响应矩阵在底层圆模式的簇突变下均保持不变。在组合学方面，Kenyon 和 Wilson 证明了基尔霍夫矩阵树定理的一个推广，其中响应矩阵枚举了特定的子图 [25]。对于闭曲面，也存在类似的组合学表述；在这种情况下，它们对应于黎曼曲面的周期矩阵 [28]。受这些现象的启发，我们预期映射 $\mathfrak{H}^\Theta$ 也具有类似的组合学表述，能够枚举无限图中的特定子图。

2. Background

2.1. **经典狄利克雷有限函数和半可微函数**。我们遵循 [34, 39, 22] 中建立的框架。

每个局部 L^2-可积的弱可微函数 $u\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ 都具有如下定义的狄利克雷能量：

$$\mathcal{E}(u) := \iint_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 \, dx\, dy \in [0, \infty].$$

我们用 $\mathbf{D}(\mathbb{D})$ 表示这类具有有限狄利克雷能量的函数所构成的空间。该空间配备内积

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{D}(\mathbb{D})} := \iint_{O} uv \, dx\, dy + \iint_{\mathbb{D}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dy,$$

其中 O 是一个固定的预紧开子集，属于 $\mathbb{D}$。在此内积下，$\mathbf{D}(\mathbb{D})$ 是一个希尔伯特空间。预紧开集 O 的不同选取会产生等价范数。

我们用 $\mathbf{HD}(\mathbb{D}) \subset \mathbf{D}(\mathbb{D})$ 表示调和函数的闭子空间。给定一个调和函数 $u \in \mathbf{HD}(\mathbb{D})$ 和一点 $\xi \in \partial\mathbb{D}$，我们定义径向极限 $u^*(\xi) := \lim_{r \to 1^-} u(r\xi)$，只要该极限存在。已知 $u^*(\xi)$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上几乎处处存在，且是半可微函数。

定义 2.1. 半可微函数的索伯列夫空间 $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 是由具有广义 $1\,2$ 阶导数的函数 $u \in L^2(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$ 构成的希尔伯特空间。用傅里叶级数表示，它可写为

$$\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D}) := \left\{ u \in L^2(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R}) \;\middle|\; u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n z^n, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |u_n|^2 < \infty \right\}.$$

在商空间 $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D}) \,/\mathbb{R}$ 上，我们定义内积

$$\langle u, v \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| u_n \bar{v}_n,$$

以及辛形式

$$\omega(u, v) = \frac{1}{\mathbf{i}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n u_n \bar{v}_n.$$

二者通过希尔伯特变换 $\mathfrak{H}\colon \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D}) \to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 联系起来，其定义为

$$\mathfrak{H}(u) = -\mathbf{i} \sum_{n>0} u_n z^n + \mathbf{i} \sum_{n<0} u_n z^n,$$

满足恒等式 $\langle u, v \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})} = \omega(u, \mathfrak{H}(v))$。

由于 u 是实值的，对于所有整数 n，$u_{-n} = \bar{u}_n$。通过泊松积分，$\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 中的每个元素 $u \in$ 都有唯一的调和延拓至单位圆盘，其狄利克雷能量等于 $2\pi \langle u, u \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})}$。

命题 2.2. 空间 $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 和 $\mathbf{HD}(\mathbb{D})$ 在模去常数后，通过限制映射和泊松积分同构。

单位圆上的光滑函数空间 $C^\infty(\partial\mathbb{D})$ 在 $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 中稠密（参见 [39, 第 9.1节]）。对于 $u, v \in C^\infty(\partial\mathbb{D})$，我们可以将辛形式和内积表示为

$$\omega(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} u\frac{dv}{d\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} u\,dv$$

and

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} u\,d\mathfrak{H}(v).$$

2.1.1. 魏尔-彼得森类在普遍*Teichm¨uller*空间中。 普遍Te- ichm¨uller空间记作 $\mathcal{T}$，在Teichm¨uller理论中发挥着核心作用，因为它包含所有双曲黎曼曲面 [30, 40]的Teichm¨uller空间。它是单位圆上所有保向拟对称同胚按莫比乌斯变换取商后构成的集合。单位圆的保向同胚可以利用单位圆盘 $\mathbb{D}$上的拟共形映射来定义。

定义2.3。 若一个同胚 $h:\ \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ 可以延拓为拟共形同胚 $h:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$，则称其为保向且拟对称的；也就是说，存在一个常数 $K \geq 1$ ，使得贝尔特拉米微分 $\mu(z) =\backsim \partial_{\bar{z}}h/\partial_z h$ 满足

$$|\mu(z)| \leq \frac{K-1}{K+1} < 1$$

几乎处处于 $\mathbb{D}$。

在 $\mathcal{T}$ 中，有一个称为魏尔-彼得森类的特定子空间，记作 $\mathcal{T}_{\mathrm{WP}}$ [44, 15]。

定义 2.4。 魏尔-彼得森类 $\mathcal{T}_{\mathrm{WP}} \subset \mathcal{T}$是单位圆上所有拟对称同胚的集合，这些同胚可以延拓为单位圆盘上的拟共形同胚，且其贝尔特拉米微分 μ关于双曲度量是 L^2-可积的，即

$$\iint_{\mathbb{D}} |\mu(z)|^2 \frac{dxdy}{(1-|z|^2)^2} < \infty.$$

尽管本文并未使用以下结果，但它启发了我们的猜想：定理 1.12 中的映射 π 给出 $P(\Theta,\ R^\dagger)$ 与 $\mathcal{T}_{\mathrm{WP}}$ 之间的一个同胚。

命题 2.5 (Shen [41])。 单位圆上的保向同胚 h 属于魏尔-彼得森类，当且仅当 h 绝对连续，且 $\log h'$ 属于索博列夫类 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$。

2.2. **图上的离散调和函数**。

2.2.1. 图上的狄利克雷有限函数与等价边权。 设 $c: E \to \mathbb{R}_{>0}$ 为一些正边权。我们将函数$u:\ V \to \mathbb{R}$ 相对于边权 c 的狄利克雷能量定义为

$$\mathcal{E}_c(u) := \sum_{ij} c_{ij}(u_i - u_j)^2 \in [0,\infty].$$

当且仅当函数为常数时，其狄利克雷能量为零。固定任意一个顶点 $o \in V$，我们定义函数 u的内积 v： $V \to \mathbb{R}$

$$\langle u, v\rangle_c = u_o v_o + \sum_{ij} c_{ij}(u_i - u_j)(v_i - v_j)$$

以及 u的范数

$$||u||_c := \sqrt{\langle u, u\rangle_c} \in [0, \infty].$$

我们用$\mathbf{D}_c(V)$表示函数 u 的集合： $V \to \mathbb{R}$ 满足 $||u||_c^2$ 有限。空间$\mathbf{D}_c(V)$已知是一个希尔伯特空间 [42, 定理 3.15]。该空间包含一个由有限支撑函数构成的子空间，其闭包记为$\mathbf{D}_{c,0}(V) \subset \mathbf{D}_c(V)$。

定义 2.6. 若存在常数 $K > 0$ ，使得对于所有边 $ij \in E$，两个正边权 $c, \tilde{c}$： $E \to \mathbb{R}_{>0}$ 满足该条件，则称它们等价。

$$\frac{c_{ij}}{K} < \tilde{c}_{ij} \le K c_{ij}.$$

下面的陈述可直接由定义得出。证明从略。

命题 2.7. 设 $c, \tilde{c}$ 是等价边权，则范数 $||\cdot||_c$和 $||\cdot||_{\tilde{c}}$ 等价，也就是说，存在 $K > 0$ 使得对于 u： $V \to \mathbb{R}$

$$\frac{||u||_c}{K} \le ||u||_{\tilde{c}} \le K||u||_c.$$

这意味着 $\mathbf{D}_c(V) = \mathbf{D}_{\tilde{c}}(V)$ 且 $\mathbf{D}_{c,0}(V) = \mathbf{D}_{\tilde{c},0}(V)$。此外，该图相对于 c 是瞬态的，当且仅当它相对于 $\tilde{c}$是瞬态的。

定义内积的顶点 o 的选择无关紧要。可以证明，不同的选择会得到等价范数。

对于边权 c，我们考虑图拉普拉斯算子 Δ_c： $\mathbf{D}_c(V) \to \mathbf{D}_c(V)$，其定义为

$$(\Delta_c u)_i = \sum_j c_{ij}(u_j - u_i).$$

当图是瞬态的时，我们有罗伊登分解 [42, 定理 3.69]

$$\mathbf{D}_c(V) = \mathbf{D}_{c,0}(V) \oplus \mathbf{HD}_c(V). \tag{1}$$

这里 $\mathbf{HD}_c(V) := \ker \Delta_c \subset \mathbf{D}_c(V)$ 是关于边权 c的离散调和函数空间；也就是说，函数 $u \in \mathbf{HD}_c(V)$ 当且仅当

$$\sum_j c_{ij}(u_j - u_i) = 0 \quad \forall i \in V$$

其中求和遍历 i的所有邻点 j 。(1)中的直和关于一个双线性形式是正交的

$$\mathcal{E}_c(u, v) = \sum_{ij} c_{ij}(u_i - u_j)(v_i - v_j),$$

它是一个半内积，因为 $\mathcal{E}_c(u, u) = 0$ 当且仅当 u 为常数。因此，模去常值函数后，双线性形式 $\mathcal{E}_c(\cdot, \cdot)$下降为商空间$\mathbf{D}_c(V)/\mathbb{R}$上的一个内积。

常边权 $c \equiv 1$ 称为组合边权。它常用于研究图的组合学。

定义 2.8. 采用组合边权 $c \equiv 1$，我们定义狄利克雷有限函数空间 $\mathbf{D}(V) := \mathbf{D}_c(V)$ 以及闭子空间 $\mathbf{D}_0(V) := \mathbf{D}_{c,0}(V)$ 和 $\mathbf{HD}(V) := \mathbf{HD}_c(V)$。

正如我们将在后续章节中展示的，每个圆模式都会自然地诱导出一种边权 c 和一个图拉普拉斯算子。我们将证明，这类几何边权等价于组合权重。

2.2.2. 共轭离散调和函数。给定圆盘的一个拓扑胞腔分解 (V, E, F)，存在一个对偶胞腔分解 (V^*, E^*, F^*)，其中原胞腔面与对偶顶点 ($F \cong V^*$)、原图顶点与对偶面 ($V \cong F^*$)，以及原边与对偶边 ($E \cong E^*$) 之间存在自然的双射。我们采用以下指标约定：

- 中的原图顶点以拉丁字母 $i, j, k, \ldots$ 为指标。
  V^* 中的对偶顶点（对应于 F中的面）以希腊字母 $\phi, \psi, \varphi, \ldots$为指标。

- 连接 i、j 的原图边记作 ij，相应地，连接 ϕ、ψ 的对偶边记作 $\phi\psi$。

假设原图赋有边权 $c : E \to \mathbb{R}_{>0}$，记作 $c_{ij} = c_{ji}$。我们在对偶图上定义对偶边权 $c^* : E^* \to \mathbb{R}_{>0}$，其值为原图边权的倒数

$$c^*_{\phi\psi} := \frac{1}{c_{ij}},$$

其中 $\phi\psi$ 是与 ij交叉的对偶边。关于 c^* 的对偶图上的图拉普拉斯算子，对函数 $u : V^* \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$(\Delta_{c^*} u)_\phi = \sum_\psi c^*_{\phi\psi}(u_\psi - u_\phi)$$

其中求和遍及对偶图中 ϕ 的所有邻点 ψ。

与原图的情形类似，我们将狄利克雷有限函数空间$\mathbf{D}_{c^*}(F)$定义为对偶顶点上的函数空间，其中函数相对于对偶边权 c^*具有有限狄利克雷能量。我们还将闭子空间 $\mathbf{D}_{c^*,\,0}(F)$定义为有限支撑函数的闭包，并将 $\mathbf{HD}_{c^*}(F)$定义为关于 Δ_{c^*}的离散调和函数空间。

原始图与对偶图上的调和函数之间存在对偶性。函数 $v : V \to \mathbb{R}$ 关于 c 调和，当且仅当存在共轭函数 $u : V^* \to \mathbb{R}$ 关于 c^*调和。这些函数由离散柯西-黎曼方程相关联

$$u_\psi - u_\phi = c_{ij}(v_j - v_i),$$

其中定向的选取使得 $v_j - v_i$ 对应于遍历边ij，而 $u_\psi - u_\phi$ 对应于从左向右穿越对偶边 $\phi\psi$。重要的是，它们还进一步满足恒等式

$$\mathcal{E}_c(v, v) = \mathcal{E}_{c^*}(u, u).$$

这建立了原始调和函数空间与对偶调和函数空间之间的同构，其中函数具有有限狄利克雷能量，并且模去常数函数。

$$\mathbf{HD}_c(V)/\mathbb{R} \cong \mathbf{HD}_{c^*}(F)/\mathbb{R}.$$

2.3. 欧几里得平面中的圆模式。 设 $G=(V,E,F)$ 是圆盘的胞腔分解。圆模式是指在欧几里得平面中对顶点的一种实现，使得每个面都有一个经过其顶点的外接圆。除欧氏变换外，圆模式由圆的欧几里得半径及邻圆的交角唯一确定。

2.3.1. 圆模式的交角。 设给定一个圆模式。对于每条边，我们测量其两个相邻面之外接圆的交角，从而定义一个映射

$$\Theta : E^* \to [0, 2\pi).$$

对于有向边 ij，角 $\Theta_{\phi\psi}$ 是在端点 j处从 C_ϕ 的逆时针切线量至 C_ψ 的逆时针切线，其中 C_ϕ 和 C_ψ 分别表示与 ij 相邻的面 ϕ，ψ 的外接圆。当 $\Theta_{\phi\psi}=\pi$ 时，两个圆重合但定向相反，相应的面被折叠。当 $\Theta_{\phi\psi}=0$ 时，两个圆以相同的定向重合。此时，我们移除公共边，将两个面合并。不失一般性，假设所有交角 $\Theta_{\phi\psi}$ 都属于 $(0,\ 2\pi)$。

交角 Θ 定义了一种离散共形结构：如果两个圆模式的交角相同，则称它们具有相同的离散共形结构。

如果所有交角都属于 $(0,\ \pi)$，则称圆模式为*Delaunay* 。这一条件等价于相关褶皱曲面在双曲空间中的局部凸性。

2.3.2. 圆模式的欧几里得半径。 给定交角 Θ，我们回顾函数 $R : F \to \mathbb{R}_{>0}$ 成为平面中某个圆模式的欧几里得半径所需的充要条件。我们还将说明相关圆图案度量 $\sigma(\Theta,\ R)$的构造。

对于每条无向对偶边 $\phi\psi$，考虑半径分别为 R_ϕ 和 R_ψ、对应于两个面 ϕ，ψ 的两个圆，它们以角度 $\Theta_{\phi\psi}=\Theta_{\psi\phi}$相交。两个交点与外心共同确定一个欧几里得风筝形，其中两条相邻边的长度为 R_ϕ ，另外两条相邻边的长度为 R_ψ （见图 4）。令 $\alpha_{\phi\psi}$ 和 $\alpha_{\psi\phi}$ 分别表示面 ϕ 和 ψ的外心处的半角。它们满足

$$\Theta_{\phi\psi} = \pi - \alpha_{\phi\psi} - \alpha_{\psi\phi}.$$

半角由半径和交角决定。

引理 2.9. 设半径为 R_ϕ、R_ψ 的两个圆以角 $\Theta_{\phi\psi}\in(\epsilon_0, \pi-\epsilon_0)$相交。它们在外接圆中心处确定两个半角 $\alpha_{\phi\psi}, \alpha_{\psi\phi} \in (0, \pi)$，其关系为

$$\alpha_{\phi\psi} = \cot^{-1}\left(\frac{R_\phi - R_\psi\cos\Theta_{\phi\psi}}{R_\psi\sin\Theta_{\phi\psi}}\right) = \frac{1}{2\mathbf{i}}\ln\left(\frac{1-\frac{R_\psi}{R_\phi}e^{-\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}}{1-\frac{R_\psi}{R_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}}\right),$$

$$\alpha_{\psi\phi} = \cot^{-1}\left(\frac{R_\psi - R_\phi\cos\Theta_{\phi\psi}}{R_\phi\sin\Theta_{\phi\psi}}\right) = \frac{1}{2\mathbf{i}}\ln\left(\frac{1-\frac{R_\phi}{R_\psi}e^{-\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}}{1-\frac{R_\phi}{R_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}}\right).$$

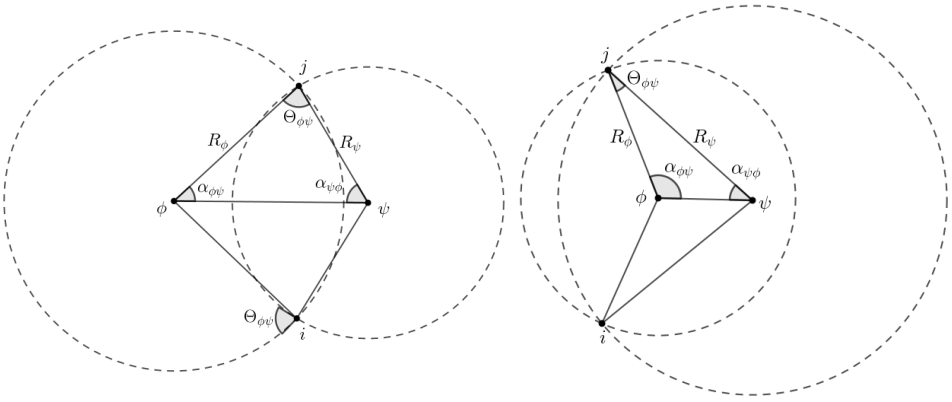


FIGURE 4. 每条对偶边 $\phi\psi$ 都对应一个风筝形，它由两个面的外心 ϕ，ψ 以及它们的外接圆的两个交点构成。风筝形的边长为半径 R_ϕ，R_ψ，两个圆的交角为 $\Theta_{\phi\psi}$。我们将外心处的半角记为 $\alpha_{\phi\psi}$ 和 $\alpha_{\psi\phi}$.

