arXiv:2603.09655v1 [math.RA] 10 Mar 2026

非结合代数的局部有限簇

Yuri Bahturin 数学与统计系 纽芬兰
纪念大学 圣约翰斯，NL，A1C5S7

Alexander
Olshanskii 数学系 1326
Stevenson Center 范德堡大
学 纳什维尔，TN 37240

摘要

我们研究有限域上线性代数的局部有限簇（=本原类）。我们不假设这些代数是结合的或李代数。我们关注这些簇中有限代数的基本性质，例如：幂零性、可解性、单性、自由性、投射性和内射性。我们也关注数值估计：具有各种经典性质的代数数量与维数为 n 的所有代数总数之比。这些性质包括没有真非平凡子代数或没有非平凡自同构等。

目录

1 引言、定义与基本性质 2
1.1 文章主题.2 1.2 绝对自由代数.3 1.3 簇与自由代数.5 1.4 两个一维代数.6 1.5 单代数的直积幂的子代数.7

2 幂零簇 9
2.1 等价定义.9 2.2 子理想.13 2.3 幂零性的其他判别准则.14 2.4 有限相对自由幂零代数的一个剩余性质. . . 15

3 局部有限簇中的有限代数 17
3.1 Birkhoff 构造.17 3.2 包络代数与簇.19 3.3 次直积的极小表示.20 3.4 由有限单代数生成的簇.21 3.5 若干自由积的计算.24 3.6 特征单代数.26 3.7 半直积与极值代数.28

4 局部有限簇的杂项性质 30
4.1 有限生成簇中代数的根基高度 . . . . . 30 4.2 根基高度 1 与内禀半单代数 . . . . . 31 4.3 局部有限簇中的内射代数.33 4.4 有限生成簇中的投射代数 . . . . . 35 4.5 反 Schreier 簇.36 4.6 可解簇.38

5 局部有限簇的维数函数 42
5.1 维数函数的初步估计 42 5.2 单代数的维数函数 44 5.3 任意有限代数的维数函数 46 5.4 极小簇的自由代数及其子代数 49 5.5 结合代数簇中的维数函数 52 5.6 其他一些数值估计 54

6 有限代数的泛性质 55
6.1 预备说明 55 6.2 泛代数没有非平凡自同构 57 6.3 泛代数是单代数 60 6.4 泛代数是循环的 61 6.5 泛代数的拟恒等式 63 6.6 幂零代数和可解代数的数量 64

1 引言、定义与基本性质

1.1 本文主题。 给定域**F**，一个（线性）代数 A 在域 **F**上（或一个**F**-代数）是 **F** 上的向量空间，并带有一个双线性运算 $A\times A\to A$，记作$(a,b)\mapsto ab$，其中 a, $b, ab\in A$。域上的线性代数构成泛代数的一个重要但特殊的情形，其中底集 A 不是向量空间，且运算 $A\times\cdots\times A\to A$ 的个数对于$\underbrace{\text{各种}_n}$元数 n 是无限的。线性代数理论中提出的某些问题，最初是在泛代数理论中提出的，而泛代数理论处于代数与逻辑的交界线上。

本文研究有限代数，即有限域上的有限维代数。人们对有限泛代数的恒等式普遍感兴趣，

尤其是有限环、群、半群等。这一研究可追溯至探讨有限基问题（FBP）的论文，该问题提出：有限（泛）代数 A 的所有恒等式是否都能由其中有限多个推出？最初，有限群、结合环和李环这几类中的问题得到了肯定回答，相关论文的作者包括 Oates - Powel [32], Kruse [19], Lvov [22], [23], Bahturin - Olshanskii [3]。后来，对于交错代数、Jordan 代数、Malcev 代数以及某些更一般的有限代数，这一问题也得到了肯定解决（参见 Medvedev [27]）。

另一方面，早在1955年，Lyndon [24] 就构造了一个具有一个二元运算、阶为6且不具有有限基性质（FBP）的泛代数例子。随后，Mursky [29] 提出了一个阶为3且不具有FBP的代数例子。后来，Polin [34] 构造了任意域上不具有FBP的有限维线性代数例子。

进入这一研究领域的一种自然方式，是考察有限泛代数，特别是半群、格以及其他非线性代数结构。关于有限泛代数恒等式的最一般方法，可以在著作 [15]中找到。

我们的研究对象具有中等程度的普遍性。我们不要求这些代数满足任何经典恒等式，例如结合律恒等式或李恒等式。然而，我们确实假设乘法具有线性。读者可以将本文所表述的一些结果推广到相关结构的情形，例如环和Ω-代数。为保持一致，我们将研究范围限制在单个双线性运算上，并聚焦于有限生成的局部有限线性代数簇。

在接下来的小节中，我们将给出关于代数簇的一些基本定义和结果。这些内容可见于许多文献，最早可追溯到 Birkhoff 的开创性论文 [7], B. H. Neumann [30], A. I. Malcev [25] ，以及 Malcev 的 [26], Kurosh 的 [20], Cohn 的 [10], Hanna Neumann 的 [31]等开创性教材。另可参阅 Kharlampovich 和 Sapir 撰写的教学综述 [17]。

1.2 绝对自由代数。 对于任意域 **F**和非空集 X，可如下定义（绝对）自由代数 $\mathcal{F}(X)$。我们首先通过对次数进行归纳，定义 X 中的非结合单项式 。次数为 1 的单项式是 X的元素。若 $x \in X$，我们记 $\deg x = 1$ 。在定义了所有次数小于 $n > 1$ 的单项式后，次数为n 的单项式是所有形如 $(u)(v)$ 的可能表达式，其中 $\deg u = k \geq 1$ 且 $\deg v = n - k \geq 1$。 X 中所有非结合单项式的集合记作$\Gamma(X)$。有 $\Gamma(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ ，其中 Γ_n 是次数为 n的单项式集合。去掉非结合单项式 v 中的括号，就得到一个结合字，称为 v的支撑 。反过来，可以在结合字 w 中添加括号，从而得到所有支撑为 w的非结合单项式。

集合 $\Gamma(X)$ 被赋予如下运算 $\circ$。若 $u \in \Gamma_k$ 且 $v \in \Gamma_\ell$，则 $u \circ v = (u)(v) \in \Gamma_{k+\ell}$。关于该运算， $\Gamma(X)$ 由 X 生成。在实际使用这一运算时，人们省略符号 $\circ$ 。以及所有不必要的括号。因此，人们写 $(x_1x_2)x_2$ ，而不是 $((x_1)\circ(x_2))\circ(x_2)$。

最后，将自由代数 $\mathcal{F}(X)$ 定义为 $\Gamma(X)$ 的线性张成，其中

系数取自 $\mathbf{F}$。 $\mathcal{F}(X)$ 的元素通常称为非结合多项式。 $\mathcal{F}(X)$ 中的乘积是将 $\Gamma(X)$ 中的乘积按线性方式扩张而得，因此 $\mathcal{F}(X)$ 是一种线性代数，称为以自由生成元集 X 为自由生成元集的自由非结合代数。 X 的基数称为 $\mathcal{F}(X)$ 的秩。（本文中的非结合多项式不含零次项！）

若 L和 M 是一个代数的子空间，则 LM 表示所有乘积 lm 的线性张成，其中 $l \in L$ 和 $m \in L$。任意代数 A 的幂 A^k 通过归纳法定义为 $A^1 = A$ 和 $A^k = \sum_{s+t=k} A^s A^t$。我们列出一些众所周知的性质：

引理 1. 给定域 $\mathbf{F}$ 上的代数 A，对于任意 $i > 1$，有 $A^i \subset A^{i-1}$,$A^{i-1}A \subset A^i$ 和 $A^{i-1}A \subset A^i$。因此， A^{i-1} 是 A的理想。

证明。显然， $A^2 \subset A = A^1$。若 $i > 2$ 且 $j < i$，则根据归纳法，有 $A^j \subset A^{j-1}$。因此，对于 $k, \ell < i$, $k + \ell \geq 3$，我们得到 $A^k A^\ell \subset A^{k-1}A^\ell$或 $A^k A^\ell \subset A^k A^{l-1}$。回顾定义可得 $A^i \subset A^{i-1}$。根据定义以及这个包含关系，有 $AA^{i-1} = A^1 A^{i-1} \subset A^i \subset A^{i-1}$。类似地， $A^{i-1}A \subset A^i$，因此 A^{i-1} 是 A的理想。□

如果 $\mathcal{F}_n$ 是 Γ_n 的线性张成，那么 $\mathcal{F}_k\mathcal{F}_\ell \subset \mathcal{F}_{k+\ell}$，因此我们得到自由代数的标准 $\mathbb{N}$-分次，其中 $\mathbb{N}$ 是自然数的加法半群，如下所示

$$\mathcal{F}(X) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \tag{1}$$

$\mathcal{F}_n$ 的元素称为 n 次的齐次元。幂 $\mathcal{F}^n = \bigoplus_{k=n}^{\infty} \mathcal{F}_k$ 在 $\mathcal{F}(X)$ 中构成一个降滤过：

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}^1 \supset \mathcal{F}^2 \supset \cdots \supset \mathcal{F}^n \supset \cdots \text{ such that } \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^n = \{0\}. \tag{2}$$

给定一个非结合单项式 $u(x_1, \ldots\ldots, x_n)$，以及任意域 $\mathbf{F}$ 上任意代数 P 中的元素 $a_1, \ldots\ldots, a_n$，可以利用对 $\deg u$ 的归纳法和 P 的运算来定义 值 $u(a_1, \ldots\ldots, a_n) \in P$。单项式 x_i 的值就是 a_i，而 $(uv)(a_1, \ldots\ldots, a_n) = u(a_1, \ldots\ldots, a_n)v(a_1, \ldots\ldots, a_n)$。现在，非结合多项式 $w(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 是若干个系数属于 $\mathbf{F}$ 的单项式的线性组合，其值就是这些单项式的值按相同系数组成的线性组合。

若 $\varphi\colon X \to P$ 是任意映射，则将每个 $x \in X$ 替换为 $\varphi(x) \in P$ 的非结合多项式求值，给出唯一的代数同态 $\bar{\varphi}\colon \mathcal{F}(X) \to P$，并扩展 φ。这一性质称为 $\mathcal{F}(X)$的泛性质。这一性质的一个直接推论如下。给定任意代数 P，存在 X，使得 P 是 $\mathcal{F}(X)$ 在同态 ε 下的同态像，其中 ε 将 X 映到 P 的一个生成集上。令 $K =$ 核 ε，得到 $P \cong \mathcal{F}(X)/K$。

1.3 簇与自由代数。若 $w(x_1,\dots,w_n)$ 是一个非结合多项式，并且对于代数 P中的所有元素 $a_1,\dots,a_n$，都有 $w(a_1,\dots,a_n)=0$，则称 $w(x_1,\dots,x_n)=0$ 是 P中的一个恒等关系，或简称恒等式。

现在考虑域 $\mathbf{F}$ 上的可数秩自由代数 $\mathcal{F}_\infty=\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n,\dots)$。给定一个非空子集 $V\subset\mathcal{F}_\infty$，所有满足恒等式 $v(x_1,\dots,x_n)=0$（其中 $v(x_1,\dots,x_n)\in V$）的代数（定义在固定的域 $\mathbf{F}$ 上）构成的类 $\mathfrak{V}$，称为由 V 定义的代数簇。由此定义可知，代数簇在子代数、因子代数以及代数的笛卡尔积运算下封闭。

平凡的簇仅由零代数组成；它由恒等关系 $x=0$ 定义。

给定一个簇 $\mathfrak{V}$ 和代数 P，考虑理想 $\mathfrak{V}(P)$（更常记作相应的记号 $V(P)$），它由所有值 $v(a_1,\dots,a_n)$ 组成，其中 $a_1,\dots,a_n\in P$，且 $v(x_1,\dots,x_n)=0$ 是 $\mathfrak{V}$ 中的一个恒等式。仿照群论记号，称 $V(P)$ 为与簇 $\mathfrak{V}$ 对应的词理想。$V(P)$ 是 P 的最小理想，使得 $P/V(P)\in\mathfrak{V}$。因此，$V(P)=\{0\}$ 当且仅当 $P\in\mathfrak{V}$。理想 $V(P)$ 在 P 的所有自同态作用下封闭。这样的理想称为全不变的。

若$\mathbf{F}$ 是一个固定的域，则在$\mathbf{F}$ 上的簇与 $\mathcal{F}_\infty$的全不变理想之间存在一一伽罗瓦型对应：

命题1. 给定一个簇 $\mathfrak{V}$，相应的词理想 $V(\mathcal{F}_\infty)$ 是全不变的。反之，每一个全不变理想都是某个适当的簇 $\mathfrak{V}$的词理想。□

若 $U\subset\mathcal{F}_\infty$ 且 P是一个代数，则用 $U(P)$表示 P中由所有 $u(a_1,\dots,a_n)$生成的理想，其中 $a_1,\dots,a_n\in P$且 $u(x_1,\dots,x_n)\in U$。这就是词理想，即 P 中由非结合多项式集合所生成者 U。若$\mathfrak{V}(\mathcal{F}_\infty)=U(\mathcal{F}_\infty)$，则称 $\mathfrak{V}$ 由恒等式 $\{u=0\,|\,u\in U\}$定义。我们还称恒等式集合 $\{u=0\,|\,u\in U\}$是 $\mathfrak{V}$的恒等式基。

给定一个非空集 X，代数 $F(\mathfrak{V},X)=\mathcal{F}(X)/V(\mathcal{F}(X))$ 称为一个$\mathfrak{V}$-自由代数，其自由生成集为 X；或者称为在 $\mathfrak{V}$ 中的自由代数，其自由生成集为 X。若 $\mathfrak{V}$ 非零，则 X 内射嵌入于 $F(\mathfrak{V},X)$。这些代数中的每一个在簇 $\mathfrak{V}$ 中都具有泛性质：任意映射 $\varphi\colon X\to P\in\mathfrak{V}$ 都可唯一延拓为同态 $\varphi\colon F(\mathfrak{V},X)\to P$。由此可知，每个代数 $P\in\mathfrak{V}$ 都同构于适当的 $F=F(\mathfrak{V},X)$ 的一个因子代数。若不指定参数 $\mathfrak{V}$ 或 X，则简称 F 为相对自由代数。

对于一个 $\mathfrak{V}$-自由代数 $F(\mathfrak{V},X)$，子簇 $\mathfrak{V}$ 与 $F(\mathfrak{V},X)$ 的词理想之间也存在伽罗瓦型对应。子簇格 $\mathfrak{V}$ 中的并 $\mathfrak{V}_1\cup\mathfrak{V}_2$ 是同时包含子簇 $\mathfrak{V}_1$ 和 $\mathfrak{V}_2$ 的最小簇。相应的 $F(\mathfrak{V},X)$ 的词理想为交 $V_1(F(\mathfrak{V},X))\cap V_2(F(\mathfrak{V},X))$；而交 $\mathfrak{V}_1\cap\mathfrak{V}_2$ 则对应于和 $V_1(F(\mathfrak{V},X))+V_2(F(\mathfrak{V},X))$。

在某些簇中自由的代数的例子包括自由结合代数、自由李代数、自由交换代数等。

下面给出相对自由代数的一条有用性质，它可由泛性质推出。

引理 2. 设 $0 \neq v(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}_\infty$ 是一个非结合多项式，$F = F(\mathfrak{V}, Y)$ 是代数簇 $\mathfrak{V}$ 中的一个自由代数，其自由生成集为 $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$。假设 $v(y_1, \ldots, y_n) = 0$ 是 $y_1, \ldots, y_n$之间的一个关系，且在 F中成立。那么， $v(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 是 $\mathfrak{V}$中的一个恒等关系。□

接下来我们说明如下结论。

任意从集合 X到集合 Y的映射，都可延拓为唯一的同态 $F(\mathfrak{V}, X) \to F(\mathfrak{V}, Y)$。特别地，嵌入 $X \subset Y$可延拓为嵌入$F(\mathfrak{V}, X) \subset F(\mathfrak{V}, Y)$，并且 $F(\mathfrak{V}, X)$ 是 $F(\mathfrak{V}, Y)$ 的一个收缩，其中收缩映射将 $x \mapsto x$ 延拓为 $x \in X$，将 $y \mapsto 0$ 延拓为 $y \in Y \setminus X$。

X的基数称为 F（$\mathfrak{V}$， X）的秩。非平凡簇 $\mathfrak{V}$ 中的两个相对自由代数同构，当且仅当它们的秩相同。因此，固定 $\mathfrak{V}$ 后，我们只需将簇 $\mathfrak{V}$中秩为 n 的相对自由代数记作 $F_n = F_n(\mathfrak{V})$。此时，我们可以选择 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$。

给定域**F**上的一组代数 $\mathcal{S}$，由所生成的簇 $\mathcal{S}$记作var $\mathcal{S}$，它由所有满足 $\mathcal{S}$中所有代数所满足的恒等式的域**F**上的代数组成。如果 $\mathcal{S} = \{P\}$，其中 P 是一个代数，那么我们简单地记作var $\mathcal{S}$ = var P。等价地，var $\mathcal{S}$是所有满足$\mathcal{S} \subset \mathfrak{V}$ 的簇 $\mathfrak{V}$的交。

我们的目标是为有限代数 A的结构、 A的恒等式以及簇var A中代数的性质之间的密切联系提供新的证据。由有限代数生成的簇称为有限生成簇。研究有限生成簇是本文的主要课题。显然，如果 A是幂零、可解或单的，那么这些性质必然会强烈影响var A中其他代数的结构。除了有限生成簇之外，我们还将考察所有有限代数都是内射代数、投射代数，或更一般地说，都是自由代数的子代数的那些簇。

1.4 两个一维代数。设 A 是域**F**上的一维代数。若 A 具有非零乘法，则存在一个基向量$e \in A$，使得 $e^2 = e$；此时，映射 $e \mapsto 1$ 可扩张为一个同构，将 A 映到域 F，而后者是自身上的代数。

因此，对任意域**F**，在同构意义下，只有两种一维**F**-代数。本小节考察哪些恒等式可以将一维代数排除在一个簇之外。

对于第一个陈述，我们考虑形如 $x = f(x)$的恒等式，其中非结合多项式 $f(x)$依赖于一个变量 x，且只包含次数至少为 2 的单项式。为纪念费马小定理，我们将这类恒等式称为费马恒等式。

命题 2. 域**F** 上的代数簇 $\mathfrak{V}$ 满足某个费马恒等式，当且仅当它不包含一个零乘法的一维代数。

证明. 零乘法的一维代数 A 不满足任何费马恒等式，因为该恒等式的右端在 A 中只取零值。因此， A 不属于满足某个费马恒等式的簇。

现在假设簇 $\mathfrak{V}$ 中没有费马恒等式成立。那么不存在这样的恒等式 $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$：其左边含有一个次数为 1 的单项式 x_i。事实上，否则可以将 f 中的其他变量替换为零。根据引理 2，该映射可扩展为自由 $\mathfrak{V}$-代数上的自同态，从而在 $\mathfrak{V}$ 中得到一个费马恒等式。还需指出，任何不含次数为 1 的单项式的多项式，在具有零乘法的一维代数 A 中都为零，因此 $A \in \mathfrak{V}$。

□

单项式 v 关于变量 x_i 的次数 d_i，很容易通过归纳法定义为变量 x_i 在 v 的支撑中出现的次数。如果 $|\mathbf{F}| = q$，我们称多项式 f 拟齐次，若对于每个 x_i， f 的所有单项式直和项关于 x_i 的次数模 $q-1$ 后都相同。

命题 3. 有限域 $\mathbf{F}$ 上的代数簇 $\mathfrak{V}$ 不包含乘法非零的一维代数 $\mathbf{F}$，当且仅当 $\mathfrak{V}$ 满足某个单变量准齐次恒等式，且其中各单项式直和项的系数和非零。

证明。 注意，单项式系数和非零的恒等式在代数 $\mathbf{F}$中不成立。事实上，将所有变量都替换为单位元，便会得到域中的一个非零元素。

反过来，设代数簇 $\mathfrak{V}$ 不含系数和非零的单变量准齐次恒等式，也就是说，在 $\mathfrak{V}$ 中成立的所有单变量准齐次恒等式 x 的系数和均为零。注意，若 $m \equiv n$ 模 $q-1$，则 $x^m = x^n$是 $\mathbf{F}$ 的恒等式。因此，系数和为零的准齐次多项式属于任意从单生成的 $\mathfrak{V}$-自由代数 F_1 到$\mathbf{F}$ 的同态的核，因为无论将 $\mathbf{F}$ 中的哪个元素代入 x，所有单项式都将取相同的值。由此可知，这些恒等式在 $\mathbf{F}$中成立。

但这样一来，任意此类同态的核也包含所有单变量恒等式，因为 [4, 第 8 节。4]任意恒等式的左侧都是拟齐次多项式之和，而这些多项式在 $\mathfrak{V}$ 中也恒等于零。因此，将变量 x 映射到$\mathbf{F}$中的一个非零元素，就可以良好地扩张为一个同态；也就是说，代数$\mathbf{F}$ 同构于代数 F_1 的因子代数。由此可得$\mathbf{F}$ $\in \mathfrak{V}$。

□

1.5 单代数直幂的子代数。如果一个簇 $\mathfrak{V}$ 中的每个有限生成代数都是有限的（等价地，有限秩的 $\mathfrak{V}$自由代数都是有限的），则称该簇为局部有限。回顾一下，具有非零乘法的代数 A 若没有非零真理想，则称为单。例如，任何代数的合成因子都是单代数。若 $\mathfrak{V}$ 有一个

有限单代数 A，则它包含 A 的直积幂 $A \times \cdots \times A$，其中$n \underbrace{\qquad\qquad}$

所有 $n = 1$，2，.....。它们在描述 $\mathfrak{V}$中的所有代数时起着重要作用。为便于进一步引用，本小节给出关于此类直积结构的辅助信息。

照例，直积 P 的因子可等同于P的理想。回想，非零代数 A 称为单的，如果 A 没有真的非零理想。此外，我们按典范方式将代数 A_1，.....， A_m 与其子代数等同，这些子代数在其直积中用相同字母表示，从而 $A_1 \times \cdots \times A_m = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$。

引理3. 设代数 A 为单代数的直积：$A = A_1 \times \cdots \times A_t$，其中 A_1，.....， A_s 具有非零乘法，而 A_{s+1}，.....， A_t为一维且具有零乘法。则

(i) I 的每个理想都是第一簇中的某些代数与子代数 A_{s+1}、.. .、 A_t之和的某个子空间的直和；(ii) A 的每个因子代数都同构于某个乘积 $A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_r}$，其中$1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq t$。

证明。 如果 I 到 A_1 的投影非零，那么利用 A_1中的元素进行乘法，可以得到包含关系 $A_1 \subset I$ ，因为 A_1 是单代数且具有非零乘法。将类似的观察应用于 A_2、.. .、 A_s 即可证明命题 (i)。第二个命题由第一个命题和同态定理得出。

□

直积 $P = A_1 \times \cdots \times A_t = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ 的子代数 B 称为代数 A_1、.. .、 A_t 的次直积 ，如果 B 投影到 每个因子 A_i上。

引理4. 单代数 $A_1, \ldots, A_t$ 的次直积 B 同构于直积 $A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_r}$，其中 $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq t$。

证明。 注意，在上述记号中，交 $B \cap A_t$ 是 B 和 A_t 中的理想，因为 B 投影到 A_t 上。因此，它要么为零，要么等于整个 A_t。在第一种情况下， B同构于它在 $A_1 \times \cdots \times A_{t-1}$上的投影。在第二种情况下， $B = B' \times A_t$，其中 B'是代数 A_1、... ...、 A_{t-1}的次直积。因此，两种情况下都可以对 k 作显然的归纳，从而完成证明。

□

若 A 是一个代数， B 是 A的直积幂，即所有函数f：$\{1, \ldots, n\} \to A$构成的集合，那么对角线 Δ是 B中所有常值函数 f构成的子代数，也就是说，存在 $a \in A$使得对于所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $f(i) = a$。给定 A的任意 n元组自同构 $\tau = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，我们考虑由函数 f^τ, $f \in \Delta$构成的子代数 Δ^τ，其中这些函数定义为$f^\tau(i) = \alpha_i(f(i))$；显然， $\Delta^\tau \cong \Delta$。如果不存在混淆，提及 Δ时也使用“对角线”这一名称来指代 Δ^τ 。

引理 5. 设 S 是一个有限单代数， $S^2 \neq \{0\}$、 P和 Q 是 S的直积幂；我们记作 $P = S(1) \oplus \cdots \oplus S(\ell)$ 和 $Q = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$，其中 $S(i)$、 S_j均与 S同构。假设存在一个单同态 $\varphi : P \to Q$。那么，集合 $\{1, \ldots, k\}$ 存在两两不交子集 J_1，$\ldots, J_\ell$，使得每个 $S(j)$ 的像都是直和 $\oplus_{i \in J_i} S_i$ 的对角线 Δ_j 。此外，$\varphi(P) = \Delta_1 \oplus \cdots \oplus \Delta_\ell$。

证明。 考虑将 π_j of $\varphi(S(1))$ 投影到某个 S_j。由于这些单代数的阶相等，因此要么 $\pi_i(\varphi(S(1)) = \{0\}$ or $\pi_i(\varphi(S(1)) = S_j$。因此，我们将使复合 $\pi_j\varphi$ 成为同构的指标集合 j 记为 J_1 。由此，我们得到一个从 $S(1)$ 到直和项 S_j 之和 $T(J_1)$ 的对角嵌入，其中这些直和项属于 Q ，且满足 $j \in J_1$。

类似地，我们有每个 $S(i)$ 到 $T(J_i)$， i =2，.....， ℓ 的对角嵌入。若对于某个 j，有 $j \in J_i \cap J_{i'}$，且 $i \neq i'$，则 $\pi_j\varphi(S(i)) = \pi_j\varphi(S(i')) = S_j$。由于 $\pi_j\varphi$ 是同态，且 $S(i)S(i') = \{0\}$，我们必须得到 $S_j^2 = \{0\}$。这一矛盾完成了证明。