证明。我们有

$$R_\phi \sin\alpha_{\phi\psi} = R_\psi \sin\alpha_{\psi\phi} = R_\psi \sin(\Theta_{\phi\psi} + \alpha_{\phi\psi})$$

因此

$$\cot\alpha_{\phi\psi} = \frac{R_\phi - R_\psi\cos\Theta_{\phi\psi}}{R_\psi \sin\Theta_{\phi\psi}}.$$

另一方面，我们使用复数。线段 ϕj 和 $j\psi$ 的向量和与 ϕi 和 $i\psi$的向量和相同，由此得到恒等式

$$R_\phi e^{\mathbf{i}\alpha_{\phi\psi}} + R_\psi e^{\mathbf{i}(\alpha_{\phi\psi}+\Theta_{\phi\psi}-\pi)} = R_\phi e^{-\mathbf{i}\alpha_{\phi\psi}} + R_\psi e^{-\mathbf{i}(\alpha_{\phi\psi}+\Theta_{\phi\psi}-\pi)}.$$

这导出了角 α_ϕ的另一种表述。 □

给定任意函数 $R : F \to \mathbb{R}_{>0}$，通过沿这些筝形的边进行粘合，可以构造出分片欧几里得度量 σ，该度量可能在圆的交点和外心处呈现锥形奇点。我们注意到，当且仅当相关交角 Θ 的和为 2π 时，圆的交点处不存在锥形奇点；这一条件已被施加于 Θ 的假设中。为确保外心处不存在锥形奇点，中心处的角度和必须为 2π，这会对半径施加约束。

具体地，对于一个外接半径为 R_ϕ 的面 ϕ，设其相邻面的外接半径为 R_ψ，并设它们的外接圆的交角为 $\Theta_{\phi\psi}$。ϕ 的外心处的角度和为 2π，等价于半角之和为 π，即

$$\sum_{\psi} \cot^{-1}\left(\frac{R_\phi - R_\psi\cos\Theta_{\phi\psi}}{R_\psi\sin\Theta_{\phi\psi}}\right) = \pi \tag{2}$$

其中求和遍历与 ψ ϕ 相邻的所有面。

命题 2.10. 给定满足定义 *1.1* 的交角 Θ，函数 $R\colon F \to \mathbb{R}_{>0}$ 确定一个光滑的欧几里得度量 $\sigma(\Theta, R)$，该度量支撑一个半径为 R、交角为 Θ 的圆模式，当且仅当 R 对每个面 $\phi \in F$ 都满足 (2)。

对每个面 $\phi \in F$ 都满足方程 (2) 的函数集合 $R\colon F \to \mathbb{R}_{>0}$ 是˜，记作 $P(\Theta)$。在发展映射下，圆模式可能嵌入平面，也可能不嵌入。

2.3.3. 圆模式的无穷小变形。我们通过分析方程 (2) 关于半径 R [29] 的线性化，来考察保持交角 Θ 不变的圆模式无穷小变形。这种无穷小˙变形对应于半径 R 的一阶变化 $\dot{R}$，且该变化满足线性化方程。考虑半径 u 的对数变化 $F \to \mathbb{R}$ 会更方便，其定义如下：

$$u_\phi = \frac{\dot{R}_\phi}{R_\phi}.$$

˜如果 $R(t)$ 是 $P(\Theta)$ 中一族光滑的单参数函数，那么半径的对数变化为

$$u_\phi = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log R_\phi(t).$$

˜**命题 2.11**。给定一个对应于 $R \in P(\Theta)$ 的圆模式。函数u：$F \to \mathbb{R}$ 是保持交角的圆模式无穷小变形下半径的对数变化，当且仅当它对每个面 $\phi \in F$ 都满足

$$\sum_{\psi \sim \phi} c^*_{\phi\psi}(u_\phi - u_\psi) = 0, \tag{3}$$

其中 $c^*_{\phi\psi}$ 是定义如下的对偶边权

$$c^*_{\phi\psi} = \frac{2}{\cot \alpha_{\phi\psi} + \cot \alpha_{\psi\phi}} = \frac{2R_\phi R_\psi \sin \Theta_{\phi\psi}}{R_\phi^2 + R_\psi^2 - 2R_\phi R_\psi \cos \Theta_{\phi\psi}}.$$

对偶边权 $c^*_{\phi\psi}$ 是余切权的倒数

$$c_{\phi\psi} = \frac{\cot \alpha_{\phi\psi} + \cot \alpha_{\psi\phi}}{2} = \frac{1}{c^*_{\phi\psi}},$$

余切权与由有限元离散化 [36] 得出的图拉普拉斯算子相关。处处满足 (3) 的函数 u 是关于对偶边权 c^* 的对偶图上的离散调和函数。

2.3.4. 与边相关的双曲多面体体积。求解方程 (2) 的一个关键工具是通过双曲三空间中多面体的双曲体积所构造的变分方法。

对于每条边，若其相邻圆的半径为 R_ϕ, R_ψ，且以角度 $\Theta_{\phi\psi}$ 相交，我们按如下方式将其关联到一个双曲多面体（图 5）。我们考虑双曲三空间 $\mathbb{H}^3$ 的上半空间模型，其边界为 $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$。我们将这两个圆置于平面 $\mathbb{R}^2$ 中，并将它们的交点记为 z_i, z_j。平面中的这些圆充当上半空间中两个半球的边界。我们用 $\tilde{z}_\phi$, $\tilde{z}_\psi \in \mathbb{H}^3$ 表示相应欧几里得外心的垂直提升

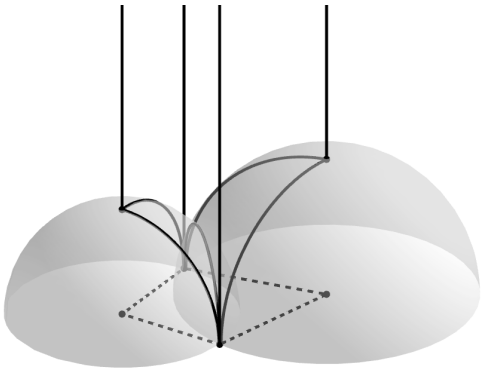


FIGURE 5. 与一条边相关联的双曲多面体由两个双曲四面体粘合而成。该多面体的有向双曲体积等于外心处半角的洛巴切夫斯基函数之和。

到这些半球。由此得到两个双曲四面体：第一个具有三个理想顶点 z_i, z_j, ∞ 和一个有限顶点 $\tilde{z}_\phi$，而第二个具有相同的理想顶点，但有限顶点为 $\tilde{z}_\psi$。将这两个四面体沿公共理想三角形 $z_i z_j \infty$ 粘合，形成一个双曲多面体，其带符号的双曲体积由下式给出

$$\mathcal{V}(R_\phi, R_\psi, \Theta_{\phi\psi}) = \Lambda\left(\alpha_{\phi\psi}\right) + \Lambda\left(\alpha_{\psi\phi}\right),$$

其中，$\Lambda(x) = -\int_0^x \log|2\sin t|\, dt$ 是 Milnor-洛巴切夫斯基函数 [33],，半角 $\alpha_{\phi\psi}$，$\alpha_{\psi\phi}$ 由 R_ϕ，R_ψ 和 $\Theta_{\phi\psi}$ 确定，如引理 2.9 所示。

尽管与无限圆模式相关联的双曲总体积是无限的，我们仍然可以考虑两个此类圆模式之间的相对体积。通过稍作修改以确保弗雷歇可微性，这一相对体积定义了一个良定泛函 $\mathcal{W} : \mathbf{D}(V) \to \mathbb{R}$ （见定义 5.8）。在第 4.2 节中，我们还引入了一个泛函 $\mathcal{W}^* : \mathbf{D}(F) \to \mathbb{R}$ （定义 4.6），它通过勒让德变换与 $\mathcal{W}$ 相关联，并与布洛赫–维格纳二重对数函数 [35]相联系。关于这种关系在有限情形中的详细讨论，请参阅 Bobenko 和 Springborn 的著作 [10]。

3. GEOMETRIC EDGE WEIGHTS EQUIVALENT TO COMBINATORIAL EDGE WEIGHTS

为了研究圆模式的变形空间，我们考虑由圆模式诱导的几何边权，这一做法受命题 2.11 的启发。本节的目标是利用环引理，证明几何边权与组合边权等价，从而使第 2.2.1 节中的讨论适用。

定义 3.1. 给定一个一致化圆模式，其欧几里得半径为 $R^\dagger$，交角为 Θ，且满足假设 *(A1)* 和 *(A2)*。对每个 $u \in \mathbf{D}(F)$，我们在原图上定义几何边权 $c : E \to \mathbb{R}_{>0}$，如下：

$$c_{ij} = \frac{R_\phi^2 + R_\psi^2 - 2R_\phi R_\psi \cos\Theta_{\phi\psi}}{2R_\phi R_\psi \sin\Theta_{\phi\psi}}$$

$$= \tan\frac{\Theta_{\phi\psi}}{2} + \frac{(R_\phi - R_\psi)^2}{2R_\phi R_\psi \sin\Theta_{\phi\psi}}$$
$$= \frac{\cot\alpha_{\phi\psi} + \cot\alpha_{\psi\phi}}{2}$$

其中 $R = e^u R^\dagger$，而 $\alpha_{\phi\psi}$ 和 $\alpha_{\psi\phi}$ 是相应风筝形中的半角（见图 *4*）。我们还定义对偶边权 $c^*\colon E^* \to \mathbb{R}_{>0}$，如下：

$$c^*_{\phi\psi} := \frac{1}{c_{ij}},$$

其中 $\phi\psi$ 是与 ij相交的对偶边。

环引理是本文建立各种估计的主要工具。它是一个关于邻圆的欧几里得半径的不等式，已知对圆堆积 [43, 19] 成立，并已推广到满足(A1)和(A2) [16]的、具有给定交角 Θ 的圆模式。

命题 3.2（环引理 [43, 16]）。给定满足假设*(A1)*和*(A2)*的角函数 Θ。存在常数 $C = C(\Theta,\ \epsilon_0) > 1$，使得对任意具有交角 Θ的嵌入圆模式，欧几里得半径$R\colon F \to \mathbb{R}_{>0}$ 对每条对偶边 $\phi\psi$满足

$$\frac{1}{C} \le \frac{R_\phi}{R_\psi} \le C.$$

我们推导出环引理向更一般圆模式的推广，包括那些可能并非嵌入的圆模式，或其相伴的分片欧几里得度量含有锥形奇点的圆模式。

推论 3.3. 存在一个常数 $C = C(\Theta, \epsilon_0) > 1$，使得对于任意与 $u \in \mathbf{D}(F)$ 对应的圆模式，其欧几里得半径 $R = e^u R^\dagger$ 对每条对偶边 $\phi\psi$均满足

$$\frac{1}{Ce^{\sqrt{\mathcal{E}(u)}}} \le \frac{1}{Ce^{\sup_{\phi\psi\in E^*}|u_\phi - u_\psi|}} \le \frac{e^{u_\phi}R^\dagger_\phi}{e^{u_\psi}R^\dagger_\psi} \le Ce^{\sup_{\phi\psi\in E^*}|u_\phi-u_\psi|} \le Ce^{\sqrt{\mathcal{E}(u)}}$$

其中 $\mathcal{E}(u) = \sum_{\phi\psi\in E^*}|u_\phi - u_\psi|^2$ 是 u 的狄利克雷能量。

证明。将环引理应用于一致化圆模式 $R^\dagger$，可得$\frac{1}{C} \le \frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi} \le C$。对于任意对偶边 $\phi\psi$，能量 $\mathcal{E}(u)$ 的定义意味着

$$|u_\phi - u_\psi| \le \sup_{\phi\psi\in E^*}|u_\phi - u_\psi| \le \sqrt{\mathcal{E}(u)}.$$

结合以上结果，我们得出所述不等式。 □

命题 3.4. 对于每个 $u \in \mathbf{D}(F)$，其几何边权满足

$$\tan\frac{\epsilon_0}{2} \le c_{ij} \le \tan\frac{\pi-\epsilon_0}{2} + \frac{4C^2e^{2\sup_{\phi\psi\in E^*}|u_\phi-u_\psi|}}{\sin\epsilon_0} \le \tan\frac{\pi-\epsilon_0}{2} + \frac{4C^2e^{2\sqrt{\mathcal{E}(u)}}}{\sin\epsilon_0}.$$

另一方面，对于中心处的任意半角

$$|\cot\alpha_{ij,\phi}| \le \frac{e^{\sqrt{\mathcal{E}(u)}}C + 1}{\sin\epsilon_0}$$

and

$$0 < \eta < \alpha_{ij,\phi} < \pi - \eta$$

其中

$$\eta := \cot^{-1}(\frac{e^{\sqrt{\mathcal{E}(u)}}C + 1}{\sin \epsilon_0})$$

是一个较小的常数。

证明。 根据定义可得

$$c_{ij} \geq \tan \frac{\Theta_{\phi\psi}}{2} \geq \tan \frac{\epsilon_0}{2}.$$

当且仅当两个圆的半径相同时，等号成立。另一方面，由推论 3.3 可知

$$c_{ij} = \tan \frac{\Theta_{\phi\psi}}{2} + \frac{(R_\phi - R_\psi)^2}{2R_\phi R_\psi \sin \Theta_{\phi\psi}} \leq \tan \frac{\pi - \epsilon_0}{2} + \frac{4C^2 e^{2\sup_{\phi\psi \in E^*} |u_\phi - u_\psi|}}{\sin \epsilon_0}.$$

另一方面，根据引理 2.9,

$$|\cot \alpha_{ij,\phi}| = |\frac{\frac{R_\phi}{R_\psi} - \cos \Theta_{\phi\psi}}{\sin \Theta_{\phi\psi}}| < \frac{e^{\sqrt{\mathcal{E}(u)}}C + 1}{\sin \epsilon_0}.$$

关于角的估计 α 可由以下事实得出：余切函数 $\cot(\cdot)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减。□

最后，我们将几何边权与恒等于 1 的组合边权联系起来。

推论 3.5. 对每一个 $u \in \mathbf{D}(F)$，其几何边权 c 与 c^* 分别等价于组合边权。

4. Hilbert manifold $P(\Theta, R^\dagger)$

给定一个交角为 Θ 、半径为 $R^\dagger$ 的一致化圆模式，我们验证定理 1.5：空间 $P(\Theta, R^\dagger)$ 是 $\mathbf{D}(F)$ 中的一个希尔伯特子流形，并且同胚于希尔伯特向量空间 $\mathbf{HD}(F)$。此外， $u \in P(\Theta, R^\dagger)$ 处的切空间是 $T_u P(\Theta, R^\dagger) = \mathbf{HD}_{c^*}(F)$，即关于几何边权的离散调和函数空间

$$c^*_{\phi\psi} = \frac{2e^{u_\phi + u_\psi} R_\phi R_\psi \sin \Theta_{\phi\psi}}{e^{2u_\phi} R_\phi^2 + e^{2u_\psi} R_\psi^2 - 2e^{u_\phi + u_\psi} R_\phi R_\psi \cos \Theta_{\phi\psi}}.$$

主要工具是一种涉及相对体积 $\mathcal{W}^*$ 的变分方法，该相对体积 $\mathcal{W}^*$ 定义见定义 4.6。在全文中，上标 $*$强调该映射是为对偶胞腔分解 (V^*, E^*, F^*) 定义的。在后续章节中，类似的函数记为不带上标 $*$ ，以表示它们是为胞腔分解 (V, E, F) 定义的。

4.1. D 中的希尔伯特子流形(*F*)。根据推论 3.5，所有由 $P(\Theta,\ R^\dagger)$ 中的圆模式诱导的几何边权 c^* 都等价于组合边权。因此，我们有

$$\mathbf{D}_{c^*}(F) = \mathbf{D}(F), \quad \mathbf{D}_{c^*,0}(F) = \mathbf{D}_0(F).$$

我们将包含映射记为

$$\iota : \mathbf{D}_0(F) \to \mathbf{D}(F)$$

并将对偶空间上的诱导映射记为

$$\iota^\star : \mathbf{D}^\star(F) \to \mathbf{D}_0^\star(F),$$

其中，$\mathbf{D}^\star(F)$ 和 $\mathbf{D}_0^\star(F)$ 分别是 $\mathbf{D}(F)$ 和 $\mathbf{D}_0(F)$ 上的有界线性泛函空间。

定义 4.1. 对于每条有向对偶边 $\vec{\phi\psi} \in E^*$，我们定义曲率变化 $\mathcal{K}^*_{\phi\psi} : \mathbf{D}(F) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u) =& 2\cot^{-1}\left(\frac{\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi} - \cos\Theta_{\phi\psi}}{\sin\Theta_{\phi\psi}}\right) - 2\cot^{-1}\left(\frac{e^{u_\phi - u_\psi}\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi} - \cos\Theta_{\phi\psi}}{\sin\Theta_{\phi\psi}}\right)\\ =& 2\alpha^\dagger_{\phi\psi} - 2\alpha_{\phi\psi}\end{aligned}$$

其中，$\alpha^\dagger_{\phi\psi}$ 和 $\alpha_{\phi\psi}$ 分别是与半径为 $R^\dagger$ 和 $R = e^u R^\dagger$的圆模式相对应的等形中、位于外心 ϕ处的半角。

引理 4.2。给定 $u \in \mathbf{D}(F)$，存在一个常数 $C_1 = C_1(\mathcal{E}(u)\ \Theta, \epsilon_0) > 0$，使得对于每条边 $\phi\psi \in E^*$

$$|\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u)| \le C_1 |u_\phi - u_\psi|.$$

证明。令 C 为环引理 3.2中的常数。给定 $u \in \mathbf{D}(F)$，我们考虑关于 $t \in [-\sqrt{\mathcal{E}(u)}\ \sqrt{\mathcal{E}(u)}]$、$r \in [\frac{1}{C}, C]$ 和 $\theta \in [\epsilon_0, \pi - \epsilon_0]$的解析函数 p

$$p(t, r, \theta) = 2\cot^{-1}\left(\frac{r - \cos\theta}{\sin\theta}\right) - 2\cot^{-1}\left(\frac{e^t r - \cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

我们注意到，对于所有的 r和 θ，$p(0,\ r,\ \theta) = 0$。由中值定理可得

$$p(t, r, \theta) = p(t, r, \theta) - p(0, r, \theta) = \partial_t p(\xi, r, \theta) \cdot t$$

对于某个 $\xi \in [0, t]$。

由于 p 的区域是紧致的，偏导数是有界的

$$C_1 := \sup_{t \in [-\sqrt{\mathcal{E}(u)}, \sqrt{\mathcal{E}(u)}], r \in [\frac{1}{C}, C], \theta \in [\epsilon_0, \pi - \epsilon_0]} |\partial_t p(t, r, \theta)|$$

因此，我们有

$$|p(t, r, \theta)| \le C_1 |t|.$$

对于任意对偶边 $\phi\psi \in E^*$，我们有 $|u_\phi - u_\psi| \le \sqrt{\mathcal{E}(u)}$、$\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi} \in [\frac{1}{C}, C]$ 和 $\Theta_{\phi\psi} \in [\epsilon_0, \pi - \epsilon_0]$，由此可通过以下方式得出所声称的不等式：

$$|p(u_\phi - u_\psi, \frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}, \Theta_{\phi\psi})| \le C_1 |u_\phi - u_\psi|.$$

□

命题 4.3。 对于每个 $u \in \mathbf{D}(F)$ 和有向边 $\phi\psi \in \vec{E}^*$，我们有

$$\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u) = -\mathcal{K}^*_{\psi\phi}(u).$$

存在一个良定义映射 $\mathcal{K}^*$： $\mathbf{D}(F) \to \mathbf{D}^*(F)$ 使得对于每个 $u, v \in \mathbf{D}(F)$

$$\langle\langle \mathcal{K}^*(u), v\rangle\rangle := \frac{1}{2}\sum_{\phi\psi\in\vec{E}^*} \mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u)(v_\phi - v_\psi) = \sum_{\phi\psi\in E^*} \mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u)(v_\phi - v_\psi)$$

其中 $\langle\langle \cdot, \cdot\rangle\rangle$ 是$\mathbf{D}^*(F)$与$\mathbf{D}(F)$之间的对偶配对。

此外， $u \in P(\Theta, R^\dagger)$ 当且仅当 $\iota^\star \circ \mathcal{K}^*(u) = 0$ 在$\mathbf{D}^*_0(F)$中是平凡的。

证明。 我们先证明对于每条对偶边$\phi\psi \in E^*$，反对称性 $\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u) = -\mathcal{K}^*_{\psi\phi}(u)$成立。注意，对于具有相邻外心 ϕ和 ψ的对应风筝形，由半径为 $e^{u_\phi}R^\dagger_\phi$ 和$e^{u_\psi}R^\dagger_\psi$ 的圆所对应的三角形 $\phi\psi i$的内角为

$$\alpha_{\phi\psi}, \quad \alpha_{\psi\phi} \quad \Theta_{\phi\psi}.$$

由于三角形内角和为 π，对于任意 u_ϕ， u_ψ

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u) + \mathcal{K}^*_{\psi\phi}(u) &= 2(\alpha^\dagger_{\phi\psi} - \alpha_{\phi\psi}) + 2(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \alpha_{\psi\phi})\\ &= 2(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \alpha^\dagger_{\psi\phi}) - 2(\alpha_{\phi\psi} + \alpha_{\psi\phi})\\ &= 2(\pi - \Theta_{\phi\psi}) - 2(\pi - \Theta_{\phi\psi}) = 0.\end{aligned}$$

因此，我们得出结论： $\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u) = -\mathcal{K}^*_{\psi\phi}(u)$。

根据定义，显然 $\mathcal{K}^*(u)$ 是 $\mathbf{D}(F)$ 上的一个线性泛函，接下来只需证明它有界。引理 4.2 表明，存在一个常数 $C_1 = C_1(\mathcal{E}(u), \Theta, \epsilon_0) > 0$，使得对任意对偶边 $\phi\psi \in E^*$

$$|\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u)| \leq C_1|u_\phi - u_\psi|.$$

因此，由柯西-施瓦茨不等式可知，对任意 $v \in \mathbf{D}(F)$，有

$$\begin{aligned}|\langle\langle \mathcal{K}^*(u), v\rangle\rangle| &= |\sum_{\phi\psi\in E^*} \mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u)(v_\phi - v_\psi)|\\ &\leq C_1 \sum_{\phi\psi\in E^*} |u_\phi - u_\psi||v_\phi - v_\psi|\\ &\leq C_1\sqrt{\mathcal{E}(u)}\sqrt{\mathcal{E}(v)}\end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{K}^*(u) \in \mathbf{D}^*(F)$。

最后，我们注意到， $u \in P(\Theta, R^\dagger)$ 当且仅当对每个面 $\phi \in F$

$$\sum_\psi \mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u) = 0.$$

这等价于说，对于与每个面相关联的示性函数$\phi \in F$

$$\chi^\phi_\psi := \begin{cases}1 & \text{if } \psi = \phi\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

我们有

$$\langle\langle \mathcal{K}^*(u), \chi^\phi\rangle\rangle = \sum_\psi \mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u) = 0.$$