□

2 幂零簇

2.1 等价定义。当把幂零性的概念从经典代数推广到任意非结合代数时，存在不同的推广方式。在本小节中，我们要说明这些幂零性定义之间的关联。

我们把子空间的下降列称为

$$A = A_1 \supset A_2 \supset \ldots \tag{3}$$

一个中心滤过，如果 $A_iA_j \subset A_{i+j}$ 对任意指标 i， $j \geq 1$。(3) 中的各项 A_i 是理想，因为 $A_jA = A_jA_1 \subset A_{j+1} \subset A_j$ 且 $AA_j \subset A_j$。下中心滤过是 A的幂列。由引理 1，它是一个中心滤过。

引理 6。对任意中心列 *(3)* 以及任意 i，我们有 $A^i \subset A_i$。

证明。由于 $A^1 = A_1$， $A^2 = A_1^2 \subset A_2$，对 $i \geq 2$使用归纳法，我们有$A^k \subset A_k$，$A^\ell \subset A_\ell$ 对于 $k + \ell = i$，由此可得

$$A^i = \sum_{k+\ell=i} A^kA^\ell \subset \sum_{k+\ell=i} A_kA_\ell \subset A_i.$$

□

对于任意具有长度为 $c \geq 1$ 的中心滤过 (3)（即 A^{c+1} =$A_{c+1} = \{0\}$）的代数 A，我们可以通过归纳法定义一个上中心滤过 $\{Z_j \mid j \geq 1\}$，从 $Z_1 = A$ 开始。假设对于 $j < i$（其中 $i \geq 2$），子空间 Z_j 已定义。那么，根据定义， Z_i 由满足以下条件的元素 $a \in A$ 组成:

$$b_1b_2 \cdots b_sab_{s+1} \ldots b_t = 0 \tag{4}$$

对于左侧的任意加括号方式，如果对于某个 i_1、.....、 $i_t < i$，有 $b_j \in Z_{i_j}$ 且 $\sum_{j=1}^{t} i_j \geq c - i + 1$。

引理 7. $Z_i \subset Z_{i-1}$。上中心滤过是中心滤过，因而由 A 的理想构成。对于任意中心滤过 *(3)* 以及任意 i，我们有$A_i \subset Z_i$。

证明。第一个断言之所以成立，仅仅是因为 $c - i + 1 < c - (i - 1) + 1$。

对于第二个，我们假设 $a \in Z_i, b \in Z_j$，并考虑任意乘积 $b_1 b_2 \cdots b_s(ab)b_{s+1} \ldots b_t$，其中 $b_k \in Z_{i_k}$ 且

$$\sum_{k=1}^{t} i_k \geq c - i - j + 1.$$

由于 $b \in Z_j$，由此可得

$$j + \sum_{jk1}^{t} i_k \geq c - i + 1.$$

根据 Z_i 的定义，由 $a \in Z_i$ 可得 $b_1 b_2 \cdots b_s(ab)b_{s+1} \ldots b_t = 0$。因此，根据 Z_{i+j} 的定义，可得 $ab \in Z_{i+j}$。于是， $Z_i Z_j \subset Z_{i+j}$。

现在若 $a \in A_i$，则由归纳法以及中心滤过 (3) 的定义可知，只要 $\sum_{j=1}^{t} i_j \geq c - i + 1$，所有乘积 (4) 都是 A_{c+1} 的元素。因此我们有 $a \in Z_i$，从而证明了该引理的最后一个断言。 □

我们得出结论：如果 A 有一个有限的中心滤过并达到 $\{0\}$，那么由引理 6 和 7 可知， A 中的下中心滤过与上中心滤过的长度相同。这些长度称为 A的幂零类。

根据幂列的归纳定义， A^i 是 A 中 i 个元素的所有乘积（采用任意括号方式）的线性张成。因此，所有满足 $A^{c+1} = \{0\}$ 的代数构成簇 $\mathfrak{N}_c$，它由所有左端采用任意括号方式的恒等式 $x_1 x_2 \ldots x_{c+1} =0$定义。特别地， $\mathfrak{N}_1$ 由所有零乘积代数组成。

考虑代数 A的递增湮灭子列，我们还会遇到另一种定义：

$$\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \tag{5}$$

其中，对于任意 $i > 0$，子空间 A_i/A_{i-1} 属于 A/A_{i-1}的湮灭子。利用归纳法，我们很容易证明每个 A_i 都是 A的理想。特别地，这对于上湮灭子列 $\{I_i\}$ 也成立，其中 $I_1 = \{a \in A \mid ab = ba =0 \ \ \forall b \in A\}$ 是 A 的湮灭子 $I(A)$，而 I_j 是 A 中 A/I_{j-1}的湮灭子 I_j/I_{j-1} 的完整原像。对 i作归纳，并以平凡的基 $j = 0$为基础，我们总有 $A_j \subset I_j$，对任意 $j \geq 0$均如此。事实上，如果已有 $A_{j-1} \subset I_{j-1}$，由于 $A_j/A_{j-1} \subset I(A/A_{j-1})$，可知$(A_j + I_{j-1})/I_{j-1}$ 零化 A/I_{j-1}，因此 $A_j \subset I_j$。

为了定义任意代数 A 的下湮灭子列，我们先定义任意非结合单项式的深度。我们将深度 0 赋予

单项式 x_i，并称单项式 uv 的深度等于 u、v 的深度的最大值加 1。例如，$(x_1x_2)(x_3x_4)$ 的深度等于 2。我们将子空间 $A(i)$ 定义为 A 中所有深度为 i 的单项式取值的线性张成。例如，$A(0) = A$，$A(1) = A^2$。

为了将此列与任意湮灭子列进行比较，我们按相反顺序列出任意下降湮灭子列的各项：

$$A = A'_0 \supset A'_1 \supset A'_2 \supset \dots \tag{6}$$

其中，对每个 $i > 0$，理想 A'_{i-1}/A'_i 都属于 A/A'_i 的湮灭子。

引理 8. 对任意 $i > 0$，都有 $A(i) \subset A(i-1)$，下降列 $A(i)$ 是一个湮灭子列。特别地，它的所有项都是理想。对任意湮灭子列 *(6)*，都有 $A(i) \subset A'_i$。

证明。由深度的定义，通过归纳法可知，任意深度为 i 的单项式都是某个深度为 $i-1$ 的其他单项式的取值。因此，第一个断言得证。由于乘积 $AA(i-1)$ 和 $A(i-1)A$ 是某些深度为 i 的单项式的线性张成，故这些乘积属于 $A(i)$，从而证明下湮灭子列确实是一个湮灭子列。还需注意，$A(i)$ 是单项式 uv 在 A 中的取值的线性张成，其中某个 u，v，不妨设为 u，其深度为 $\geq i-1$。因此我们可以假设 $u \in A(i-1)$。现在，由归纳法可得 $A(i-1) \subset A'_{i-1}$，于是 uv 的取值是 $A'_{i-1}A \subset A'_i$ 的一个元素。最后，我们有 $A(i) \subset A'_i$。 □

因此，我们得到：如果一个湮灭子列 (6) 是有限的，并且到达 $\{0\}$，即对某个 d 有 $A'_d = \{0\}$，那么上、下湮灭子列的长度都至多为 d，也就是说，它们长度相同。我们将这个长度称为 A 的幂零深度。

由引理 8 可知，深度为 $\leq d$ 的代数组成一个簇 $\mathfrak{N}(d)$，该簇由恒等式 $w = 0$ 给出，其中 w 为次数 $d+1$、深度 d 的所有多线性单项式。事实上，任何深度为 d 的单项式，都可由一个以 $d+1$ 个变量表示、深度为 d 的多线性单项式，通过适当地以非结合单项式替换变量而得到。当 $d = 0$ 时，这种替换是平凡的。此外，若 $w = uv$，其中 w 的深度为 d，并且例如 u 的深度为 $d-1$，也就是说，对于 u，则在 x_1 中次数为 d、深度为 $d-1$ 的单项式，……，x_d里的替换由此给出；然后，我们在单项式 $(x_1 \cdots x_d)x_{d+1}$ 中补上替换 $x_{d+1} \mapsto v$。

命题 4. (i) 如果代数 A 的幂零类为 c，那么它的幂零深度为 $d \leq c$。

(ii) 如果代数 A 的幂零深度为 c，那么它的幂零类为 $c \leq 2^{d-1} + 1$。

证明。(i) 每个深度为 d 的单项式，其次数都至少为 $c+1$，因此在每个幂零类为 c 的代数中都只取零值。所以，根据上述对定义簇 $\mathcal{N}_c$ 和 $\mathcal{N}(d)$ 的恒等式的描述，第一个结论成立。

(ii) 通过归纳法论证，我们可以假设所有次数至少为 $2^{d-2}+1$ 的乘积都属于 $I_1(A)$。但这样一来，在任意长度为 $2^{d-1}+1$ 的乘积 uv 中，u，v之一的次数至少为 $2^{d-2}+1$，因此由归纳假设，它属于 $I_1(A)$。于是 $uv=0$，正如所需。因此，A 的幂零类至多为 $2^{d-1}+1$。 □

现在我们可以为便于引用，表述如下

命题5。 设 A 是域 **F**上的一个代数。以下性质等价。

(i) A 有一个中心列 $A=A_1\geq A_2\geq\cdots\geq A_{c+1}=\{0\}$，其中某个 $c\geq 1$ 满足该性质；(ii) </style}某个 满足；(iii) A 属于簇 $\mathcal{N}_c$，其中某个 c满足该性质；(iv) A 有一个湮灭子列 $\{0\}=A_0\subset\cdots\subset A_d=A$，其中某个 $d\geq 0$满足该性质；(v) A 属于簇 $\mathcal{N}(d)$，其中某个 $d>0$满足该性质。

根据这条命题，我们可以将代数定义为幂零，当且仅当它具有性质 (i)–(v) 之一。代数簇 $\mathfrak{V}$ 称为幂零簇，如果其中每个代数 $A\in\mathfrak{V}$ 都是幂零的。幂零簇中代数的幂零类（深度）有上界，因为如果存在一个无穷级数 A_i，其中的代数属于 $\mathfrak{V}$ 且其类（深度）无界，那么它们的笛卡尔积就不是幂零的；然而该积属于簇 $\mathfrak{V}$，从而导致矛盾。因此，使 $\mathfrak{V}$ 包含一个幂零类为 c（幂零深度为 d）的代数的最大 c（分别为 d），称为簇$\mathfrak{V}$的幂零类（幂零深度）。

注1. 如果分别将结合律加入定义簇$\mathfrak{N}_c$ 和 $\mathfrak{N}(c)$的恒等式中，那么我们将得到等价的恒等式系统，也就是说，它们定义了同一个簇。因此，结合幂零代数的类和深度相等。幂零李代数也具有相同的结论。

在下面的引理中，我们给出了一些在论述代数的过程中始终会用到的简单性质。

引理9. 以下结论对域**F**上的任意代数 A都成立。

(i) 如果 A 是幂零的，那么湮灭子 $I(A)$ 与 A的任意非平凡理想 J 的交均非平凡。(ii) 如果理想 J 属于 A 的湮灭子 $I(A)$，且 A/J 是幂零的，那么 A 也是幂零的

证明。 (i) 若 J 中有一个元素 a 不属于 $I(A)$，则对某个$b\in A$，要么 $ab\in J\backslash\{0\}$，要么 $ba\in J\backslash\{0\}$。在第一种情况下，若 $ab\in I(A)$，则结论成立。否则，我们可以找到一个元素 $c\in A$，使得要么 $(ab)c\in J\backslash\{0\}$，要么 $c(ab)\in J\backslash\{0\}$。由于命题5(ii)表明非零

乘积中的因子数有上界，反复应用这一论证，我们便得到交 $J \cap I(A)$ 中的一个非零元素。

(ii) 由于因子代数 A/J 具有有限的湮灭子列 $J/J \subset J_1/J \subset$.....，代数 A 具有有限的湮灭子列 $\{0\} \subset J \subset J_1 \subset \ldots$。因此，根据命题5 (iv)，$A$是幂零的。

□

2.2 子理想。 代数 A 的子代数 B 称为一个子理想，如果存在一个子代数列 $B = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_s = A$，使得对所有 $i = 1$，....., s，每个 B_{i-1} 都是 B_i的理想。所有此类数列（称为子理想列）的最小长度 s 称为 B的子理想深度。深度为1的子理想显然就是通常的理想。

幂零簇的一种刻画如下。

定理 1。 域上的代数簇 $\mathfrak{V}$ 是幂零的，当且仅当任意代数 $A \in \mathfrak{V}$ 的每个子代数 B 都是 A的子理想。

证明。设簇 $\mathfrak{V}$ 是幂零的， $A \in \mathfrak{V}$，且 B 是 A 的子代数。若代数 A 的幂零深度为 d，并且 $\{0\} \subset I_1 \subset \cdots \subset I_d = A$ 是 A 中的湮灭子列，则以下是一个子理想列:

$$B \subset B + I_1 \subset B + I_2 \subset \cdots \subset B + I_d = A.$$

为证明反向断言，考虑一个 $\mathfrak{V}$-自由代数 $F = F_{\mathfrak{V}}(y, x_1, x_2, x_3, \ldots)$，并选取一个子代数 $G = F_{\mathfrak{V}}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$。假设存在一个子理想列

$$G = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_k = F,$$

现在令 w 为深度 d 的任意单项式，其中每个生成元至多出现一次。若能证明对于 $d = k$， w 在 F 中为零，那么根据命题 5 (v)，即可证明 F 和 $\mathfrak{V}$ 的幂零性。

我们对深度 d 使用归纳法，证明在一个依赖于 x_1， x_2，. . . 、深度为 d 的单项式 w 中，可以将变量 x_i 之一替换为 y，使所得的值属于 G_{k-d}。由于当 $d = 1$ 时， G_{k-1} 是 F 的理想，且 $w = x_1x_2$，因此可得 $yx_2 \in G_{k-1}$。接着令 $w = uv$，并设 u 的深度为 $d-1$，于是可以将 u 中的一个变量替换为 y，从而得到 G_{k-d+1}的一个元素。由于 $v \in G$ 且 G_{k-d} 是 G_{k-d+1}的理想，经过这次替换后， $w = uv$ 的值将属于 G_{k-d}。因此，经过一次替换 $x_i \mapsto y$ 后，每个生成元至多出现一次的任意深度为 k 的多项式 w，都成为 G 的一个元素 v。

一方面，对于任意代换 $y \mapsto 0$，相应的同态会零化 v；另一方面，如果一个同态在 G 上是恒等映射，那么 v 应映入其自身，因为 $v \in G$。因此， $v = 0$ 属于 F。由于 w 是 v 的自同构像，根据引理 2，我们有 $w = 0$ 属于 $\mathfrak{V}$，这正是我们想要的结果。

□

注 2. 如定理 证明的第一部分所述，幂零深度为 d 的代数 A 的子代数是深度至多为 d 的A 的子理想

1. 第二部分表明，若存在某个常数 k，使得在簇 $\mathfrak{V}$的每个有限生成代数中，任意子代数都是深度至多为 k 的子理想，那么该簇就是幂零的。只需考虑以 x_1、..... x_{2^k}， y为自由生成元的 $\mathfrak{V}$-自由代数，来代替 F。

定理 1 的局部 版本如下。

定理 2. 局部有限簇$\mathfrak{V}$ 中的任意有限代数 A 的每个子代数 B 都是 A 的子理想，当且仅当 $\mathfrak{V}$ 是局部幂零的。

证明。 “若”部分由注 2 得出。对于“仅若”部分，只需证明：给定一个有限非幂零代数 $A \in \mathfrak{V}$，存在一个包含子代数 B 的有限代数 $C \in \mathfrak{V}$，使得该子代数不是 C的子理想。根据引理9 (ii)，可以假设 A 的所有真因子代数都是幂零的，并且 $I(A) = \{0\}$ 。

设 M 是 A的一个极小理想。因此 $AM \neq \{0\}$ （或 $MA \neq \{0\}$），也就是说，存在 $a \in A$ 和 $m \in M$ 使得 $am \neq 0$。

设 $P = A_1 \times A_2$ 是两个 A 副本的直积，其中包含由 M的两个副本 M_1 和 M_2 构成的直积 N。记 $B = \{(a,\ a) \mid a \in A\}$为 P的对角线，并令 $C = B + N$。那么 B 不是 C 的理想，因为$BM_1 = (AM,\ \{0\}) \not\subset B$。

由于 $B+M_1 = C$，任何严格包含 B 的 C 的子代数 D 都必须包含一个非零的 $(m_1,0) \in M_1$。于是 D 必须包含整个 M_1，因为 M_1 是 A_1 的极小理想，而且 M_1 中的元素与元素 $a \in A_1$ 相乘所得的结果，与它们和对角元素 (a, a) 相乘所得的结果相同。在这种情况下，$D = C$，因此 B 和 C 之间不存在严格夹置的子代数。因此， B 不是 C 的子理想。由于 C 是有限的且 $C \in \mathfrak{V}$，我们得到了所需的反例。

□

2.3 幂零性的其他判据。 我们从幂零簇的代数中的湮灭子开始。

定理 3. 域上的代数簇 $\mathfrak{V}$ 是幂零的，当且仅当每个非零代数 $A \in \mathfrak{V}$ 的湮灭子都非零。

证明。 “只有当”部分由命题5 (iv) 得出。

为证明“如果”部分，我们假设簇 $\mathfrak{V}$不是幂零的。接下来将用到这样一个事实：任何幂零代数簇都有有限恒等式基[35]。因此，簇$\mathfrak{V}$ 的幂零子簇的恒等式理想，不可能是无限递增的词理想链在无限秩 $\mathfrak{V}$-自由代数 $F(\mathfrak{V})$ 中的真并。利用佐恩引理以及 $\mathfrak{V}$的子簇与$F(\mathfrak{V})$的词理想之间的伽罗瓦型对应，我们得出结论： $\mathfrak{V}$ 中存在一个非幂零子簇 $\mathfrak{U}$，其所有真子簇都是幂零的。

现设 $F = F(\mathfrak{U})$ 为 $\mathfrak{U}$ 中的可数秩自由代数。湮灭子$I = I(F)$是全不变的，因而它是 $\mathfrak{U}$ 的子簇 $\mathfrak{W}$ 的恒等式理想（见 [4, 命题 1]），并且若 $I \neq \{0\}$，则子簇 $\mathfrak{W}$ 在 $\mathfrak{U}$ 中是真子簇，因此它是幂零的。此外，因子代数 F/I 在 $\mathfrak{W}$ 中是自由的，因而也是幂零的。但这样一来

由引理9， F 也是幂零的，矛盾。因此 $I=\{0\}$，从而 F 即为所需的反例。 □

定理4。 设 $\mathfrak{V}$ 是一个局部有限代数簇。则以下性质等价。

(i) 簇 $\mathfrak{V}$ 是局部幂零的；

(ii) 对于任意有限秩的 $\mathfrak{V}$-自由代数 F，任意模 F^2 线性无关的元素集 Y 都是 F 的自由生成集。

证明。 (i)→ (ii) 这是任意域上的相对自由幂零代数的一个众所周知的性质，由 A.I. Malcev 证明（见 [25]中的定理1和定理2）。

(ii)→(i) 反证，设存在一个非幂零的 $F=F_n(\mathfrak{V})$。接下来我们将构造一个真子代数 H，使得 $F=H+F^2$，因此，模 F^2 的 H 的一组基将是一个非生成集，但它模 F^2 生成F。

由于 $\mathfrak{V}$不是局部幂零的， $\mathfrak{V}$中存在一个阶极小的非幂零有限代数。设 M 是 A 的一个极小理想。则 $B=A/M$ 是幂零的。由于 A 是非幂零的，根据引理9(ii)， M 不零化 A。现在我们使用定理2证明中的构造。具体而言，如该证明中所述，设 $P=A_1\times A_2$ 为 A 的两个副本的直积，其中包含由 M_1和 M_2的两个副本构成的直积 N，它们是 M的副本 $B=\{(a,\ a)\mid a\in A\}$ 为P、 $C=B+N$的对角线。我们有 $BM_1\neq\{0\}$，且 M_1是 C中的一个极小理想。

由于 $BM_1\subset C^2\cap M_1$，后一个交不为零。因此我们有$C^2\cap M_1=M_1$，因为 M_1 是 C的极小理想，从而 $M_1\subset C^2$。上述一切对 M_2同样成立。由此可得 $N\subset C^2$。这一最新的包含关系以及严格包含 $B\subset C$ 可如下使用。

选取一个 $\mathfrak{V}$-自由代数 F，使得存在满同态 $\varphi:\ F\to C$。用 H 表示 B 在 φ 下的完全原像，用 K 表示 N在 φ下的完全原像。则 $F=H+K$。由于 $N\subset C^2=\varphi(F^2)$，由此可得$K\subset H+F^2$。因此 $F=H+K\subset H+K+F^2=H+F^2$，而这正是所需的，因为 $H\neq F$。 □

2.4 有限相对自由幂零代数的剩余性质。本小节将展示有限幂零代数的另一个特征。

设 $\mathcal{S}$ 是一个代数集合。若代数 B 满足：对于每个非零元 $b\in B$ 以及某个代数 $S\in\mathcal{S}$，都存在一个满同态$\varphi:\ B\to S$，使得 $\varphi(b)\neq 0$，则称 B 是中的残余代数。若 $\mathcal{S}=\{A\}$ 且 B 是 $\mathcal{S}$中的残余代数，则称 B 是残余的 A。

设一个 m维代数 A 是类为 c 的幂零代数，并且具有一个中心列，即旗 $A=A_0\supset A_1\supset\ldots\supset A_m=\{0\}$，它是幂列 $A\supset A^2\supset A^3\supset\cdots$的细化。设 $E=(e_1,\ \ldots,\ e_m)$ 是 A 的一组基，与该旗相容，也就是说，对所有 $i\geq 1$，都有 $e_i\in A_{i-1}$。

群论中有一个与下述引理类似的结果，但其证明更为复杂。

引理 10. 设 $p = p(x_1, \ldots, x_k)$ 是一个非结合多项式。那么，当 $y_1, \ldots, y_k \in A$ 时，其取值 $p(y_1, \ldots, y_k)$ 的第 j 个坐标是一个多项式函数 f_j，其次数为 $\leq c$，且在基 E 下，关于向量 $y_1, \ldots, y_k$ 的坐标具有零常数项。这里 $j = 1, \ldots, m$。

证明。我们给每个 e_i 赋予权 $\mathrm{wt}\, e_j = s$，如果 $e_j \in A^s \backslash A^{s+1}$。由于对于任意 A^k，基 E 的一部分是 A^k的基，若 $\mathrm{wt}\, e_j = s$ 且 $\mathrm{wt}\, e_k = t$，那么

$$e_j e_k = \sum_\ell c_{jk}^\ell e_\ell \text{ where } c_{jk}^\ell = 0 \text{ if } \mathrm{wt}\, e_\ell < s + t.$$

为证明起见，我们可以假设 p是 x_1、.....、 x_k中的一个单项式。我们将对 p 的次数使用归纳法来证明一个更强的断言，即若 e_j 的权等于 s，则 f_j 的次数为 $\leq s$。如果 $\deg p = 1$，那么该断言显然成立，因为此时函数 f_j 的值等于y_1的第 j 个坐标。

现在假设 $p = uv$，并且我们已经证明，对于次数较低的单项式u、 v， u 的值可以写成 $S_1 = \sum_j \lambda_j e_j$，其中$\lambda_j$是关于 y_1、.....、 y_k的坐标的多项式，且每个多项式 λ_j 的次数至多为 e_j的权。类似地， v 的值由总和 $S_2 = \sum_\ell \mu_\ell e_\ell$ 给出。

将这些和式中的两个直和项 $\lambda_j e_j$ 和 $\mu_\ell e_\ell$ 相乘，其中 $\mathrm{wt}\, e_j =s$，$\mathrm{wt}\, e_\ell = t$，得到 $\lambda_j \mu_l \sum_p c_{jl}^p e_p$。其中，系数非零的向量 e_p 只有那些权至少为 $\mathrm{wt}\, e_j + \mathrm{wt}\, e_\ell = s + t$的向量。同时，它们的系数次数不超过 $\deg\ \lambda_j + \deg\ \mu_\ell \leq s + t$。考虑乘积 $S_1 S_2$时，系数次数也有类似的限制。证明完毕。

□

我们还需要下面这个引理。

引理 11. 设 A 是域$\mathbf{F}$上的一个幂零类为 c 的 m维代数， $|\mathbf{F}| = q$。假设非结合多项式 $p = p(x_1, \ldots, x_k)$ 在对 A进行某次赋值后取值为 $b \in A$。若 $k \geq m(c + 1)$，则存在一个由元素 $a_1, \ldots, a_k \in A$ 构成的生成集，使得 $p(a_1, \ldots, a_k) = b$。

证明。 假设 $p(c_1, \ldots, c_k) = b$，其中 $c_1, \ldots, c_k \in A$。我们定义函数$f(y_1, \ldots, y_k) = p(c_1 + y_1, \ldots, c_k + y_k) - p(c_1, \ldots, c_k)$，它从 A 的 k 次直积幂映射到 A；显然， $f(0, \ldots, 0) = 0$。方程组的所有解

$$f(y_1, \ldots, y_k) = 0$$

在 E 中的坐标可用以下方式表示。请记住，右端的 0 有 m 个坐标。根据引理 10，向量 $y_1, \ldots, y_k$ 在 km 个坐标中的解可描述为方程组 $p_j = 0$ 的解，该方程组包含 m 个代数方程，其中每个 p_j 都是次数至多为 c 的普通（结合且交换）多项式。由于 km 的零点集是该方程组的解，因此每个 p_j 的常数项均为 0。

所有这些多项式的次数之和 d 不超过 cm。根据 Warning 第二定理 [36], ，该方程组的解的数量至少为

$q^{km-d} \geq q^{m(k-c)}$。由此可知， p 对至少 $q^{m(k-c)}$ 个形如 $c_1 + y_1, \ldots, c_k + y_k$ 的向量组 $a_1, \ldots, a_k$ 取值 b，其中 $f(y_1, \ldots, y_k) = 0$。