由于示性函数的张成空间在$\mathbf{D}_0(F)$中稠密，我们推出 $u \in P(\Theta, R^\dagger)$当且仅当 $\iota^\star \circ \mathcal{K}^*(u)$在$\mathbf{D}_0^*(F)$中是平凡的。□

因此，圆模式空间是 $\iota^\star \circ \mathcal{K}^*$ 的零点集

$$P(\Theta, R^\dagger) = (\iota^\star \circ \mathcal{K}^*)^{-1}(0).$$

我们进一步研究映射 $\mathcal{K}^*$ 的微分。

命题 4.4。对于每个 $u \in \mathbf{D}(F)$，$\mathcal{K}^*$ 在 u 处的微分由线性映射 $d\mathcal{K}_u^*\colon \mathbf{D}(F) \to \mathbf{D}^*(F)$ 给出，使得对于每个 $v, \tilde{v} \in \mathbf{D}(F)$

$$\langle\langle d\mathcal{K}_u^*(v), \tilde{v} \rangle\rangle = \sum_{\phi\psi \in E^*} c^*_{\phi\psi}(v_\phi - v_\psi)(\tilde{v}_\phi - \tilde{v}_\psi) = \langle\langle v, d\mathcal{K}_u^*(\tilde{v}) \rangle\rangle$$

其中 $c^*_{\phi\psi}$ 是与半径为$R = e^u R^\dagger$、交角为 Θ 的圆模式相关联的对偶边权。

证明。对于每条有向对偶边 $\phi\psi \in E^*$，我们计算偏导数

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{K}^*_{\phi\psi}}{\partial u_\phi} &= -\frac{\partial}{\partial u_\phi} \cot^{-1}\left(\frac{e^{u_\phi - u_\psi}\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi} - \cos\Theta_{\phi\psi}}{\sin\Theta_{\phi\psi}} \right) \\
&= \frac{2}{1 + \left(\frac{e^{u_\phi - u_\psi}\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi} - \cos\Theta_{\phi\psi}}{\sin\Theta_{\phi\psi}} \right)^2} \cdot \frac{e^{u_\phi - u_\psi}\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}}{\sin\Theta_{\phi\psi}} \\
&= c^*_{\phi\psi}
\end{aligned}$$

同样地，我们有

$$\frac{\partial \mathcal{K}^*_{\phi\psi}}{\partial u_\psi} = -c^*_{\phi\psi}.$$

因此，对于每个 v，$\tilde{v} \in \mathbf{D}(F)$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle\langle d\mathcal{K}_u^*(v), \tilde{v} \rangle\rangle &= \sum_{\phi\psi \in E^*} \left(\frac{\partial \mathcal{K}^*_{\phi\psi}}{\partial u_\phi} v_\phi + \frac{\partial \mathcal{K}^*_{\phi\psi}}{\partial u_\psi} v_\psi \right)(\tilde{v}_\phi - \tilde{v}_\psi) \\
&= \sum_{\phi\psi \in E^*} c^*_{\phi\psi}(v_\phi - v_\psi)(\tilde{v}_\phi - \tilde{v}_\psi).
\end{aligned}$$

$d\mathcal{K}_u^*$ 的自伴性源于 $c^*_{\phi\psi} = c^*_{\psi\phi}$的对称性。 □

现在我们可以证明，$P(\Theta, R^\dagger)$ 是$\mathbf{D}(F)$ 的希尔伯特子流形。**命题 4.5**。空间 $P(\Theta, R^\dagger)$ 是希尔伯特空间$\mathbf{D}(F)$中的希尔伯特子流形。

证明。我们考察 $\iota^\star \circ \mathcal{K}^*$ 的微分：$\mathbf{D}(F) \to \mathbf{D}_0^*(F)$。由于 $\iota^\star$是线性的，我们有

$$d(\iota^\star \circ \mathcal{K}^*)_u = \iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*.$$

对于任意 $u \in \mathbf{D}(F)$，微分由下式给出：对于 $v \in \mathbf{D}(F)$ $\tilde{v} \in \mathbf{D}_0(F)$

$$\langle\langle \iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*(v), \tilde{v} \rangle\rangle = \langle\langle d\mathcal{K}_u^*(v), \tilde{v} \rangle\rangle = \sum_{\psi \sim \phi} c^*_{\phi\psi}(v_\phi - v_\psi)(\tilde{v}_\phi - \tilde{v}_\psi).$$

取 $\tilde{v}$ 为面 $\phi \in F$的示性函数，我们推出

$$\left(\iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*(v)\right)_\phi = \sum_\psi c^*_{\phi\psi}(v_\phi - v_\psi).$$

因此，微分 $\iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*$ 与几何边权 $c^*_{\phi\psi}$ 所对应的图拉普拉斯算子一致，且

$$\ker\left(\iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*\right) = \mathbf{HD}_{c^*}(F).$$

接下来，我们根据里斯表示定理证明 $\iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*$ 到 $\mathbf{D}_0^*(F)$ 的映射是满射。由于几何边权 $c^*_{\phi\psi}$ 与组合边权等价，且 $\mathbf{D}_0(F)$ 不包含非平凡常值函数，狄利克雷能量 $\mathcal{E}_{c^*}$ 在 $\mathbf{D}_0(F)$ 上定义了一个内积，其范数是完备的。因此，对于任意 $h \in \mathbf{D}_0^*(F)$，根据 $\mathbf{D}_0(F)$ 上的内积 $\mathcal{E}_{c^*}$ 所对应的里斯表示定理，存在唯一的函数 $v \in \mathbf{D}_0(F)$，使得对于任意 $\tilde{v} \in \mathbf{D}_0(F)$，

$$\langle\!\langle h, \tilde{v}\rangle\!\rangle = \mathcal{E}_{c^*}(v, \tilde{v}) = \sum_{\psi\sim\phi} c^*_{\phi\psi}(v_\phi - v_\psi)(\tilde{v}_\phi - \tilde{v}_\psi) = \langle\!\langle \iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*(v), \tilde{v}\rangle\!\rangle.$$

由于这对所有 $\tilde{v} \in \mathbf{D}_0(F)$ 都成立，我们可以推得

$$\iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*(v) = h$$

从而我们得到 $\iota^\star \circ d\mathcal{K}_u^*$ 到$\mathbf{D}_0^*(F)$的满射性。

由于对任意 $u \in \mathbf{D}(F)$，$\iota^\star \circ \mathcal{K}^*$ 在 u 处的微分是从$\mathbf{D}(F)$到$\mathbf{D}_0^*(F)$的有界线性映射，且满足

$$\mathbf{D}(F) = \mathbf{D}_0(F) \oplus \ker\left(d(\iota^\star \circ \mathcal{K}^*)_u\right), \quad \mathbf{D}_0^*(F) = d(\iota^\star \circ \mathcal{K}^*)_u(\mathbf{D}(F))$$

秩定理 [1, 定理2.5.15] 表明，$P(\Theta, R^\dagger) = (\iota^\star \circ \mathcal{K}^*)^{-1}(0)$是一个希尔伯特流形，且切空间

$$T_u P(\Theta, R^\dagger) = \ker\left(d(\iota^\star \circ \mathcal{K}^*)_u\right) = \mathbf{HD}_{c^*}(F)$$

由关于几何边权$c^*_{\phi\psi}$的离散调和函数组成。□

4.2. 相对体积泛函 $\mathcal{W}^*$。我们注意到，映射 $\mathcal{K}^*$ 具有一个势泛函。事实上，命题4.4表明，对每个 $u \in \mathbf{D}(F)$，微分 $d\mathcal{K}_u^*$ 都是自伴的。由于$\mathbf{D}(F)$是一个向量空间，特别地是单连通的，由庞加莱′引理，我们可以对由$\mathcal{K}^*$ 定义的1-形式进行积分，从而得到一个泛函 $\mathcal{W}^*$: $\mathbf{D}(F) \to \mathbb{R}$，其梯度为 $\mathcal{K}^*$。也就是说，$\mathcal{W}^*$ 可以通过沿从原点出发的线段积分来定义：

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^*(u) &= \int_0^1 \langle\!\langle \mathcal{K}^*(tu), u\rangle\!\rangle\, dt \\ &= \sum_{\phi\psi\in E^*} \int_0^1 \mathcal{K}^*_{\phi\psi}(tu)(u_\phi - u_\psi)\, dt.\end{aligned}$$

下面，我们为 $\mathcal{W}^*$建立一个显式公式，这将在下一节中用于证明强制性，并将变分方法应用于变形空间$P(\Theta,\ R^\dagger)$。我们还总结了 $\mathcal{W}^*$的主要性质。

定义 4.6。 对于每条对偶边 $\phi\psi \in E^*$，我们定义一个解析函数$\mathcal{W}^*_{\phi\psi}$： $\mathbf{D}(F) \to \mathbb{R}$ 如下

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u) :=& \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{u_\phi-u_\psi}\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right)+\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{u_\psi-u_\phi}\frac{R^\dagger_\psi}{R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right)\\ &-\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right)-\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(\frac{R^\dagger_\psi}{R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right)\\ &+(\alpha^\dagger_{\phi\psi}-\alpha^\dagger_{\psi\phi})(u_\phi-u_\psi)\\ =&\mathcal{W}^*_{\psi\phi}(u)\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{ImLi}_2(z)$ 是二重对数函数的虚部

$$\operatorname{Li}_2(z)=-\int_0^z\frac{\ln(1-w)}{w}\,dw \quad \textit{for } z\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty).$$

于是相对体积泛函 $\mathcal{W}^*$： $\mathbf{D}(F) \to \mathbb{R}$ 通过对所有对偶边求和来定义

$$\mathcal{W}^*(u)=\sum_{\phi\psi\in E^*}\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u).$$

命题 4.7. 泛函 $\mathcal{W}^*$ 是良定义的，并满足以下性质：

(1) $\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(0)=0$ 对每条对偶边 $\phi\psi\in E^*$成立，因此 $\mathcal{W}^*(0)=0$。*(2)* 对每个 $u\in D(F)$，微分为 $d\mathcal{W}^*(u)=\mathcal{K}^*(u)$。*(3)* 原点 $u=0$ 是 $\mathcal{W}^*$ 在 $D(F)$ 中的唯一临界点。*(4)* 我们有 $u\in P(\Theta,R^\dagger)$ 当且仅当 $d\mathcal{W}^*(u)|_{\mathbf{D}_0(F)}=0$。*(5)* 对每个 $u\in D(F)$，泛函 $\mathcal{W}^*$ 在仿射子空间 $u+D_0(F)$ 上的限制是严格凸的。

证明。我们首先计算 $\mathcal{W}^*_{\phi\psi}$ 关于 u_ϕ 的偏导数。由引理 2.9 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathcal{W}^*_{\phi\psi}}{\partial u_\phi}\\ =&\frac{\partial}{\partial u_\phi}\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{u_\phi-u_\psi}\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right)+\frac{\partial}{\partial u_\phi}\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{u_\psi-u_\phi}\frac{R^\dagger_\psi}{R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right)+(\alpha^\dagger_{\phi\psi}-\alpha^\dagger_{\psi\phi})\\ =&-\operatorname{Im}\left(\ln\left(1-e^{u_\phi-u_\psi}\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right)\right)+\operatorname{Im}\left(\ln\left(1-e^{u_\psi-u_\phi}\frac{R^\dagger_\psi}{R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right)\right)+(\alpha^\dagger_{\phi\psi}-\alpha^\dagger_{\psi\phi})\\ =&-\alpha_{\phi\psi}+\alpha_{\psi\phi}+(\alpha^\dagger_{\phi\psi}-\alpha^\dagger_{\psi\phi})=\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u).\end{aligned}$$

同理，可得

$$\frac{\partial\mathcal{W}^*_{\phi\psi}}{\partial u_\psi}=-\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u).$$

因此，对于每个 $u,v\in\mathbf{D}(F)$，我们有

$$\langle\!\langle d\mathcal{W}^*(u),v\rangle\!\rangle=\sum_{\phi\psi\in E^*}\left(\frac{\partial\mathcal{W}^*_{\phi\psi}}{\partial u_\phi}v_\phi+\frac{\partial\mathcal{W}^*_{\phi\psi}}{\partial u_\psi}v_\psi\right)$$

$$= \sum_{\phi\psi\in E^*} \mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u)(v_\phi - v_\psi) = \langle\langle \mathcal{K}^*(u), v\rangle\rangle.$$

其余性质是命题 4.3 和命题 4.4 的重述。□

4.3.**到离散调和狄利克雷函数空间 HD 的投影(F).** 对于任意与组合边权等价的边权 c^*，罗伊登分解给出狄利克雷函数空间 $\mathbf{D}(F)$ 的如下分解

$$\mathbf{D}(F) = \mathbf{D}_0(F) \oplus \mathbf{HD}(F) = \mathbf{D}_0(F) \oplus \mathbf{HD}_{c^*}(F).$$

其中直和关于配对 $\mathcal{E}_{c^*}(u,v)$ 正交。我们令 $p_{c^*}: \mathbf{D}(F) \to \mathbf{HD}_{c^*}(F)$ 为到调和部分的投影，它是一个有界线性算子。特别地，我们用 $p_F: \mathbf{D}(F) \to \mathbf{HD}(F)$ 表示关于组合边权 $c^* \equiv 1$ 的正交投影。

我们的目标是证明 p_F 在希尔伯特流形 $P(\Theta, R^\dagger) \subset \mathbf{D}(F)$ 上的限制是到 $\mathbf{HD}(F)$ 的同胚。我们首先证明 $p_F|_{P(\Theta,R^\dagger)}$ 是局部同胚。随后，利用涉及泛函 $\mathcal{W}^*$ 的变分论证，我们证明 $p_F|_{P(\Theta,R^\dagger)}$ 是双射。

命题 4.8. 投影 $p_F|_{P(\Theta,R^\dagger)}: P(\Theta, R^\dagger) \to \mathbf{HD}(F)$ 是局部同胚。

证明. 对于 $u \in P(\Theta, R^\dagger)$，我们有 $T_u P(\Theta, R^\dagger) = \mathbf{HD}_{c^*}(F)$，其中 c^* 是与半径为 $e^u R^\dagger$ 的圆模式相关联的几何边权，并且根据推论 3.5，它等价于组合边权。因此，$p_F|_{T_u P(\Theta,R^\dagger)}: T_u P(\Theta, R^\dagger) \to \mathbf{HD}(F)$ 是一个同构，其逆为 $p_{c^*}|_{\mathbf{HD}(F)}$。□

为了证明投影 $p_F|_{P(\Theta,R^\dagger)}$ 是到 $\mathbf{HD}(F)$ 上的双射，我们采用一种变分方法，该方法涉及上一节中引入的泛函 $\mathcal{W}^*: \mathbf{D}(F) \to \mathbb{R}$。具体而言，对于任意固定的 $h \in \mathbf{HD}(F)$，我们考虑 $\mathcal{W}^*$ 在仿射子空间 $h + \mathbf{D}_0(F)$ 上的限制。为简化记号，我们考虑子空间 $\mathbf{D}_0(F)$ 上的以下泛函。

定义 4.9. 给定一个半径为 $R^\dagger$： $F \to \mathbb{R}_{>0}$且交角为 Θ的一致化圆模式。对于每个固定的 $h \in \mathbf{HD}(F)$，我们定义泛函$\mathcal{W}^*_h$： $\mathbf{D}_0(F) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^*_h(u) :=& \sum_{\phi\psi} \Bigg[\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{u_\phi - u_\psi}\frac{e^{h_\phi}R^\dagger_\phi}{e^{h_\psi}R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right) + \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{u_\psi - u_\phi}\frac{e^{h_\psi}R^\dagger_\psi}{e^{h_\phi}R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right) \\
&- \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(\frac{e^{h_\phi}R^\dagger_\phi}{e^{h_\psi}R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right) - \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(\frac{e^{h_\psi}R^\dagger_\psi}{e^{h_\phi}R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right) + (\alpha^\dagger_{\phi\psi} - \alpha^\dagger_{\psi\phi})(u_\phi - u_\psi)\Bigg] \\
=& \sum_{\phi\psi}(\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h+u) - \mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h)) \\
=& \mathcal{W}^*(h+u) - \mathcal{W}^*(h).
\end{aligned}$$

由命题 4.7 可知，$u \in \mathbf{D}_0(F)$ 是 $\mathcal{W}^*_h$ 的临界点，当且仅当 $u + h \in P(\Theta, R^\dagger)$。$\mathcal{W}^*_h$ 在 $\mathbf{D}_0(F)$ 上的强凸性意味着，$\mathcal{W}^*_h$ 在 $\mathbf{D}_0(F)$ 上至多存在一个临界点。为证明该临界点的存在性，只需证明 $\mathcal{W}^*_h$ 是强制的，即 $\mathcal{W}^*_h(u) \to +\infty$，当

$\|u\| \to +\infty$。事实上，这表明 $\mathcal{W}_h^*$ 在$\mathbf{D}_0(F)$ 中的某个元素处达到其最小值，而该元素即为所求的临界点。

为了证明强制性，我们必须仔细分析当 $\|u\| \to +\infty$ 时 $\mathcal{W}_h^*$ 的渐近增长。命题 3.4 表明，当 $|u_\phi - u_\psi| \to +\infty$ 时，几何边权 $c^*_{\phi\psi}$ 可能趋于零，因此 $\mathcal{W}_h^*$ 的海森矩阵可能退化。沿着这些方向，我们推导出 $\mathcal{W}_h^*$ 增长的线性下界。相反，如果 $\|u\| \to +\infty$，且对于每条对偶边 $\phi\psi \in E^*$，$|u_\phi - u_\psi|$ 都保持有界，那么几何边权 $c^*_{\phi\psi}$ 将保持一致有界。在这种情况下，$\mathcal{W}_h^*$ 的海森矩阵一致正定，我们推导出 $\mathcal{W}_h^*$ 增长的二次下界。在接下来的两个引理中，我们将这些论证阐述得更加精确。

引理 4.10。设 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\theta \in (0, \pi)$。则

$$\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{x+\mathbf{i}\theta}) + \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{-x+\mathbf{i}\theta}) > (\pi - \theta)|x|.$$

证明。设 $f(x) = \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{x+\mathbf{i}\theta}) + \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{-x+\mathbf{i}\theta})$。由于 $f(x)$ 是关于x的偶函数，只需考虑 $x > 0$。我们利用二对数函数的反演公式

$$\operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2(1/z) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}(\ln(-z))^2. \tag{4}$$

设 $z = e^{x+\mathbf{i}\theta}$。对该恒等式取虚部，并注意到 $\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(1/z) = \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{-x-\mathbf{i}\theta}) = -\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{-x+\mathbf{i}\theta})$，得到

$$\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{x+\mathbf{i}\theta}) - \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{-x+\mathbf{i}\theta}) = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}(x + \mathbf{i}(\theta - \pi))^2\right). \tag{5}$$

右端化简为 $(\pi-\theta)x$。将其代回 $f(x)$ 的表达式，得到

$$f(x) = (\pi - \theta)x + 2\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{-x+\mathbf{i}\theta}). \tag{6}$$

对于 $x > 0$，有 $|e^{-x+\mathbf{i}\theta}| < 1$。由于当 w 位于单位圆盘内的上半平面时，$\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(w) > 0$，故 $2\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^{-x+\mathbf{i}\theta})$ 项严格为正。因此，$f(x) > (\pi - \theta)x$。□

引理 4.11. 给定一个一致化圆模式，其半径为 $R^\dagger$：$F \to \mathbb{R}_{>0}$，相交角为 Θ：$E^* \to (\epsilon_0,\ \pi - \epsilon_0)$，且固定 $h \in \mathbf{HD}(F)$。则存在常数 η、$M > 0$，它们依赖于 ϵ_0、$R^\dagger$ 与 $\mathcal{E}(h)$，使得对每个 $u \in \mathbf{D}_0(F)$ 以及每条对偶边 $\phi\psi \in E^*$，我们有

$$\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u + h) - \mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h) \geq 2\eta|u_\phi - u_\psi| - M.$$

特别地，若 $|u_\phi - u_\psi| \geq \frac{M}{\eta}$，则

$$\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u + h) - \mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h) \geq \eta|u_\phi - u_\psi|.$$

证明。引理 4.10 表明

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u + h) - \mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h) + \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{h_\phi - h_\psi}\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right) + \operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{h_\psi - h_\phi}\frac{R^\dagger_\psi}{R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right)\\ \geq&(\pi - \Theta_{\phi\psi})\left|u_\phi - u_\psi + h_\phi - h_\psi + \log\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}\right| + (\alpha^\dagger_{\phi\psi} - \alpha^\dagger_{\psi\phi})(u_\phi - u_\psi)\end{aligned}$$

$$\geq(\alpha^\dagger_{\phi\psi}+\alpha^\dagger_{\psi\phi})|u_\phi-u_\psi|-(\pi-\Theta_{\phi\psi})\left|h_\phi-h_\psi+\log\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}\right|+(\alpha^\dagger_{\phi\psi}-\alpha^\dagger_{\psi\phi})(u_\phi-u_\psi)$$

$$\geq 2(\min\{\alpha^\dagger_{\phi\psi},\alpha^\dagger_{\psi\phi}\})|u_\phi-u_\psi|-(\pi-\Theta_{\phi\psi})\left|h_\phi-h_\psi+\log\frac{R^\dagger_\phi}{R^\dagger_\psi}\right|.$$

设 $C>0$ 为环引理（引理 3.2）中的常数。命题 3.4 表明，对于每条对偶边 $\phi\psi\in E^*$，

其中 $\eta=$余切函数$^{-1}\left(\frac{1}{C+1}\cdot\text{正弦}\,\epsilon_0\right)$。此外，我们定义

$$M=\sup\left((\pi-\theta)\,|t+\log r|+\left|\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(e^t re^{\mathbf{i}\theta})\right|+\left|\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(\frac{1}{e^t r}e^{\mathbf{i}\theta})\right|\right)$$

其中，上确界取遍所有的 $\theta\in[\epsilon_0,\pi-\epsilon_0]$, $r\in[\frac{1}{C},C]$ 和 $t\in[-\sqrt{\mathcal{E}(h)},\sqrt{\mathcal{E}(h)}]$。由于区域是紧致的，常数 M 是有限的。因此，我们有

$$\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u+h)-\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h)\geq 2\eta|u_\phi-u_\psi|-M.$$

□

引理 4.12. 设 $\eta, M>0$ 为前一个引理中的常数。存在一个常数 $\lambda=\lambda(\frac{M}{\eta})>0$，使得对于任意满足 $|u_\phi-u_\psi|\leq\frac{M}{\eta}$ 的对偶边 $\phi\psi\in E^*$，我们有

$$\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u+h)-\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h)>\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(h)\cdot(u_\phi-u_\psi)+\frac{\lambda}{2}|u_\phi-u_\psi|^2.$$

证明。设 $u\in\mathbf{D}_0(F)$ 且 $\phi\psi\in E^*$。记 $x=u_\phi-u_\psi$。只需考虑函数

$$\begin{aligned}f(x)=&\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^x\frac{e^{h_\phi}R^\dagger_\phi}{e^{h_\psi}R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right)+\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(e^{-x}\frac{e^{h_\psi}R^\dagger_\psi}{e^{h_\phi}R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right)\\&-\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(\frac{e^{h_\phi}R^\dagger_\phi}{e^{h_\psi}R^\dagger_\psi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\phi\psi}}\right)-\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2\left(\frac{e^{h_\psi}R^\dagger_\psi}{e^{h_\phi}R^\dagger_\phi}e^{\mathbf{i}\Theta_{\psi\phi}}\right)+(\alpha^\dagger_{\phi\psi}-\alpha^\dagger_{\psi\phi})x\end{aligned}$$

注意 $f(0)=0$。f 的一阶导数和二阶导数满足

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=u_\phi-u_\psi}=\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(u+h)$$

and

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=u_\phi-u_\psi}=c^*_{\phi\psi}$$

其中 $c^*_{\phi\psi}$ 是赋予对偶边 $\phi\psi$ 的几何边权，半径为$e^{u+h}R^\dagger$，交角为 Θ。

由命题 3.4，存在常数 $\lambda=\lambda(\frac{M}{\eta})>0$，使得对每一条具有 $|u_\phi-u_\psi|\leq\frac{M}{\eta}$ 的对偶边 $\phi\psi\in E^*$，我们有

$$c^*_{\phi\psi}>\lambda.$$

因此，根据泰勒公式，对介于 0 与 $u_\phi-u_\psi$ 之间的某个 ξ，我们有

$$\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u+h)-\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h)=f(u_\phi-u_\psi)$$

$$= f(0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}(u_\phi - u_\psi) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=\xi}|u_\phi - u_\psi|^2$$
$$\geq \mathcal{K}^*_{\phi\psi}(h)(u_\phi - u_\psi) + \frac{\lambda}{2}|u_\phi - u_\psi|^2.$$

□

现在我们将上述两个引理结合起来，以证明泛函$\mathcal{W}_h^*$ 在 $\mathbf{D}_0(F)$ 上的强制性。

命题 4.13。令 $\eta, M > 0$ 为前述引理中的常数。对于任意 $u \in D_0(V)$，我们将对偶边集 E^* 分解为两个子集

$$E^*_+ = \{\phi\psi \in E^* \mid |u_\phi - u_\psi| \geq \frac{M}{\eta}\},$$
$$E^*_- = \{\phi\psi \in E^* \mid |u_\phi - u_\psi| < \frac{M}{\eta}\} = E^* \setminus E^*_+.$$

我们将狄利克雷能量 $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}_+(u) + \mathcal{E}_-(u)$分解为，其中

$$\mathcal{E}_+(u) = \sum_{\phi\psi\in E^*_+}|u_\phi - u_\psi|^2, \quad \mathcal{E}_-(u) = \sum_{\phi\psi\in E^*_-}|u_\phi - u_\psi|^2.$$

那么存在常数 $\lambda = \lambda(\frac{M}{\eta}) > 0$ 和 $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(\mathcal{E}(h), \Theta, \epsilon_0) > 0$，使得

$$\mathcal{W}_h^*(u) > \eta\sqrt{\mathcal{E}_+(u)} - \tilde{C}_1\sqrt{\mathcal{E}_-(u)} + \frac{\lambda}{2}\mathcal{E}_-(u).$$

特别地，泛函 $\mathcal{W}_h^*$ 在 $\mathbf{D}_0(F)$上是强制的。

证明。引理 4.11 表明

$$\sum_{\phi\psi\in E^*_+}\left(\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u+h) - \mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h)\right) \geq \eta \sum_{\phi\psi\in E^*_+}|u_\phi - u_\psi|$$
$$\geq \eta\left(\sum_{\phi\psi\in E^*_+}|u_\phi - u_\psi|^2\right)^{1/2} = \eta\sqrt{\mathcal{E}_+(u)}.$$

另一方面，引理 4.12 和引理 4.2 蕴含

$$\sum_{\phi\psi\in E^*_-}\left(\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u+h) - \mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h)\right) > \sum_{\phi\psi\in E^*_-}\left[\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(h)\cdot(u_\phi - u_\psi) + \frac{\lambda}{2}|u_\phi - u_\psi|^2\right]$$
$$\geq -\sqrt{\sum_{\phi\psi\in E^*_-}|\mathcal{K}^*_{\phi\psi}(h)|^2}\sqrt{\mathcal{E}_-(u)} + \frac{\lambda}{2}\mathcal{E}_-(u)$$
$$\geq -C_1\sqrt{\mathcal{E}(h)}\sqrt{\mathcal{E}_-(u)} + \frac{\lambda}{2}\mathcal{E}_-(u)$$

其中 C_1 是引理 4.2 中的常数，并且我们取 $\tilde{C}_1 = C_1\sqrt{\mathcal{E}(h)}$。综合这两个估计，我们由此得到所需的不等式

$$\mathcal{W}_h^*(u) = \sum_{\phi\psi\in E^*_+}\left(\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u+h) - \mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h)\right) + \sum_{\phi\psi\in E^*_-}\left(\mathcal{W}^*_{\phi\psi}(u+h) - \mathcal{W}^*_{\phi\psi}(h)\right).$$

我们声称，泛函 $\mathcal{W}_h^*$ 在 $\mathbf{D}_0(F)$ 上是强制的。事实上，设 $u_n \in \mathbf{D}_0(F)$ 是一个满足 $\|u_n\| \to +\infty$ 的序列。若 $\mathcal{E}_+(u_n) \to +\infty$，则由该不等式可得

$\mathcal{W}_h^*(u_n) \to +\infty$。否则，我们可以假设 $\mathcal{E}_+(u_n)$ 有界。因此，$\mathcal{E}_-(u_n) \to +\infty$，且由该不等式还可得 $\mathcal{W}_h^*(u_n) \to +\infty$。这就证明了该结论。□

现在我们可以证明，投影 $p_F|_{P(\Theta,R^\dagger)}$ 在 $P(\Theta, R^\dagger)$ 与 $\mathbf{HD}(F)$ 之间给出了一个同胚。

定理 *1.5* 的证明。命题 4.8 表明，投影 $p_F|_{P(\Theta,R^\dagger)}$ 是一个局部同胚。剩下需要证明的是，$p_F|_{P(\Theta,R^\dagger)}$ 是双射。

我们已经证明，对于任意 $h \in \mathbf{HD}(F)$，泛函 $\mathcal{W}_h^*\colon \mathbf{D}_0(F) \to \mathbb{R}$是严格凸且强制的。标准的变分论证表明，$\mathcal{W}_h^*$在某个 $v \in \mathbf{D}_0(F)$ 处取得唯一的全局最小值（参见 [11, 推论 3.23]）。

令 $u = h + v$。根据命题 4.7，v 是 $\mathcal{W}_h^*$ 的临界点等价于

$$d\mathcal{W}_h^*(v) = 0 \iff d\mathcal{W}^*(h+v)|_{\mathbf{D}_0(F)} = 0.$$

该条件恰好意味着，$u \in P(\Theta, R^\dagger)$ 且 $p_F(u) = h$。

最小值的唯一性 v 意味着 u 的唯一性。假设有两个点 $u_1, u_2 \in P(\Theta, R^\dagger)$，使得 $p_F(u_1) = p_F(u_2) = h$。那么，对于某些 $v_1, v_2 \in \mathbf{D}_0(F)$，我们可以写成 $u_1 = h + v_1$ 和 $u_2 = h + v_2$。v_1 和 v_2 都必须是严格凸泛函 $\mathcal{W}_h^*$ 的临界点，因此 $v_1 = v_2$ 和 $u_1 = u_2$。所以，$p_F|_{P(\Theta,R^\dagger)}$ 是一个双射。

最后，由于 $p|_{P(\Theta,R^\dagger)}$ 是局部同胚且为双射，它是 $P(\Theta, R^\dagger)$ 与 $\mathbf{HD}(F)$ 之间的全局同胚。□

5. Conjugate angle parametrization

$P(\Theta, R^\dagger) \subset \mathbf{HD}(F)$ 中的元素通过相对于一致化圆模式的对数半径变化来参数化圆模式。本节将介绍另一种圆模式参数化方式，即通过外心处半角的变化进行参数化。

回顾一下，给定一个函数 $u\colon F \to \mathbb{R}$，对于每条对偶边 $\phi\psi \in E^*$，我们将一致化圆模式中相应的风筝形变形，得到一个新的风筝形，其边长为 $e^{u_\phi} R_\phi^\dagger$ 和 $e^{u_\psi} R_\psi^\dagger$，且二者交于角 $\Theta_{\phi\psi}$（见图 4）。该变形风筝形在平面中除平移和旋转外是唯一确定的。当且仅当每个外心周围的角度和为 2π时，通过沿公共边粘合这些变形风筝形可得到平坦欧几里得度量。特别地，在这种情况下，每个外心周围的旋转全纯性都是平凡的。

类似地，给定定义在顶点上的函数 $v\colon V \to \mathbb{R}$，当 $|v_j - v_i|$ 对于 $ij \in E$ 足够小时，我们按如下方式变形这些风筝形。对于每条有向边 $ij \in E$，其左侧面为 ϕ，右侧面为 ψ，我们通过指定外心处的半角来修改一致化圆模式中的风筝形

$$\alpha_{\phi\psi}^\dagger \mapsto \alpha_{\phi\psi} = \alpha_{\phi\psi}^\dagger + \frac{v_j - v_i}{2}, \quad \alpha_{\psi\phi}^\dagger \mapsto \alpha_{\psi\phi} = \alpha_{\psi\phi}^\dagger - \frac{v_j - v_i}{2}$$

并进一步要求变形风筝形中的对角线 ij 相对于一致化风筝形中的对角线沿逆时针方向旋转 $\frac{v_i+v_j}{2}$ 的角度。这样，变形风筝形在平面中便可唯一确定，差别仅在于平移和缩放。通过一些三角学计算，可以验证变形风筝形中的边 ϕi和 ψi相对于一致化圆模式中对应的边旋转了 v_i 的角度。类似地，边 ϕj 和 ψj 旋转了一个

角度 v_j。因此，通过适当的平移和缩放，可以沿着公共边将相邻的变形风筝形粘合在一起。在这种变形下，对应圆的交角保持不变，因为

$$\alpha_{\phi\psi} + \alpha_{\psi\phi} = \alpha^{\dagger}_{\phi\psi} + \alpha^{\dagger}_{\psi\phi} = \pi - \Theta_{\phi\psi}.$$

粘合相邻的风筝形时，我们观察到，每个外心 ϕ 和交点 i周围的角度和 2π保持不变。然而，每个顶点 i 周围的缩放全纯可能并非平凡。为了通过粘合变形风筝形获得平坦欧几里得度量，我们必须要求每个顶点周围的缩放全纯都是平凡的。利用风筝形上的正弦定理，变形风筝形的边长之比为

$$\frac{R_\psi}{R_\phi} = \frac{\sin\alpha_{\phi\psi}}{\sin\alpha_{\psi\phi}}.$$

当且仅当这些相邻风筝形的比值之积 i 等于一时，顶点 i 周围的缩放全纯才是平凡的。这将导出一个关于顶点上的函数 v 的非线性方程组。

我们考虑由函数组成的狄利克雷有限函数空间 $\mathbf{D}(V)$，其中函数$v : V \to \mathbb{R}$ 的组合狄利克雷能量有限

$$\sum_{ij\in E} |v_i - v_j|^2 < \infty.$$

我们将空间 $P(\Theta, \alpha^{\dagger})$ 定义为函数 $v \in \mathbf{D}(V)$ 的集合，这些函数描述具有相同交角 Θ的圆模式，但其实现方式是改变外心处的半角。

定义 5.1。令 $\mathcal{A}_{\alpha^\dagger} \subset \mathbf{D}(V)$ 为可容许函数的集合

$$\mathcal{A}_{\alpha^\dagger} = \{v \in \mathbf{D}(V) \mid \alpha^{\dagger}_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2} > 0,\ \alpha^{\dagger}_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2} > 0\ \forall ij \in \vec{E}\}$$

其中，对于每条有向边 $ij \in E$，ϕ 和 ψ 分别表示相邻的左侧面和右侧面。我们用 $\mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$ 表示 $\mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$ 在 $\overline{\mathbf{D}}(V)$ 中的闭包，其中至少一个不等式变为非严格不等式。

空间 $P(\Theta, \alpha^{\dagger}) \subset \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$ 定义为满足以下条件的函数 $v \in \mathbf{D}(V)$ 的集合：对每个顶点 $i \in V$

$$\sum_j \log \frac{\sin(\alpha^{\dagger}_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2})}{\sin(\alpha^{\dagger}_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2})} = 0, \tag{7}$$

其中，求和遍及所有与 i 相邻的顶点 j；对于每条边 ij，ϕ 和 ψ 分别表示相邻的左侧面和右侧面。

在以下小节中，我们将为空间 $P(\Theta,\ \alpha^{\dagger})$ 建立与先前关于 $P(\Theta,\ R^{\dagger})$ 的结果相对应的结论。具体而言，我们证明 $P(\Theta,\ \alpha^{\dagger})$ 是 $\mathbf{D}(V)$ 的希尔伯特子流形。此外，我们还证明，它通过与正交分解相关的投影$p_V : \mathbf{D}(V) \to \mathbf{HD}(V)$，与顶点上的离散调和函数空间 $\mathbf{HD}(V)$ 同胚

$$\mathbf{D}(V) = \mathbf{D}_0(V) \oplus \mathbf{HD}(V).$$

5.1. **D 中的希尔伯特子流形(**V**)**。 我们首先证明 $P(\Theta,\ \alpha^\dagger)$ 是 $\mathbf{D}(V)$ 的希尔伯特子流形。

定义 5.2。 对于每条 $ij \in E$ 左侧面为 ϕ 、右侧面为 ψ的有向边，我们定义函数 $\mathcal{K}_{ij}:\ \mathcal{A}_{\alpha^\dagger} \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathcal{K}_{ij}(v) = \log \frac{\sin(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2})}{\sin(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2})} - \log \frac{\sin \alpha^\dagger_{\phi\psi}}{\sin \alpha^\dagger_{\psi\phi}}.$$

引理 5.3。 给定 $v \in \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$，存在一个常数 $C_2 = C_2(v, \Theta, \epsilon_0) > 0$，使得对于每条边 $ij \in E$

$$|\mathcal{K}_{ij}(v)| \le C_2 |v_i - v_j|.$$

证明。 证明与引理 4.2 的证明类似。我们考虑函数

$$p(x) = \log \frac{\sin(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{x}{2})}{\sin(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{x}{2})} - \log \frac{\sin \alpha^\dagger_{\phi\psi}}{\sin \alpha^\dagger_{\psi\phi}}.$$

我们注意到 $p(0) = 0$ 以及 $\mathcal{K}_{ij}(v) = p(v_j - v_i)$。

根据中值定理，存在某个介于 0 和 $v_j - v_i$ 之间的 ξ，使得

$$|p(x)| = |p(x) - p(0)| = |p'(\xi)| \cdot |x|.$$

直接计算可得

$$p'(x) = \frac{1}{2}\left(\cot(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{x}{2}) + \cot(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{x}{2})\right).$$

我们断言存在 $\tilde{\eta} > 0$，使得对于每条边 $ij \in E$，都有

$$\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2} \ge \tilde{\eta}, \quad \alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2} \ge \tilde{\eta}.$$

事实上，命题 3.4 表明，存在一个常数 η，使得对于均匀化圆模式中的角

$$\alpha^\dagger_{\phi\psi} > \eta, \quad \alpha^\dagger_{\psi\phi} > \eta.$$

由于 v 具有有限狄利克雷能量，满足 $\frac{|v_j - v_i|}{2} > \frac{\eta}{2}$ 的边 $ij \in E$只有有限条。因此，我们可以取

$$\eta_1 = \inf_{ij \in E} \{\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2}, \quad \alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2}\} > 0.$$

我们取 $\tilde{\eta} = \min\{\eta, \eta_1\}$。

那么，对于介于 0 和 $v_j - v_i$之间的每个 x，都有

$$|p'(x)| = |\frac{1}{2} \frac{\sin \Theta_{\phi\psi}}{\sin(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{x}{2}) \sin(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{x}{2})}| \le \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \tilde{\eta}}$$

其中上界与 $ij \in E$ 无关。证明至此完成。 □

我们将包含映射记为

$$\iota : \mathbf{D}_0(V) \to \mathbf{D}(V)$$

并将其诱导的映射记为对偶空间上的映射

$$\iota^\star : \mathbf{D}^\star(V) \to \mathbf{D}_0^\star(V),$$

其中$\mathbf{D}^\star(V)$与$\mathbf{D}_0^\star(V)$分别是$\mathbf{D}(V)$与$\mathbf{D}_0(V)$上的有界线性泛函空间。

命题 5.4. 对每个 $v \in \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$ 和有向边 $ij \in E$，我们有

$$\mathcal{K}_{ij}(v) = -\mathcal{K}_{ji}(v).$$

存在良定义映射 $\mathcal{K}$ ： $\mathcal{A}_{\alpha^\dagger} \to \mathbf{D}(V)^*$ ，使得对于每个 $v \in \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$ 和$u \in \mathbf{D}(V)$，

$$\langle\langle \mathcal{K}(v), u \rangle\rangle := \frac{1}{2} \sum_{ij \in \vec{E}} \mathcal{K}_{ij}(v) \cdot (u_i - u_j) = \sum_{ij \in E} \mathcal{K}_{ij}(v) \cdot (u_i - u_j)$$

其中 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ 表示 $\mathbf{D}(V)^*$ 与 $\mathbf{D}(V)$ 之间的对偶配对。

此外，当且仅当 $\iota^\star \circ \mathcal{K}(v) = 0$ 时，有 $v \in P(\Theta, \alpha^\dagger)$。

证明。设 $ij \in E$ 的左侧面为 ϕ，右侧面为 ψ。根据定义，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{ji}(v) &= \log \frac{\sin(\alpha^\dagger_{\psi\phi} + \frac{v_i - v_j}{2})}{\sin(\alpha^\dagger_{\phi\psi} - \frac{v_i - v_j}{2})} - \log \frac{\sin(\alpha^\dagger_{\psi\phi})}{\sin(\alpha^\dagger_{\phi\psi})} \\
&= -\log \frac{\sin(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2})}{\sin(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2})} + \log \frac{\sin(\alpha^\dagger_{\phi\psi})}{\sin(\alpha^\dagger_{\psi\phi})} \\
&= -\mathcal{K}_{ij}(v).
\end{aligned}$$