因此，只需验证 $q^{m(k-c)}$ 大于元素 y_1、.....、 y_k 中不能生成 A 的有序子集的数量，证明便告完成。每个这样的子集都包含在向量空间 A 的一个维数为 $(m-1)$ 的子空间中。这些子集的数量等于 $q^{k(m-1)}$，而子空间的数量小于 q^m。因此，不能生成 A 的子集数量小于 q^{km-k+m}。由于 $k \geq m(c+1)$，最终得到 $m(k-c) \geq km-k+m$。证明完成。

□

定理 5. 若 A 是有限幂零代数，则所有秩为$n \geq m(c+1)$ 的自由代数 F_n 在 $\operatorname{var} A$ 中都是 ***residually-A*** 代数。这里 $m =$维数 A，且 c 是 A 的幂零类。

证明。假设 $p(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ 在代数 $F_n = F(x_1, \ldots, x_n)$ 中。由于 A 生成 var A，因此 $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 不是代数 A 的恒等式。因此，存在元素 a_1'、.....、 $a_n' \in A$，使得 $b = p(a_1', \ldots, a_n') \neq 0$。由引理 11，存在生成 A 的元素 a_1、.....、 a_n，使得 $b = p(a_1, \ldots, a_n)$。于是，映射 $x_1 \mapsto a_1$、.....、 $x_n \mapsto a_n$ 可扩张为满同态 $\varphi\colon F_n \to A$，使得 $\varphi(p(x_1, \ldots, x_n)) = p(a_1, \ldots, a_n) = b \neq 0$。因此，$F_n$ 是 residually-A 代数。

□

3 局部有限簇中的有限代数

3.1 Birkhoff 构造。 下面是基本 Birkhoff 定理 [7]的有限版本。

设 $\mathfrak{V}$ 是由有限域F上的有限代数 A生成的一个簇。给定有限集 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，我们将直积幂 A^X的子集 Φ 定义为从 X 到 A的非零函数集合。显然， $|\Phi| = |A|^n - 1$。我们考虑 $|\Phi|$ 个 A的笛卡尔积 B 。将B 视为定义在 Φ上、取值于 A的函数集合是很方便的。 f、 $g \in B$的“逐分量”乘积fg 由 $(fg)(\varphi) = f(\varphi)\, g(\varphi)$ 给出，其中 $\varphi \in \Phi$。我们将B 称为 A的第 n 个 Birkhoff 代数，记作 $\mathcal{B}_n(A)$。称 B 在基域F上的维数$\beta_A(n)$ 为 A的 Birkhoff 函数。我们有$\beta_A(n) = (\dim A)(|A|^n - 1)$。

对于每个 $x \in X$，函数 $\bar{x} \in B$ 由 $\bar{x}(\alpha) = \alpha(x)$ 定义，其中所有 $\alpha \in \Phi$ 均成立。于是，由 $\iota(x) = \bar{x}$ 给出的映射 $\iota\colon F(\mathfrak{V}, X) \to B$ 是 $F = F(\mathfrak{V}, X) \to B$ 的一个同态。实际上，这是一个单态。确实，若 $x_1, \ldots, x_n \in X$ 且 $w(x_1, \ldots, x_n) \in$ 属于核 ι，那么对于任意非零函数 $\varphi\colon \{x_1, \ldots, x_n\} \to A$，我们都有

$$\iota(w(x_1, \ldots, x_n))(\varphi) = w(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 0,$$

这意味着 $w(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 是 A中的恒等式，因此 $w(x_1, \ldots, x_n)$ 是 F的零元。我们可以将上述论证的结论重述如下。

定理 6. [Birkhoff] 设 $\mathfrak{V} =$ 簇 A 是一个有限生成簇，其中 A是一个有限代数。那么，秩为 n 的自由 $\mathfrak{V}$-代数 $F_n = F(x_1, \ldots, x_n, \mathfrak{V})$ 同构于 A的 ***Birkhoff*** 代数 $\mathcal{B}_n(A)$ 的一个子代数。因此，维数 $F_n \leq \beta_A(n)$，或者 $|F_n| \leq |A|^{|A|^n-1}$。对于任意 n生成的代数 $C \in$ 簇 A，同样的估计也成立：

$$\dim C \leq (\dim A)(|A|^n - 1) \text{ or } |C| \leq |A|^{|A|^n-1}. \tag{7}$$

证明。（7）中的第一个不等式成立，是因为 C 是 F_n的因子代数，因此

$$\dim C \leq \dim F_n \leq \beta_A(n) = (\dim A)(|A|^n - 1).$$

如果$\mathbf{F} = q$，那么

$$|C| = q^{\dim C} \leq q^{(\dim A)(|A|^n-1)} = (q^{\dim A})^{|A|^n-1} \leq |A|^{|A|^n-1},$$

如所述。 □

推论 1。 设 $\mathfrak{V}$ 是由有限代数 A生成的簇。那么，任意代数 $B \in \mathfrak{V}$ 中主因子（合成因子）的阶都不超过代数 A的主因子（分别为合成因子）的阶的最大值。

证明。 对这些代数应用 Jordan–H¨older 定理，首先可知，当 B 是 A的直积幂时，结论成立；其次，结论对直积幂的子代数也成立，因此根据定理 6，结论对有限秩的 $\mathfrak{V}$-自由代数成立；最后，结论也传递到它们的因子代数，从而完成证明。

□

注 3。 在许多情况下，可以改进双指数 估计 $|F_n| \leq |A|^{|A|^n-1}$。早在 1937 年，B. H. Neumann 就在一篇论文中注意到了这一点 [30]。

为了看出这一点，我们用同一字母表示 $\lambda \in \Phi$ 到 F_n 的扩张，并对每个 λ 考虑子代数 $A_\lambda = \lambda(F_n) \subset A$。于是，像 $\iota(F_n)$中的每个函数都属于维数为

$$\sum_{\lambda \in \Phi} \dim A_\lambda \leq (|A|^n - 1) \dim A \leq \beta_A(n). \tag{8}$$

由此可见，若代数 A 具有真的非零子代数，则(8)中的第一个不等式是严格的，并且 $F_n(\mathfrak{V})$的维数 $d(n)$以一个严格小于Birkhoff函数的函数为上界。

我们将在定理 17 中更详细地讨论这个问题。

3.2 包络代数与簇。对于域$\mathbf{F}$上的每个代数 A，都可以关联三个作用于 A 的线性算子代数。

代数 $U_L(A)$ 是 $\mathsf{End}_{\mathbf{F}}\, A$ 中的一个子代数，由元素 $a \in A$的左乘法算子$L(a)$生成。同样，$U_R(A)$ 是 $\mathsf{End}_{\mathbf{F}}\, A$ 中的一个子代数，由元素 $a \in A$的右乘法算子 $R(a)$生成。最后，$U(A)$ 是 $\mathsf{End}\ A$中的一个子代数，由所有左乘法和右乘法算子 $L(a)$ $R(a)$生成。我们将 $U_L(A)$、$U_R(A)$ 和 $U(A)$ 分别称为 A的左、右和（双边）结合包络。

考虑到注记1，我们给出以下命题，它用结合包络代数来定义非结合代数的幂零性。

命题 6。代数 A 的深度为 $d \geq 1$ 且为幂零，当且仅当结合代数 $U(A)$ 的类为 $d-1$且为幂零。

证明。设 A 是深度为 d的幂零代数。根据命题5 (iv)，存在一个消灭子列 $\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{d-1} \subset A_d = A$。根据该列的定义，若 $a \in A$ 且 $b \in A_i$，$i \geq 1$，则 $L(a)(b)$和 $R(a)(b)$属于 A_{i-1}。因此，将算子 $L(a)$和 $R(a)$替换为 $U(A)$中的任意元素时，结论仍然成立。于是，通过归纳法，$U(A)$中任意 d个元素的乘积都为零，因此 $U(A)$是幂零类至多为 $d-1$的结合代数。

现在假设 $U(A)$是幂零类为 $d-1$的幂零代数，我们可以看出，每个次数为 d、深度为 $d-1$ 的单项式 w 在 A中的取值都等于零。事实上，w 在 A中的取值计算可以解释为连续应用 $d-1$ 个左乘法和右乘法算子，因此 $A \in \mathfrak{N}(d)$。

□

给定一个局部有限代数簇 $\mathfrak{V}$，可以考虑由有限代数 $A \in \mathfrak{V}$ 的所有左、右和双边结合包络分别生成的三个结合代数簇 $\mathfrak{M}_L(\mathfrak{V})$、$\mathfrak{M}_R(\mathfrak{V})$ 和 $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$。

命题 7. 若 A 是有限代数，则簇 $\mathfrak{M}(\operatorname{var} A)$ 由有限结合代数 $U(A)$生成。

证明。设 I 是代数 A的一个理想。显然，I 在 $U(A)$ 的作用下保持不变。因此，$\varphi \in U$ 通过 $\varphi(a+I) = \varphi(a) + I$ 自然作用于 A/I。由此得到自然映射 $U(A) \to U(A/I)$，该映射是满同态。

现在，若 B 是 A 的子代数，则元素 $R(b)$、$L(b)$、$b \in B$ 生成 $U(A)$ 的一个子代数 U'，该子代数使 B 保持不变。限制同态将 U' 映到 $U(B)$。因此，$U(B) \in$ 的簇为 $U(A)$。

若 $B = C \times D$，则存在两个限制满同态，分别从 $U(B)$ 映到 $U(C)$ 和 $U(D)$。它们的核的交是平凡的。因此，$U(B)$ 同构于 $U(C)$ 与 $U(D)$ 的直积。

根据 Birkhoff 定理 6，任意有限代数 $B \in \operatorname{var} A$ 都可以通过对 A 使用取子群、同态像和直积这些 Birkhoff算子得到。因此，由上述内容可知，对于任意有限的 $B \in \operatorname{var} A$，代数 $U(B)$ 可以通过类似运算由 $U(A)$ 得到。因此，$U(B) \in \operatorname{var} U(A)$。

□

注 4。 可以借助 $\mathfrak{V}$中的任意代数（不一定是有限代数）来定义 $\mathfrak{W}$ 。这是因为，如果由元素 a_1、……、 a_s定义的线性算子（例如左乘）的多项式，在局部有限代数 A的 $\mathfrak{V}$中任意有限生成子代数 $\langle a_1$、……、 a_s、……、 $a_t\rangle$ 上都平凡作用，那么它就在 A的整个代数上平凡作用。

3.3 次直积的极小表示。 根据 Birkhoff 定理 6，var A 中的自由代数 F 是代数 A 的某个笛卡尔幂的子代数。因此， F 是一些与 A 的子代数同构的代数的次直积。一个代数族的次直积并非在同构意义下唯一。因此，本小节定义极小 表示，并讨论其性质。

回顾一下，代数 A 的截面是A的子代数的因子代数。代数 A的所有截面，除 $A/\{0\}$ 之外，都称为A的真截面。这里，如果对于每个 $S \in \mathcal{S}$ 以及 S的每个非零截面 T，集合 $\mathcal{S}$ 都包含代数 T的一个同构副本，则称有限非零域上的代数集合 $\mathcal{S}$ 为**F** 截封闭的。如果有限代数 A 同构于一个次直积，其中各因子同构于 $\mathcal{S}$ 中的某些代数，则记作 $A \in \mathsf{sd}(\mathcal{S})$。

如果 A是 S_1，……， S_m的次直积，则我们可以假定 $|S_1| \geq |S_2| \geq \cdots \geq |S_m|$。将 A表示为来自 $\mathcal{S}$的代数S_i的次直积的这种表示称为极小，如果序列（$|S_1|$，$|S_2|$，……，$|S_m|$）关于字典序，与 A 作为类$\mathsf{sd}(\mathcal{S})$的元素的其他此类表示相比是极小的。

为了表述下一个众所周知的命题，我们回顾：代数 S 称为单核的，如果 S 的所有非零理想的交 $M(S)$非零。唯一的极小理想 $M(S)$称为 S的单石。每个代数 S都是 S的单体的因子代数的次直积。因此，如果在 $A \in \mathsf{sd}(\mathcal{S})$的某个表示中某个$S_i$ 不是单体的，即 S_i 是其真因子代数的次直积，则可以为 A选取一个字典序更小的表示。由此我们有

命题 8. 设 $\mathcal{S}$ 是一个有限代数的截面封闭集，并假设有限代数 A 属于类 $sd(S)$。那么，关于 $\mathcal{S}$ 的 A 的极小表示中的所有因子 S_i 都是单石代数。

结合命题 8 与定理 6，我们得到

推论 2. 设 $\mathfrak{V}$ 是有限域 **F** 上的一个代数簇。假设 $\mathfrak{V}$ 由有限代数的有限截面封闭集 $\mathcal{S}$ 生成。那么， $\mathfrak{V}$ 中任意有限秩自由代数都是 $\mathcal{S}$ 中有限多个单石代数的次直积。

我们还将引用极小表示的以下性质。

引理 12。*(*极小表示*)* 设 S 是有限代数的截面封闭集，且有限代数A 关于 $\mathcal{S}$ 具有一个极小表示

$$A \subset P = \prod_{i=1}^{m} S_i, \ such\ that\ |S_1| \geq |S_2| \geq \cdots \geq |S_m|, \tag{9}$$

那么，对所有 $i = 1,\ldots, m$，以下结论成立：

(i) S_i 是单石代数，(ii) A在 S_i 上的投影等于 S_i，(iii) 交 $A \cap S_i$ 是 S_i的一个理想，(iv) 单石 $M(S_i)$ 是 A中的极小理想。

证明。 第一条性质由引理 8 给出。第二条性质由表示式 (9) 的极小性得出，因为因子 S_i 可以替换为 A 在 S_i上的投影。

由于 A 投影到整个 S_i上，元素 $b \in A \cap S_i$与 S_i 中元素的任意乘积，都可以替换为与 A中元素的乘积，因此性质 (iii) 得证。

出于同样的原因，如果 A含有非零元 $b \in S_i$，它就必定包含整个单石 M_i，于是结论成立。否则 $A \cap S_i = \{0\}$，由此可知 A 同构于 A 在 P 的所有因子（除 S_i外）的乘积上的投影，这与表示式 (9) 的极小性矛盾。因此，(iv) 得证。

□

3.4 由有限单代数生成的簇。非零有限代数 A 称为临界的，若它不属于由 A 的所有真截生成的簇。如果 A 不是临界的，那么簇 $\mathsf{var}\, A$ 由 A 的真截生成。因此，任意局部有限簇 $\mathfrak{V}$ 都可以由 $\mathfrak{V}$中的一组临界代数生成。然而，由域上的有限代数生成的簇可以包含无穷多个子簇 [33]。因此，我们提出以下问题

问题 1。由域上的有限代数生成的簇能否包含不可数多个子簇?

临界代数是单体的，因为否则就存在两个交为零的非零理想，而该代数是两个真因子代数的次直积。

以下定理阐明了由有限单代数生成的簇中有限代数的结构。由推论 1 可知，有限单代数是临界的。（此外，若任意两个非零理想的乘积 A 均非零 [2]，则非零有限代数 A 是临界的。）

定理 7. 设 C 是簇 $\mathfrak{V} = \operatorname{var} A$ 中的有限代数，其中 A 是有限单代数。则以下结论成立

(i) C 是两个理想的直和：$C = P \oplus Q$。理想 P 是代数 A 的直积幂（可能为零），而 Q 属于由 A的所有真子代数生成的簇 $\mathfrak{U}$。(ii) 若 $C = F$ 是 $\mathfrak{V}$ 中的秩为 n 的自由代数，则 $F = P \oplus Q$，其中 P 是 A的直积幂，而 Q 是秩为 n 的 $\mathfrak{U}$- 自由代数。

证明。不妨设 $A^2 \neq \{0\}$，否则定理的结论显然成立。我们先证明断言 (ii)。

根据 Birkhoff论证，$F \in$sd(A)，并且可以按照命题 8 选取 F 的一个极小表示。因此，F 是 $P = A_1 \times \cdots \times A_s$的次直积，其中对所有 $i = 1, \ldots, s$，均有 $A_i \cong A$，此外还有 A的若干真截；也就是说，$F \subset K = P \oplus H$，其中 $H \in \mathfrak{U}$。由于单代数的单石就是整个代数，根据引理 12 (iv)，我们有 $P \subset F$。由此可得 $F = P \oplus Q$，其中 $Q = F \cap H \in \mathfrak{U}$。

有限代数的合成因子的阶严格小于 $|A|$，由推论 1 可知。因此，$\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{V}$ 的真子簇，并且代数 $F/\mathfrak{U}(F)$ 是一个秩为 n 的 $\mathfrak{U}$-自由代数。一方面，由于 $Q \in \mathfrak{U}$，我们有 $\mathfrak{U}(F) \subset P$，从而 $\mathfrak{U}(Q) = \{0\}$。与此同时，由于 $A \notin \mathfrak{U}$，我们有 $\mathfrak{U}(A_i)$ 是 A_i 的非零理想。对于每个 i，该理想必等于单代数 A_i 本身，于是 $\mathfrak{U}(F) \geq_{\mathfrak{U}} P = P$。因此，$\mathfrak{U}(F) = P$，且 $Q \cong F/P = F/\mathfrak{U}(F)$ 是一个秩为 n 的 $\mathfrak{U}$-自由代数，正如所要求的那样。

现在证明 (i)。我们应考虑因子代数 $F/I = (P \oplus Q)/I$。根据引理3 (ii)，只需证明任意理想 I 都是 P 的一个理想与 Q 的一个理想的直和。

若对某个 j，有 $A_j I \neq \{0\}$ 或 $I A_j \neq \{0\}$，则交 $I \cap A_j$是 A_j的非零理想，必定等于 A_j，因此 $A_j \subset I$。否则$A_j I = I A_j = \{0\}$，所以 I 到 A_j 的投影必为零，因为 A_j 是具有非零乘法的单代数。由此可得，I 到 P的投影等于交 $I \cap P$。在这种情况下，我们自动得到 I 到 Q 的投影等于 $I \cap Q$，因此 $I = (I \cap P) \oplus (I \cap Q)$，如所求。

□

注 5. 若代数 A 有真非零子代数，则定理 7 (ii) 中的理想Q非零，但在任意同态 $F \to A$ 下，其像均为零，因为 A 是单代数且 $A \notin \mathfrak{U}$。因此，任意有限秩的 (var A)-自由代数都不是残余-A的，这与定理 5 的陈述相反。

注 6. 顺带一提，定理 7 的陈述在 var A 中无限维代数的情形下并不成立。一般而言，任意无限秩相对自由代数 $F = F(x_1, \ldots)$（定义在任意域上）中的有限维理想 I都属于该代数的湮灭子，特别是，其乘积为零。

事实上，可以假设 $I \subset F(x_1, \ldots, x_n)$。由于 I 在线性张成 $\langle x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots \rangle$ 中的右湮灭子具有有限余维数，因此存在元素 $x_{n+1}, \ldots$ 的一个非平凡线性组合，它湮灭 I。该元素可以作为 y_{n+1} 包含在某个形如$\{x_1, \ldots, x_n, y_{n+1}, \ldots\}$的自由生成集中。因此，对于任意 $v(x_1, \ldots, x_n) \in I$，我们得到关系$v(x_1, \ldots, x_n)y_{n+1} = 0$。根据引理 2，该关系必定是 F 中的恒等关系，因此 $IF = \{0\}$。同理， $FI = \{0\}$。

若一个非零代数没有非零真子代数，则称其为极小。显然，每个极小代数都是单的，且有如下推论

推论 3. 域**F** 上的有限代数 A 是极小的，当且仅当 $\operatorname{var} A$ 的每个有限代数 B 都同构于 A 的某个直积幂。

证明。 有限代数 A 的真子代数不同构于 A 的直积幂，这就证明了“若”部分。现在假设 A 是极小的，那么由 A 的真子代数生成的簇 $\mathfrak{U}$ 是平凡的。因此，“仅若”部分由定理 7 (i) 得出。

□

注 7. 若 A 是非零乘积的极小有限代数，则 $\operatorname{var} A$ 中无限秩自由代数 F 不是若干个 A 的副本的直和。事实上，根据注 6 F，它没有非零有限理想，因为根据推论 3， F 的非零有限子代数的湮灭子都是平凡的。

若一个代数簇 $\mathfrak{V}$ 非平凡，且不包含任何真非平凡子簇，则称其为极小的。

推论 4。 局部有限簇 $\mathfrak{V}$ 是极小的，当且仅当它由一个有限极小代数生成。

证明。 设 $\mathfrak{V}$ 由一个有限极小代数 A生成。由于 $\mathfrak{V}$是局部有限的， $\mathfrak{V}$ 的任意非零子簇 $\mathfrak{U}$ 都包含一个非零有限代数 B；根据推论 3，该代数是 A的直积幂，因此 $\mathfrak{U} \supset \operatorname{var} B = \operatorname{var} A = \mathfrak{V}$。所以$\mathfrak{V}$ 没有真非平凡子簇。

反之，设 A 是局部有限簇 $\mathfrak{V}$中维数最小的非零代数。那么，如果 $\mathfrak{V}$ 是极小的，则 A 是极小代数，且 $\operatorname{var} A = \mathfrak{V}$ 。推论得证。

□

上一段的论证表明，每个非零局部有限[1] 簇都包含一个极小簇。然而，我们有

命题 9。 局部有限簇中不同构极小代数的集合是有限的。

证明。 极小代数由任意非零元生成。因此，它是单生成 $\mathfrak{V}$自由代数 F_1的同态像。由于局部有限簇中的单生成代数 F_1 必定有限，这一观察完成了证明。

□

[1]利用佐恩引理，可以去掉“局部有限”这一条件

例 1。 极小代数的首批例子已在第 1.4 小节中给出。它们是一维的。

举一个二维例子，设$\mathbf{F} = \mathbb{Z}_2$ 和 A 是$\mathbf{F}$ 上的代数，其基为（e, f），乘法表为 $ee = f$, $ef = 0$, $fe = e$, $ff = e$。由于（$e + f$）（$e + f$）$= f$，非零元素 a 的平方都不是 a的倍数。因此，A 没有真子代数。

在 [1]中可以找到无穷多个有限极小代数组成的无穷级数。

问题 2. 是否存在极小的无限维代数?

问题 3. 一个局部有限簇能否包含无穷多个两两不同构的有限单代数?

问题 4. 一个无限的局部有限单代数是否有无穷多个两两不同构的有限单截面?

问题 4 的群论版本已有肯定答案，见 [OK]。关于李代数的情形，见 [5]。

3.5 某些自由积的计算。簇 $\mathfrak{V}$ 中两个代数 B 和 C 的自由积是一个代数 $D \in \mathfrak{V}$，存在同态 $\beta : B \to D$ 和 $\gamma : C \to D$，满足以下条件:

(i) D 由子代数 $\beta(B)$ 和 $\gamma(C)$ 生成,

(ii) 对于任意同态 $\beta' : B \to E$ 和 $\gamma' : C \to E$，其中 $E \in \mathfrak{V}$，存在同态 $\delta : D \to E$，使得 $\beta' = \delta\beta$ 和 $\gamma' = \delta\gamma$。

自由积 $D = B * C$ 存在且在同构意义下唯一（[26],第 12 节）。若 B 和 C 是局部有限簇 $\mathfrak{V}$ 中的有限代数，则它是有限的。因此，可以将 $B*C$ 看作 $\mathfrak{V}$ 中由 B 和 C 的两个同构副本生成的最大阶代数。本节中，我们考虑一个在局部有限簇 $\mathfrak{V}$ 中计算自由积的例子。我们可以将 B 和 C 与它们在 D 中的同构像等同起来。

引理13. 设 $\mathfrak{V}$是由单代数 A生成的簇， B 和 C 是代数 A的两个有限直幂。那么， $\mathfrak{V}$ 中的自由积 $D = B * C$ 也是 A的一个直幂。

证明. 根据定理 7 (i)， D 是两个理想 P 和 Q的直和，其中 P 是 A 的直幂，而 Q 属于 var A的一个真子簇 $\mathfrak{U}$。考虑 B 到 Q的投影。如果 B 的一个直因子 $A' \cong A$ 的像非零，那么这个像同构于 A，因为 A 是一个单代数，但这与 $A \notin \mathfrak{U}$矛盾。因此， B 以及 C 都是 P的子代数，且 $Q = \{0\}$，因为 D 由 B 和 C生成。 □

在下面的例中，我们假设有限单代数 A 没有非平凡自同构。显然，这一条件具有局限性。然而，我们将在第6节中证明，有限域上几乎每一个 n维非结合代数都是单的，并且具有平凡自同构群。

命题10. 设 A 是没有非平凡自同构的有限单代数，且 $A^2 \neq \{0\}$。假设代数 B（代数 C）同构于 A的 k 个（相应地， ℓ个）副本的乘积。则 $\mathfrak{V} =$ 簇 A 中的自由积 $D = B * C$同构于$(k+1)(\ell+1) - 1$ 个A副本的直积。

证明。我们可以将 B写成 $A(1) \oplus \cdots \oplus A(k)$，其中 $A(i) \cong A$ 对于 $i = 1$、.....、k 成立；根据引理13，我们有类似的分解 $D = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$。根据引理 5，集合 $J = \{1, \ldots, t\}$ 存在两两不交的子集 J_1、.....、 J_k，使得 $A(i)$ 是和 $\sum_{j \in J_i} A_j$的对角线 Δ_i 。因此，集合 J 可划分为 $k+1$ 个子集 J_0、J_1、.....、J_k，其中 J_0 是 J中所有其他子集 J_i 的补集。因此， B 中的任意元素在 A_m上的投影为零，若 $m \in J_0$。

由 D的子代数 C定义类似的划分 $J = J'_0 \cup \ldots \cup J'_\ell$。令$J_{ii'} = J_i \cap J'_{i'}$。在这种情况下，来自 B 或 C 的任意元素在和 $\sum_{s \in J_{ii'}} A_j$ 上的投影都属于该和的对角线 $\Delta_{ii'}$ 。这里我们用到了一个简单事实：不含非平凡自同构的代数的直积幂有唯一对角线。

因此，所有不交子集 $J_{ii'}$ 所对应的对角线 $\Delta_{ii'}$ 之和同时包含B 和 C，故等于整个 D。此外，子集 J_{00} 为空，因为B 和 C 生成了 D。其他一些子集 $J_{ii'}$ 也可能为空，但无论如何，子代数 $\Delta_{ii'} \cong A$ 的数量至多等于满足（i， i'）$\neq$ (0，0)的子集 $J_{ii'}$的数量，因此 $t \leq (k+1)(l+1) - 1$。

要得到反向不等式，只需构造一个属于 var A 的代数，它由代数 B 和 C 的像生成，且维数为（$k\ell + k + \ell$）$\dim A$。我们前面的论证提示了以下方法。将代数 A 的副本 $A_{ii'}$用两个指数编号： $i = 0, \ldots, k$， $i' = 0, \ldots, \ell$， （i，i'）$\neq$(0，0)，并考虑它们的直和 D。

我们将 B 的每个直和项 $A(i)$ 同构地映射到和 $A_{i0} \oplus \cdots \oplus A_{il}$ 的对角线上，其中 ($i = 1$，...，k)。显然，这些映射都可以扩张为单态 $B \to D$。将 C 的直和项映射到和 $A_{0j} \oplus \cdots \oplus A_{kj}$ 的对角线上，可得嵌入 $C \to D$。

对于 $i \neq 0$、 $j \neq 0$ ，这两个“正交”对角线的乘积为 $A_{ij}^2 = A_{ij}$ ，因为 A_{ij} 是具有非零乘法的单代数。因此，对于 i， $j \neq 0$，我们有 $A_{ij} \subset D$。和 $A_{i0} + \cdots + A_{il}$ 的对角线对于 $i = 1$，...，k 也属于 $B \subset D$。同理，我们得到 D 中的 $A_{0j} + \cdots + A_{kj}$ 条对角线 ℓ。因此， D 至少包含 $kl + k + l$ 个与 A 同构的直和项，故 $t \geq (k+1)(l+1) - 1$，得证。

□

证明的第二部分给出了自由积 $B * C$ 的构造。根据归纳法，我们有

推论5。如果 B_1、.....、B_s 分别是由命题*10*中的代数 A 的 k_1、.....、k_s 个副本构成的直和，那么自由积 $B_1 * \cdots * B_s$ 是 $t = (k_1 + 1)\ldots\ldots(k_s + 1) - 1$ 个 A 的直和。

换言之，我们得到了由子代数 B_1、.....、 B_s 生成的该簇中任意代数维数的精确上界。

例2. 例如，在任意代数 $B \in \mathsf{var}\, A$ 中，命题10中的代数 A 的两个副本无法生成大于 $A \times A \times A$ 的子代数。

另一个例子是例 1 中的一个二维代数。只需验证该代数没有非平凡自同构。

此外，设 B 是一个满足以下恒等式的代数

$$xy = yx,\ (xy)z = x(yz),\ \text{and } x^q = x \text{ where } q = |\mathbf{F}|.$$

若 B 由 s 个子代数生成，且每个子代数都同构于有限域 $\mathbf{F}$，则$B \cong \mathbf{F}^t$，其中 $t \leq 2^s - 1$，且此估计是精确的。

3.6 特征单代数。 特征单有限群和词单有限群的性质已广为人知。然而，与群论中的正规子群不同，在一个代数的所有自同构下保持不变的子代数不一定是理想。因此，代数的情形需要特别处理。

回忆一下，代数 A 的子代数 B 若在 A的所有自同构下保持不变，则称为特征 子代数。若代数 A 没有在其所有自同构下保持不变的非零真子代数，则称其为强特征单代数，简称 CS-代数；若它没有在其所有自同构下保持不变的非零真理想，则称其为弱特征单代数，简称 CW-代数。若 A 没有非零真词理想，也称其为词单 代数。

有限单代数 A 的有限直积幂 $P = A \oplus \cdots \oplus A$ 既是 CW-k

代数，又由引理3 (i) 可知它是言语单的，因为存在置换 P 的直因子的自同构。反过来，设 B 是一个有限 CW-代数，且 M 是 B 的一个极小理想。那么，对于 B 的任意自同构 α，其像 $\alpha(M)$ 也是一个极小理想，因此，对所有 α 取这些像之和必等于 B，因为该和是 B 的一个特征理想。这个和是若干个与 M 同构的理想的直和。于是， M 的任意理想都是 B 的理想，而 M 的极小性意味着 M 是单代数。因此，一个有限代数是 CW（或言语单）的，当且仅当它是某个有限单代数的直积幂。

谈到 CS-代数，首先，任何零乘法代数都是 CS。此外，极小代数是单 CS-代数。至于非单 CS-代数，我们证明如下结论。

定理8。 有限非单代数 P 具有非零乘法，当且仅当 $P = A \oplus \cdots \oplus A$, $k > 1$, 其中 A 是一个k不含非平凡自同构的极小代数之外的单 CS-代数。

证明。 设 P 是一个有限 CS-代数。那么它也是一个 CW-代数，因此$P = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, 其中 A_i 是单代数 A的同构副本。由于$P^2 \neq \{0\}$，我们有 $A^2 \neq \{0\}$。如果 A 有一个真特征子代数

$B \neq \{0\}$ 那么， k 个副本 $B_i \subset A_i$ 的和就是 P 的一个真特征子代数。这是因为 P 的任何自同构都会置换因子 A_i，这由引理3 (i) 可知。因此， A 必定是一个 CS-代数。

A 是极小的且没有非平凡自同构是不可能的。事实上，这样一来， P 就有唯一对角线 D，它是 P的真特征子代数，矛盾。

反过来，假设 A 是有限单 CS-代数，并且 $P = \underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{k}$，其中 $k \geq 2$ 和 A_i 是 A的同构副本。若 $k > 1$ 我们还假设 A不是具有平凡自同构群的极小代数。

考虑一个非零特征子代数 $B \subset P$。它在每个因子 A_i上的投影 B_i 必定彼此同构。若 B_1 是 A_1 的真子代数，那么存在 A_1 的一个自同构 α ，使得 $\alpha(B_1) \neq B_1$，因为A_1 是CS-代数。由此可得 $B \neq \beta(B)$，其中 β 在 A_1 上作用为 α ，并在 A_2， $\ldots$， A_k上恒等作用。因此， B不是 P的特征子群，矛盾。

因此， B 满射到每个 A_i。根据引理3， B 本身同构于 A的一个直积幂。显然，如果 B 只是某些子代数 A_i 和 $B \neq P$的乘积，那么 B 就不可能是 A 的特征子代数。因此，根据引理 5， B 的某个直因子 $A' \cong A$ 是直和 $A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_s}$的对角线，其中 $s \geq 2$，而 B的其他直因子对每个 A_{i_1}、.....、 A_{i_s} 的投影均为零。由于 B是 P的特征子代数，且P 的自同构可以任意置换因子 A_i，因此 B 就是整个 P的对角线。然而，对角线在所有 P 的自同构下保持不变，当且仅当它是唯一的；也就是说，当且仅当（因为 $k \geq 2$）代数 A 没有非平凡自同构。由于 A 是CS，在这种情况下， A 也没有非零真子代数。对于这一例外，我们得到 $B = P$，定理得证。

□

注意，有限域**F**作为自身上的代数是极小的，且没有非恒等自同构。因此乘积**F** $\times$**F** 不是CS-代数；其对角线是它的特征子代数。在结合情形中， CS 仅指具有零乘法的代数以及系数域（作为自身上的代数），也就是说，该条件显得过强。例 1中的二维极小代数是CS的，但其直平方不是CS的，因为该代数没有非平凡自同构。下面是一个容许非平凡自同构的二维单CS-代数的例子。

例3. 一个非常对称的代数是 $\mathbb{Z}_2$ 上的代数 A，其基为（e, f），乘法表为

$$e^2 = e, f^2 = f, ef = fe = e + f.$$

它满足恒等式 $xy = yx, x^2 = x$。不难验证， A 是单代数，并且 A 的非零元上的任意置换，扩展为 $0 \mapsto 0$，都是 A 的自同构。因此，根据定理8， A 的所有有限直幂都是 CS代数。 A 不是极小的，因此我们提出以下问题

问题 5. 是否存在一个极小代数 A，其非零乘法的阶至少为三，且自同构群 $\mathrm{Aut}\,A$ 在 A 的非零元集合上具有传递作用?

这样的代数必须是单代数且相对自由，从而回答了 Ryabukhin 和 Flori 提出的 [14, 问题 2.89] 。

3.7 半直积与极端代数。若代数 C 是理想 A 与子代数 B 的半直和，则 $C = A + B$ 且 $A \cap B = \{0\}$。半直和是一种重要工具，用于研究代数的扩张。由于可解代数是较小维数代数的扩张，因此半直和对于研究可解代数也至关重要。它们对于研究局部有限簇中代数的投射性和内射性也很重要，参见第 4.3、4.4 节。

设 A 是域$\mathbf{F}$ 上代数 C的一个零乘法理想（阿贝尔理想），且 $B = C/A$。对于任意 $c \in C$，令 $\overline{c} = c + A \in B$。那么，若定义乘法如下，向量空间和 $S = B + A$ 就成为半直和 $B \ltimes A$

$$(\overline{c_1}, a_1)(\overline{c_2}, a_2) = (\overline{c_1 c_2}, a_1 c_2 + c_1 a_2), \text{ where } a_1, a_2 \in A,\ c_1, c_2 \in C. \tag{10}$$

将 S 记为 $B \ltimes A$。一个有趣但并非显而易见的事实如下。

命题 11。若 $\mathfrak{V} = \operatorname{var} C$ 则 $S = B \ltimes A \in \mathfrak{V}$。

证明。只需证明 S 同构于 C的笛卡尔平方的一个截面。因此，我们令 $P = C \times C$ 和 $Q = A \times A \subset P$。考虑对角线 $\widetilde{\ }$ 子代数 $C = \{(c,\ c) \mid c \in C\}$，以及 $A = \{(a,\ a) \mid a \in A\}$。接下来，取 $T = C + Q$.$\widetilde{\ }$于是 A 是 T 中的一个理想，因为 Q 是一个零乘法代数。因此，我们令 $R = T/A$。还需证明 $S \cong R$。我们通过如下定义 $\varphi\colon S \to R$

$$\varphi(\overline{c}, a) = (c + a, c) + \widetilde{A}, \text{ where } c \in C \text{ and } a \in A.$$

这个定义是良定义的，因为若将 c 替换为 $c + a'$，那么右边将得到

$$(c + a' + a, c + a') + \widetilde{A} = (c + a, a) + (a', a') + \widetilde{A} = (c + a, c) + \widetilde{A}.$$

$\widetilde{\ }$如果 $\varphi(\bar{c},\ a) = 0$ 比 $(c + a,\ c) \in A$ 那么 $a = 0$ 是一个 $c \in A$，也就是说 $\bar{c} = 0$。因此 φ是内射的，并且由于 $\dim S = \dim C$，它是向量空间的同构。最后，

$$\varphi((\overline{c_1}, a_1)(\overline{c_2}, a_2)) = \varphi((\overline{c_1 c_2}, a_1 c_2 + c_1 a_2)) = (c_1 c_2 + a_1 c_2 + c_1 a_2, c_1 c_2) + \widetilde{A}$$
$$= ((c_1 + a_1, c_1) + \widetilde{A})((c_2 + a_2, c_2) + \widetilde{A}) = \varphi(\overline{c_1}, a_1)\varphi(\overline{c_2}, a_2).$$

因此，φ 是 S 与 R的同构，所以 $S \in \mathfrak{V}$。 □

注 8. 令 A' 为理想 A在同构 φ下的像。那么对于任意乘积 ac（或 ca），其在 φ 下的像是一个乘积 $\varphi(a)\,b$（分别为 $b\varphi(a)$），其中某个 $b \in B$，这可由等式 (10) 看出）。因此，若理想 A 在 C中是极小的，则理想 A' 在 S中也是极小的。

一般而言，$\operatorname{var} S$可以是 $\operatorname{var} C$中的真子簇。例如，假设结合代数 C 由 a 单生成，且由一个关系 $a^3 = 0$给出。那么 $\dim A = 2$。设 A 是由 a^2生成的 C 的理想。在这种情况下，所讨论的半直和 $S = B + A$ 是两个一维理想的和，且乘积为零。因此， S 满足 $xy = 0$，而这不是 C的恒等式。

另一方面，自然会问，任意一个具有理想A 和因子代数 B 的代数 C，是否都能嵌入半直和 $S' = A' + B$中，其中 $A' \in \operatorname{var} A$ （特别是，如果 A 的乘积为零，那么它的乘积也为零）。这类嵌入广泛应用于群论和李代数中，并可利用所谓的 ***wreath*** 积构造。 [8]中提出了具有置换恒等式的线性代数簇中 wreath 积的类似概念。特别地，具有这类结构的任意代数 C，若其具有理想 A 和因子代数 B，则同构于半直和$B \ltimes A'$ 中的一个子代数 C'，其中 $\operatorname{var} A' = \operatorname{var} A$, $C' \cap A' = A$ и $A' + C' = A' + B$。

本节余下部分将研究一类与临界代数相近的代数。

若有限代数 A 所生成的簇 $\operatorname{var} A$ 无法由一组阶小于 A 的代数生成，则称 A 为 极端的 。

显然，极端代数是临界代数，因此是单体的；并且每个局部有限簇都由其极端代数生成。

因此，我们假设 C 是一个具有阿贝尔单块 A 的极端代数，并考虑命题 11 中给出的半直和 $S = B \ltimes A$，其中 $B = C/A$。

定理 9. 若 C 是一个具有阿贝尔单块 A 的极端代数，且 $\operatorname{var} S = \operatorname{var} C$，则 A 在 C 中有一个半直补 D，即 $C = D \ltimes A$。

证明. 令 $\mathfrak{V} = \operatorname{var} C$。由于 $\operatorname{var} S = \operatorname{var} C = \mathfrak{V}$ 且 $|S| = |C|$，可知 S 也是一个极端代数。理想 A，视为 S 的理想时，根据注 8 仍然是极小的。

现在设 C 对某个 n是 n-生成的，且 F 是秩为 n的 $\mathfrak{V}$-自由代数。由于$F \in \operatorname{var} S$，由定理 6和引理 12，可以将 F 表示为 S的单块截面的直积 P 中的一个次直积。 P 的某些因子必须与 S 本身同构，否则 P 从而 F 和 S将属于由阶小于 S的代数生成的簇，这与 S的极端性相矛盾。

让我们为 F选取一个极小表示。标记这些因子的单石 A_1，.....， A_t。由引理 12 (iv)， F包含每一个单石，因而包含它们的直和 N。

由于每个 S_i 都是以 A_i为核的半直和，因此 P 也是以 N、 $P = N + T$为核的半直和，其中 $T \subset P$是某个子代数。注意， T属于

真子簇 $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$，它由 P 的其他截面和代数 $S/A = B$生成。

现在，由于 F包含 N，它到 T的自然投影与 $Q = F \cap T$重合。因此， F 是 $F = Q \ltimes N$的半直和，其中 $Q \in \mathfrak{U}$。此外，所有 A_i仍是 F中的极小理想，因为 F 满射到每个 $S_i i = 1, \ldots\ldots, t$上。

提醒一下，存在一个满同态 $\varphi : F \twoheadrightarrow C$。由于 $F/N \in \mathfrak{U}$和 $C \notin \mathfrak{U}$，理想 N 不可能属于 φ的核。因此， $\varphi(N)$ 必须包含 C的单石 A 。由于 N 是 F 中极小理想的和，它必定映射到 C中极小理想的和 $\varphi(N)$。 C中只有这样一个理想，因此 $\varphi(N) = A$。

由此可得 $C = \varphi(F) = \varphi(N) + \varphi(Q) = A + Q'$，其中 $Q' = \varphi(Q) \in \mathfrak{U}$。因此，$Q' \neq C$，进而 $Q' \cap A \neq A$。由于 $Q' \cap A$ 是 Q'中的理想，且 A 是阿贝尔的，因此 $Q' \cap A$ 是 C中的理想。但 A 是 C的单石，因此$Q' \cap A = \{0\}$。结果，我们按所述方式通过 $Q', C = Q' \ltimes A$将 C在 A上分裂。 □

定理 9 适用于我们所熟悉的所有临界代数 C ，因为它们都是极端的。因此，我们有

问题6。 一个簇 $\mathrm{var}\, C$，其中 C 是有限临界代数，能否由一组阶小于 A的代数生成？换句话说，任意临界代数都是极端的吗？

4 局部有限簇的杂项性质

4.1 有限生成簇中代数的根高度。 有限代数（或环） A 的根$S_1 = \mathrm{soc}(A)$是其所有极小理想之和（因而是其中某些极小理想的直和）。我们定义第二个根 S_2，规定 $S_2/S_1 = \mathrm{soc}(A/S_1)$，依此类推。这样，我们得到 A的升链，以 A结束。我们将此列称为 A的根列。 A 的根列长度称为其基座高度 。基座高度的一个等价定义是理想的最短升链长度：

$$\{0\} = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots, \text{where for all } k = 1, 2, \ldots, \ J_k/J_{k-1} \subset \mathrm{soc}(A/J_{k-1}).$$

定理 10. 有限生成簇中的有限代数的基座高度一致有界。

证明. 设 $\mathfrak{V} = \mathrm{var}\, A$， A a 是有限代数。由于在代数的满同态 $P \to Q$ 下，根 $\mathrm{soc}(P)$ 被映入根 $\mathrm{soc}(Q)$，因此只需证明自由代数 $F_n(\mathfrak{V})$、 $n = 1,2, \ldots$ 的基座高度一致有界。

我们提醒一下，局部有限簇由其单石代数生成；特别地，$\mathrm{var}\, A$ 由集合 $\mathcal{S}$ 生成，其中包含 A的所有单石截面。我们考虑由子集 $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ 构成的偏序集 $\mathcal{X}$，其中每个子集都包含其成员的所有单石截面。对于每个这样的 $\mathcal{T}$，我们考虑簇 $\mathrm{var}\, \mathcal{T}$。簇 $\mathrm{var}\ \mathcal{T}$ 只有有限多个；为了证明我们的定理，

我们可以按 $|\mathcal{T}|$使用归纳法。当 $\mathcal{T}$ 为空集时，归纳法的基显然成立。设 $\mathcal{T}$ 非空。我们可以假设，簇 $\operatorname{var}\mathcal{T}$ 并非由真子集 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ 生成。

利用极小表示（见引理 12），我们将簇 $\mathcal{T}$ 的自由代数 G_n 表示为 $\mathcal{T}$ 中代数的次直积。注意，在 $\mathcal{T}$ 中存在一个代数 B，它不是其他 $\mathcal{T}$ 中代数的真截。此外，可以假设，从 $\mathcal{T}$ 中移除 B 会使其生成的簇变小。因此，集合 $\mathcal{T}' = \mathcal{T}\backslash\{B\} \in \mathcal{X}$ 以及 $\mathfrak{U} =$ 中有限代数的根长度在簇 $\mathcal{T}'$ 中一致有界。

因此，若 n 不小于 B 中生成元的个数，则 B 必须是直积 D 的一个因子，其中包含 $\mathfrak{V}$-自由代数 G_n 的极小表示。这是因为 B 是 G_n 和 $B \notin \mathfrak{U}$ 的同态像。根据引理 12 (iv)， B 的单石是 G_n 的极小理想。

因此，我们可以看到，对于 D 的所有同构于 B 的直因子 B_i ，它们的单石 M_i 都包含在 G_n 的根中。令 N 为所有 M_i 之和。若构造 D/N，那么根据 $\mathcal{T}'$ 和 B 的选取可知， D/N 属于簇 $\mathfrak{U}$。因此 $G_n/N \in \mathfrak{U}$ 也属于该簇。由归纳法可知，对于某个整数 h， $\mathfrak{U}$ 中所有有限代数的根高度至多为 h。这对 G_n/N 也成立。由于 N 属于代数 G_n 的根，因此对于所有 n， G_n 的根高度至多为 $h+1$，定理得证。 □

利用这个定理，我们可以将有限生成簇的根高度 $\mathfrak{V}$ 定义为 $\mathfrak{V}$中有限代数的根高度的最大值。

例 4. 设 A 是幂零代数。一方面，由于湮灭子 $I(A)$的每个一维子空间都是 A中的极小理想，因此我们有$I(A) \subset \operatorname{soc}(A)$。另一方面，根据引理9 (i)， A 的每个极小理想都包含于$\operatorname{soc}(A)$中。因此$\operatorname{soc}(A) = I(A)$。利用归纳法，我们得出 A的根列就是 A的湮灭子列，因此的根高度等于的幂零深度（见第 2 小节）。

注 9. 由定理 10 和例 4 可知，有限生成簇 $\mathfrak{V}$ 中的有限幂零代数具有一致有界的幂零深度（并且根据命题 4，其幂零类也有界）。由于 $\mathfrak{V}$是一个局部有限簇，同一个上界也适用于来自 $\mathfrak{V}$的所有幂零代数。作为 $\mathfrak{V}$ 的一个在所有三种伯克霍夫运算下封闭的子类，有限生成簇中的所有幂零代数组成的类是的子簇。

4.2 根基高度 1 与内禀半单代数。如果有限维代数 A 是内禀半单的，那么它的任何子代数 A （包括 A它本身）都是单代数的直积。任何极小代数都是内禀半单的，但具有这一性质的代数还有很多，甚至包括单代数。例如，基域 $\mathbf{F}$ 的任意有限域扩张 $\mathbf{E}$ 都是一个内禀半单单代数。另一个例子是例3中具有三个一维子代数的单代数。此外，几乎所有 n 维的

代数都具有这一性质，因为正如我们将在第6节中所展示的，既是单代数又没有维数大于 1 的子代数，是一种泛性质。

内在半单代数的任何子代数显然都是内在半单的。

注10。 内在半单代数未必具有结合代数或李代数传统意义上的半单性，因为它们包括零乘法代数。

定理11。 非零局部有限簇 $\mathfrak{V}$的以下性质等价。

(i) 对于任意有限代数 $A \in \mathfrak{V}$，给定一个理想 I，存在一个理想 J，使得 $A = I \oplus J$;

(ii) 任意有限 $A \in \mathfrak{V}$ 都是单代数的直积;

(iii) $\mathfrak{V}$ 的基座高度等于 *1*;

(iv) $\mathfrak{V}$ 由一族内在半单代数生成。

(v) $\mathfrak{V}$ 中的所有有限代数都是内在半单的。

(vi) 在任意代数 $A \in \mathfrak{V}$中，给定一个有限理想 I，存在一个理想 J 使得$A = I \oplus J$；。

证明。 (vi) $\rightarrow$ (i) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (iii) 显然成立。

(ii) $\rightarrow$ (i) 由引理3 (i) 得出。

(iii) $\rightarrow$ (ii) 任意有限代数 $A \in \mathfrak{V}$ 都是其极小理想的直和。这些理想本身必定是单代数，因为它们的理想就是整个代数的理想。

(ii) $\rightarrow$ (v) $\rightarrow$ (iv) 显然。

(iv) $\rightarrow$(ii) 根据引理3 (ii)，只需证明任意 $\mathfrak{V}$-自由代数F_n 都是单代数的直积。根据引理3， F_n 作为子代数包含在有限个内在半单代数的直积中。由于内在半单代数的子代数本身也是内在半单的， F_n 在 $\mathfrak{V}$中单代数的直积里的这个嵌入可以是次直积。但根据引理3，有限个单代数的次直积同构于其中若干个单代数的直积。

(ii)，(i) $\rightarrow$ (vi) 如果 I 是有限代数 A的一个单直因子，那么 I 在 A 中的湮灭子 J 要么是 I，要么是它的直补。这两种情况下，它都是 A的一个理想。因此，如果理想 I 是 A中若干个单理想的直积，同样的结论也成立。于是，条件(ii)和引理3 (i)表明，有限代数 $A \in \mathfrak{V}$ 中任意理想 I 的湮灭子都是 A的理想。由于簇 $\mathfrak{V}$ 是局部有限的，因此任意代数 $A \in \mathfrak{V}$ 中有限理想的湮灭子都是理想。

根据同一引理，如果 I 是有限代数 $A \in \mathfrak{V}$ 的单理想，且$I^2 \neq \{0\}$，那么 A 是 I 与 A 中 I 的湮灭子的直和；如果$I^2 = \{0\}$，那么 $I \cap A^2 = \{0\}$。由于 $\mathfrak{V}$ 是局部有限的，对于有限单理想，同样的情况

也适用于任意代数 $A \in \mathfrak{V}$。在这两种情况下，我们都有一个与 A中的 I 互补的理想。事实上，如果 $I \cap A^2 = \{0\}$，那么向量空间$I + A^2/A^2$ 在因子代数 A/A^2中有一个直补 J/A^2 ，而理想 J 是 A中 I 的直补。

现在设代数 $A \in \mathfrak{V}$ 的有限理想 I 是单理想 I_1，.....，I_k 的直和。由性质 (i) 可知，I_1 是 A 的每个有限子代数中的理想。由于 A 是局部有限代数， I_1 是整个代数 A 的理想。

对于单理想 I_1，我们已经得到了一个补理想：$A = I_1 \oplus J$。现在，交 $I \cap J$ 是 J 的理想，其阶小于 $|I|$。由阶归纳可知，对于某个理想 E，有 $J = (I \cap J) \oplus E$，于是 $A = I \oplus E$，证毕。

□

命题 12. 设 $\mathfrak{V}$ 是根高度为 *1* 的局部有限簇。那么，代数 $A \in \mathfrak{V}$ 的所有子理想都是 A 中的理想。