与命题 4.3 的证明类似，根据引理 5.3，映射 $\mathcal{K}: \mathcal{A}_{\alpha^\dagger} \to \mathbf{D}(V)^*$ 定义良好且有界。

最后，固定一个顶点 $i \in V$，并令 $\chi_i \in \mathbf{D}_0(V)$ 为其示性函数，即 χ_i在顶点 i 处等于 1，在其他地方等于 0。我们有

$$\langle\langle \iota^\star \circ \mathcal{K}(v), \chi_i \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{K}(v), \chi_i \rangle\rangle = \sum_j \mathcal{K}_{ij}(v)$$

其中求和遍及所有与 i相邻的顶点 j。由于示性函数的张成空间在 $\mathbf{D}_0(V)^*$中稠密，我们有 $\iota^\star \circ \mathcal{K}(v) = 0$当且仅当 $v \in P(\Theta, \alpha^\dagger)$。□

注记 5.5。 $\mathcal{K}_{ij}(v)$ 的定义中的常数项 $-\log \sin \alpha^\dagger_{\phi\psi} \sin \alpha^\dagger_{\psi\phi}$起着至关重要的归一化作用。若没有这一项，映射 $\mathcal{K}(v)$ 将无法在希尔伯特空间 $\mathbf{D}(V)$上定义有界线性泛函。

我们进一步研究映射 $\mathcal{K}$ 的微分。

命题 5.6。 对于任意 $v \in \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$，映射 $\mathcal{K}$ 在 v 处的微分，记作$d\mathcal{K}_v$： $\mathbf{D}(V) \to \mathbf{D}(V)^*$，对每个 $u, \tilde{u} \in \mathbf{D}(V)$ 均满足，

$$\langle\langle d\mathcal{K}_v(u), \tilde{u} \rangle\rangle = -\sum_{ij \in E} c_{ij}(u_i - u_j)(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j) = \langle\langle u, d\mathcal{K}_v(\tilde{u}) \rangle\rangle.$$

这里， c_{ij} 是与 v 相关联的原图上的几何边权

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\left(\cot\left(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2}\right) + \cot\left(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2}\right)\right) > 0.$$

证明。我们计算 $\mathcal{K}_{ij}(v)$关于 v_j的偏导数。令 $\alpha_{ij} = \alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2}$ 和 $\alpha_{ji} = \alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2}$。

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{ij}}{\partial v_j} = \frac{\partial}{\partial v_j}\left(\log\sin\left(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2}\right) - \log\sin\left(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2}\right)\right) = c_{ij}.$$

类似地，$\frac{\partial \mathcal{K}_{ij}}{\partial v_i} = -c_{ij}$。因此，对于任意 $\dot{v}$，$\tilde{v} \in \mathbf{D}(V)$，

$$\begin{aligned}\langle\langle d\mathcal{K}_v(u), \tilde{u}\rangle\rangle &= \sum_{ij\in E}\left(\frac{\partial \mathcal{K}_{ij}}{\partial v_j}u_j + \frac{\partial \mathcal{K}_{ij}}{\partial v_i}u_i\right)(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)\\ &= \sum_{ij\in E} c_{ij}(u_j - u_i)(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j).\end{aligned}$$

□

命题 5.7。空间 $P(\Theta, \alpha^\dagger)$ 是$\mathbf{D}(V)$的希尔伯特子流形。

证明。命题 5.4 证明了 $P(\Theta, \alpha^\dagger) = (\iota^\star \circ \mathcal{K})^{-1}(0)$。其余证明与命题 4.5 的证明类似，因此省略细节。□

5.2. **相对体积泛函** $\mathcal{W}$。命题 5.6 表明，对于每个可容许函数 $v \in \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$，微分 $d\mathcal{K}_v$ 都是自伴的。因此，我们可以将 $\mathcal{K}$ 作为 1-形式积分，从而得到定义在闭包 $\mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$ 上的势泛函。

定义 5.8。对于每条定向原边 $ij \in E$，设其左侧和右侧的外心分别为 ϕ 和ψ，我们定义泛函 $\mathcal{W}_{ij}$：$\mathcal{A}_{\alpha^\dagger} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{ij}(v) =& 2\left(\Lambda\left(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2}\right) + \Lambda\left(\alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2}\right) - \Lambda\left(\alpha^\dagger_{\phi\psi}\right) - \Lambda\left(\alpha^\dagger_{\psi\phi}\right)\right)\\ &+ (v_i - v_j)\log\frac{\sin\alpha^\dagger_{\psi\phi}}{\sin\alpha^\dagger_{\phi\psi}}\\ =& \mathcal{W}_{ji}(v)\end{aligned}$$

其中 $\Lambda(x) = -\int_0^x$ 对数 $|2\text{正弦 } t|dt$ 是 ***Milnor***-洛巴切夫斯基函数。我们定义泛函 $\mathcal{W}$：$\mathcal{A}_{\alpha^\dagger} \longmapsto \mathbb{R}$ 如下：

$$\mathcal{W}(v) = \sum_{ij\in E}\mathcal{W}_{ij}(v).$$

洛巴切夫斯基函数 $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是连续、奇且以 π为周期的函数。除 π 的整数倍处外，它处处光滑且解析（见 [33]）。

命题 5.9。泛函 $\mathcal{W}$ 在可容许集 $\mathcal{A}_{\alpha^\dagger} \subset \mathbf{D}(V)$上定义良好且光滑。此外，它满足以下性质：

(1) 对每条边 $ij \in E$，$\mathcal{W}_{ij}(0) = 0$，因此 $\mathcal{W}(0) = 0$。*(2)* 对任意 $v \in \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$，微分为 $d\mathcal{W}(v) = \mathcal{K}(v)$。*(3)* 当且仅当 $d\mathcal{W}(v)|_{\mathbf{D}_0(V)} = 0$时，$v \in P(\Theta, \alpha^\dagger)$。*(4)* 原点 $v = 0$ 是 $\mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$中 $\mathcal{W}$ 的唯一临界点。*(5)* 对每个 $v \in \mathbf{D}(V)$，泛函 $\mathcal{W}$ 在凸集上的限制

$$\mathcal{A}_{\alpha^\dagger} \cap (v + \mathbf{D}_0(V))$$

若交集非空，则是严格凹的。

证明。我们计算 $\mathcal{W}_{ij}$ 关于 v_i 和 v_j 的偏导数。设$\alpha_{ij} = \alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2}$和 $\alpha_{ji} = \alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{v_j - v_i}{2}$。利用性质 $\Lambda'(x) = -\log|2\sin x|$，我们有：

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{ij}}{\partial v_j} = 2\left(-\log(2\sin\alpha_{ij})\cdot\frac{1}{2} - \log(2\sin\alpha_{ji})\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \log\frac{\sin\alpha^\dagger_{\psi\phi}}{\sin\alpha^\dagger_{\phi\psi}}$$

$$= \log \frac{\sin \alpha_{ji}}{\sin \alpha_{ij}} - \log \frac{\sin \alpha_{\psi\phi}^{\dagger}}{\sin \alpha_{\phi\psi}^{\dagger}} = -\mathcal{K}_{ij}(v).$$

类似地，$\frac{\partial \mathcal{W}_{ij}}{\partial v_i} = \mathcal{K}_{ij}(v)$。因此，对任意 $\tilde{v} \in \mathbf{D}(V)$，

$$\begin{aligned} d\mathcal{W}(v)(\tilde{v}) &= \sum_{ij \in E} \left(\frac{\partial \mathcal{W}_{ij}}{\partial v_i} \tilde{v}_i + \frac{\partial \mathcal{W}_{ij}}{\partial v_j} \tilde{v}_j \right) \\ &= \sum_{ij \in E} \mathcal{K}_{ij}(v)(\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) = \langle\langle \mathcal{K}(v), \tilde{v} \rangle\rangle. \end{aligned}$$

这证明了(1)。性质(2)直接由 $P(\Theta, \alpha^{\dagger})$的定义得出。对于(3)，注意到限制在 $v + \mathbf{D}_0(V)$上的 $\mathcal{W}$ 的海森矩阵由算子 $d\mathcal{K}_v$给出；根据命题 5.6，由于正边权 c_{ij}，该算子是负定的。这保证了严格凹性。□

5.3. **到HD的同胚**(V)。 罗伊登分解给出狄利克雷有限函数空间的正交分解：

$$\mathbf{D}(V) = \mathbf{D}_0(V) \oplus \mathbf{HD}(V).$$

我们用 $p_V \colon \mathbf{D}(V) \to \mathbf{HD}(V)$表示到调和分量的投影，它是一个有界线性算子。与上一节类似，我们的目标是证明 p_V在希尔伯特流形 $P(\Theta, \alpha^{\dagger}) \subset \mathbf{D}(V)$上的限制是到$\mathbf{HD}(V)$的同胚。$p_V|_{P(\Theta,\alpha^{\dagger})}$ 是局部同胚的证明与上一节完全相同。为建立全局双射性，我们采用基于上文所定义泛函 $\mathcal{W}$ 的变分方法，这与此前对泛函 $\mathcal{W}^*$ 的分析相比需要不同的技巧。

命题 5.10。 投影 $p_V|_{P(\Theta,\alpha^{\dagger})}\colon \quad P(\Theta, \alpha^{\dagger}) \to \mathbf{HD}(V)$ 是局部同胚。

证明。 证明与命题 4.8 的证明类似。 □

我们注意到，对于 $h \in \mathbf{HD}(V)$ 和 $v \in \mathbf{D}_0(V)$，当且仅当 $v \in (-h + \mathcal{A}_{\alpha^{\dagger}})$ 时，$h + v \in \mathcal{A}_{\alpha^{\dagger}}$ 成立。因此，我们考虑限制在仿射集 $\mathbf{D}_0(V) \cap (-h + \mathcal{A}_{\alpha^{\dagger}})$ 上的泛函 $\mathcal{W}$。

定义5.11。 给定一个一致化圆模式，其半角为 $\alpha^{\dagger}$，交角为 Θ。对于每个固定的 $h \in \mathbf{HD}(V)$，我们将泛函 $\mathcal{W}_h : \mathbf{D}_0(V) \cap (-h + \mathcal{A}_{\alpha^{\dagger}}) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_h(v) :=& \mathcal{W}(h + v) \\ =& \sum_{ij \in E} 2 \left(\Lambda \left(\alpha_{\phi\psi}^{\dagger} + \frac{h_j + v_j - h_i - v_i}{2} \right) + \Lambda \left(\alpha_{\psi\phi}^{\dagger} - \frac{h_j + v_j - h_i - v_i}{2} \right) \right. \\ & \left. - \Lambda \left(\alpha_{\phi\psi}^{\dagger} \right) - \Lambda \left(\alpha_{\psi\phi}^{\dagger} \right) + \log \frac{\sin \alpha_{\psi\phi}^{\dagger}}{\sin \alpha_{\phi\psi}^{\dagger}} (h_i + v_i - v_j - h_j) \right). \end{aligned}$$

我们首先证明，对于每个 $h \in \mathbf{HD}(V)$，泛函 $\mathcal{W}_h$ 的定义域非空。

引理 5.12。对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $h \in \mathbf{D}(V)$，存在一个有限支撑函数 $v : V \to \mathbb{R}$，使得函数 $h := h + v$ 对每个 $x, y \in V$ 都满足

$$|\tilde{h}_x - \tilde{h}_y| < \epsilon \cdot d_G(x, y)$$

其中，图度量 d_G 定义为连接 x 和 y 的边的最小数量。

证明。固定 $\epsilon > 0$, $h \in \mathbf{D}(V)$ 和一个根顶点 $o \in V$。对于 $R > 0$，我们将图度量中以 o 为中心、半径为 R 的球记为 B_R

$$B_R := \{x \in V \mid d_G(o, x) \leq R\}.$$

由于 h 具有有限狄利克雷能量，满足 $|h_i - h_j| \geq \epsilon$ 的边 ij 只有有限条。因此，存在 $R_0 > 0$，使得对于所有满足 $i, j \notin B_{R_0}$ 的 $ij \in E$，

$$|h_i - h_j| < \epsilon.$$

另一方面，对于任意 $x, y \in V$ 以及连接它们的任意测地线 γ。由柯西-施瓦茨不等式可得

$$|h_x - h_y| \leq \sum_{ij \in \gamma} |h_i - h_j| \leq \sqrt{d_G(x, y)} \left(\sum_{ij \in \gamma} |h_i - h_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{d_G(x, y)} \sqrt{\mathcal{E}(h)}.$$

令 $R_1 = \frac{\mathcal{E}(h)}{\epsilon^2}$。那么，对于任意满足 $d_G(x, y) \geq R_1$ 的 $x, y \in V$，我们有

$$\frac{|h_x - h_y|}{d_G(x, y)} \leq \frac{\sqrt{\mathcal{E}(h)}}{R_1^{1/2}} = \epsilon.$$

取 $R_2 = \max\{R_0, R_1\}$。令 $x, y \in V \setminus B_{2R_2}$，并设 γ 为连接它们的一条测地线。有两种情况：

(1) 若 $\gamma \cap B_{R_2} = \emptyset$，则 γ 中的所有边都位于 B_{R_0} 之外，因此

$$|h_x - h_y| \leq \sum_{ij \in \gamma} |h_i - h_j| < \epsilon d_G(x, y).$$

(2) 若 $\gamma \cap B_{R_2} \neq \emptyset$，则 $d_G(x, y) \geq R_2 \geq R_1$，因此我们有

$$|h_x - h_y| \leq \epsilon d_G(x, y).$$

综合这两种情况，我们得出对于任意 $x, y \in V \setminus B_{2R_2}$,

$$|h_x - h_y| \leq \epsilon d_G(x, y).$$

结合前面的估计，函数 h 的构造依赖于麦克沙恩延拓定理 [32]。我们将函数 h 定义为：

$$\tilde{h}_x := \begin{cases} \inf_{y \in V \setminus B_{2R_2}} \left(h_y + \epsilon \cdot d_G(x, y) \right) & \text{if } x \in B_{2R_2} \\ h_x & \text{if } x \in V \setminus B_{2R_2} \end{cases}$$

它在 B_{2R_2} 之外与 h 一致。

令 h_x 是有限的。我们断言，对于 $y_0 \in \tilde{V} \setminus B_{2R_2}$，由前面的估计可得

$$h_y - h_{y_0} \geq -\epsilon d_G(y, y_0)$$

因此

$$h_y + \epsilon \cdot d_G(x, y) \geq h_{y_0} - \epsilon \cdot d_G(y, y_0) + \epsilon \cdot d_G(x, y)$$

$$\geq h_{y_0} - \epsilon \cdot d_G(x, y_0)$$

由于 y 是任意的，我们得出结论： h_x 是有限的。

接下来，我们验证 h 在 B_{2R_2} 上是 ϵ-Lipschitz 的。令 x_1， $x_2 \in B_{2R_2}$ 并取任意一个 $\delta > 0$。根据 h_{x_2} 的下确界定义，存在 $y \in V \setminus B_{2R_2}$ 使得

$$h_y + \epsilon d_G(x_2, y) < \tilde{h}_{x_2} + \delta.$$

利用同一个 y 和三角不等式， h_{x_1} 的定义给出

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{x_1} &\leq h_y + \epsilon d_G(x_1, y) \\ &\leq \big(h_y + \epsilon d_G(x_2, y)\big) + \epsilon d_G(x_1, x_2) \\ &< \tilde{h}_{x_2} + \delta + \epsilon d_G(x_1, x_2).\end{aligned}$$

令 $\delta \to 0$ 趋于极限，得到 $h_{x_1} - h_{x_2} \leq \epsilon d_G(x_1, x_2)$。由对称性，交换 x_1 和 x_2，可得 $h_{x_2} - h_{x_1} \leq \epsilon d_G(x_1, x_2)$，从而证明 $|h_{x_1} - h_{x_2}| \leq \epsilon d_G(x_1, x_2)$。

最后，我们验证跨越边界的利普希茨条件。设 $x_1 \in B_{2R_2}$ 和 $x_2 \in V \setminus B_{2R_2}$。根据定义， $h_{x_2} = h_{x_2}$。为建立上界，我们使用 h_{x_1} 的定义作为下确界，并在特定点 $y = x_2$ 处计算：

$$\tilde{h}_{x_1} \leq h_{x_2} + \epsilon d_G(x_1, x_2) = \tilde{h}_{x_2} + \epsilon d_G(x_1, x_2).$$

由此直接得到 $h_{x_1} - h_{x_2} \leq \epsilon d_G(x_1, x_2)$。

对于下界，任取 $y \in V \setminus B_{2R_2}$。由于 h 在 $V \setminus B_{2R_2}$ 上是 ϵ-利普希茨的，且根据三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}h_{x_2} &\leq h_y + \epsilon d_G(x_2, y) \\ &\leq h_y + \epsilon\big(d_G(x_2, x_1) + d_G(x_1, y)\big) \\ &= \big(h_y + \epsilon d_G(x_1, y)\big) + \epsilon d_G(x_1, x_2).\end{aligned}$$

重新整理可得 $h_{x_2} - \epsilon d_G(x_1, x_2) \leq h_y + \epsilon d_G(x_1, y)$。由于该不等式对所有 $y \in V \setminus B_{2R_2}$ 都成立，因此它对右侧关于 y 的下确界也成立，从而得到

$$h_{x_2} - \epsilon d_G(x_1, x_2) \leq \tilde{h}_{x_1}.$$

由此得到 $h_{x_2} - h_{x_1} \leq \epsilon d_G(x_1, x_2)$。结合上界，我们得出 that $|h_{x_1} - h_{x_2}| \leq \epsilon d_G(x_1, x_2)$。

最后，令 $v := h - h$。由于 h 和 h 在 B_{2R_2} 之外完全相同， v 具有有限支撑。□

命题 5.13. 对于每个 $h \in \mathbf{HD}(V)$，泛函 $\mathcal{W}_h$ 的区域具有非空内部，即

$$\mathbf{D}_0(V) \cap (-h + \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}) \neq \emptyset.$$

证明。 由环引理的推论，命题 3.4 表明存在
某个 $\eta > 0$，使得对于每条左侧面为 ϕ 且右侧面为 ψ 的边 $ij \in E^*$，
半角一致地远离 0 和 π：

$$\eta < \alpha^\dagger_{\phi\psi} < \pi - \eta, \quad \text{and} \quad \eta < \alpha^\dagger_{\psi\phi} < \pi - \eta.$$

根据引理 5.12，存在某个 $v \in \mathbf{D}_0(V)$，使得函数 $h := h + v$对每条边 $ij \in E$都满足

$$|\tilde{h}_j - \tilde{h}_i| < \frac{\eta}{2}.$$

因此，我们有 $h + v \in \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}$，从而 $v \in \mathbf{D}_0(V) \cap (-h + \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}) \neq \emptyset$。 □

命题 5.14. 泛函 $\mathcal{W}_h$ 在 $\mathbf{D}_0(V) \cap (-h + \mathcal{A}_{\alpha^\dagger})$上是强制的。

证明。 命题 3.4 保证，对于交角属于 $(\epsilon_0, \pi - \epsilon_0)$ 的圆模式，几何边权 c_{ij} 有统一的下界，即常数 $\tan \frac{\epsilon_0}{2} > 0$。因此， $\mathcal{W}_h$ 的海森矩阵满足

$$\langle\langle d^2\mathcal{W}_h(v)(u), u\rangle\rangle = -\sum_{ij\in E} c_{ij}(u_i - u_j)^2 \leq -\tan\frac{\epsilon_0}{2}\sum_{ij\in E}(u_i - u_j)^2.$$

这个不等式意味着， $\mathcal{W}_h$ 至少以 u的狄利克雷范数的平方速度衰减。因此，当 $\|u\|_{\mathbf{D}(V)} \to \infty$时，我们有 $\mathcal{W}_h(u) \to -\infty$，从而证明了 $\mathcal{W}_h$的强制性。□

由于泛函 $\mathcal{W}_h$ 在非空闭凸集 $\mathbf{D}_0(V) \cap \left(-h + \mathcal{A}_{\alpha^\dagger}\right)$上是强制且严格凹的，因此它在此集合中取得唯一最大化元 v^*。还需证明 v^* 位于内部 $\mathbf{D}_0(V) \cap (-h + \mathcal{A}_{\alpha^\dagger})$，而非边界上。证明这一点后，命题 5.9 表明 $h + v^* \in P(\Theta, \alpha^\dagger)$，其投影为 $p_V(h + v^*) = h$。这一论证类似于 Rivin 在有限维情形下的证明 [37]。

命题 5.15。 泛函 $\mathcal{W}_h$ 的最大值点 v^* 位于内部$\mathbf{D}_0(V) \cap (-h + \mathcal{A}_{\alpha^\dagger})$。