证明。 若 A 是有限的，则由定理11 (ii)，代数 A 是单代数的直积。根据引理3 (i) 给出的 A 中理想的描述，代数 A 的理想 I 的理想 J 本身也是 A 的理想。若对于无限代数的某个理想 I 及其子理想 $J \subset I$，这一性质不成立，则存在有限生成子代数 $B \subset A$，使得子理想 $B \cap J$ 不是 B 中的理想。由于 $\mathfrak{V}$ 是局部有限簇，因此 B 是有限代数，矛盾。命题得证。

□

4.3 局部有限簇中的内射代数。

引理14. 设 $\mathfrak{V}$ 是由有限代数 A 生成的代数簇。那么，任意单石代数 $B \in \mathfrak{V}$ 的单石 M 的阶不超过 A 的所有主因子阶的最大值 m。

证明。 下面的论证类似于对 [18] 中的群所使用的“主中心化子论证”（另见 [31, 第 5 节2]）。如果 B 是有限的，这由推论 1 得出。因此，我们需要处理 M 是无限维代数 B 的单石的情形。假设 M 包含 m 个不同的非零元素b_1、.....、b_m。那么差 $b_{ij} = b_i - b_j$ 属于 M，并且对于所有 $i > j$ 也都非零。由于 M 是极小的，它作为理想由 $m\ (m+1)\ 2$ 中的每一个元素生成于 B 中。令 S 为这些元素的集合。由于只需取 B 中有限多个元素，即可证明 S 中的某个元素属于由 S 中另一个元素生成的理想，因此存在一个有限生成的、从而也是有限的子代数 $C \subset B$，使得 S 中任意元素在 C 中的“理想闭包”都包含 S。于是， C 存在一个主截面 L/K，使得 $S \subset L$ 和 $S \cap K = \varnothing$。由于对于 $i \neq j$ 有 $b_i - b_j \notin K$，非零陪集 $b_1 + K$、.....、$b_m + K$ 两两不同，因此 $|L/K| > m$，矛盾。

□

命题 13。 如果有限生成簇 $\mathfrak{V} = \operatorname{var} A$ 的基座高度为 1，那么每个代数 $B \in \mathfrak{V}$ 都是剩余有限的。

证明。 不妨假定代数 B 是单体的。由引理 4.3， B 的单石 M 是有限的。由定理11，对 B的某个理想 J 有 $B = M \oplus J$，从而由于 B 是单体的，故 $J = \{0\}$ 。因此 $|B| = |M| < \infty$，这就证明了该命题。

□

回顾一下，子代数 A 是代数 B 中的收缩，如果在 A 中存在理想 I，使得 $B = A + I$ 且 $A \cap I = \{0\}$，也就是说，这个和是半直的。代数 A 称为 $\mathfrak{V}$ 中的内射 代数，如果它作为子代数包含于 $\mathfrak{V}$ 的任一代数中时，它都是该代数中的收缩。

定理12. 局部有限簇 $\mathfrak{V}$ 的下列性质是等价的。

(i) 有限代数 $B \in \mathfrak{V}$ 的任一有限子代数 A 都是收缩。

(ii) $\mathfrak{V}$ 由有限极小代数的一个有限集 $\mathcal{A}$ 生成。

(iii) 每个有限代数都是 $\mathfrak{V}$ 中的内射代数。

证明。 (i) → (ii)。性质 (i) 意味着，有限代数$B \in \mathfrak{V}$ 的每个理想 A 都可以在 B 中由一个理想 C 直接补足。因此， B 是有限单代数的直积，所以簇 $\mathfrak{V}$ 由一组有限单代数生成。单代数的真非零子代数不可能是收缩。因此， $\mathfrak{V}$ 中所有有限单代数都是极小代数。由命题 9 可知，局部有限簇中两两不同构的极小代数集合是有限的，因此得到性质 (ii)。

(ii) →(iii)。设 A 是代数 $B \in \mathfrak{V}$ 的有限子代数。根据定理11， $\mathfrak{V}$ 的根基高度为 1；又由性质 (ii)，它是有限生成的，因此根据命题 13，代数 B 是剩余有限的。因此， B 有一个有限指数理想I，使得 $A \cap I = \{0\}$，因为 A 是有限子代数。

只需证明因子代数 $A + I/I$ 是有限代数 B/I 中的一个收缩，因为如果理想 J/I 在 B/I 中是 $A + I/I$ 的补理想，那么理想 J 在 B 中是 A 的补理想。因此可假设 B 是有限代数。根据定理11， B 是单极小代数的直和。

因此设 $B = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$，其中单理想 S_i 是极小代数。若 $A \cap S_1 = \{0\}$，则根据归纳法，因子代数 $A + S_1/S_1$ 可在 B/S_1 中由理想 J/S_1 补足，因此 J 是 B 中 A 的补理想。否则 $A \cap S_1 = S_1$，因为 S_1 是极小代数。同样，根据归纳法，存在 $S_2 \oplus \cdots \oplus S_k$ 中 $A \cap (S_2 \oplus \cdots \oplus S_k)$ 的一个补理想 J，它也是 B 中 A 的补理想。我们已证明子代数 A 是 B 的一个收缩。

(iii) →(i) 可由定义得出。

□

4.4 有限生成簇中的投射代数。 若代数 B作为收缩包含在一个 $\mathfrak{V}$-自由代数中，则称其在簇 $\mathfrak{V}$ 中是投射的。特别地， $\mathfrak{V}$-自由代数是投射的。等价的定义是：若对于任意满同态 $\alpha\colon A \to B$（其中 $A \in \mathfrak{V}$），存在同态 $\beta\colon B \to A$，使得 $\alpha\beta = \mathrm{id}_B$，则称 B 是投射的。

给定一个代数 B，如果存在子代数 C，满足 $B = C \oplus I$，我们就称 B 的理想 I 在 B 中可半直补。如果任意子代数 $B \subset A$ 的任意理想 I 都能在 B 中直接补，我们就称代数 A 良好。由此定义可知，良好代数的所有截面都是良好的。例如， 2×2 矩阵的结合代数、任意二维李代数以及任意三维单李代数都是良好的，而类为 $c \geq 2$ 的幂零代数则不是。

定理 13. 设簇 $\mathfrak{V}$ 由有限代数 A_i 的有限族 $\mathcal{A} = \{A_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ 生成。则以下条件等价。

(i) $\mathfrak{V}$ 的所有有限代数都是 $\mathfrak{V}$ 中的投射对象；

(ii) $\mathfrak{V}$ 的所有有限代数都是良好的；

(iii) $\mathcal{A}$ 的所有代数都是良好的。

证明。 (i) $\to$ (ii) 如果有限代数 $A \in \mathfrak{V}$ 不是良好的，那么存在一个子代数B，属于 A，其中有一个理想 I 在 B 中没有补。如果 $C = B/I$，那么 C 不是投射的。

(ii) $\to$ (iii) 这是一个显然的推论。

(iii) $\to$(i) 假设 $A_i \in \mathcal{A}$ 的所有代数都是良好的。为继续证明，我们需要一个辅助结果。

引理 15. 设 B 是一个有限代数， $B = N \oplus D$，其中 N 是 B 的极小理想的直和，而 D 是一个子代数。假设 D的每个理想在 D中都是半直可补的。那么，B 的每个理想 L在 B中都是半直可补的。

证明。 首先， B 的任意理想 $J \subset N$ 都可由B中的一个理想在 N内直可补。事实上，若 $J \neq N$，则在 N 的直分解中，存在 B的一个极小理想 M，使得 $J \cap M = \{0\}$。利用关于 J余维数的归纳法，可以假设 B 的理想 $J \oplus M$ 在 N中可补，因此 J也可补。

回到 L，根据假设，$B/N \cong D$ 中的理想 $(L + N)/N$ 可由子代数 C/N 半直可补，其中 $C = N \oplus (D \cap C)$ 是一个半直和。令 $E = D \cap C$。于是，

$$E \cap (L + N) = E \cap (C \cap (L + N)) = E \cap N = \{0\}. \tag{11}$$

因此我们有 $B = (L + N) \oplus E$。接下来，如上所述，我们可以将 N 写成 B的理想 $L \cap N$ 和 K 的直和。因此， $B = L + (K + E)$。若$x \in L \cap (K + E)$，则 $x = y + z$，其中 $y \in K$, $z \in E$，从而 $z \in L + N$，于是根据 (11)，我们应有 $z = 0$。在这种情况下，利用 $L \cap K = \{0\}$，我们得到

也有 $x = y = 0$。因此，和 $L + (K + E)$ 是半直和，从而完成了该引理的证明。□

现在我们回到定理 13 的证明。设 A 是 $\mathfrak{V}$ 中的一个有限代数。我们有 $A \cong F/J$，其中对某个自然数 n 有 $F = F_n(\mathfrak{V})$。由于 $\mathfrak{V}$ 是局部有限的，故 F 是有限的。因此，只需证明每个有限自由代数中的每个理想（从而也包括 $\mathfrak{V}$ 中每个有限代数中的每个理想）都具有半直补。

如第 3 节所述，每个有限代数都属于由其单块截面生成的簇。我们在上文也已指出，良好代数的所有截面都是良好的。因此我们可以假设所有代数 A_i 都是单体的。更进一步：我们可以假设集合 $\mathcal{A}$ 在取其成员的单块截面下是封闭的。

显然， $\mathcal{A}$中具有这些性质的子集只有有限多个。相应地，由这些子集生成的子簇也只有有限多个。我们只考虑极小闭子集 $\mathcal{B}$，即使得由这样的 $\mathcal{B}$ 所生成的簇不能由 $\mathcal{B}$ 的真闭子集生成的那些子集。这使我们能够借助归纳法进行，并假设：簇 $\mathfrak{V}$的自由代数中理想的所需性质，已经对 $\mathfrak{V}$ 的任一真子簇 $\mathfrak{V}'$ 的自由代数中的理想成立，其中该真子簇由 $\mathcal{A}$ 中代数的单块截面的一个闭系统生成（换言之，这些理想在自由代数 $F_n(\mathfrak{V}')$ 中是半直可补的）。归纳基础是一个显然的情形： $\mathcal{A}$为空，且该簇只包含零代数。

因此，设 $\mathfrak{U}$ 是由 $\mathcal{A}$ 的某个极小子集 $\mathcal{A}'$ 生成的非零簇。根据 Birkhoff 构造， $\mathfrak{U}$ 的有限生成自由代数 F 是代数 $A_i' \in \mathcal{A}'$ 的有限直积 P 的次直积。

照例，我们可以假设这个嵌入是极小的（见第 3.3 节），因此根据引理 12 (iv)，因子 A_i' 的单石 N_i 是 F 中的极小理想。由于因子 A_i' 是良好的，我们有半直分解 $A_i' = N_i + S_i$ 和 $P = N + S$，其中 N 是单石 N_i 的乘积，而 S 是 S_i 的乘积。由于 F 包含 N，我们可以说，整个代数 F 是理想 N 与 $D \subset S$ 的半直积。

注意， S 和 D 属于由代数 A_i' 的真因子代数生成的簇 $\mathfrak{W}$ 。因此， $\mathfrak{W}$ 由 $\mathcal{A}'$ 的一个真闭子集 $\mathcal{A}''$ 生成。根据归纳法， D 的理想在 D 中是半直可补的。现在我们可以将引理 15 应用于 F，从而证明 F 的每个理想都是半直可补的。应用归纳法，我们完成证明。□

问题 7. 设 $\mathfrak{V}$ 是域上代数的一个局部有限簇。是否成立： $\mathfrak{V}$ 中的所有有限投射代数都是 $\mathfrak{V}$-自由的，当且仅当 $\mathfrak{V}$ 是局部幂零的?

4.5 反 Schreier 簇。 第 4.4 小节所讨论的簇中的所有有限代数都可以嵌入这些簇的自由代数中。因此，可以修改定理 13 中的条件 (i)，要求某个簇中的所有 代数$\mathfrak{V}$ 都能嵌入自由代数。我们可以将这样的簇称为反施赖尔簇。这与曾经流行的$Schreier$ 簇形成对比，在后者中，所有子代数都

是自由的。与 Schreier簇类似，反 Schreier 簇十分罕见。

定理14。 设 $\mathfrak{V}$ 是定义在任意域上的代数簇。如果每个代数$A \in \mathfrak{V}$ 都能嵌入某个 $\mathfrak{V}$-自由代数中，那么 $\mathfrak{V}$ 就是平凡簇。

证明。 选取一个基数 $\aleph$ ，使其大于 $\mathfrak{V}$中可数秩自由代数的基数 $\aleph'$ 。设 F_α 是一个秩为 $\aleph$、自由生成元为 $x_{\alpha,\beta}$, $\alpha \in I$, $\beta \in J$, $|I| = |J| = \aleph$的 $\mathfrak{V}$-自由代数。记 H 为直和

$$H = \bigoplus_{\alpha \in I} F_\alpha .$$

假设 H 可同构地嵌入一个带有自由生成集 Y 的 $\mathfrak{V}$-代数 F 中： $F = F(Y)$。

我们用 G 表示 Aut F 中置换自由生成元的子群。显然， F 的每个元素都可通过G 中的一个自同构映射到固定子代数 $F(Z)$中的某个元素，而该子代数具有一个由可数个自由生成元组成的集合 $Z \subset Y$。因此，群 G 在 F 上的作用所产生的轨道集的基数不超过 $\aleph'$。

我们固定其中一个 G-轨道 C，并对 $\alpha \in I$ 定义子集 $J'_\alpha \subset J$，该子集由所有满足条件 $\beta\, x_{\alpha,\ \beta} \in C$ 的指标组成。于是，根据定义，子集 $I' = I'(C) \subset I$ 由所有满足以下条件的指标组成： $\alpha \in I$ 的基数为 $\aleph$。

假设对每个轨道 C，集合 $I'(C)$的基数都小于 $\aleph$ 。由于 G-轨道的数量至多为 $\aleph'$，所有子集 $I'(C)$的并集 L的基数小于 $\aleph$；而对于 $\alpha \notin L$ ，所有子集 J'_α (C)都不能覆盖集合 $\{x_{\alpha,\beta}\}_{\beta \in J}$。在这种情况下，存在某个元素$x_{\alpha,\ \beta}$ 不属于任何轨道，矛盾。由此可知，存在一个轨道 C ，使得集合$I' = I'(C)$的基数为 $\aleph$。

存在一个元素 $v = v(z_1, \ldots, z_m) \in F(Z)$，使得对于每个指数为 $(\alpha, \beta) \in \bigcup_{\alpha \in I'}(\alpha,$ $J'_\alpha) = K$的元素$x_{\alpha,\beta}$，在 G中都存在一个自同构，将该元素映射到 v。我们将选取 K 的某些子集，以获得来自这些子集的、指数为 (α, β) 的元素 $x_{\alpha,\beta}$ 的附加性质。

对于 $(\alpha, \beta) \in K$，元素 $v(z_1, \ldots, z_m)$ 是 $x_{\alpha,\beta}$在一个置换 Y的生成元的自同构下的像。因此我们有 $x_{\alpha,\beta} = v(y_{i_1}, \ldots, y_{i_m})$，其中变量 $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$ 是 Y中的不同元素，依赖于 (α, β)。若固定 $\alpha \in I_\alpha$，则在无限集 J_α中，可以选取一个无限子集J'_α ，使得要么对于不同的 $\beta \in J'_\alpha$，所有变量 $y_{i_1} = y_{i_1}(\beta)$ 都互不相同，要么它们全都相等。我们将这个变量集合（含一个或无限多个元素）记为 $Y_{\alpha,1}$。出于同样的理由，可以假定 v 中编号为 $2, \ldots, m$的变量也具有同样的性质，它们对 $i = 2, \ldots, m$给出集合 $Y_{\alpha,i}$。保持同样的记号 J'_α，我们得到子集$K' = \bigcup_{\alpha \in I'}(\alpha, J'_\alpha) \subset K$。

选取一个无限子集 $I'' \subset I'$，不妨设，当 $\alpha \in I''$ 时，子集 $Y_{\alpha,\ i}$是无限的；而当 $\alpha \in I''$ 且 $i > k$ 时，它们只有一个变量 $y_i = y_i\,(\alpha)$ 。于是，可以选取两个不同的变-

量 α 和 α'，使得在 I'' 中存在某些值（例如 $i=k+1$，……，ℓ）满足 $y_i(\alpha) = y_i(\alpha')$，并且对于 $i,\ j>\ell$，有 $y_i(\alpha) \neq y_j(\alpha')$。

现在，可以用无限子集J''_α和 $J''_{\alpha'}$替换无限集合 J'_α 和 $J'_{\alpha'}$，使得相应的$Y''_{\alpha,\ i}$和$Y''_{\alpha',\ i}$对 $i\leq k$ 的交为空，且二者都不包含单元素集合$Y_{\alpha,\ i}$ $Y_{\alpha',\ i}$（对于 $i>k$）。

因此，可以从 J''_α 中选取两个不同的 β 和 β'，使得

$$x_{\alpha,\beta} = v(y_{11},\dots,y_{1k},y'_{k+1},\dots,y'_m),\ x_{\alpha,\beta'} = v(y_{21},\dots,y_{2k},y'_{k+1},\dots,y'_m),$$

其中所有 $2k$ 变量 y_{ij} 两两不同，且也不同于变量 y'_k。对于 α' 和某个 $\beta\in J''_{\alpha'}$，类似地，我们选择

$$x_{\alpha',\beta''} = v(y_{31},\dots,y_{3k},y''_{k+1},\dots,y''_m),$$

其中每个 y_{3j} 都不同于表达式$x_{\alpha,\ \beta}$、 $x_{\alpha,\ \beta'}$和$x_{\alpha',\ \beta''}$中的所有其他字母；而若 $k+1\leq j\leq l$ 且 y''_j，则 $y''_j = y'_j$不同于表达式$x_{\alpha,\ \beta}$、 $x_{\alpha,\ \beta'}$和$x_{\alpha',\ \beta''}$中的所有其他字母（若 $j>\ell$）。

这样的 y_{ij} 和 y_k 选择使下述映射有定义：

$$y_{11}\mapsto y_{11},\dots,y_{1k}\mapsto y_{1k},\ y'_{k+1}\mapsto y'_{k+1},\dots,y'_m\mapsto y'_m$$
$$y_{31}\mapsto y_{21},\dots,y_{3k}\mapsto y_{2k},\ y''_{k+1}\mapsto y'_{k+1},\dots,y''_m\mapsto y'_m.$$

由于所有 y_{3i} 都是唯一的，而 y''_i要么唯一，要么与 y'_i重合，因此上述映射有定义。

上述自由生成元的映射可扩张为 F的一个自同态，将一对 $(x_{\alpha,\ \beta},\ x_{\alpha',\ \beta''})$ 映到一对 $(x_{\alpha,\ \beta},\ x_{\alpha,\ \beta'})$。第一对元素的乘积为零，因为它们分别属于代数 H 的不同直和项 F_α 和 $F_{\alpha'}$。但这样一来，F_α中两个不同自由生成元的乘积也为零，这就证明了 $\mathfrak{V}$中所有代数的乘积都为零。

□

注11. 存在乘法非零的局部有限簇，其中任意可数代数都可以嵌入自由代数。第5.4节将给出一个例子。

4.6 可解簇。 通常有两种方式定义可解代数：第一种通过恒等关系定义，第二种通过某些理想列定义。

下面的计算将在一个秩为可数、自由生成元集为 x_1，x_2，…… 的绝对自由代数 $\mathcal{F}_\infty$ 中进行。恒等式$s_k(x_1,\ \dots,\ x_{2^k}) = 0$ 由归纳法定义。当 $k=1$ 时，令 $s_1(x_1,\ x_2) = x_1x_2$。当 k 取更大的值时，令

$$s_k(x_1,\dots,x_{2^k}) = s_k(x_1,\dots,x_{2^{k-1}})s_k(x_{2^{k-1}+1},\dots,x_{2^k}).$$

同样通过归纳法，可以定义代数 A 的交换子序列，即 $A^{(1)}=A$，以及当 $k>1$ 时的 $A^{(k)} = (A^{(k-1)})^2$。

命题 14。 设 A为一个代数。以下各项等价。

(i) $A^{(\ell+1)} = \{0\}$ 对于某个 $\ell \geq 0$;

(ii) 存在一个子空间的可解序列

$$A = A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{\ell-1} \supset A_{\ell+1} = \{0\}, \tag{12}$$

使得 $A_j^2 \subset A_{j+1}$，对所有 $j = 1, \ldots, \ell$,

(iii) A 满足恒等式 $s_\ell(x_1, \ldots, x_{2^\ell}) = 0$。

证明。(i)→(ii) 成立，因为交换子序列是可解的。

(ii)→ (iii) 显然，若 $\ell = 1$ ，则 $s_1(x_1, x_2) = 0$ ，因为在这种情况下 $A^2 = \{0\}$ 。根据归纳法，由 (12) 得到的理想 A_2 满足恒等式 $s_{\ell-1}(x_1, \ldots, x_{2^{\ell-1}}) = 0$，若 $\ell > 1$。由于对任意 $a_i \in A$，乘积 $a_1 a_2, \ldots, a_{2^\ell - 1} a_{2^\ell}$ 都属于 $A^2 = A^{(2)}$，因此可以用这些乘积替换 $s_{\ell-1}$ 中的变量，从而得到 A 中的恒等式 $s_\ell(x_1, \ldots, x_{2^\ell}) = 0$。

(iii)→(i)。对于 $\ell = 1$，这是显然的。设 $\ell > 1$ 和 A 满足 $s_\ell(x_1, \ldots\ldots, x_{2^\ell}) = 0$。注意， $A^{(2)} = A^2$ 只是所有乘积 uv、 u， $v \in \mathcal{F}_\infty$ 的线性张成。因此，为了验证 $s_{\ell-1}(x_1, \ldots\ldots, x_{2^{\ell-1}}) = 0$ 属于 A^2，只需将自变量替换为这类乘积。此后， $s_{\ell-1}(x_1, \ldots\ldots, x_{2^{\ell-1}}) = 0$ 在 A^2 中成立，立即可由 $s_\ell(x_1, \ldots\ldots, x_{2^\ell}) = 0$ 在 A 中成立推出。因此，由归纳法， $A^{(\ell+1)} = (A^2)^{(\ell)} = \{0\}$。

□

根据定义，代数 A 称为可解的，如果它满足命题 12 中的某个等价条件。极小的 ℓ 称为 A 的可解长度。特别地，对于零乘法代数， $\ell = 1$ 。包含关系 $A_j^2 \subset A_{j+1}$ 意味着，对于 $j = 1, \ldots\ldots, \ell$， A_{j+1} 是 A_j 的一个理想。

一个代数称为局部可解的，如果它的任意有限生成子代数都是可解的。

簇 $\mathfrak{V}$ 称为可解（局部可解）的，如果 $\mathfrak{V}$ 中的任意代数都是可解的（相应地，局部可解的）。可解簇中代数的可解长度必须一致有界。（用笛卡尔积来证明！）

与幂零代数的情形不同，对于可解代数 A， A 不一定具有非零阿贝尔理想。例如，设 A 是一个以 a, b, c 为基的三维交换代数，其乘法表为

$$a^2 = b,\ ab = b^2 = c,\ ac = b,\ bc = c,\ c^2 = 0.$$

这里 $A^2 = \langle b, c \rangle$， $(A^2)^2 = \langle c \rangle$， $((A^2)^2)^2 = \{0\}$。容易看出，交换子序列的最后一个非零项 $(A^2)^2 = \langle c \rangle$ 不是理想，而只是一个子理想。此外， A没有阿贝尔理想。

但我们仍然可以得到一个类似于注 9 中所述的性质。

命题15。设 $\mathfrak{V} = \operatorname{var} A$，其中 $|A| \leq \infty$。那么， $\mathfrak{V}$ 中所有可解代数构成 $\mathfrak{V}$ 的一个子簇。

证明。 由引理 12 可知， $\mathfrak{V}$ 中有限代数的所有主因子的阶均由 $|A|$ 所界定。因此，可解主因子 M 的可解序列长度有界，因为 $M \supset M^2 \supset (M^2)^2 \supset \cdots$ 的长度不会超过 $\dim M$。因此，由极小理想之和构成的可解根基的可解长度有界。由于 $\mathfrak{V}$ 中所有有限代数的基座高度由定理 10 所界定，且代数扩张的可解长度不超过参与扩张的代数的可解长度之和，所以 $\mathfrak{V}$ 中任意有限可解代数的可解长度均有一致上界。由于 $\mathfrak{V}$ 是局部有限的，对于 $\mathfrak{V}$ 中所有可解代数，同样如此。因此， $\mathfrak{V}$ 中所有可解代数构成的集合显然对子代数和因子代数封闭，也对笛卡尔积封闭。由此，有限生成簇 $\mathfrak{V}$ 中可解代数的类是 $\mathfrak{V}$ 的一个子簇，断言得证。

□

定理 15. 代数簇 $\mathfrak{V}$ 是可解的，当且仅当对于任意非零代数 $A \in \mathfrak{V}$， A^2 是 A 中的真子代数。

证明。若 $A^{(2)} = A^2 = A$，则根据归纳定义，每个子代数 $A^{(k)}$ 都等于 A，且除非 $A = \{0\}$，否则 A 不可解。

反之，假设 $\mathfrak{V}$ 不可解。那么对任何 ℓ，形如 $s_\ell(x_1, \ldots, x_{2^\ell}) = 0$ 的恒等式都不在可数秩的 $\mathfrak{V}$ 自由代数 F 中成立。为证明该定理，我们需要构造一个非零代数 $A \in \mathfrak{V}$，使得 $A^2 = A$。

首先，我们取代数 F 的副本 $F(i) = F(x_{i1}, x_{i2}, \ldots)$，并构造它们的笛卡尔乘积 $C = \prod_{\ell=1}^{\infty} F(i)$，其元素为无限序列，其中第 i 个分量属于 $F(i)$。然后，我们按如下方式定义 C 中的一列序列。

第一个是序列

$$a_{11} = (x_{11}, s_1(x_{21}, x_{22}), s_2(x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}), \ldots).$$

接下来还有两个序列:

$$a_{21} = (0, x_{21}, s_1(x_{31}, x_{32}), s_2(x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}), \ldots)$$

and

$$a_{22} = (0, x_{22}, s_1(x_{33}, x_{34}), s_2(x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{48}), \ldots).$$

利用这些恒等式

$$s_j(z_1, \ldots, z_{2^j}) = s_{j-1}(z_1, \ldots, z_{2^{j-1}}) s_{j-1}(z_{2^{j-1}+1}, \ldots, z_{2^j}),$$

可以看出，乘积 $a_{21}a_{22}$的分量（第一个分量除外）就是 a_{11}的分量。然后我们定义

$$a_{31} = (0, 0, x_{31}, s_1(x_{41}, x_{42}), \ldots) \text{ and } a_{32} = (0, 0, x_{32}, s_1(x_{43}, x_{44}), \ldots)$$

使得 $a_{31}a_{32}$ 和 a_{21} 除第二个分量外具有相同的分量。同样地，我们构造 a_{33} 和 a_{34}，使得 $a_{33}a_{34}$ 与 a_{22} 相同，直到

第二个分量。对于四个序列 a_{3j}、 $j = 1,..,4$ 中的每一个，我们类似地定义 C 的八个元素 a_{4j}、 $j = 1,..8$，依此类推。

令 B 为由 C 的所有 a_{ij}, $i = 1$，2，.....生成的子代数。记 D 为仅有有限个非零分量的序列构成的理想。那么代数 $A = C/(C \cap D)$ 非零，并且 A 中每个生成元 a_{ij} 的像 $\bar{a}_{ij}$ 等于若干个 $\bar{a}_{i+1,\ j'}$ 和 $\bar{a}_{i+1,\ j''}$ 的乘积。因此， A 的所有生成元都属于 A^2，从而 $A^2 = A$，如所求。 □

例 5. 由附加恒等式 $x^p = 0$ 定义的结合交换簇 $\mathfrak{V}$，其底域的特征为 $p > 0$，是局部幂零的，但不可解。其无限秩自由代数的湮灭子是平凡的。定理 15 的构造给出了一个非零代数 $A \in \mathfrak{V}$，使得 $A = A^2$。

我们通过考察一类自然的可解代数的包络结合代数（见第 3.2 节），来结束本节。若存在一列理想，使有限维代数 A 满足下述条件，则称其为超可解：

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k = \{0\} \tag{13}$$

其中各因子 A_{i-1}/A_i 均为零乘法的一维代数。（这个定义与超可解群的定义类似。）

例如，三角形 $m \times m$ 矩阵构成的李代数是超可解的。若 A 是有限超可解代数，那么根据命题 14 和推论 1，簇 $\mathrm{var}\, A$ 中的每个有限代数都是超可解的。

命题 16. 设 A 是有限可解代数。以下条件等价。

(i) A 是超可解的；(ii) 结合包络代数 $U = U(A)$ 中存在一列理想 $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_k = U$，使得对于 $i = 1$，....., k，有 维数 $U_i/U_{i-1} = 1$；(iii) 结合代数簇 $\mathfrak{U} = \mathrm{var}\, U(A)$ 中的单代数是一维的。

证明 (i)→(ii) 由于序列 (13) 中的项 A_i 在元素 $a \in A$ 的任意左乘法或右乘法下的像属于 A_i，可以在 A 中选取一个基，使得包络代数 U 的任一元素关于该基都具有三角矩阵。至此即得结论，因为三角矩阵的结合代数具有所需的理想列。

(ii)→(iii) 由推论 1， $\mathfrak{U}$ 中有限代数的主因子的维数不能大于 U 的主因子的维数。因此， $\mathfrak{U}$ 中的单代数必须是一维的。

(iii)→ (i) 若 A 有一个维数为 $m > 1$ 的主截面 V，则 V 是包络代数 U 上的一个维数为 m 的单模。在这种情况下， A 映射到一个本原代数 A'，该代数有一个维数为 m 的忠实单模 V。由

[14, 第 3]章， A' 是一个维数至少为 2 的单代数，这就产生了矛盾。因此， A 中存在一个主列 (13)，且 A是超可解的。

□

5 局部有限簇的维数函数

与任意泛代数的局部有限簇相关联的最自然的数值不变量之一是函数 $f(n) = f_{\mathfrak{V}}(n)$，其在整数 n 处的值是秩为 n 的 $\mathfrak{V}$-自由代数 F_n 的阶。在 [15], 中，这个函数称为 $\mathfrak{V}$ 的自由谱。如果 $\mathfrak{V}$ 是域 F 上线性代数的局部有限簇，那么用维数函数 $d(n) = d_{\mathfrak{V}}(n) = \dim_{\mathbf{F}} F_n(\mathfrak{V})$ 替换 $f(n)$ 更为方便；此时 $f(n) = q^{d(n)}$，其中 $q = |\mathrm{F}|$。如果 $\mathfrak{V} = \operatorname{var} A$ ，那么我们记 $d_{\mathfrak{V}}(n) = d_A(n)$，并称 $d_A(n)$ 为代数 A 的维数函数。因此， $d(n)$ 是簇 $\mathfrak{V}$中所有由 n 个元素生成的代数的维数上确界。

5.1 维数函数的初步估计。我们从对函数 $d(n)$ 增长的一些估计开始。定义单项式 $v \in \mathcal{F}(X)$ 的内容$\operatorname{cont}(v)$ 为有限子集 $Y \subset X$ ，使得 $v \in \mathcal{F}(Y)$，但对于任意真子集 Z of Y， $v \notin \mathcal{F}(Z)$。例如， $\operatorname{cont}((x_3x_2)x_3) = \{x_2, x_3\}$。

给定任意相对自由代数 $F = F(X)$ 和有限子集$J \subset X$，我们用 $F[J]$ 表示在由 X的恒等映射诱导的满同态 $\mathcal{F}(X) \to F(X)$ 下，所有满足 $\operatorname{cont}(v) = J$ 的单项式 v 的像的线性张成。为证明 $F[J]$ 是 $F(X)$ 的子代数，假设 $x \in J$, u, $v \in F[J]$但 $uv \notin F[J]$，也就是说， uv 不依赖于 x。若将 x 映射为 0，而将所有其他变量映射为自身，那么每个 u， v 都会映射为零，但 uv 会映射为自身，矛盾。

引理16。 任意相对自由代数 $F = F(X)$ 都是所有有限 $J \subset X$所对应的子代数 $F[J]$ 的向量空间直和。若 I, J 是 X 的任意子集，且 $|I| = |J|$ 和 维数 $F(J) < \infty$，则 维数 $F[I]$ =维数 $F[J]$。

证明。 由于 $F(X)$ 由 X 生成，因此 $F(X)$ 是子代数 $F[J]$ 的和。现在假设存在一个线性相关关系

$$a_1 + \cdots + a_k = 0, \tag{14}$$

其中所有直和项均非零，且属于不同的直和项。我们可以假设 $a_1 \in F[J]$，使得对于所有直和项， J 的基数为极小值。考虑映射 $X \to F(X)$，它在 J 上为恒等映射，并且当 $x_i \notin J$ 时映射 $x_i \mapsto 0$ 。设 φ 是此映射到 $F(X)$ 的一个自同态扩张。由于每个满足 $s > 1$ 的 a_s 都是生成元乘积的线性组合，且其中至少有一个因子不属于 J，因此我们有$\varphi(a_s) = 0$。此外， $\varphi(a_1) = a_1$。将 φ 应用于 (14)，得到 $a_1 = 0$，这就产生了矛盾。引理第一条陈述的证明至此完成。

第二个陈述也成立，因为存在一个自同构 α of$F(X)$，使得 $\alpha(J) = I$。

□

由于 $F[I]F[J] \subset F[I \cup J]$, 引理16 给出了分次

$$F(X) = \bigoplus_{J \subset X, |J| < \infty} F[J] \tag{15}$$

$F(X)$ 的有限子集半群，并以并运算作为运算。它是一个交换幂等半群。

命题17。 设 $F_n = F(X)$ 是域上有限维相对自由代数，其自由基为 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，并令 d_k =维数 $F[J_k]$，其中$J_k = \{x_1, \ldots, x_k\}$、 $k = 1$、.....、 n。那么

$$\dim F_n = \sum_{J \subset X} \dim F[J] = \sum_{k=1}^{n} d_k \binom{n}{k} \tag{16}$$

证明。 等式（16）中的第一个等号由（15）得出。第二个等号成立，因为集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 中有 $\binom{n}{k}$ 个基数为 k 的子集，并且根据引理16，它们的维数 d_k 都相同。 □

众所周知，幂零簇的维数函数在大O意义下是一个多项式函数。事实上，它等于一个多项式。我们将多项式 $p_k(n)$ 定义为

$$p_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n - i)$$

推论 6. 如果 $\mathfrak{V}$ 是幂零类为 c的幂零簇，那么维数函数$d_{\mathfrak{V}}(n)$ 是一个次数为 c的多项式函数。

证明。 在 $\mathfrak{V}$中的代数里， $c + 1$ 个因子的任意乘积都等于 0。因此，我们在 (16) 中有 $d_{c+1} = d_{c+2} = \cdots = 0$。系数 $d_c \neq 0$，否则， $\mathfrak{V}$中的代数里所有由 c 个因子构成的乘积都必须为零，而 $\mathfrak{V}$ 的幂零类将小于 c。由于 $p_c(n) = \binom{n}{c}$ 是关于 n 的次数为 c的多项式，而当 $k < c$时， $p_k(n) = \binom{n}{k}$ 的次数更低，因此命题得证。（对于 $n < c$，这一论证也成立，因为当 $n < k$时， $p_k(n) = 0$。） □

在线性代数簇的情形下，下面的推论和下一个例修正了 [15,定理12.3], 的估计，使其成为精确估计。

推论7. 设 $\mathfrak{V}$ 是维数函数为 d（n）的局部有限代数簇。若 $\mathfrak{V}$ 不是幂零的，则 d（n） $\geq 2^n - 1$。

证明。 若在公式 (16) 中，对于某个 k，有 $d_k = 0$，则簇 $\mathfrak{V}$ 的幂零类至多为 $k + 1$。因此，根据假设，对每个 $k \geq 1$，都有 $d_k \geq 1$。于是由 (16) 可知

$$d(n) = \dim F_n \geq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

□

例6。 特征为 2 的域上的结合交换簇 $\mathfrak{V}$，再加上恒等式 $x^2 = 0$，是局部幂零的，但不是幂零的。 $F_n(\mathfrak{V})$ 的一组基由乘积 $x_{i_1} \cdots x_{i_s}$ 构成，其中 $s \geq 1$ 且 $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n$。因此， $d(n) = 2^n - 1$。这表明，在一般情况下，推论 7中的估计无法改进。

5.2 单代数的维数函数。 为了估计由有限单代数 A 生成的簇的维数函数，我们需要以下结果。

引理 17. 设 A 是一个域 $\mathbf{F}$ 上阶为 q、具有非零乘法的有限单代数，且 $G = \mathrm{Aut}(A)$ 是 A 的自同构群。记 $t(n)$ 为能够生成直积幂 $A^{t(n)}$ 的最大整数。则

(i) 对于所有充分大的 n，有

$$t(n) \geq \frac{|A|^n}{|G|} \left(1 - O(q^{-n}\right);$$

(ii) 若 A 是极小代数，则对于所有 $n \geq 1$，有

$$t(n) = \frac{|A|^n - 1}{|G|}.$$

证明。 (i) 不妨设 n 至少等于 A 中生成元的个数。对于每个极大真子空间 $A' \subset A$，有 $|A'| = \begin{smallmatrix}|A|\\ q\end{smallmatrix}$，而 A' 中元素的 n 元组数等于 $|A'|^n$。若 A 中真子空间的个数为 s，则生成 A 的 n 元组数至少为 $|A|^n - s|A'|^n = |A|^n(1 - O(q^{-n}))$。

如果其中一个 A 可通过 A 的自同构映射到另一个，我们就称这两个 n-元组生成等价。于是，可以在 A 中找到 $N = \frac{|A|^n}{|G|}(1 - O(q^{-n}))$ 个两两不等价的 n-元组。我们选取一组极大的两两不等价的 n-元组，并将其记为 Y。可以用从 1 到 N 的数字对 Y 中的 n-元组进行编号。

现在，设 A_j 是 A、 $j = 1$、.....、 N 的一个同构副本。在所有 A_j 的直积P 中，我们选取如下元素

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{11}, \ldots, x_{1N}) \\ x_2 &= (x_{21}, \ldots, x_{2N}) \\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (x_{n1}, \ldots, x_{nN}) \end{aligned}$$

其中，第 j 列的坐标是 A 的第 j 个生成元组。

设 B 是由元素 x_1，.....， x_n 生成的 P的子代数，并设 $C(k)$是 B到子代数 $C(k) = A_1 \times \cdots \times A_k \subset P$的投影。我们将

用关于 k 的归纳法证明 B 投影到 $C(k)$。于是，对于 $k=N$，我们将得到 $B=C(N)=P$，从而 P由 n个元素生成，由此证明该引理的断言(i)。对于归纳基础，其中 $k=1$，我们的断言成立，因为x_{11}，……，x_{n1}是 $A_1=C(1)$的生成元。

现在假设 $k>1$，且 B 映射到 C（$k-1$）上。在这种情况下，C（$k-1$）由 x_i 到 C（$k-1$）的投影 z_i 生成。由引理3，任意满同态 φ：C（$k-1$）$\to A$ 的核都是 C（$k-1$）的 $k-2$ 个直因子的乘积。因此，φ是由 C（$k-1$）到因子 A_j 上的投影π_j与同构 $A_j\to A$的复合，其中 $j\le k-1$。z_1，……，z_n在π_j下的像为 x_{1j}，……，x_{nj}。因此，它们在 φ下的像构成一个与元组（x_{1j}，……，x_{nj}）等价的 n元组，其中 $j<k$。

令 D 为 B 到 C（k）上的投影，它由 x_i的像 y_i 生成。如果由 $y_i\mapsto z_i$ 给出的 D 到 C（$k-1$）上的投影 ψ 是D到 C（$k-1$）的同构，那么 n元组（y_1，……，y_n）在任意满同态 $D\to A$下的像也等价于某个元组（x_{1j}，……，x_{nj}），其中 $j<k$。但事实并非如此，因为 D 有一个到 A_k 上的投影，在该投影下，y_1，……，y_n映射为 x_{1k}，……，x_{nk}，而元组（x_{1k}，……，x_{nk}）与上述任何元组都不等价。

因此，ψ有一个必须包含在 A_j中的非平凡核 K。由于 A_k是单代数，我们有 $K=A_k$。因此 $|D|=|A_k||C(k-1|=|C_k|$，从而 $D=C(k)$，因为 D 是 $C(k)$的子代数。

（ii）由于 A 没有非零真子代数，它由任意一组非零元生成。因此可以得到 $|A|^n-1$ 个生成 n元组。若 α 是 A 的非平凡自同构，则 α 的不动点集是 A 的子代数，即 A 或 $\{0\}$。因此，若 $a\in A$ 且 $a\ne 0$，则 $\alpha(a)\ne a$。由此，A 的每个非零元的 G轨道的基数等于G。于是对每个 $n\ge 1$，我们恰好有 $N=\frac{|A|^n-1}{|G|}$ 个生成 n元组的等价类。这证明了 $t(n)\ge\frac{|A|^n-1}{|G|}$。为得到相反的不等式，只需注意到：若到不同因子上的投影，例如$(x_{11},\dots,x_{n1})$与$(x_{12},\dots,x_{n2})$等价，则集合 $x_1,\dots,x_n$不能生成 A的若干副本的直积$P=A_1\times\cdots\times A_t$。事实上，此时存在同构 α：$A_1\to A_2$，使得对 $k=1,\dots,n$有 $\alpha(x_{k1})=x_{k2}$。由此可知，由 $x_1,\dots,x_n$生成的子代数 B到 $A_1\times A_2$的投影，是由同构 α所定义的该乘积的对角线。因此 $B\ne P$。

引理得证。

□

定理 16. 若 A 是域**F</style}上的有限单代数，，且var** A，则存在一个正数 c，使得对所有自然数 n，均有

$$c|A|^n\dim_{\mathbf{F}}A<d_{\mathfrak{V}}(n)<|A|^n\dim_{\mathbf{F}}A.$$

特别地，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{d(n)}=\overline{|A|}$。

证明。由引理 17，存在一个正数 c，使得若 $A^{t(A)}$ 是 n-生成的，则 $t(A)>c|A|^n$。这就证明了左侧的不等式。右侧的不等式——

性来自标准的伯克霍夫不等式（7）。

□

Birkhoff 对有限生成簇 $\mathfrak{V} = \mathrm{var}\ A$ 的维数函数 $d_{\mathfrak{V}}(n)$ 的估计表明，$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{d(n)} < \infty$ 存在。我们将这个极限称为 $\mathfrak{V}$ 的指数 $\mathrm{Exp}(\mathfrak{V})$；若 $\mathfrak{V} = \mathrm{var}\, A$，则称为 $\mathrm{Exp}(A)$。由推论 6、7，指数为 1 当且仅当有限代数 A 是幂零的，否则至少为 2。由定理 16，若 A 是单代数，则该指数为整数。

问题 8。若 A 是有限代数，那么 $\sqrt[n]{d_A(n)}$在$n \to \infty$ 时是否存在极限？$\overline{\mathrm{Exp}}(A)$是否总是整数？如果后者存在，这个极限必须与$d_A(n)$ $d_A(n-1)$的极限一致。

回顾 Birkhoff 函数 $b(n) = (|A|^n - 1)\dim A$（见第 3.1 小节。）

定理 17。设 A 是域$\mathbf{F}$上的有限代数，$A \neq 0$，且 $d(n)$ 是簇 $\mathfrak{V} = \mathrm{var}\, A$的维数函数。那么 $d(n) \leq b(n)$ 以及函数 $d(n)$和 $b(n)$ 相同，当且仅当 A 是没有非平凡自同构的极小代数。

若 A 是极小代数，则代数 $F_n = F_n(\mathfrak{V})$ 是$\frac{|A|^n-1}{|A|\ \mathrm{Aut}}$个与 A同构的理想的直和。

证明。根据定理 6，不等式 $d(n) \leq b(n)$ 总是成立；根据注 3，当A 具有非零真子代数时，该不等式为严格不等式。如果 A是极小代数，且 A 的自同构群 G非平凡，则根据推论 3 和引理 17，该不等式也为严格不等式。

如果代数 A 是极小的并且具有 $G = \{1\}$，那么根据引理 17 (ii)，簇 $\mathfrak{V}$ 对每个 $n \geq 1$ 都包含一个由 n生成的、维数为 $(|A|^n - 1)\dim_{\mathbf{F}} A$的子代数，因此我们得到函数 $d(n)$ 和 $b(n)$ 相等。

对于第二个陈述，我们回顾一下，根据推论 3，F_n 是若干个与 A同构的理想的直和。因此，这是一个具有最大直和项数 $t(n)$ 的 n生成的和。剩下的工作是应用引理 17 (ii)。

□

5.3 任意有限代数的维数函数。对于非单代数，我们得到的指数级估计不太引人注目。

定理 18. 设 A 是域 $\mathbf{F}$ 上的非幂零有限代数，$|\mathbf{F}| = q$，$\mathfrak{V}$ 由 A生成的簇，而 $d(n)$ 是 $\mathfrak{V}$的维数函数。那么$d(n) \geq cq^n$ 对某个 $c > 0$ 和所有正整数 n 均成立，因此 $\mathfrak{V}$的指数至少为 q。

证明。通过选取 A 极小非幂零的情形，我们可以假设 A 有一个极小理想 I，且 A/I 是幂零的。根据引理9，I 不会零化A 的整体。不失一般性，我们可以假设 $AI \neq \{0\}$。此外，我们还可以假设 $n \geq n_0 =$ 维数 A。

回顾左包络代数 $U_L(A)$（见第 3 节2），它是 $\mathbf{End_F}\, I$ 中的一个结合子代数，由所有左乘法算子 $L(a)$生成，其中 $a \in A$。它由 A 在如下线性映射L 下的像 $W \neq \{0\}$ 生成： $A \to \mathbf{End_F}\, I$。

注意，给定任意一组张成 W 的元素 n $L(b_1) \ldots, L(b_n)$，可以选取元素 n $a_1, \ldots, a_n \in A$，张成 A，使得 $L(a_1) = L(b_1) \ldots, L(a_n) = L(b_n)$。事实上，假设 $\{L(b_1) \ldots, L(b_k)\}$, $k \leq n$ 是该集合的一个极大线性无关子集，那么任意满足 $L(a_1) = L(b_1) \ldots, L(a_k) = L(b_k)$ 的 $a_1, \ldots, a_k$ 在 A 中线性无关。若 $X = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ 且 $K =$ 是 L 的核，则 $A = X \oplus K$, $\dim K = m - k$。选取 $\{c_{k+1}, \ldots, c_n\}$ 属于 X，使得 $L(c_{k+1}) = L(b_{k+1}) \ldots, L(c_n) = L(b_n)$。在 Y 中选取一组基 $\{d_{k+1}, \ldots, d_m\}$。现在，所需的集合 $a_1, \ldots, a_n$ 如下：

$$a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} = c_{k+1} + d_{k+1}, \ldots, a_m = c_m + d_m, a_{m+1} = c_{k+1}, \ldots, a_n = c_n.$$

n元组中元素属于W的数量等于$|W|^n$。元组 $w_1, \ldots, w_n$张成 W ，当且仅当不存在极大真子空间 W' 使得$w_1, \ldots, w_n \in W'$。对于每个极大真子空间 $W' \subset W$，元素属于 W'的n元组数量等于 $|W'|^n$，其中 $\overline{|W'|} = \frac{|W|}{q}$。若 s是形如 W'的子空间数量，那么生成 W 的 n元组数量至少为$\overline{|W|^n} - s|W'|^n$。即使 n 的取值不算很大，生成 n的元组数量也大于 $\frac{1}{2}|W|^n$。

–

如果两个张成 W 的 n元组可以通过 U的某个自同构相互映射，就称它们等价。显然，在 W中可以找到多于 $\frac{|W|^n}{2m}$ 个两两不等价的生成 n元组，其中$\overline{m}$ 是自同构群 Aut U的阶。我们用 Y表示任意一个由两两不等价的 n元组组成的这类集合。前面已指出，对于 Y中的每个 n元组，在 A 中都有一个张成A 的原像。选取集合 Z ，使其对于上文所述 Y中的每个 n元组，都由 A中的一个原像组成。因此我们有 $|Z| > c|W|^n$，其中$c = \frac{1}{2m}$；而 Z 中不同的 n元组在U 中的像两两不等价。我们用从 1 到 $N > c|W|^n$的数字为 Z 的 n元组编号。

现在，对于任意 $j = 1$、.....、N，我们取由编号为 $j \leq N$ 的 n-元组（x_{1j}、.....、x_{nj}）张成的 A_j 的一个同构副本 A，以及 I 的一个副本 I_j 和 U 的一个副本 U_j。在所有 A_j 的直积 P 中，我们选取 N-元组

$$x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{iN}),\ i = 1, \ldots, n,$$

设 $y_{1j} = L$（x_{1j}）.....、$y_{nj} = L$（y_{nj}）是 x_{1j}、.....、x_{nj} 在 U_j 中的像。

注意，对于任意 $j' \neq j$ ，关于所选取的 n-元生成元组， $U_{j'}$ 和 U_j 的关系集合是不同的。事实上，若非如此，根据迪克引理，存在这些（结合）代数之间的一个同构，将其中一个元组变换为另一个元组，这与在 Y 和 Z 中选取 n-元组的方式相矛盾。此外，由 $\dim U_{j'} = \dim U_j$ 可知，存在一个含有 n 个变量的结合多项式 $p_{jj'}$ ，其在 $U_{j'}$的所选生成元上的值为零，而在 U_j 上不为零。

考虑由 n 元组 x_1、.. .、x_n 生成的子代数 $B \subset P$。显然， $B \in \mathsf{var}\, A$。我们将证明 B包含所有理想 I_j、$j =$

1、. . . 、 N。这将使 B 的维数至少为指数函数 $c|W|^n \geq cq^n$。为证明这一点，我们假设 $j = 1$。

由于 A_j 不是幂零的，而 A_j/I_j 是幂零的，因此 P 和B 的某些幂属于 I_j的乘积，并且该乘积中存在一个元素 $a \in B$ ，其第一分量 $a_1 \in I_1$非零。我们选择了这样一个 a ，使其非零分量的集合 a_j极小。由于 I_1 是 A_1 中的极小理想，且 B 映射到 A_1，因此可以将 a 和 a_1 分别换成具有相同性質的 a' 和a'_1 ，其中a'_1 是 I_1中的任意非零元素。

如果还有某个 $a_2 \neq 0$，我们回顾结合多项式 p_{ij} 并使用 p_{12}。 p_{12} 在 y中的取值会零化 U_2 的所有选定生成元，但不会零化 U_1的生成元。因此，存在一个 $a'_1 \in I_1$，它不会被 $p_{12}(y_{11}, \ldots, y_{n1})$零化，但 $p_{12}(y_{12}, \ldots, y_{n2})$会零化来自 I_2 的任意元素。注意，线性算子 y_{i1} 和 y_{i2} 分别在 I_1 和 I_2上作用为 x_i的左乘法。因此，将算子 $p_{12}(L(x_1) \ldots, L(x_n))$作用于 a'，会使 a'的第一分量保持非零，但减少其他非零分量的数量。显然，元素 $p_{12}(L(x_1) \ldots, L(x_n))(a')$也属于 B和理想 I_j的乘积，这与 a的选取矛盾。因此， B 包含 I_1的一个非零元素，故 $I_1 \subset B$, 证明完毕。

□

与定理 16 中得到的值相比，定理 18 对 var A 的指数所作的估计显得较弱。有人可能会认为，定理 18 结论中的数 q 可以替换为 A 的主因子的阶的最大值。若果真如此，定理 16 就能轻易推出。遗憾的是，这一设想并不成立。下面给出一个反例。