证明。 取凸集 $\mathbf{D}_0(V)$ 的内部元素 v，并且对于 $t \in [0, 1]$，我们考虑线性插值 $v^t = v^* + t(v - v^*)$ 以及函数的限制

$$f(t) := \mathcal{W}_h(v^t).$$

我们的目标是证明，对于充分小的 $t > 0$， $f(t) > f(0)$，这与该函数在集合上的最大值点 v^* 相矛盾。

我们将角度约束达到饱和的边的集合记为 $E_0 \subset E$：对于任意具有左侧面 ϕ 和右侧面 ψ 的 $ij \in E_0$，我们有

$$\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{h_j + v^*_j - h_i - v^*_i}{2} = 0 \quad \text{or} \quad \alpha^\dagger_{\psi\phi} - \frac{h_j + v^*_j - h_i - v^*_i}{2} = 0.$$

我们将角度约束严格成立的边的集合记为 $E_1 = E \setminus E_0$。

我们注意到， E_0 是一个有限集。由于半角 $\alpha^\dagger$ 一致有界于 η 和 $\pi - \eta$之间，边 ij 上的角约束达到饱和意味着

$$|h_j + v^*_j - h_i - v^*_i| \geq \eta.$$

鉴于 $h + v^*$ 具有有限狄利克雷能量，满足此不等式的边只能有有限条。

另一方面，我们断言存在 $\tilde{\eta} > 0$，使得对于 $t \in [0, 1]$，以及每条边 $ij \in E_1$，

$$\tilde{\eta} < \alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{h_j + v^t_j - h_i - v^t_i}{2} < \pi - \tilde{\eta},$$

and

$$\tilde{\eta} < \alpha^{\dagger}_{\psi\phi} - \frac{h_j + v_j^t - h_i - v_i^t}{2} < \pi - \tilde{\eta}.$$

只需建立 $t = 0$ 和 $t = 1$ 的界，因为角度表达式关于 t 线性依赖。

我们关注与 v 对应的半角。由于 v 具有有限狄利克雷能量，因此只有有限条边 $ij \in E_1$ 的半角不与 $\eta/2$ 和 $\pi - \eta/2$ 保持有界距离。对于其余有限条边，半角可以与 0 和 π 统一地保持有界距离。对边集 E_1 上与 v^* 对应的半角，也可կիրառ用类似的论证。因此，我们得出存在这样的 $\tilde{\eta} > 0$。

我们计算导数：

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{ij\in E} \mathcal{K}_{ij}(h + v^t) \cdot ((v_i - v_i^*) - (v_j - v_j^*)) \\ &= \sum_{ij\in E_1} \mathcal{K}_{ij}(h + v^t) \cdot ((v_i - v_i^*) - (v_j - v_j^*)) \\ &\quad + \sum_{ij\in E_0} \mathcal{K}_{ij}(h + v^t) \cdot ((v_i - v_i^*) - (v_j - v_j^*)). \end{aligned}$$

引理 5.3 保证存在某个常数 $C = C(\tilde{\eta}, h, v, v^*) > 0$，使得对于每条边 $ij \in E_1$ 和 $t \in [0, 1]$,

$$|\mathcal{K}_{ij}(h + v^t)| \le C|(v_i^t - v_j^t) + (h_i - h_j)| \le C(|v_i - v_j| + |v_i^* - v_j^*| + |h_i - h_j|).$$

根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{ij\in E_1} \mathcal{K}_{ij}(h + v^t) \cdot ((v_i - v_i^*) - (v_j - v_j^*)) \\ \ge& -C \left(\sum_{ij\in E_1} (|v_i - v_j| + |v_i^* - v_j^*| + |h_i - h_j|)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{ij\in E_1} ((v_i - v_i^*) - (v_j - v_j^*))^2 \right)^{1/2} \\ \ge& -\sqrt{3}C \left(\mathcal{E}(v) + \mathcal{E}(v^*) + \mathcal{E}(h)\right)^{1/2} \cdot \left(\mathcal{E}(v - v^*)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

注意，对于每条边 $ij \in E_0$，每一项

$$\mathcal{K}_{ij}(h + v^t) \cdot ((v_i - v_i^*) - (v_j - v_j^*)) \to +\infty \quad \text{as } t \to 0^+$$

因为

$$\log \sin \alpha \to -\infty \quad \text{as } \alpha \to 0^+.$$

因此，存在一个充分小的 $t_0 > 0$，使得对每个 $t \in (0, t_0)$，$f'(t) > 0$。于是，根据中值定理，对于某个 $t_1 \in (0, t_0)$，有 $f(t_0) - f(0) = f'(t_1)t_0 > 0$，这与 v^* 的极大性矛盾。□

最后，我们得到了本节的主定理。

定理 5.16。 投影 $p|_{P(\Theta,\alpha^\dagger)} \colon P(\Theta, \alpha^\dagger) \to \mathbf{HD}(V)$ 是一个同胚。

证明。 我们已经看到，$p|_{P(\Theta,\alpha^\dagger)}$ 是一个局部同胚。接下来只需证明它是双射。

任取一个 $h \in \mathbf{HD}(V)$。我们要在 $\mathbf{D}_0(V)$ 中寻找 v，使得 $h+v \in P(\Theta, \alpha^\dagger)$。这等价于在开集 $\mathbf{D}_0(V) \cap (-h+\mathcal{A}_{\alpha^\dagger})$ 中寻找泛函 $\mathcal{W}_h$ 的一个临界点 v。

我们已经证明，泛函 $\mathcal{W}_h$ 在凸集 $\mathbf{D}_0(V) \cap \left(-h+\mathcal{A}_{\alpha^\dagger}\right)$ 上是严格凹的，是强制的（当 $\|v\| \to \infty$ 时趋于 $-\infty$），并且其区域具有非空内部。因此，存在唯一最大化元 $v^* \in \mathbf{D}_0(V) \cap \left(-h+\mathcal{A}_{\alpha^\dagger}\right)$。

根据命题 5.15，最大化元 v^* 位于内部 $\mathbf{D}_0(V) \cap (-h+\mathcal{A}_{\alpha^\dagger})$。因此，$v^*$ 是 $\mathcal{W}_h$ 的临界点，由命题 5.9 可知 $h+v^* \in P(\Theta, \alpha^\dagger)$。由于 $p_V(h+v^*) = h$，该映射是满射。

关于单射性，假设对某个 $v_1, v_2 \in \mathbf{D}_0(V)$，有 $h+v_1, h+v_2 \in P(\Theta, \alpha^\dagger)$。$v_1$ 与 v_2 都是严格凹泛函 $\mathcal{W}_h$ 的临界点，从而 $v_1 = v_2$。

由于 $p|_{P(\Theta,\alpha^\dagger)}$ 是希尔伯特流形之间的双射局部同胚，因此它是全局同胚。□

5.4. 共轭映射与等距映射。若元素 $u \in P(\Theta,\ R^\dagger)$ 和 $v \in P(\Theta,\ \alpha^\dagger)$ 在平面中描述相同的圆模式实现（相差全局刚性运动和缩放），则称它们共轭。该关系源于与边相关联的欧几里得风筝形的几何性质。对于由面 ϕ 和 ψ 共享的有向边 ij，设 $R = e^u R^\dagger$ 为新的半径。圆所共享的公共弦长度为

$$2R_\phi \sin \alpha_{\phi\psi} = 2R_\psi \sin \alpha_{\psi\phi}.$$

取比值 $\frac{R_\psi}{R_\phi} = \frac{\text{正弦}\alpha_{\phi\psi}}{\text{正弦}\alpha_{\psi\phi}}$，并用一致化圆模式中的比值 $\frac{R^\dagger_\psi}{R^\dagger_\phi} = \frac{\text{正弦}\,\alpha^\dagger_{\phi\psi}}{\text{正弦}\,\alpha^\dagger_{\psi\phi}}$ 进行归一化，我们得到对数关系：

$$u_\psi - u_\phi = \log \frac{\sin(\alpha^\dagger_{\phi\psi} + \frac{v_j - v_i}{2}) \sin \alpha^\dagger_{\psi\phi}}{\sin(\alpha^\dagger_{\psi\phi} + \frac{v_i - v_j}{2}) \sin \alpha^\dagger_{\phi\psi}}. \tag{8}$$

其线性化导出以下关系。

命题 5.17. 共轭关系 (8) 定义了一个同胚 $\mathcal{C}: P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R} \to P(\Theta, \alpha^\dagger)/\mathbb{R}$。$\mathcal{C}$ 在 u 处的微分将 $\mathfrak{u} \in \mathbf{HD}_{c^*}(F)$ 映射为其调和共轭 $\mathfrak{v} \in \mathbf{HD}_c(V)$，满足以下线性方程：

$$\mathfrak{u}_\psi - \mathfrak{u}_\phi = c_{ij}(\mathfrak{v}_j - \mathfrak{v}_i).$$

此外，我们有 $\mathcal{E}_{c^*}(\mathfrak{u}) = \mathcal{E}_c(\mathfrak{v})$。

证明. 我们注意到，原图与对偶图上的几何边权互为倒数，$c_{ij} = 1/c^*_{\phi\psi}$。狄利克雷能量相等可通过直接计算得出

$$\sum_{\phi\psi} c^*_{\phi\psi}(\mathfrak{u}_\psi - \mathfrak{u}_\phi)^2 = \sum_{ij} \frac{1}{c_{ij}} c_{ij}^2 (\mathfrak{v}_j - \mathfrak{v}_i)^2 = \sum_{ij} c_{ij}(\mathfrak{v}_j - \mathfrak{v}_i)^2.$$

□

定理 *1.6* 的证明。它是定理 5.16 和命题 5.17 的直接推论。□

6. Boundary-value mapping and the Hilbert transform

在本节中，我们将希尔伯特变换的一个类似物定义为共轭函数的边界值之间的映射。这一构造仿照单位圆盘上的经典希尔伯特变换，后者将调和函数的边界值映射为其共轭调和函数的边界值。

6.1. 到 HD 的同胚($\mathbb{D}$) 与$\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$。我们证明,- 圆模式空间 $P(\Theta,\ R^{\dagger})$ 与 $P(\Theta,\ \alpha^{\dagger})$ 均同胚于单位圆盘上经典调和狄利克雷函数的空间 $\mathbf{HD}(\mathbb{D})$，因而可由单位圆上作为半可微函数的边界值加以参数化。特别地，我们证明引言中所述的定理 1.7。

这些同胚基于 Hutchcroft 的结果 [22]。

定义 6.1. 设 $G=(V,E,F)$ 为满足定义 *1.1* 之条件的胞腔分解。 G到欧几里得平面的直线嵌入称为(D,η)-良好嵌入，如果存在全局常数 $D\geq 1$ 与 $\eta>0$，使得下列几何约束成立

(1) 角度界：对于每个面，所有内角都在 $[\eta,\pi-\eta]$ 内。*(2)* 可比边：对于任意两条共享一个公共顶点的相邻边，其欧氏长度之比在 $[D^{-1},D]$ 内。

一个嵌入是良好 的，如果它对于某些常数 D 和 η 是一个(D,η)-良好嵌入。

由此可知，良好嵌入中的每个面都是凸的，并且具有一致 y 有界的边数。

下述命题源自 Hutchcroft 的工作 [22, 定理 1.5]。[22] 中的原始陈述专门针对圆堆积的情形，但在其后的脚注中，Hutchcroft 指出同样的结果和证明对良嵌入也成立。

定理 6.2. [22] 设 $G=(V,E,F)$ 是满足定义 *1.1* 之条件的胞腔分解。假设它被实现为有界单连通开域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 的测地分解，其顶点为 $z:\ V\to\Omega$，且该嵌入是良好的。则下列结论成立：

(1) 对于每一个离散调和狄利克雷函数 $h\in\mathbf{HD}(V)$，存在唯一的调和狄利克雷函数 $H\in\mathbf{HD}(\Omega)$ 使得 $h-H\circ z_V\in\mathbf{D}_0(V)$。我们将此函数 H 记为 $\Psi_V(h)$。*(2)* 对于每一个经典调和狄利克雷函数 $H\in\mathbf{HD}(\Omega)$，存在唯一的离散调和狄利克雷函数 $h\in\mathbf{HD}(V)$ 使得 $h-H\circ z_V\in\mathbf{D}_0(V)$。我们将此函数 h 记为 $\Psi_V^{-1}(H)$。

此外，映射 $\Psi_V\colon\mathbf{HD}(V)\to\mathbf{HD}(\Omega)$ 与 $\Psi_V^{-1}\colon\mathbf{HD}(\Omega)\to\mathbf{HD}(V)$ 是有界线性同构。

为了应用定理 6.2，我们首先证明单位圆盘中的一致化圆模式为原图和对偶图给出良嵌入。

命题 6.3. 在一致化圆模式下，将顶点实现为圆的交点所得的圆盘的原始测地分解(V,E,F) 是良好嵌入。类似地，将顶点实现为圆的外心所得的圆盘的对偶测地分解(V^*,E^*,F^*) 也是良好嵌入。

证明。 一致化圆模式分别通过将顶点实现为圆的交点和外心，确定了原始图和对偶图的直线嵌入。我们首先验证各面的内角存在一致界。

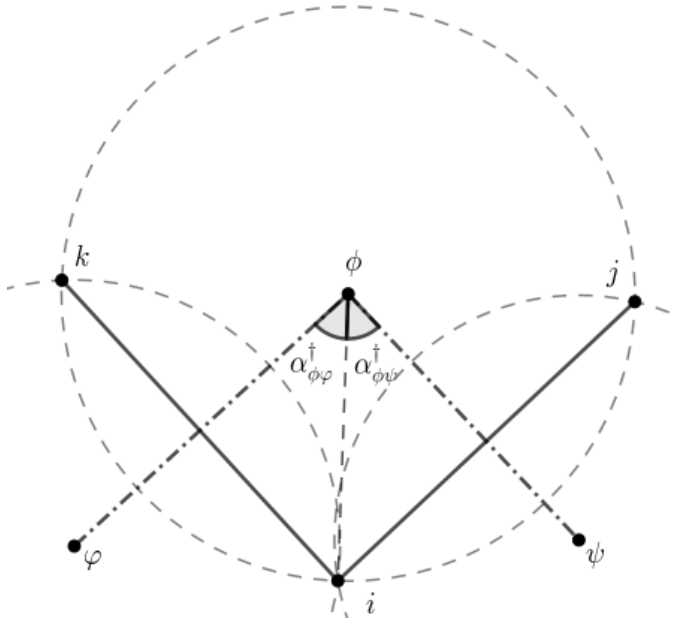


FIGURE 6. 经一致化的圆模式的原图与对偶测地分解。

我们聚焦于原图中的两条相邻边 ij 和 ik，它们共享一个公共顶点 i（见图 6）。这三个顶点位于同一个圆上，该圆对应于面 ϕ。我们分别用 $\phi\psi$ 和 $\phi\varphi$ 表示与 ij 和 ik对偶的边。内角 $\angle\varphi\phi\psi$ 是半角 $\alpha^{\dagger}_{\phi\psi}$ 和 $\alpha^{\dagger}_{\phi\varphi}$之和；根据环引理（命题 3.4），该角不小于 2η 。另一方面， ϕ 周围所有半角之和为 π ，且 ϕ周围至少有三个半角。因此，内角 $\angle\varphi\phi\psi$ 也不大于 $\pi-\eta$。我们注意到，对偶边总是垂直于原图边，因此内角 $\angle kij$等于 $\pi-\angle\varphi\phi\psi$，并且也一致地有界于 $[\eta,\pi-2\eta]$之内。

还需验证相邻边的长度具有可比性。我们注意到，相邻边 ij 和 ik的长度比

$$\frac{|z_i-z_j|}{|z_i-z_k|}=\frac{\sin\alpha^{\dagger}_{\phi\psi}}{\sin\alpha^{\dagger}_{\phi\varphi}}$$

在 $[D^{-1},D]$ 内对 $D=1/\sin\eta$一致有界。另一方面，相邻对偶边 $\phi\psi$ 和 $\phi\varphi$ 的长度比为

$$\frac{|z_\phi-z_\psi|}{|z_\phi-z_\varphi|}=\frac{c_{ij}|z_i-z_j|}{c_{ik}|z_i-z_k|}$$

其中， c_{ij} 和 c_{ik} 是定义 3.1 中定义的几何边权。根据命题 3.4，存在某个常数 $C>0$ ，使得对于每条边 $ij\in E$,

边权 c_{ij} 在 $[\tilde{C}^{-1}, \tilde{C}]$内一致有界。因此，相邻对偶边 $\phi\psi$ 和 $\phi\varphi$ 的长度比在 $[D^{-1}\tilde{C}^{-2}, D\tilde{C}^{2}]$内也一致有界。

因此，一致化圆模式下的原图和对偶测地分解给出了良好嵌入。□

我们已准备好证明，圆模式空间 $P(\Theta,\ R^{\dagger})$和 $P(\Theta,\ \alpha^{\dagger})$分别与单位圆盘上的经典调和狄利克雷函数空间$\mathbf{HD}(\mathbb{D})$同胚。

定理 *1.7* 的证明。我们将投影映射到离散调和空间，再与定理 6.2 给出的同构复合，从而构造同胚 Φ_V 和 Φ_F。

对于原图，命题 6.3 证明了一致化圆模式给出了良好嵌入。根据定理 6.2，存在一个有界线性同构 $\Psi_V\colon\ \mathbf{HD}(V)\ \to \mathbf{HD}(\mathbb{D})$，使得对于任意 $h \in \mathbf{HD}(V)$，都有$\Psi_V(h) \circ z_V - h \in \mathbf{D}_0(V)$。我们将映射 Φ_V定义为以下映射的复合

$$\Phi_V := \Psi_V \circ p_V|_{P(\Theta,\alpha^{\dagger})}.$$

由于 $p_V|_{P(\Theta,\alpha^{\dagger})}\colon\ P(\Theta,\ \alpha^{\dagger})\ \to\mathbf{HD}(V)$ 是一个同胚，Φ_V 是一个同胚。对于任意 $u \in P(\Theta,\ \alpha^{\dagger})$，令 $h = p_V(u)\ \in\mathbf{HD}(V)$。根据投影 p_V 的定义，我们有 $u - h \in \mathbf{D}_0(V)$。此外，$\Phi_V(u) \circ z_V - h\ =\Psi_V(h) \circ z_V - h \in \mathbf{D}_0(V)$。两式相减可得

$$\Phi_V(u) \circ z_V - u = (\Phi_V(u) \circ z_V - h) - (u - h) \in \mathbf{D}_0(V).$$

对于对偶图，命题 6.3 同样证明了对偶测地线分解给出了一个良好嵌入。将定理 6.2 应用于该良好嵌入，我们得到一个有界线性同构 $\Psi_F\colon\ \mathbf{HD}(F)\ \to \mathbf{HD}(\mathbb{D})$，使得 $\Psi_F(h) \circ z_F - h \in \mathbf{D}_0(F)$ 对任意 $h \in \mathbf{HD}(F)$ 成立。我们将 Φ_F 定义为以下复合映射

$$\Phi_F := \Psi_F \circ p_F|_{P(\Theta,R^{\dagger})}.$$

由于每个组成映射都是同胚，因此这个复合映射是一个同胚。对于任意 $v \in P(\Theta,\ R^{\dagger})$，令 $h = p_F(v)\ \in\mathbf{HD}(F)$。我们有 $v - h \in \mathbf{D}_0(F)$。由于 $\Phi_F(v) \circ z_F - h = \Psi_F(h) \circ z_F - h \in \mathbf{D}_0(F)$，我们得出

$$\Phi_F(v) \circ z_F - v = (\Phi_F(v) \circ z_F - h) - (v - h) \in \mathbf{D}_0(F).$$

□

最后，我们借助圆模式得到了希尔伯特变换的一个类似物。

定义 6.4。我们定义边界值映射

$$\mathcal{B}_V := \mathcal{B} \circ \Phi_V\colon P(\Theta, \alpha^{\dagger}) \to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D}),$$

$$\mathcal{B}_F := \mathcal{B} \circ \Phi_F\colon P(\Theta, R^{\dagger}) \to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D}),$$

其中 $\mathcal{B}\colon\ \mathbf{HD}(\mathbb{D})\ \to\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 表示经典边值同构。由于 $\mathcal{B}_V$ 和 $\mathcal{B}_F$ 将常值函数映射为常值函数，它们自然在各自模掉常数的商空间上诱导出同胚 $\mathcal{B}_V$ 和 $\mathcal{B}_F$。

我们定义 $\mathfrak{H}^{\Theta}\colon\ \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})\ /\mathbb{R} \to\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})\ /\mathbb{R}$，即希尔伯特变换的一个类似物，定义为如下复合映射

$$\mathfrak{H}^{\Theta} := \overline{\mathcal{B}}_V \circ \mathcal{C}^{\Theta} \circ \overline{\mathcal{B}}_F^{-1},$$