例7. 这里我们证明，存在一个有限代数 A ，其单石M 的阶 q^d 可以任意大，并且 Exp(A) $= q$。设 A 是域 $\mathbf{F}$ 上阶为 q 的李代数，它是阿贝尔理想 M 与一维子代数 $\langle a \rangle$ 的半直积。根据有限域 $\mathbf{F}$ 上存在次数任意高的不可约多项式, 可知可以选取维数 d任意大的不可约M 。因此， M 是 A 的一个维数为 d 的单石。

设 F_n 是 var A 中秩为 n 的自由代数。由推论 2 和引理 12 可知， F_n^2 是维数为 d 的极小理想的直和。在这些理想中的每一个上， F_n 通过伴随作用起作用，其作用等同于 F_n 在 F_n 的极小表示的相应半直积因子上的投影；更准确地说，它是 F_n 的一个一维因子代数。由于从 F_n 到一维代数的满同态少于 q^n 个，在将 F_n^2 分解为极小理想的直和时，两两不同构的 F_n-模少于 q^n 个。换言之， F_n^2 的齐次分量少于 q^n 个，这些分量是同构的 F^n-模的和。接下来我们需要

引理 18. 设 P 是结合环或李环 R 上的有限左模，且 $P = \underbrace{Q \times \cdots \times Q}_{t}$ 其中 Q 是一个阶为 $m > 0$ 的 R 模。如果 P 能

由 r 个元素生成一个 R 模，那么 $t < mr$。

证明。若固定 $b \in P$，并将其视为函数 $\{1, 2, \ldots, t\} \to Q$，则 b有 $< m$ 个不同的非零值。此时， b 包含于与 Q同构的$< m$ 个对角子模之和中。因此，它生成一个阶为 $< m^m$ 的子模。但这样一来， P的 r 个元素只能生成一个阶为$< m^{rm}$的子模，从而 $m^t < m^{rm}$，进而 $t < mr$。 □

现在我们回到 F_n^2。作为 F_n 上的模，它由自由生成元的 ${}^{n}{}_{(n-1)\ 2}$个乘积（=个交换子）生成。每个齐次分量作为 F_n^2 的直和项，可由同样数目的元素生成。由引理 18，每个分量中维数 d的直和项个数小于 $q^{d\,n\binom{n-1}{2}}$。

由于齐次分量的数量小于 q^n，整个理想 F_n^2 包含 $< q^n q^d n(n-1)/2$ 个维数为 d 的直和项。因此 dim $F_n^2 < q^n q^d d^{n\binom{n-1}{2}}$。取后一个值的 n 次方根，并结合定理 18 的下界估计，我们得出簇 var A 的指数等于 q，远小于 q^d。

5.4 极小簇的自由代数及其子代数。一个极小的局部有限簇 $\mathfrak{V}$ 由一个极小有限代数生成（推论 4）。对于每个 n，我们都有从 $\mathfrak{V}$-自由代数$F_n = F(x_1, \ldots, x_n)$ 到 $\mathfrak{V}$-自由代数 $F_{n+1} = F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ 的标准嵌入，该嵌入在自由生成元 $x_1, \ldots, x_n$ 上恒等。在本小节中，我们利用引理 17，以代数 A 的直幂嵌入来描述这一嵌入。本节最后，我们证明定理 19，其陈述与定理14形成对照。

设 A 是一个乘积非零的有限极小代数， $\mathfrak{V} = \text{var}\, A$。根据推论 3，自由代数 $F = F_n(\mathfrak{V})$ 等于 $A_1 \times \cdots \times A_s$，其中 $A_i \cong A$ 对所有 $i = 1$、.....、 s， $s = f(n)$ 均成立。同样， $F_{n+1} = A_1' \times \cdots \times A_{s'}'$，其中 $s' = f(n+1)$，且所有因子也都同构于 A。

根据引理 5，每个 A_i 都是和 $\sum_{j \in J_i} A_j'$ 的一条对角线，其中指标集 J_i 两两不相交。现在，因子的每个置换 A_i 都定义了 F_n 的一个自同构。此外， F_n 的每个自同构都可以通过映射 $x_{n+1} \mapsto x_{n+1}$ 扩展为 F_{n+1} 的一个自同构。由此可知，对于 $i = 1$、.....、 s，所有对角线A_i在 F_{n+1} 中都是自同构共轭的。

特别地，由这些对角线生成的理想 K_i 必须具有相同的维数，对所有 $i = 1, \ldots, s$ 都如此。由于 $K_i = \sum_{j \in J_i} A_j'$，所有子集 J_i 的基数都相同，我们将其记为 $m = m(n)$。

显然， F_{n+1} 关于标准嵌入下 F_n 的像所生成的理想的因子代数同构于 F_1，而后者在其直积分解中有 $f(1)$个同构于 A的因子。另一方面，由上述可知， F_{n+1} 中由 F_n 生成的理想恰好有 ms 个同构于 A的直因子。因此， $f(n+1) = m(n)f(n) + f(1)$。

现由引理 17 (ii)，对任意 $n \geq 0$，我们有 $f(n) = \frac{|A|^n - 1}{r}$，其中$r = |\mathrm{Aut}\, A|$。因此，

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{r} = m(n)\,\frac{|A|^n - 1}{r} + \frac{|A| - 1}{r},$$

使得对于任意 $n \geq 0$，$m = m(n) = |A|$。换言之，对于任意 $n \geq 1$，标准嵌入 $F_n \to F_{n+1}$ 将 F_n 中每个与 A 同构的直因子，识别为 F_{n+1}的直分解中由 $|A|$ 个因子之乘积的一个对角线。因此，我们用 A的直幂语言，明确描述了从 F_n 到 F_{n+1} 的嵌入。我们还得到，$\mathrm{var}\, A$ 中的可数秩自由代数是这些 A的直幂的嵌入的直极限 $F_1 \to F_2 \to \ldots$；其中每个 F_n 都被对角嵌入到其在 F_{n+1} 中的理想闭包内，而该理想闭包是 F_{n+1} 中 $|A|$ 个与F_n同构的理想的直积。

例8。 极小代数最简单的例子是有限域$\mathbf{F}$，即将其视为自身上的代数。它不仅没有真子代数，也没有非平凡的自同构。在此情形下，F_n 是代数$\mathbf{F}[x_1, \ldots, x_n]$的因子代数；该代数由常数项为零的多项式构成，再商去由所有满足 $x_i^q - x_i$ 的多项式生成的理想，其中 $q = |\mathbf{F}|$。其中的元素都能唯一表示为每个变量的次数小于 q 且常数项为零的多项式。为了将 F_1 写成 $q - 1$ 个与$\mathbf{F}$同构的理想的直积，对于每个非零的 $\alpha \in \mathbf{F}$，我们引入拉格朗日插值多项式

$$f_\alpha(x) = \prod_{\beta \in \mathbf{F} \setminus \alpha} (x - \beta)$$

并考虑 A_α 中所有 $f_\alpha(x)$ 的倍数构成的集合。容易看出，A_α 是一个与 $\mathbf{F}$ 同构的代数，它由所有在每个 $\beta \neq \alpha$ 处取值为零的截断多项式组成。A_α 到 $\mathbf{F}$ 的同构映射可描述如下：给定 $g(x) \in A_\alpha$，将 $g(x)$ 映射到 $g(\alpha)$。

可以看出，将多项式分解为相对于代数直和 A_α 的各分量之和，相当于进行“拉格朗日插值”。

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbf{F} \setminus \{0\}} \lambda_\alpha f_\alpha, \quad \lambda_\alpha \in \mathbf{F}.$$

在将 $F_1 = F(x)$ 标准嵌入到 $F_2 = F(x, y)$ 后，因子 A_α 经历了一个对角嵌入，嵌入其自身在 F_2 中的理想闭包 $A_\alpha F(y)$。反过来，这个闭包可分解为若干与 $\mathbf{F}$ 同构的理想之和。要得到这一分解，现在应对 $F(y)$ 应用同样的论证。

对于任意极小代数 A，从 F_n 中元素的标准表示（即将其表示为自由生成元的非结合多项式）转而按照与 A 同构的直和项 A_j 进行分解，是拉格朗日插值的完整类比。但要显式计算广义拉格朗日函数 $f_j = f_j(x_1, \ldots\ldots, x_n)$，也就是 F_n 中满足

仅在单因子上具有一个非零投影的这类元素，一般而言似乎是一个颇具挑战性的问题。

特别地，关于这些多项式的次数可以说些什么？因此我们提出

问题 9. 给定一个有限生成簇 $\mathfrak{V}$，是否存在常数$c = c(\mathfrak{V})$，使得对任意 n，自由代数 $F_{\mathfrak{V}}(x_1, \dots, x_n)$ 是 $x_1, \dots, x_n$ 中次数至多为 cn 的单项式的线性张成?

我们在下文中应用嵌入 $F_n \to F_{n+1}$ 的描述。

定理 19. 设 A 是一个极小有限代数。则簇 $\operatorname{var} A$ 中的每一个可数代数都可以同构地嵌入可数秩的 $\operatorname{var} A$-自由代数 F 中。

证明. 我们用 F_n、 $n = 1, 2, \dots$ 表示秩为 n、 n =1, 2, . . . 的 var A-自由代数。 F_n 以标准方式嵌入 F_{n+1}。设 F表示可数秩的自由 var A-代数。

可以假设 $A^2 \neq \{0\}$，否则结论显然。我们先给出两个注记。

若代数 A 作为对角线嵌入直积 $P = A_1 \times$中 $\cdots \times A_k$ 个 A 的同构副本 A_i 中，那么对于每个 $\ell = 1$、.....、k，都存在一个子代数 $Q \subset P$，其直分解为 $Q = A'_1 \times \cdots \times A'_\ell$, $A'_i \cong A$，使得 A 是 Q 的对角子代数。事实上，只需取 $\ell = k - 1 \geq 1$ 即可。若 S 是 A 到 P 的子代数 $A_{k-1} \times A_k$ 上的投影，那么 A 是子代数 $Q = A_1 \times \cdots \times A_{k-2} \times S$ 的对角线。

我们需要的第二个注记如下。本节前面已经证明，自由代数 F_n 的每个与 A 同构的直因子，都可以作为对角线嵌入由 F_{n+1} 的 $|A|$ 个直因子组成的直积中。反过来，这些直因子中的每一个都是 F_{n+2} 的 $|A|$ 个直因子之乘积中的对角线，因此 F_n 的一个直因子会成为由 F_{n+2} 的 $|A|^2$ 个直因子组成的乘积的对角线，依此类推。

现在设 B 是 F_n 的子代数，并且 B 也是有限代数 $C \in \operatorname{var} A$ 的子代数。那么根据推论 3， B 是直积 $A_1 \times \cdots \times A_k$， C 是直积 $A'_1 \times \cdots \times A'_l$ 和 $F_n = A''_1 \times \cdots \times A''_m$，其中这些乘积中的所有因子都与 A 同构。根据引理 5，每个 A_i 都是某个 $\sum_{j \in J_i} A'_j$ 的对角线，其不相交集合为 J'_i；类似地， A'_i 是 $\sum_{j \in J'_i} A''_j$ 的对角线。

根据第二个注记， A_i 成为 F_m 的某个直分解中的 $S_i = \sum_{j \in J''_i} A'''_j$ 的对角线，其中可以选择 $m > n$，使得对于任意 i 和 i'，都有 $|J''_{i'}| \geq |J_i|$。根据第一个注记， A_i 是 S_i 中某个子代数 B_i 的对角线，该子代数有 $|J_i|$ 个直因子，因此 $B_i \cong \sum_{j \in J_i} A'_j$，故 B_i 的和包含 B，且与 C 同构。因此，对于任意两个有限代数 $B \subset C \in \operatorname{var} A$，以及将 B 嵌入 F_n 的嵌入，都存在 $m \geq n$，使得将 B 嵌入 F_n 的嵌入可扩展为将 C 嵌入 F_m 的嵌入。

现在令 B 为 var A 中的一个可数代数。由于它是局部有限的，我们有一个有限代数的递增序列 $0 = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \dots$，使得$\cup_{i=1}^{\infty} B_i = B$，并且有 $F_1 \subset F_2 \subset \dots$，使得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = F$。我们已经证明了

如果我们有一个嵌入 ι_i： $B_i \to F_{n_i}$，则可以将其扩展为一个嵌入ι_{i+1}： $B_{i+1} \to F_{n_{i+1}}$，其中 $n_{i+1} > n_i$。由于每个 ι_{i+1} 限制在 B_i上时都等于 ι_i ，因此可以得到将整个 B 嵌入 F 的嵌入，如所要求。 □

5.5 结合代数簇中的维数函数。 这里我们得到两个有限生成结合代数簇的乘积的维数函数的显式公式。

给定域 **F** 上的两个结合代数簇 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$，定义它们的乘积 $\mathfrak{VU}$ 为满足所有如下形式恒等式的结合代数类： $u(x_1, \dots, x_m)v(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = 0$，其中 $u(x_1, \dots, x_m) = 0$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的恒等关系，而 $v(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = 0$ 是 $\mathfrak{V}$中的恒等关系。簇的这种乘法满足结合律，我们将除全体结合代数构成的簇之外的所有结合代数簇在此乘法下组成的半群记为 **Ass(F)**。例如，所有类为 c的结合幂零代数组成的簇，是由恒等式 $x = 0$给出的平凡簇的第 $c+1$ 次幂。

由于本小节只考虑结合代数，因此这里只需使用不含常数项的结合多项式。它们构成自由结合代数 $F = F[x_1, x_2, \dots]$。

注12. 设代数 F^1 由 F 添加单位元 1 得到。Bergman - Lewin [6] 的一个定理指出， F^1 的所有非零真理想在理想乘法下构成一个自由半群。随后，他们在定理 7 中证明， T-理想构成该半群的一个自由子半群。注意，在定理 7 的证明中，作者只使用了使子代数 F 保持不变的 F^1 的自同构和自同态。因此，尽管 T-理想的集合小于 F 的词理想集合，但完全相同的证明使我们可以断言， F 的非零词理想在乘法下构成一个自由半群。因此，半群 ***Ass*(F)** 是自由的。

我们从以下观察开始。

命题 18。 设**F** 为有限域。则**F** 上的有限生成结合代数簇的集合是 $Ass(\mathbf{F})$中的自由子半群

证明。 我们有 $\mathfrak{V} = \mathrm{var}\ A$和 $\mathfrak{V} = \mathrm{var}\, B$，其中 A和 B是某些有限代数。于是，簇格中的并 $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$ 由 $A \times B$生成。因此，$\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$ 是有限生成簇。现在，设 U、 V分别是自由结合代数的可数秩代数 F 中对应于 $\mathfrak{U}$和$\mathfrak{V}$的词理想。那么， $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$ 由 $U \cap V$定义，而 $\mathfrak{UV}$ 由 UV定义。显然，$U \cap V/UV$是 F/UV 的一个零乘积理想。因此， $\mathfrak{UV}$中的每个代数都是 $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$ 中的一个代数与一个阿贝尔理想的扩张。在结合代数中，局部有限代数被局部有限理想扩张所得的代数仍是局部有限的[13, 10。2.1]。因此， $\mathfrak{UV}$ 是局部有限簇。根据（[19, 22]）或注 9，簇 $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$中幂零代数的幂零类由常数 c所界。因此， $2c+1$ 界定了 $\mathfrak{UV}$ 中幂零代数的幂零类。现在，如果局部有限簇中的幂零代数的幂零类

结合代数的幂零类有界，那么该簇就是有限生成簇（Kruse - L'vov 定理（见 [19, 22]））。$\mathfrak{UV}$也是如此。因此，有限生成结合代数簇的集合是自由半群 Ass(**F**)的子半群。

如果两个簇的乘积 $\mathfrak{UV}$ 是有限生成的，那么 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$ 都是有限生成的，因为有限生成结合代数簇的子簇是有限生成的 [19, 22]。由于半群 Ass(**F**)由所有不可分解簇自由生成，因此有限生成簇的子半群由有限生成的不可分解簇生成。于是，该子半群本身是自由的。

□

定理 20. 设 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$ 是域 F 上结合代数的局部有限簇，其维数函数分别为 $d_1(n)$ 和 $d_2(n)$。则乘积 $\mathfrak{UV}$ 的维数函数 $d(n)$为 $(n-1)d_1(n)d_2(n) + n(d_1(n) + d_2(n) + 1)$。

证明。众所周知，见 [9], ，自由结合代数是自由理想环。特别地，自由模的每个子模在 $F(X)$上都是自由的。代数 $F(X)$是自身上的自由模，其自由生成元为 X。如果按标准方式将 1 添入 $F(X)$，则由此得到的代数 $F'(X)$是一个秩为 1 的自由$F(X)$-模。如果 s是 J在 $F(X)$中的余维数，那么 $s+1$就是 J在 $F'(X)$中的余维数。现在设 L是秩为 r的自由 $F'(X)$-模，且J是 $F(X)$中余维数为 s的左理想。那么 J在$F'(X)$中的余维数为 $s+1$。我们有 $L \cong (F'(X))^r$(直积幂)，并且 $L/JL \cong (F'(X)/JF'(X))^r = (F'(X)/J)^r$。因此，如果 J是 $F(X)$中余维数为 s的左理想，那么左子模 JL 在 L 中的余维数为

$$\dim L/JL = (s+1)r. \tag{17}$$

接下来，我们将使用 Lewin [21]所建立的自由群子群秩的 Schreier 公式的一个类似公式。Lewin 的公式指出，若 $F(X)$ 是域 **F** 上秩为 n 的自由结合代数，M 是有限秩自由（左）$F(X)$-模，且 N是 M中余维数有限的子模，则 N 是自由的 $F(X)$-模，并且

$$\text{rank } N = (n-1)(\dim(M/N) + 1) + \text{rank } M \tag{18}$$

回到簇 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$，设 U 和 V 分别是自由结合代数 $F = F(X)$中对应于 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$ 的词理想，其秩为n。那么 $d(n) =$维数 $F/UV =$维数 $F/V +$维数 V/UV。这里第一项等于 $d_2(n)$。于是 V 是一个自由 $F(X)$-模，并且由公式（18），秩 $V = (n-1)(d_2(n)+1) + n$。由于 U在 $F(X)$中的余维数为 $d_1(n)$，公式（17）给出维数 $V/UV = (d_1(n)+1)((n-1)(d_2(n)+1) + n)$，因此

$$\begin{aligned} d(n) &= (d_1(n)+1)((n-1)(d_2(n)+1)+n) + d_2(n) \\ &= (n-1)d_1(n)d_2(n) + n(d_1(n) + d_2(n) + 1). \end{aligned}$$

□

注13. (i) 由命题 18 和定理 20 可知，若有限生成簇 $\mathfrak{V}$ 的指数为 e，则有限生成簇 $\mathfrak{V}^2$ 的指数为 e^2 。(ii) 根据 Bergman-Lewin 定理，等式 $\mathfrak{UV} = \mathfrak{VU}$成立，当且仅当簇 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{V}$ 都是同一个结合代数簇的某个幂。尽管如此，由定理 20 可知，对于任意一对局部有限结合代数簇 $\mathfrak{U}$ 和$\mathfrak{V}$，乘积的维数函数 $\mathfrak{UV}$和 $\mathfrak{VU}$ 相等。(iii) 由推论 6 和定理 20 可知，若两个结合代数的幂零簇的幂零类分别为 c_1 和 c_2，则它们的乘积的幂零类恰为 $c_1 + c_2 + 1$。

5.6 一些补充的数值估计。我们以关于局部有限簇中增长的几点评论结束第 5 节。

命题 19。如果域**F** 上的局部有限簇 $\mathfrak{V}$ 包含一个有非零乘积的代数，那么其中两两不同构的 n-生成代数的数量，其增长关于 n 至少是指数级的。

证明。根据定理 18，如果 $\mathfrak{V}$ 包含一个非幂零有限代数 A，那么秩为 n 的 $\mathfrak{V}$-自由代数 F_n 的阶至少为 cq^n，其中 $c > 0$ 且 $q = |\mathbf{F}|$。然而，根据引理 3.3， F_n 的主列各截面的维数有界。因此，主列中的理想数量至少为 $c'q^n$，其中某个 $c' > 0$，于是我们至少有 $c'q^n$ n-生成的 F_n 的因子代数，且它们的维数各不相同。

如果 $\mathfrak{V}$ 包含一个具有非零乘法的有限幂零代数 A，那么它包含幂零簇 $\operatorname{var} A$ （类为 $c \geq 2$）的自由代数 F_n 。在 [4, 公式 20]) 中，幂 F_n^c 的维数下界为 kn^c，其中某个 $k > 0$；而根据（[4, 公式 (50)] ， F_n 的两两不同构因子代数的数量下界为

$$q^{\frac{(\dim F_n^c)^2}{4} - n^2 - 1}.$$

由于 $c \geq 2$，这个数的下界为 $q^{\kappa n^4}$，其中 $\kappa > 0$。

□

注 14. 一般而言，命题 19 给出的简单指数估计无法改进。根据推论 3，簇 $\operatorname{var} A$ 中所有由 n 个元素生成的代数都是 A 的直积幂 $A^{t(n)}$，其中 A 是有限极小代数；由 Birkhoff 定理， $t(n)$ 可由 n 的某个指数函数所界定。因此，簇 $\operatorname{var} A$ 中不同构的 n 元生成代数的数量也有相同的上界。

注 15. 回顾一下，若代数簇 $\mathfrak{V}$ 中所有 $\mathfrak{V}$-自由代数的子代数本身都是 $\mathfrak{V}$-自由的，则称该簇为施赖尔簇。关于代数施赖尔簇的综述及相关成果的参考文献，见 [28]。命题 19 的简单估计表明，具有非平凡乘法的局部有限代数簇不可能是施赖尔簇。事实上，若该簇是局部幂零的，那么秩为 $n \geq 2$ 的自由代数中含有零乘法的二维子代数。否则，$F_n(\mathfrak{V})$ 中不同维数的理想至少有 $c'q^n$ 个，而其中秩为 $k = 1$、.....、n 的不同构 $\mathfrak{V}$-自由子代数仅有 n 个。

我们以简短讨论本节的内容作结：有限域$\mathbf{F}$上的局部有限代数簇 $\mathfrak{V}$ 的自由代数 $F_n(\mathfrak{V})$的自同构群的阶。这些阶增长得很快。为了了解其增长速度，令 $\alpha(n) = |\mathrm{Aut}\ F_n(\mathfrak{V})|$。下述不等式给出了一个粗略的下界：$\alpha(n) \geq q^{d(n-1)}$，其中 $q = |\mathbf{F}|$，因为任意映射

$$x_1 \mapsto x_1, \ldots, x_{n-1} \mapsto x_{n-1}, x_n \mapsto x_n + a, \text{ where } a \in F_{n-1} = F(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

都可以扩张为 F_n的一个自同构。

利用推论7，这一论证推出了下述第一个断言。

注16. 如果 $\mathfrak{V}$是非幂零的局部有限簇，那么 $\alpha(n)$的增长至少与双指数一样快。如果 $\mathfrak{V} = \mathrm{var}\, A$，对于有限代数 A，$\alpha(n)$的增长不会快于双指数。

第二个断言由定理 6 中的伯克霍夫估计得出，因为所有同态 $F_n \to F_n$ 的数量等于 $|F_n|^n = q^{nd(n)}$。

注 16 的断言与 $\mathfrak{V}$ 为幂零的情形形成对比，因为在该情形下，$\alpha(n)$ 的增长由一个单指数所界定。精确公式见 [4, 第 8] 节：

$$\alpha(n) = |\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})| q^{n(d(n)-n)}$$

在这种情况下，根据推论 6，维数 $d(n)$ 是一个多项式。

6 有限代数的泛性质

在接下来的小节中，我们将列举若干在几乎所有 代数中都成立的有限代数性质。这些性质称为泛性质。此外，在本节末尾，我们将比较三类中m维有限代数的数量随 $m \to \infty$ 的增长率：所有非结合代数、所有幂零代数以及所有可解代数。

6.1 预备说明。 通俗地说，如果某个类 $\mathcal{C}$ 的代数中“几乎每个”对象都具有某种性质，就称该性质是泛的。根据类$\mathcal{C}$的不同，“几乎每个”的含义也有所不同。同时，若若干性质都是泛的，那么它们的有限交也总是泛的。此外，有时证明某种性质是泛的，比给出实例更容易

。例如，我们将在下文证明，以下性质对有限非结合代数都是泛的： A 是单代数， A是单生成代数， A 没有非平凡自同构。因此，泛有限代数具备所有这些特征。

下文采用以下正式定义来界定“泛”。令 $\varphi(m)$ 表示有限域$\mathbf{F}$上不同构 m维代数的数量。给定一个抽象性质 $\mathcal{P}$，记 $\varphi_{\mathcal{P}}(m)$ 为具有性质 $\mathcal{P}$ 的 m维代数的数量，其中域为$\mathbf{F}$ 。如果

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\varphi_{\mathcal{P}}(m)}{\varphi(m)} = 1,$$

那么我们称 $\mathcal{P}$ 泛。粗略地说，也可以说泛代数满足 $\mathcal{P}$。

回顾一下，每个 m 维代数 A 都可以视为一个 m 维向量空间 V 上的 $(2,1)$ 型张量。相应的 $(2,1)$ 型三线性函数T定义为 $T(f,x,y) = f(xy)$，其中 $x, y \in V$, $f \in V^*$，且 V^*是 V 的对偶空间。相对于 V 的一组基 $E = (e_1, \ldots, e_m)$，张量T有 m^3 个坐标 $c_{ij}^l = e^l(e_i e_j)$，其中 e^l 属于对偶基 E^*。各个坐标 c_{ij}^ℓ 称为结构常数。 A 中基向量的乘法由结构 m^3元组 C_E 给出：

$$C_E = (c_{ij}^l)_{i,j,l=1}^m \text{ so that } e_i e_j = \sum_{l=1}^m c_{ij}^l e_l, \quad i,j = 1,\ldots,m \tag{19}$$