其中 $\mathcal{C}^{\Theta}\colon\ P(\Theta, R^{\dagger})/\mathbb{R} \to P(\Theta, \alpha^{\dagger})/\mathbb{R}$ 是共轭映射。

7. Pairing between discrete functions

我们为变形空间 $P(\Theta, R^\dagger)/\mathbb{R}$ 配备由泛函 $\mathcal{W}^*$ 的海森矩阵所诱导的黎曼度量，该泛函是关于几何边权的狄利克雷能量。借助映射 $\mathfrak{H}^\Theta$，我们将这一黎曼度量与 $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 上的辛形式联系起来，从而证明定理 1.10 和推论 1.11。

定义 7.1. 我们定义一个双线性形式 $b\colon \mathbf{D}(F) \times \mathbf{D}(V) \to \mathbb{R}$，规定对任意 $u \in \mathbf{D}(F)$ 和 $v \in \mathbf{D}(V)$，

$$b(u,v) := \frac{1}{2}\sum_{ij\in\vec{E}} (u_\psi - u_\phi)(v_j - v_i) = \sum_{ij\in E} (u_\psi - u_\phi)(v_j - v_i),$$

其中 ϕ 和 ψ 分别是有向边 ij的左侧面和右侧面。

根据柯西-施瓦茨不等式，该配对定义良好，且构成有界双线性形式

$$b(u,v) \leq \sqrt{\left(\sum_{\phi\psi\in E^*} (u_\psi - u_\phi)^2\right)\left(\sum_{ij\in E} (v_j - v_i)^2\right)}.$$

为证明定理 1.10 中的恒等式，我们首先考察边界值光滑的函数。注意，若 Ω 是胞腔分解 $G = (V,\ E,\ F)$ 的有限子复形，且 $\partial\Omega$ 是一条定向使 Ω 位于左侧的多边形曲线，则

$$\sum_{ij\in\Omega} (u_\psi - u_\phi)(v_j - v_i) = \sum_{ij\in\partial\Omega} u_\psi (v_j - v_i).$$

当 Ω穷尽整个 G时，右侧应收敛到单位圆上的曲线积分 $\int u dv$ 。

在下面的两个命题中，我们构造所需的有限子复形序列 Ω_k，使其穷尽 G。我们回顾一下，一致化圆模式确定了开单位圆盘的一个测地胞腔分解，其顶点为 $z\colon V \to \mathbb{D}$，使得每个面都是内接多边形，并且中心角在某个 $\eta > 0$ 的 2η 与 $\pi - 2\eta$ 之间一致有界（命题 3.4）。以下内容是 [2, 命题 2.5] 中关于良嵌入的一个更一般估计的特殊情形。为了使论述自洽，我们将针对这一特殊情形给出一个初等证明的概要。

命题 7.2。 固定整数 $K > 0$ 和一个小常数 $\eta > 0$。存在一个常数 $C_1 = C_1(K, \eta)$，使得对于任意具有 $k \leq K$ 且中心角一致有界于 2η 与 $\pi - 2\eta$ 之间的内接 k-边形，对于该多边形上的任意点 p、q，

$$d_0(p,q) \leq C_1|p - q|$$

其中，$|p - q|$ 是欧几里得距离，而 $d_0(p,q)$ 是连接 p 和 q的较短多边形路径的欧几里得长度。

证明。 我们用标准的紧致性论证概述证明。经过一致缩放后，不妨假设多边形的顶点位于单位圆上。对于固定整数 K 和常数 $\eta > 0$，满足 $k \leq K$且中心角位于闭区间 $[2\eta, \pi - 2\eta]$ 内的循环 k 边形的模空间是紧致的。比值 $\frac{d_0(p,\ q)}{|p-q|}$在 $p \neq q$ 成立时连续且定义良好。当 p 趋近于 q时，

如果这些点沿同一条边收敛，该比值的极限为 1。如果它们从相邻边趋近一个内角为 α 的顶点，则该极限不超过$1/\sin(\alpha/2)$。由于中心角不超过 $\pi - 2\eta$，内角有一致的下界 2η，从而保证$1/\sin(\alpha/2) \le 1/\sin(\eta)$。由多边形边界的紧致性以及对所有 $k \le K$ 对应的模空间的有限并可知，该比值能取到一个有限的全局最大值 $C_1(K, \eta)$。□

现在我们可以构造一列有限子复形 Ω_n。

命题 7.3. 对于一致化圆模式，存在一列有限子复形 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset \ldots$，它们穷尽胞腔分解$G = (V, E, F)$，并满足以下性质：

(1) 每个 Ω_n 都是拓扑闭圆盘的有限胞腔分解。*(2)* 存在一个常数 $C_1 > 1$，使得对于所有 n，边界 $\partial\Omega_n$ 的总欧几里得长度不超过 $2\pi C_1$。

证明。我们用归纳法构造这列复形。令 Ω_1 为任意一个包含原点的面。假设已定义有限子复形 Ω_n。存在$\rho_n \in (1 - \frac{1}{n}, 1)$，使得以原点为圆心、半径为 ρ_n 的圆不与 Ω_n的任何顶点或边相交。该圆与 G 的 1-骨架图相交于有限多个点，依次标记为 $q_0, q_1, q_2, \ldots\ldots, q_k = q_0$。我们将该圆扰动为一条多边形曲线，方法如下。对于每一对相邻点 q_i, q_{i+1}，它们位于同一个面上，可以沿着该面上的最短路径将它们连接起来，其总长度为 $d_0(q_i, q_{i+1}) \le C_1|q_{i+1} - q_i|$，由命题 7.2 得出。将所有这些路径首尾相接并去除重复部分，就得到一条由 1-骨架图中的边组成的多边形曲线。令 Ω_{n+1} 为包含原点的有界连通分支。注意

$$\text{total length of } \partial\Omega_{n+1} \le C_1 \sum_i |q_{i+1} - q_i| < C_1 \cdot 2\pi\rho_n < 2\pi C_1.$$

由构造可知，$\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$，且序列 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 穷尽了胞腔分解。□

命题 7.4。 设 $u, v \in \mathbf{HD}(\mathbb{D})$ 在 $C^\infty(\partial\mathbb{D})$ 中有边界值，并设 $L > 0$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 Γ 是 1-骨架图 (V, E) 中的一个环路，其中每条边 $ij \in \Gamma$ 的长度为 $|z_i - z_j| < \delta$，且总长度满足 $\sum_{ij\in\Gamma} |z_j - z_i| < L$，则

$$\left| \int_\Gamma u \, dv - \sum_{ij\in\Gamma} u_\psi (v_j - v_i) \right| < \epsilon,$$

其中，ψ 是从 i 到 j的有向边左侧的面。

证明。由于 $u, v \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$，它们的所有偏导数都有界。

由于 u 一致连续，且 $\partial_x v, \partial_y v$ 在 $\mathbb{D}$上有界，存在$\delta_1 > 0$，使得对所有满足 $|p - q| < \delta_1$的 $p, q \in \mathbb{D}$

$$|u(p) - u(q)| < \frac{\epsilon}{4L \cdot \max\{|\partial_x v|, |\partial_y v|, 1\}}.$$

注意，对于任意边 ij，邻圆的半径为 $R^\dagger_\psi = \frac{|z_j - z_i|}{2} \cdot \text{正弦}\, \alpha^\dagger_{\psi\phi} < \frac{|z_j - z_i|}{2} \cdot \text{正弦}\, \eta$。因此，对于长度为 $|z_j - z_i| < 2\delta_1$ 正弦 η 的任意边段 ij，线段上每一点到

邻圆外心 z_ψ 的线段 $[z_i, z_j]$ 上任一点的距离都小于 $R_\psi^\dagger < \delta_1$。因此

$$\begin{aligned}|\int_{[z_i,z_j]} u\frac{dv}{ds}ds - \int_{[z_i,z_j]} u_\psi \frac{dv}{ds}ds| &\leq 2\max\{|\partial_x v|, |\partial_y v|\}(\int_{[z_i,z_j]} |u - u_{ij,r}|ds) \\ &< \frac{|z_i - z_j|}{2L}\epsilon\end{aligned}$$

其中 s 是该线段的弧长参数化。

另一方面， $\partial_{xx}v$， $\partial_{xy}v$ 和 $\partial_{yy}v$ 在 $\mathbb{D}$上有界。取

$$\delta_2 = \frac{\epsilon}{2L\max\{|\partial_{xx}v|, |\partial_{xy}v|, |\partial_{yy}v|, 1\}\cdot\max|u|}.$$

于是，沿着线段 $[z_i, z_j]$ 且满足 $|z_i - z_j| < \delta_2$，根据泰勒定理，对于 $p \in [z_i, z_j]$，有

$$|\frac{v_j - v_i}{|z_j - z_i|} - \frac{dv}{ds}(p)| < |z_j - z_i|\max\{|\partial_{xx}v|, |\partial_{xy}v|, |\partial_{yy}v|\} < \frac{\epsilon}{2L\max|u|}.$$

Thus

$$\begin{aligned}|\int_{[z_i,z_j]} u_\psi \frac{dv}{ds}ds - u_\psi(v_j - v_i)| &< |u_\psi|\int_{[z_i,z_j]} |\frac{dv}{ds} - \frac{v_j - v_i}{|z_j - z_i|}|ds \\ &< \frac{|z_i - z_j|}{2L}\epsilon.\end{aligned}$$

因此，对于多边形曲线 Γ，若其每条边的长度 $|z_j - z_i| < \min\{2\delta_1 \sin\eta,\ \delta_2\}$，则有

$$|\int_{[z_i,z_j]} udv - u_\psi(v_j - v_i)| < \frac{|z_j - z_i|}{L}\epsilon$$

and

$$|\int_\Gamma udv - \sum_{ij\in\Gamma} u_\psi(v_j - v_i)| < \epsilon.$$

□

引理 7.5。 固定 $\delta > 0$。在一致化圆模式下，欧几里得长度为 $|z_j - z_i| > \delta$ 的边构成一个有限集。

证明。 我们注意到，存在一个常数 $C_2 > 0$，使得对于任意边 ij，包含 ij 的圆形面的面积至少为 $C_2|z_j - z_i|^2$。事实上，由于面面积与 $|z_j - z_i|^2$ 之比在缩放下保持不变，我们可以像命题 7.2 的证明中那样运用紧致性论证，证明对于所有具有 $k \leq K$ 且中心角位于闭区间 $[2\eta, \pi - 2\eta]$ 内的圆形 k- 边形，该比值都存在一个统一的下界 C_2。由于单位圆盘的总面积为 π，长度大于某个固定值 δ 的边只能有有限条。□

命题 7.6。 设 $u, v \in \mathbf{HD}(\mathbb{D})$ 具有 $C^\infty(\partial\mathbb{D})$中的边界值。在一致化圆模式下，我们用 $z_F\colon F \to \mathbb{D}$ 表示圆的外心，用 $z_V\colon V \to \mathbb{D}$ 表示圆的交点。则

$$b(u\circ z_F, v\circ z_V) = \int_{\partial\mathbb{D}} udv = 2\pi\omega(u, v).$$

证明。 下文中，为简便起见，我们将 $u_\phi = u(z_\phi)$ 和 $v_i = v(z_i)$ 记作相应符号。我们取命题 7.3 中的有限子复形序列 Ω_k 。

令 $\epsilon > 0$。那么存在一个整数 N_1 使得对于 $n > N_1$,

$$|\int_{\partial\mathbb{D}} udv - \int_{\partial\Omega_n} udv| = |\iint_{\mathbb{D}-\Omega_n} du \wedge dv| < \epsilon.$$

取 $L = 2\pi C_1$。应用命题 7.4 和引理 7.5 可知，存在另一个整数 N_2 使得对于 $n > N_2$,

$$|\int_{\partial\Omega_n} udv - \sum_{ij\in\partial\Omega_n} u_\psi(v_j - v_i)| < \epsilon.$$

因此，对于 $n > \max\{N_1, N_2\}$，有

$$|2\pi\omega(u,v) - \sum_{ij\in\Omega_n}(u_\psi - u_\phi)(v_j - v_i)| = |\int_{\partial\mathbb{D}} udv - \sum_{ij\in\partial\Omega_n} u_\psi(v_j - v_i)| < 2\epsilon.$$

因此

$$b(u\circ z_F, v\circ z_V) = \lim_{n\to\infty}\sum_{ij\in\Omega_n}(u_\psi - u_\phi)(v_j - v_i) = 2\pi\omega(u,v).$$

□

引理 7.7。若 $u \in \mathbf{D}_0(F)$ 且 $v \in \mathbf{D}(V)$，则

$$b(u,v) = 0.$$

类似地，若 $u \in \mathbf{D}(F)$ 且 $v \in \mathbf{D}_0(V)$，则

$$b(u,v) = 0.$$

证明。 设 $u \in \mathbf{D}_0(F)$ 的支撑有限。那么

$$b(u,v) = -\sum_{\phi\in F} u_\phi \sum_{ij\in\partial\phi}(v_j - v_i) = 0.$$

由连续性可知，对任意 $u \in \mathbf{D}_0(F)$，结论同样成立。另一种情形类似。 □

引理 7.8。 设 $u, v \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 和 $\hat{}u, \hat{}v \in \mathbf{HD}(\mathbb{D})$ 是它们的调和延拓。则

$$b(\hat{u}\circ z_F, \hat{v}\circ z_V) = 2\pi\omega(u,v).$$

证明。 单位圆上的光滑函数空间在 $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 中稠密。我们可以找到光滑函数序列 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，它们在 $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$ 中分别收敛于 u和 v。相应的调和延拓 $\hat{}u_m$，$\hat{}v_n$ 和 $\hat{}u$，$\hat{}v$ 在经典狄利克雷能量范数下收敛。根据 Hutchcroft 的结果（定理 6.2），离散调和函数 $p_F(\hat{}u_m\circ z_F)$ 和 $p_V(\hat{}v_n\circ z_V)$ 在组合狄利克雷能量范数下分别收敛于 $p_F(\hat{}u\circ z_F)$ 和 $p_V(\hat{}v\circ z_V)$。因此

$$\begin{aligned} b(\hat{u}\circ z_F, \hat{v}\circ z_V) =& b(p_F(\hat{u}\circ z_F), p_V(\hat{v}\circ z_V)) \\ =& \lim_{m,n\to\infty} b(p_F(\hat{u}_m\circ z_F), p_V(\hat{v}_n\circ z_V)) \\ =& \lim_{m,n\to\infty} b((\hat{u}_m\circ z_F), (\hat{v}_n\circ z_V)) \\ =& 2\pi \lim_{m,n\to\infty}\omega(u_m, v_n) \\ =& 2\pi\omega(u,v). \end{aligned}$$

□

定理 *1.10* 的证明。 假设 $u \in \mathbf{D}(F)$ 和 $v \in \mathbf{D}(V)$ 的边界值分别为 $u_{\partial\mathbb{D}}$， $v_{\partial\mathbb{D}} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbb{D})$。根据边界值映射的构造，存在调和延拓 $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbf{HD}(\mathbb{D})$，分别对应于 $u_{\partial\mathbb{D}}$ 和 $v_{\partial\mathbb{D}}$，使得 $u - \hat{u} \circ z_F \in \mathbf{D}_0(F)$ 且 $v - \hat{v} \circ z_V \in \mathbf{D}_0(V)$。利用 b 的双线性性，引理 7.7 和引理 7.8 可得

$$\begin{aligned} b(u,v) &= b(\hat{u} \circ z_F + (u - \hat{u} \circ z_F), \hat{v} \circ z_V + (v - \hat{v} \circ z_V)) \\ &= b(\hat{u} \circ z_F, \hat{v} \circ z_V) \\ &= 2\pi\omega(u_{\partial\mathbb{D}}, v_{\partial\mathbb{D}}). \end{aligned}$$

□

推论 *1.11* 的证明。根据命题 5.17，共轭映射在 u 处的微分将 $w \in T_u P(\Theta, R^\dagger) = \mathbf{HD}_{c^*}(F)$ 映至其调和共轭 $\tilde{w} \in T_{[v]}(P(\Theta, \alpha^\dagger)/\mathbb{R}) = \mathbf{HD}_c(V)$，它满足

$$w_\psi - w_\phi = c_{ij}(\tilde{w}_j - \tilde{w}_i).$$

利用这一关系以及 $c^*_{\phi\psi} = 1/c_{ij}$ 这一事实，我们可以将几何狄利克雷内积改写为

$$\begin{aligned} \sum_{\phi\psi \in E^*} c^*_{\phi\psi}(v_\phi - v_\psi)(w_\phi - w_\psi) &= \sum_{ij \in E} (v_\psi - v_\phi) c^*_{\phi\psi}(w_\psi - w_\phi) \\ &= \sum_{ij \in E} (v_\psi - v_\phi)(\tilde{w}_j - \tilde{w}_i) \\ &= b(v, \tilde{w}). \end{aligned}$$

根据定理 1.10，我们有

$$b(v, \tilde{w}) = 2\pi \cdot \omega(v_{\partial\mathbb{D}}, \tilde{w}_{\partial\mathbb{D}})$$

并且 $\tilde{w}_{\partial\mathbb{D}} = d\mathfrak{H}^\Theta_{u_{\partial\mathbb{D}}}(w_{\partial\mathbb{D}})$，由此证明得证。 □

8. Projection to the universal Teichmüller space

我们证明， $P(\Theta, R^\dagger)$ 中的每一个圆模式都给出单位圆盘的一个拟共形同胚。这诱导了从 $P(\Theta, R^\dagger)$ 到万有 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}$ 的一个自然投影。我们进一步证明， $P(\Theta, R^\dagger)$ 的像落在韦伊-彼得松子类 $\mathcal{T}_{\mathrm{WP}}$ 之内。我们的证明受到 [45] 中论证的启发。

对于任意圆模式 $u \in P(\Theta, R^\dagger)$（或更一般地， $u \in \tilde{P}(\Theta)$），欧氏结构 $(\Omega\ \sigma(\Theta, e^u R^\dagger))$ 自然地容许一个测地胞腔分解。特别地，一致化圆模式诱导了单位圆盘 $\mathbb{D} \cong (\Omega\ \sigma(\Theta, R^\dagger))$ 的一个测地胞腔分解。

这些分解使我们能够构造一个分段线性映射 $f_u : \mathbb{D} \to (\Omega\ \sigma(\Theta, e^u R^\dagger))$。具体而言，我们定义 f_u，使其将一致化圆模式的交点和外心映射到变形圆模式中的对应点。对于每条边 $ij \in E$ 及其相邻面 ϕ 和 ψ，我们将 f_u 唯一地延拓为在三角形 $\phi\psi i$和 $\psi\phi j$上的仿射映射。接下来，我们将证明 f_u 是拟共形的，并分析其贝尔特拉米微分。

我们用 $\alpha_{\phi\psi}^{\dagger}$， $\alpha_{\psi\phi}^{\dagger}$， $\Theta_{\phi\psi}$ 表示一致化圆模式下三角形 $\phi\psi i$ 和 $\psi\phi j$的内角；用 $\alpha_{\phi\psi}$， $\alpha_{\psi\phi}$， $\Theta_{\phi\psi}$ 表示具有欧几里得半径$e^{u}R^{\dagger}$的变形圆模式下对应的内角。

引理 8.1。 设 L是一个线性映射，它将一个内˜角为 α、 β、 $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ 的欧几里得三角形映射到另一个内角为 $\tilde{\alpha}$、 β、 $\tilde{\gamma}=\pi-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}$的欧几里得三角形。那么，其贝尔特拉米微分 μ（L）：$=\frac{\partial_{\bar{z}}L}{\partial_{z}L}$ 在该三角形的内部为常数，并且

$$\mu(L)=\frac{\frac{\sin\tilde{\gamma}}{\sin\gamma}-\frac{\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}+\mathbf{i}(\frac{\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\tilde{\gamma}}{\sin\alpha\sin\gamma})}{\frac{\sin\tilde{\gamma}}{\sin\gamma}+\frac{\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}-\mathbf{i}(\frac{\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\tilde{\gamma}}{\sin\alpha\sin\gamma})}.$$

此外，

$$|\mu(L)|^{2}=1-\frac{4\cdot\frac{\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}\sin\tilde{\gamma}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{|\frac{\sin\tilde{\gamma}}{\sin\gamma}+\frac{\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}|^{2}+|\frac{\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\tilde{\gamma}}{\sin\alpha\sin\gamma}|^{2}}.$$

证明。 贝尔特拉米微分在缩放和平移下保持不变。给定内角后，三角形的边长在缩放意义下分别为 sin α、 sin β、sin γ。我们可以将顶点定位为 (0、 0)、(sin γ、 0)、(sin βcos α、 sin βsin α)。在这些坐标下，将 (0、0)、(sin γ、 0)、(sin βcos α、 sin βsin α) 映射到˜ ˜(0、 0)、(sin $\tilde{\gamma}$、 0)、(sin βcos $\tilde{\alpha}$、 sin βsin $\tilde{\alpha}$) 的线性映射 L为

$$L=\begin{pmatrix}\sin\tilde{\gamma} & \sin\tilde{\beta}\cos\tilde{\alpha}\\ 0 & \sin\tilde{\beta}\sin\tilde{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\gamma & \sin\beta\cos\alpha\\ 0 & \sin\beta\sin\alpha\end{pmatrix}^{-1}$$

并且可以显式计算贝尔特拉米微分。 □

˜**命题 8.2**。 假设 $u\in P(\Theta)$。那么，$\sup_{\phi\psi\in E^{*}}|u_{\phi}-u_{\psi}|<\infty$ 当且仅当分段线性映射 f_{u} 是拟共形映射。

证明。 由命题 3.4 可知，存在一个任意小的 $\eta=\eta(\Theta,\epsilon,u)>0$，使得三角形的内角与 η 和 $\pi-\eta$ 相差不超过相应范围。注意，对于任意角 $\alpha,\beta,\gamma,\tilde{\alpha},\beta,\tilde{\gamma}\in(\eta,\pi-\eta)$，有˜

$$\frac{4\cdot\frac{\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}\sin\tilde{\gamma}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{|\frac{\sin\tilde{\gamma}}{\sin\gamma}+\frac{\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}|^{2}+|\frac{\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\tilde{\gamma}}{\sin\alpha\sin\gamma}|^{2}}\geq\frac{4\cdot\frac{\sin^{3}\eta}{1}}{2(\frac{1}{\sin^{2}\eta}+3\frac{1}{\sin^{4}\eta})}.$$

因此，由引理 8.1， $\mu(f)$ 一致地与 1 保持正距离，故 f 是拟共形的。□

由于 (Ω $\sigma(\Theta,e^{u}R^{\dagger})$) 是单连通黎曼曲面，且存在一个从单位圆盘出发的拟共形同胚 f_{u}，我们推得 (Ω $\sigma(\Theta,e^{u}R^{\dagger})$) 与单位圆盘共形等价，并且存在一个黎曼映射 g_{u}：$\mathbb{D}\to$(Ω $\sigma(\Theta,e^{u}R^{\dagger})$)。它诱导出单位圆盘上的一个拟共形同胚 $h_{u}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$

$$h_{u}:=g_{u}^{-1}\circ f_{u}$$

且其在单位圆上的延拓是一个拟对称同胚，它代表普遍泰希米勒空间中的一个元素。我们声称它确实属于魏尔-彼得森类。由于贝尔特拉米微分在保角映射的后复合下保持不变，只需证明 f_{PL} 的贝尔特拉米微分关于双曲度量在单位圆盘上是 L^{2}-可积的。

引理 8.3. 对于单位圆盘上的一致化圆模式，每个外接圆都是紧致的。此外，存在 $A_0 > 0$，使得每个外接圆盘的双曲面积都不超过 A_0。

证明。由于每个圆都被有限个圆围绕，中心圆必定是紧致的，即既不接触单位圆，也不与其相交。为了得到外接圆双曲面积的上界，我们只考虑一个面及其相邻面，而忽略所有其他面。在这种情况下，当所有相邻外接圆都变为极限圆时，中心外接圆在给定交角下达到最大双曲半径。在这一构型中，中心外接圆盘的双曲面积是交角的连续函数。由于交角在紧致集 $[\epsilon_0, \pi - \epsilon_0]$ 中变化，且面度一致有界，因此圆盘上一致化圆模式中的外接圆盘双曲面积存在上界 $A > 0$。□

对于对应于 $u \in P(\Theta, R^*)$ 的变形圆模式，我们回顾一下，三角形的内角为 $\alpha_{\phi\psi}$，$\alpha_{\psi\phi}$，$\Theta_{\phi\psi}$。角 $\alpha_{\phi\psi}$，$\alpha_{\psi\phi}$ 取决于相邻外接圆半径的比值以及 u的差

$$\alpha_{\phi\psi} = \cot^{-1}\left(\frac{e^{u_\phi - u_\psi}\frac{R_\phi}{R_\psi} - \cos\Theta_{\phi\psi}}{\sin\Theta_{\phi\psi}}\right),$$
$$\alpha_{\psi\phi} = \cot^{-1}\left(\frac{e^{u_\psi - u_\phi}\frac{R_\psi}{R_\phi} - \cos\Theta_{\phi\psi}}{\sin\Theta_{\phi\psi}}\right) = \pi - \Theta_{\phi\psi} - \alpha_{\phi\psi},$$

其中

$$\Theta_{\phi\psi} \in [\epsilon_0, \pi - \epsilon_0], \quad u_\phi - u_\psi \in [-\sqrt{\mathcal{E}(u)}, \sqrt{\mathcal{E}(u)}], \quad \frac{R_\phi}{R_\psi} \in [\frac{1}{C}, C]$$

其中 $C = C(\Theta, \epsilon_0)$ 是环引理 3.2 中的常数。特别是，常数 $\sqrt{\mathcal{E}(u)}$ C，ϵ_0 与边 ij无关。

引理 8.4。 我们考虑以下关于 $t \in [-\sqrt{\mathcal{E}(u)}\ \sqrt{\mathcal{E}(u)}]$,$r \in [\frac{1}{C}, C]$ 和 $\theta \in \overline{[\epsilon_0, \pi - \epsilon_0]}$ 的解析函数

$$m(t,r,\theta) := \frac{\frac{\sin\tilde{\gamma}}{\sin\gamma} - \frac{\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta} + \mathbf{i}(\frac{\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\cos\alpha\sin\tilde{\gamma}}{\sin\alpha\sin\gamma})}{\frac{\sin\tilde{\gamma}}{\sin\gamma} + \frac{\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta} - \mathbf{i}(\frac{\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\cos\alpha\sin\tilde{\gamma}}{\sin\alpha\sin\gamma})} \tag{9}$$

其中

$$\tilde{\alpha} = \cot^{-1}\left(\frac{e^t r - \cos\theta}{\sin\theta}\right), \quad \tilde{\beta} = \pi - \theta - \tilde{\alpha}, \quad \tilde{\gamma} = \theta$$
$$\alpha = \cot^{-1}\left(\frac{r - \cos\theta}{\sin\theta}\right), \quad \beta = \pi - \theta - \alpha, \quad \gamma = \theta.$$

则存在一个常数 C_1, C_2，它依赖于 $\sqrt{\mathcal{E}(u)}$ Θ, ϵ_0，使得对于 $t \in [-\sqrt{\mathcal{E}(u)}\ \sqrt{\mathcal{E}(u)}]$, $r \in \overline{[\frac{1}{C}, C]}$ 以及 $\theta \in [\epsilon_0, \pi - \epsilon_0]$

$$C_1|t| \geq |m(t,r,\theta)| \geq C_2|t|.$$

证明。 由于 m 在一个紧致集上是解析的，我们考虑这些值

$$C_1 = \max_{t\in[-\sqrt{\mathcal{E}(u)},\sqrt{\mathcal{E}(u)}],r\in[\frac{1}{C},C],\theta\in[\epsilon_0,\pi-\epsilon_0]} |\partial_t m(t,r,\theta)|,$$
$$C_2 = \min_{t\in[-\sqrt{\mathcal{E}(u)},\sqrt{\mathcal{E}(u)}],r\in[\frac{1}{C},C],\theta\in[\epsilon_0,\pi-\epsilon_0]} |\partial_t m(t,r,\theta)|.$$

根据中值定理，对于所有 $t \in [-\sqrt{\mathcal{E}(u)}\ \sqrt{\mathcal{E}(u)}]$、 $r \in [\frac{1}{C}, C]$ 和 $\theta \in [\epsilon_0, \pi - \epsilon_0]$，

$$|m(t,r,\theta) - m(0,r,\theta)| = |t| \cdot |\partial_t m(\xi,r,\theta)| \le C_1|t|$$

其中 ξ 介于 0 和 t 之间。我们注意到 $m(0,\ r,\ \theta) = 0$，从而得到所需的估计。下界也可以类似地得到。□

定理 *1.12* 的证明。定理中断言的第一个等价关系由命题 8.2 得出。

现在我们证明，若 u 具有有限组合狄利克雷能量，则 f_u 的贝尔特拉米微分关于双曲度量在单位圆盘上是 L^2-可积的。由于每个欧几里得三角形面 $\phi\psi i$ 都被相邻外接圆盘覆盖，根据引理 8.3，其双曲面积 $A_{\text{hyp}}(\phi\psi i)$ 有上界 $2A_0$ 。于是，关于单位圆盘上的双曲度量，并取引理 8.4 中的常数 C_1，我们有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}} |\mu(f_u)|^2 dA_{\text{hyp}} &= \sum_{\phi\psi\in E^*} \left(|\mu(f_u)_{\phi\psi i}|^2 A_{\text{hyp}}(\phi\psi i) + |\mu(f_u)_{\phi\psi j}|^2 A_{\text{hyp}}(\phi\psi j)\right)\\ &\le \sum_{\phi\psi\in E^*} C_1^2 |u_\phi - u_\psi|^2 \cdot 2A_0 \cdot 2\\ &= 4C_1^2 A_0 \sum_{\phi\psi\in E^*} |u_\phi - u_\psi|^2\end{aligned}$$

这是有限的，因为 $u \in \mathbf{D}(F)$。

现在我们在增加一个假设的条件下证明逆向结论：一致化圆模式的双曲半径 $r_{\min} > 0$ 有一个统一的下界。假设贝尔特拉米微分 $\mu(f_u)$ 关于 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量是 L^2-可积的。

首先，由引理 8.4 可知，存在一个常数 $C_2 > 0$，使得对所有边 $\phi\psi \in E^*$，均有 $|\mu(f_u)_{\phi\psi i}| \ge C_2|u_\phi - u_\psi|$ 。

其次，我们需要欧几里得三角形 $\phi\psi i$ 的双曲面积下界。利用庞加莱圆盘中圆的欧几里得圆心 c 和半径 R 的显式公式，其中双曲圆心为 a、双曲半径为 r [4, （习题 3], ），我们可以推导出欧几里得半径与到边界的欧几里得距离之比

$$\frac{R}{1-|c|} = \tanh(\frac{r}{2})\frac{1+|a|}{1+|a|\tanh^2(\frac{r}{2})}.$$

观察该函数关于双曲中心 $|a|$位置的单调性，可得如下下界

$$\frac{R}{1-|c|} \ge \tanh(r/2) \ge \tanh(r_{\min}/2).$$

现在考虑一致化圆模式下欧几里得三角形 $\phi\psi i$ 中的一点 z 。由于该三角形包含于外接圆盘的并集之中，且这些外接圆盘是 $\mathbb{D}$的子集，故有

$$|z - z_\phi| \le R_\phi + R_\psi \le (1+C)R_\phi \le (C+1)(1-|z_\phi|).$$

这意味着

$$1 - |z| \le 1 - |z_\phi| + |z - z_\phi| \le (C+2)(1-|z_\phi|).$$

因此，双曲密度满足以下下界：

$$\frac{4}{(1-|z|^2)^2} \ge \frac{1}{(1-|z|)^2} \ge \frac{1}{(C+2)^2(1-|z_\phi|)^2}.$$

$\triangle\phi\psi i$ 的欧氏面积为

$$\frac{1}{2}R_\phi R_\psi \sin\Theta_{\phi\psi} \ge \frac{\sin\epsilon_0}{2C}R_\phi^2.$$

结合这些估计，我们得到双曲面积的下界：

$$A_{\mathrm{hyp}}(\phi\psi i) = \iint_{\triangle\phi\psi i} \frac{4}{(1-|z|^2)^2}dxdy \ge \frac{\sin\epsilon_0}{2C(C+2)^2}\left(\frac{R_\phi}{1-|z_\phi|}\right)^2 \ge A_{\min}$$

其中 $A_{\min} = \frac{\text{正弦}\sin\epsilon_0}{2C(C+2)^2}$ 双曲正切$^2(r_{\min}/2)$ 是一个与边 $\phi\psi$ 无关的正数。因此，我们有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}} |\mu(f_u)|^2 dA_{\mathrm{hyp}} &= \sum_{\phi\psi\in E^*} \left(|\mu(f_u)_{\phi\psi i}|^2 A_{\mathrm{hyp}}(\phi\psi i) + |\mu(f_u)_{\phi\psi j}|^2 A_{\mathrm{hyp}}(\psi\phi j)\right) \\ &\ge 2C_2^2 A_{\min} \sum_{\phi\psi\in E^*} |u_\phi - u_\psi|^2.\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{\phi\psi\in E^*} |u_\phi - u_\psi|^2 \le \frac{1}{2C_2^2 A_{\min}} \iint_{\mathbb{D}} |\mu(f_u)|^2 dA_{\mathrm{hyp}} < \infty.$$

□

Acknowledgment

图 1、2 和 3 由 Ken Stephenson 的软件 CirclePack [43] 生成。作者谨此感谢 Jean-Marc Schlenker 和 Yilin Wang 的有益讨论。

References

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, 《应用数学科学》第75卷，施普林格出版社，纽约，第2版，1988年。[2] O. Angel, M. T. Barlow, O. Gurel-Gurevich, and A. Nachmias, *Boundaries of planar graphs via circle packings* 44 2016 1956 1984 ，，《概率年刊》，（），第–页。[3] O. Angel, T. Hutchcroft, A. Nachmias, and G. Ray, *Unimodular hyperbolic triangulations: circle packing and random walk* 206 2016 229 268 ，《数学发明》，（），第–页。[4] A. F. Beardon and D. Minda, *The hyperbolic metric and geometric function theory*, 载于《拟共形映射及其应用》，Narosa, 新德里，2007年，第9–56页。[5] I. Benjamini and O. Schramm, *Harmonic functions on planar and almost planar graphs and manifolds via circle packings* 126 1996 565 587 ，，《数学发明》，（），第–页。[6] , *Random walks and harmonic functions on infinite planar graphs using square tilings*, 《概率年刊》，24（1996），第1219–1238页。[7] N. Berestycki and E. Powell, *Gaussian Free Field and Liouville Quantum Gravity*, 《剑桥高等数学研究》，剑桥大学出版社，2025年。

[8] C. J. Bishop, *Function theoretic characterizations of Weil-Petersson curves*, 《伊比利亚美洲数学杂志》, 38（2022）, 第2355–2384页。[9] , *Weil-Petersson curves, β-numbers, and minimal surfaces*, 《数学年刊》（第2辑）, 202（2025）, 第111–188页。[10] A. I. Bobenko and B. A. Springborn, *Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem* 356 2004 659 689 , 《美国数学学会汇刊》, （）, 第–页。[11] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universi-text, 施普林格出版社, 纽约, 2011年。[12] M. Bridgeman, K. Bromberg, F. Vargas Pallete, and Y. Wang, *Universal Liouville action as a renormalized volume and its gradient flow* 174 2025 2821 , 《杜克数学杂志》, （）, 第–2876页。[13] D. Chelkak, *Robust discrete complex analysis: a toolbox*, 《概率年刊》, 44（2016）, 第628–683页。[14] Y. Colin de Verdière, *Un principe variationnel pour les empilements de cercles*, 《数学发明》, 104（1991）, 第655–669页。[15] G. Cui, *Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces*, 《中国科学》A辑, 43（2000）, 第267–279页。[16] H. Gu, H. Yu, and P. Zhou, *Infinite ideal polyhedra in hyperbolic 3-space: Existence and rigidity* 2025 , 。[17] A. Georgakopoulos, *The boundary of a square tiling of a graph coincides with the Poisson boundary* 203 2016 773 821 , 《数学发明》, （）, 第–页。[18] R. Guo and F. Luo, *Rigidity of polyhedral surfaces. II*, 《几何与拓扑》, 13（2009）, 第1265–1312页。[19] Z.-X. He, *Rigidity of infinite disk patterns*, 《数学年刊》（第2辑）, 149（1999）, 第1–33页。[20] Z.-X. He and O. Schramm, *Fixed points, Koebe uniformization and circle packings*, 《数学年刊》（第2辑）, 137（1993）, 第369–406页。[21] Z.-X. He and O. Schramm, *Hyperbolic and parabolic packings*, 《离散与计算几何》, 14（1995）, 第123–149页。[22] T. Hutchcroft, *Harmonic Dirichlet functions on planar graphs*, 《离散与计算几何》, 61（2019）, 第479–506页。[23] R. Kenyon, *The Laplacian on planar graphs and graphs on surfaces*, 载于《数学当前发展》, 2011年, 国际出版社, 萨默维尔, 马萨诸塞州, 2012年, 第1–55页。[24] R. Kenyon, W. Y. Lam, S. Ramassamy, and M. Russkikh, *Dimers and circle patterns*, 《高等师范科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup´er.（第4辑）, 55（2022）, 第865–903页。[25] R. W. Kenyon and D. B. Wilson, *Boundary partitions in trees and dimers*, 《美国数学学会汇刊》, 363（2011）, 第1325–1364页。[26] S. Kojima, S. Mizushima, and S. P. Tan, *Circle packings on surfaces with projective structures* 63 2003 349 397 , 《微分几何杂志》, （）, 第–页。[27] W. Y. Lam, *Quadratic differentials and circle patterns on complex projective tori*, 《几何与拓扑》, 25（2021）, 第961–997页。[28] W. Y. Lam, O.-H. S. Lo, and C. H. Yuen, *Period matrices and homological quasi-trees on discrete riemann surfaces* 2025 , 《纯粹与应用数学杂志》, （）。即将出版。[29] W. Y. Lam and U. Pinkall, *Holomorphic vector fields and quadratic differentials on planartriangular meshes*, 载于《离散微分几何进展》, 施普林格出版社, [柏林], 2016, , 第241–265页。[30] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, 《数学研究生教材》第109卷, 施普林格出版社, 纽约, 1987年。[31] G. Leibon, *Characterizing the Delaunay decompositions of compact hyperbolic surfaces*, 《几何与拓扑》, 6（2002）, 第361–391页。[32] E. J. McShane, *Extension of range of functions*, 《美国数学学会通报》, 40（1934）, 第837–842页。[33] J. Milnor, *How to compute volume in hyperbolic space*, 载于《论文集》第1卷, Publish or Perish出版社, 休斯敦, 得克萨斯州, 1994年, 第189–212页。几何学。[34] S. Nag and D. Sullivan, *Teichmüller theory and the universal period mapping via quantum calculus and the $H^{1/2}$ space on the circle* 32 1995 1 34 , 《大阪数学杂志》, （）, 第–页。[35] W. D. Neumann and D. Zagier, *Volumes of hyperbolic three-manifolds*, 《拓扑学》, 24（1985）, 第307–332页。

[36] U. Pinkall and K. Polthier, *Computing discrete minimal surfaces and their conjugates*,《实验数学》, 2 (1993), 第 15–36 页。[37] I. Rivin,
Euclidean structures on simplicial surfaces and hyperbolic volume,《数学年刊》(第二辑), 139 (1994), 第 553–580 页。[38] B. Rodin and D. Sullivan,
The convergence of circle packings to the Riemann mapping,《微分几何杂志》, 26 (1987), 第 349–360 页。[39] A. Sergeev, *Kähler geometry of loop spaces*,《日本数学会回忆录》第 23 卷，日本数学会，东京, 2010 年。[40] , *Lectures on universal Teichmüller space*,《欧洲数学学会数学讲座系列》，欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2014 年。[41] Y. Shen, *Weil-Petersson Teichmüller space*,《美国数学杂志》, 140 (2018), 第 1041–1074 页。[42] P. M. Soardi, *Potential theory on infinite networks*,《数学讲义》第 1590 卷，施普林格出版社，柏林，1994 年。[43] K. Stephenson,
Introduction to circle packing: The theory of discrete analytic functions,剑桥大学出版社，剑桥, 2005 年。[44] L. A. Takhtajan and L.-P. Teo,
Weil-Petersson metric on the universal Teichmüller space,《美国数学会回忆录》, 183 (2006), 第 viii +119 页。[45] D. Šarić, Y. Wang, and C. Wolfram, *Circle homeomorphisms with square summable diamond shears* 2024 12219 12268 ,《国际数学研究通知》, ( ), 第 – 页。[46] Y. Wang, *Equivalent descriptions of the Loewner energy*,《数学发明》, 218 (2019), 第 573– 621 页。

Mathematics Research Unit、 Université du Luxembourg、 L-4364 Esch-sur-Alzette
Email address: wai.lam@uni.lu