反过来，对于任意的 m^3 元组 $C_E = (c_{ij}^l)_{i,\,j,\,l=1}^m$，这些公式唯一确定了 V 上的一个双线性乘法。

令 $\mathcal{C}$ 为所有 m^3 元组 $(c_{ij}^l)_{i,\,j,\,l=1}^m$ 的集合。若两个元素 $(c_{ij}^l)_{i,\,j,\,l=1}^m$ 和 $((c'_{ij})^l)_{i,\,j,\,l=1}^m$ 是相对于某些基 E 和 E' 的两个同构代数的结构 m^3 元组，则称它们在 $\mathcal{C}$ 中等价。由于具有相同结构 m^3 元组的两个代数之间存在显然的同构，这种关系是传递的，因此确实是一种等价关系。出于同样的原因，一个等价类等于单个 m 维代数 A 相对于 A 的所有基 E 所对应的全部结构 m^3 元组 C_E 的集合。

因此，一个等价类中的 m^3 元组数量不超过一个 m 维向量空间的基数，也就是说，其上界为 $|\mathrm{GL}(V)|$；并且， m 维代数的同构类集合与 $\mathcal{C}$ 中的等价类集合之间存在一一对应关系。

如果集合 $\mathcal{C}$ 是若干个等价类的并，我们就称其子集 $\mathcal{D}$ 是完美的。

引理 19. 设 $\mathcal{D}$ 是集合 $\mathcal{C}$的一个子集。假设抽象类 $\mathcal{K}$ 中的每一个代数都有一个基 E，使得结构 m^3元组 C_E 属于 $\mathcal{D}$。再假设来自 $\mathcal{D}$ 的每一个 m^3元组都定义了 $\mathcal{K}$中的一个代数。则对于 $\mathcal{K}$中两两非同构代数的个数 r，下列结论成立

(i) $\frac{|\mathcal{D}|}{m}\,\mathrm{GL}(\mathbf{F})| \le r \le |\mathcal{D}|$; (ii) 若子集 $\mathcal{D}$ 是完美的，且 $\mathcal{K}$ 中的每一个代数都没有非平凡自同构，则 $r = \frac{|\mathcal{D}|}{m}\,\mathrm{GL}(\mathbf{F})|$。

证明。 (i) 第一个结论由以下事实得出： m 维 $\mathbf{F}$ 上代数的同构类与结构 m^3-元组的等价类之间存在对应关系，且每个等价类的大小均不超过 $|\mathbf{GL}_m(\mathbf{F})|$。

(ii) 注意，包含在 $\mathcal{D}$ 中的每个等价类恰好包含 $|\mathbf{GL}_m(\mathbf{F})|$ 个元素。事实上，否则代数 $A \in \mathcal{K}$ 相对于 A 的不同基 E 和 E' 必须具有相同的结构常数 m^3-元组。因此，映射 $E \to E'$ 将可扩展为 A 的一个自同构，这就产生了矛盾。

□

对于阶为 q 的域 $\mathbf{F}$ ，群 $\mathbf{GL}_m(\mathbf{F})$ 的阶等于

$$q^{m^2}\prod_{i=1}^{m}(1-q^{-i}).$$

由于乘积 $\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^{-i})$ 以几何级数般的速度收敛到正数常量 d，因此有

$$|\mathrm{GL}_m(\mathbf{F})| = q^{m^2-c+O(q^{-m})}, \tag{20}$$

其中

$$c = -\log_q d > 0 \text{ and } -\log_q \prod_{i=m+1}^{\infty}(1-q^{-i}) = O(q^{-m}) > 0. \tag{21}$$

为简化记号，我们用 $\exp_q(N)$ 表示 q^N， N 为实数。

6.2 一般代数没有非平凡自同构。关于有限代数的泛性质，我们的第一个定理如下。

定理 21。设 $\varphi(m)$ 表示域 $\mathbf{F}$ 上维数为 m 、阶为 q 的代数中两两非同构者的数量，而 $\psi(m)$ 表示其中具有非平凡自同构的代数数量。利用式 *(21)* 中的 c ，可得

$$\varphi(m) = \exp_q(m^3 - m^2 + c - O(q^{-m})).$$

此外， $m \to \infty$， $\frac{\psi}{\varphi}(m)\,\varphi(m)$ 以指数级速度趋于 *0*。

证明。 域$\mathbf{F}$ 上有限维代数 V 的每个自同构 β 都是一个线性映射 $V \to V$，它使 V 成为多项式代数 $\mathbf{F}[t]$ 上的模。该模的生成元的最少个数称为自同构 β 的秩 r 。

首先，我们估计用以定义使 β 为自同构的那些代数的结构 m^3-元组的个数。

步骤 *1.* 我们固定一个秩为 $r \le \frac{4m}{5}$ 的非奇异线性算子 β。由[4, 引理 10] 可知，在 V 中存在子空间 $U \subset W$，使得 $s = \dim U \ge \frac{m}{15}$ 且 $V = W + \beta(U)$ 为直和。此时，可以在 V 中选取一个基 $E = (e_1, \ldots, e_m)$，使得前 s 个向量 $e_1, \ldots, e_s$ 构成 U 中的一个基，而后 s 个向量 $e_{m-s+1} = \beta(e_1) \ldots, e_m = \beta(e_s)$ 构成 $\beta(U)$ 中的一个基。

如果已知相对于 E 的结构常数，它们定义了除 e_i, $e_j \in \beta(U)$ 之外的所有乘积 $e_i e_j$，则后 ms^2 个常数也被唯一确定，因为

$$e_i e_j = \beta(e_k)\beta(e_l) = \beta(e_k e_l)$$

对于 e_k, $e_l \in U \subset W$, 且右端已知。因此，在基 E 中定义那些以 β 为自同构的代数的不同结构常数 m^3-元组至多有 $\exp_q(m^3 - ms^2) \le \exp_q\left(m^3 - \frac{m^3}{225}\right)$ 个。容许该自同构 β 的非同构代数的个数具有同样的上界。线性算子 β 的个数显然以 $\exp_q(m^2)$ 为界，因此由引理 19 (i)，步骤 1 给出的容许秩为 $r \le \frac{4m}{5}$ 的自同构的代数少于 $\exp_q\left(m^3 - \frac{m^3}{225} + m^2\right)$ 个。

步骤 *2*。现在考虑空间 V 上满足条件 $r > \frac{4m}{5}$ 的线性算子 β。由 [4, 命题 6] 可知，V 包含一个维数为 $s = 2r - m$ 的不变子空间 U，在该子空间上 β 是数量算子，并且 U 在 V 中有一个 β-不变直补。因此，$\mathrm{GL}(V)$ 中的中心化子 $C(\beta)$ 包含一个与 $\mathrm{GL}(U)$ 同构的子群。由此，$C(\beta)$ 的指数满足

$$[\mathrm{GL}(V) : C(\beta)] \le \exp_q(m^2 - (2r-m)^2) = \exp_q(4r(m-r)). \tag{22}$$

我们来估计秩为 $r > \frac{4m}{5}$ 的不同线性算子 β 的数量 $N(r)$。在典范基下，β 是一个分块对角方阵，其中有一个大小为 $m-s$ 的方块，另一个则是数量块 λI_s。这类矩阵属于维数为 $(m-s)^2 + 1 = 4(m-r)^2 + 1$ 的子空间。考虑方程 (22)，可得

$$N(r) \le \exp_q(4(m-r)^2 + 1)\exp_q(4r(m-r)) = \exp_q(4m(m-r) + 1). \tag{23}$$

再次将 10] 引理 [4, 应用于此类 β，我们在 V中找到子空间 Z 和 W，使得 $Z \subset W$，维数为 $W = \left[\frac{2m+r}{3}\right]$, $V = W \oplus \beta(Z)$，且

$$l = \dim Z = m - \left[\frac{2m+r}{3}\right] \ge \frac{m-r}{3}.$$

再次，我们在 V 中选取一组基 $E = (e_1, \ldots, e_m)$，使其前 ℓ 个向量构成 Z 的一组基，而其余向量是前面那些向量在 β 作用下的像，因此

构成 $\beta(Z)$ 中的一组基。根据 [4, 引理， 11], 存在一个 r 维子空间$U' \subset V$，在该子空间上， β 的作用等同于数乘 λ。它与 Z的交为零。令 $Y = U' \cap W$。由格拉斯曼公式， Y的维数不小于 $\left[\frac{2m+r}{3}\right] + r - m$。由于 $r \geq \frac{4m}{5}$，我们有 $\dim Y \geq \frac{11m}{15} - \frac{2}{3}$。我们可以假设 Y 的一组基包含在基 E 中。

若 $e_i \in Y$ 且 $e_j = \beta(e_k) \in \beta(Z)$，那么在假设 β 是空间 V上某个代数的自同构的条件下，我们有

$$e_i e_j = \lambda^{-1}\beta(e_i)\beta(e_k) = \lambda^{-1}\beta(e_i e_k),$$

因此，所有这类乘积 $e_i e_j$ （以及乘积 $e_j e_i$，其中 $e_i \in Y$ 且 $e_j \in \beta(Z)$）都由 β 及其他基向量对的乘积决定。因此，要定义具有自同构 β 的代数，至多需要

$$m^3 - 2m\left(\frac{11m}{15} - \frac{2}{3}\right)\frac{m-r}{3} = \frac{23m^3 + 22m^2 r + 20m^2 - 20mr}{45}$$

个标量。因此，我们至多得到

$$N(r)\exp_q \frac{23m^3 + 22m^2 r + 20m^2 - 20mr}{45} \leq$$

$$\exp_q\left(\frac{23m^3 + 22m^2 r + 20m^2 - 20mr}{45} + 4(m(m-r)+1)\right)$$

个具有秩$r > \frac{4m}{5}$ 的自同构的、 m维非同构代数。

—

右侧指数中的函数关于 r是线性的， r 的系数为 $22m^2 - 200m$。因此，当 $m \geq 10$ 时，它随 r 增大。由此可知，当 m 充分大时，该函数在区间 $[0, m-3]$上的最大值在 $r = m-3$处取得。在这种情况下，非同构代数的数量有如下上界：

$$\exp_q \frac{23m^3 + 22m^2(m-3) + 60 + 540m + 45}{45} = \exp_q\left(m^3 - \frac{22m^2}{15} + 12m + \frac{7}{3}\right).$$

我们需要对 $r = m-1$ 和 $r = m-2$ 给出更好的估计。在这两种情况下，按照之前的方式选取 Z 和 W，我们有维数 $Z = 1$；在 W 中存在一个维数为 $t \geq m-3$ 的 β-不变子空间 Y，且 β 在其上作为标量作用。同时，我们像上面一样选取基 E。如果基向量 e_i 属于 Y 和 $e_n = \beta(e_1) \in \beta(Z)$，那么 $e_i e_n = \beta(e_i)\beta(e_1) = \beta(e_i e_1)$。因此， $e_i e_n$ 的结构常数由 β 以及常数 c_{ij}^k （其中 $i, j < n$）决定。对于 $e_j e_i$，同样的论证也成立。因此，对于 $r = m-1$ 和 $r = m-2$ 的每一个取值，至多得到 $\exp_q(m^3 - 2m(m-3))$ 个具有自同构 β 的非同构代数。

根据 (23)，和 $N(m-1) + N(m-2)$ 小于 $\exp_q(8m+2)$。因此，存在秩为 $m-1$ or$m-2$ 的自同构的非同构代数的数量小于 $\exp_q(m^3 - 2m(m-3) + 8m + 2)$。

注意，对于非零乘积代数，映射 $\lambda\mathrm{id}$ 只有在 $\lambda = 1$ 时才是自同构。因此，为了在 $r \geq \frac{4m}{5}$ 的情况下得到累积估计，我们只需将从 0 到 $m-1$ 的 r 对应的估计求和。我们将得到，对于充分大的 m，存在秩为 $r > \frac{4m}{5}$ 的自同构的代数数量不超过 $\exp_q(m^3 - \frac{7m^2}{5} - 1)$。

结合情形 1 的估计，我们得到这样的代数少于

$$\exp_q \frac{m^3 - 7m^2}{5} \tag{24}$$

个，这些代数都具有非平凡自同构。

步骤 *3*。现在我们可以完成证明了。令 $\mathcal{X}$ 为所有结构 m^3-元组组成的集合，它们对应于具有非平凡自同构的代数。由最后一个估计和引理 19 (i) 可知，完美集 $\mathcal{X}$ 的基数小于 $\exp_q(m^2)\exp_q\left(m^3 - \frac{7m^2}{5}\right) = \exp_q\left(m^3 - \frac{2m^2}{5}\right)$。因此，$\mathcal{C}$ 中 $\mathcal{X}$ 的完美补集 $\mathcal{Y}$ 的基数至少为 $\exp_q(m^3) - \exp_q\left(m^3 - \frac{2m^2}{5}\right)$，即 $\exp_q(m^3 - O(\exp_q(-m^2)))$。

根据对 $\mathcal{Y}$ 的这一估计、引理 19 (ii) 以及公式 (20)，维数为 m 且没有非平凡自同构的非同构代数的数量为

$$\frac{\mathrm{Card}(\mathcal{Y})}{|\mathrm{GL}_m(\mathbf{F})|} = \exp_q(m^3 - m^2 + c + O(q^{-m})).$$

由于具有非平凡自同构的代数数量被 $\exp_q\left(m^3 - \frac{7m^2}{5}\right)$ 所界定，$\varphi(m)$ 的公式已经得到证明。

比较前两句中的估计，我们得到了定理第二个断言的证明。

□

6.3 一般代数是单代数。 有限线性代数的一个颇为令人惊讶的泛性质如下。

定理 22。 有限泛代数是单代数。

证明。设 V 是以 $E = (e_1, \ldots, e_d, \ldots, e_m)$ 为基的向量空间，且 $U = \langle e_1, \ldots, e_d \rangle$ 是 V 的一个 d 维子空间。我们用 $\mathcal{T}(U)$ 表示由 $\mathcal{C}$ 中满足以下条件的 m^3 元组 $(c_{ij}^l)_{i,j,l=1}^m$ 所组成的子集：相对于基 E，由 $(c_{ij}^l)_{i,j,l=1}^m$ 定义的代数中，U 是一个理想。

对于 $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq m$，我们有 $e_i e_j \in U$。利用（19），只要满足 $k > d$，我们就有 $c_{ij}^k = 0$。这类方程的数量为 $dm(m-d)$。结构常数的类似条件由乘积 $e_j e_i$ 给出，其中 $i \leq d$。我们必须减去这两个系统中相同方程的数量，其值为 $1 \leq i \leq j \leq d$。因此，这类限制的总数等于 $2dm(m-d) - d^2(m-d) = d(m-d)(2m-d)$。所以至多有

$$\exp_q(m^3 - d(m-d)(2m-d)) = \exp_q(m^3 - d^3 + 3md^2 - 2m^2 d)$$

具有 d维理想的m维代数。

三次多项式 $p(x) = -x^3 + 3mx^2 - 2m^2x + m^3$ 的导数$p'(x) = -3x^2 + 6mx - 2m^2$ 在$[1, m-1]$线段上有一个零点 $x_0 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) m$，并且 $p(x_0) \leq \frac{4m^3}{5}$。$p(x)$ 在该线段两端的值分别等于 $m^3 - 1 + 3m - 2m^2$ 和 $m^3 - (m-1)^3 + 3m(m-1)2 - 2m^2(m-1)$。当 m 足够大时，这两个值都小于 $m^3 - 2m^2 + 3m$，因此对于所有足够大的 m 值，$p(x)$ 在 $[1, m-1]$ 上的最大值从上方受到约束。

由此可知，对于所有充分大的 m，包含一个 d 维理想的 m 维代数的数量小于 $\exp_q(m^3 - 2m^2 + 3m)$。对$d = 1$、.....、$m - 1$ 求和可知，包含真理想的非同构 m 维代数的数量小于 $m \exp_q(m^3 - 2m^2 + 3m)$。与定理 21 给出的所有 m 维代数的数量相比，这个数量在指数级意义上可忽略不计，正如所需。

□

6.4 泛代数是循环的。尚不清楚有限域上的泛有限维代数是否具有一维子代数。下面给出的估计足以证明较弱的断言。若代数 A 可由一个元素生成，我们就称它是循环的。

定理23。有限域上的泛有限维代数是循环的，且不含维数大于 *1* 的真子代数。

证明。 证明分为几种情况。

在情形 1 中，我们证明，$\exp_q(\frac{m^3}{2} + m^2)$ 是所有一维子空间都是子代数的代数数量的上界。

在情况2中，我们证明，$m\exp_q(m^3 - m^2 - 2m)$ 是具有维数从 2 到$m2$ 的子代数的非同构代数数量的上界。

在情况3中，我们证明，$m \exp_q(m^3 - \frac{3}{2}m^2)$ 是具有维数为 ℓ 的子代数的非同构代数数量的上界，其中 $\frac{m}{2} < \ell \leq m - 1$。

将以上三个数量相加，对于足够大的 m，我们得到少于 $q^{m^3 - m^2 - \frac{3m}{2}}$ 个非同构的 m 维代数。在剩余情况下，存在一个不是子代数的一维子空间 $\langle a \rangle$。在这种情况下，a 生成一个维数为 $\ell \geq 2$ 的子代数。但除非 $\ell = m$，否则不存在这样的子代数。

由于根据定理 21，维数为m 的所有非同构代数的数目大于 $q^{m^3 - m^2}$，我们得出：不能由一个元素生成的代数所占比例小于 q^{-m}，对所有足够大的 m均成立。类似地，情况2和情况3的估计证明，一般代数没有维数大于1的真子代数。因此，该定理的陈述由这三种情况的估计得出。

现在我们逐一讨论这三种情况。

情况 1. 我们考虑 m 维代数，其中所有一维子空间都是子代数。固定一组基 $E = (e_1, \ldots, e_m)$。

对于任意 $e_i \in E$, $e_i^2 = c_{ii}^i e_i$, $i = 1, \ldots, m$。现在若 $1 \le i, j \le m$，则存在 $\sigma_{ij} \in \mathbf{F}$，使得 $(e_i + e_j)^2 = \sigma_{ij}(e_i + e_j)$。因此

$$\sigma_{ij}(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^2 = e_i^2 + e_j^2 + e_i e_j + e_j e_i = c_{ii}^i e_i + c_{jj}^j e_j + e_i e_j + e_j e_i$$

因此，乘积 $e_j e_i$ 由乘积 $e_i e_j$ 和常数 $c_{ii}^i, c_{jj}^j, \sigma_{ij}$ 确定。因此，乘法由 $i \le j$ 的常数 c_{ij}^k 以及满足 $i < j$ 的常数 σ_{ij} 唯一确定。这类常数的总数为

$$\frac{m^2(m+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m^3}{2} + \frac{m^2 - m}{2}.$$

因此，情形 1 中两两不同构代数的数量小于 $\exp_q\left(\binom{m^3}{2} + m^2\right)$，如所需。

—

情形 2. 现在，对于每个 $2 \le \ell \le \frac{m}{2}$，我们估计向量空间 V 上具有一个 ℓ 维子代数的非同构代数 A 的数量。为此，我们固定 V 中的一个基 $E = (e_1, \ldots, e_m)$，并估计结构 m^3 元组 $\mathcal{D}$ 所成集合的基数，其中代数 A 在基 E 下由结构 m^3 元组 $(c_{ij}^k)_{i,j,k=1}^m \in \mathcal{D}$ 给出，且具有一个 ℓ 维子代数。那么，$\mathcal{D}$ 是一个完美集，因为它不依赖于基的选择。

令 U 为 V 的一个 ℓ 维子空间。选取 V 的一组辅助基 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_m)$，使得 $(f_1, \ldots\ldots, f_\ell)$ 是 U 的一组基。记 $\mathcal{D}_F$ 为所有 m^3 元组 $C' = \{(c')_{ij}^k\}$ 组成的集合，其中由 C' 关于 F 定义的代数包含线性空间 U 作为子代数。

结构 m^3 元组 $\{(c')_{ij}^k\}$ 属于 $\mathcal{D}_F$，当且仅当它满足条件 $(c')_{ij}^k = 0$，其中 $i, j \le \ell$ 且 $k > \ell$。总共有 $\ell^2(m - \ell)$ 个这样的等式。因此，集合 $\mathcal{D}_F$ 中的每个 m^3 元组均由 $m^3 - \ell^2(m - \ell)$ 个常数确定，所以 $\mathcal{D}_F$ 的基数至多为

$$\exp_q(m^3 - \ell^2(m - \ell)).$$

将 $\mathcal{D}_F$ 中的每个 m^3 元组用基 E 表示，得到一个集合 $\mathcal{D}_U$，其元素为 m^3 元组 $C = \{c_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^m$，使得空间 U 成为代数 A 的子代数，其中该代数在基 E 下由 C 给出。显然，$\mathcal{D}$ 是集合 $\mathcal{D}_U$ 的并集，其中 ℓ 遍历 V 的所有 ℓ 维子空间 U。

对所有 ℓ 维子空间求和，其数量小于$q^{m\ell}$，因此我们在 $\mathcal{D}_U$ 中得到的元素少于 $\exp_q(m^3 - \ell^2(m - \ell) + m\ell)$。令 $\mathcal{D}'$（分别为 $\mathcal{D}''$）表示定义具有（分别为不具有）非平凡自同构的代数的 $\mathcal{D}$ 子集。

由 $\mathcal{D}'$ 中的 m^3-元组定义的代数数量，根据公式 (24)，当 m 足够大时，小于 $\exp_q\left(m^3 - \frac{7m^2}{5}\right)$。根据引理19(ii)和公式 (20)，由 $\mathcal{D}''$ 定义的代数数量等于

$$\frac{|\mathcal{D}''|}{|\mathrm{GL}(V)|} \le \frac{|\mathcal{D}|}{|\mathrm{GL}(V)|} \le \exp_q(m^3 - \ell^2(m - \ell) + m\ell - m^2 + m)$$

当 m 足够大时。因此，当 m 足够大时，数量小于

$$\exp_q\left(m^3-\frac{7m^2}{5}\right)+\exp_q(m^3-\ell^2(m-\ell)+m\ell-m^2+m)<\exp_q(m^3-m^2-2m)$$

具有一个 ℓ 维子代数的非同构代数，因为 $\ell\in[2,\frac{m}{2}]$。对该线段中的 ℓ m $_q$ m^3- 求和，得到上界 m^2-2m exp ( )，正如所需。

情形 3。我们估计具有维数为 ℓ 的子代数的 m 维代数的数量，其中 $m>\ell>\frac{m}{2}$。这样的一个 m 维代数 A 可以通过在一个 ℓ 维子代数 B 的基础上添加 $m-\ell$ 个基向量，并取所有结构常数 c_{ij}^k（除那些满足 $i,\ j\le\ell$ 的结构常数外）得到。总而言之，只需有 $m(m^2-\ell^2)$ 个额外的常数即可。

根据定理 21，非同构的 ℓ $_q$ m $m^2-\ell^2$ + 维代数少于 $\exp_q(\ell^3-\ell^2+const)$ 个。因此，具有 ℓ-维子代数的非同构代数至多有 exp (( )) 个。对于所有充分大的 m 和 $\frac{m}{2}<\ell\le m-1$，这个值小于 $\exp_q(m^3-\frac{3}{2}m^2)$。对所有这样的 ℓ 求和，得到的两两非同构代数少于 $m\exp_q\left(m^3-\frac{3}{2}m^2\right)$ 个，正如所需。

现在证明完成了。

□

该证明没有提供关于一维子代数的信息。因此我们提出以下

问题 10. 设 $\omega(m)$ 表示域上阶为 q、维数为 m 且两两不同构、没有真子代数的代数的数量。是否有

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{\omega(m)}{q^{m^3-m^2}}>0?$$

6.5 泛代数的拟恒等式。 给定域 $\mathbf{F}$ 上的绝对自由代数 $\mathcal{F}=\mathcal{F}(x_1,x_2,\dots)$ 以及非结合多项式

$$u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_m(x_1,\dots,x_n),v(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{F},$$

公式

$$\begin{aligned}&(\forall x_1,\dots,x_n)u_1(x_1,\dots,x_n)=0\&\dots\&u_m(x_1,\dots,x_n)=0\\&\longrightarrow v(x_1,\dots,x_n)=0\end{aligned}\tag{25}$$

称为拟恒等式。如果代数 A 在 $\mathbf{F}$ 上满足（25），则称其满足该拟恒等式；如果对任意 $a_1,\dots,a_n\in A$，等式 $u_1(a_1,\dots,a_n)=0,\dots,u_m(a_1,\dots,a_n)=0$ 在 A 中成立，都能推出 $v(a_1,\dots,a_n)=0$。

注意，在（25）中，允许 $m=0$，也就是说，陈述的引言部分可以为空。在这种情况下，（25）就是一个恒等关系 $v(x_1,\dots,x_n)=0$。因此，如果一个代数 B 满足某个

代数 A 的所有准恒等式，那么它也满足 A的所有恒等式。用 qvar$A$表示由 A生成的拟簇，也就是满足 A所满足的所有准恒等式的、基于$\mathbf{F}$ 的所有代数组成的类。有 qvar$A \subset$ var A。

一个非常简单的准恒等式例子： $x^2 = x \longrightarrow x = 0$ 在任何没有非零幂等元的代数中都成立。

根据定义，满足某组准恒等式的代数的笛卡尔积和子代数也满足这些准恒等式。因此，由 Birkhoff 定理 7 可知，对于任意代数 A，var A 的自由代数都属于 qvar$A$ 。对于有限代数 A，拟簇 qvar$A$ 的结构非常简单：qvar$A$ 中的任意 $C \in$（不一定是有限的）都是 A 的某个笛卡尔幂的子代数（见第 11] 节中的推论 9）。因此，如果有限代数 A 满足 var $A =$qvar$A$，那么仅用这两种运算就足以得到 var A 中的任意代数；无需构造同态像。令人惊讶的是，我们有

定理 24. 等式 $\mathrm{var}\, A = \mathrm{qvar} A$ 是维数为 m 、定义在有限域 $\mathbf{F}$ 上的代数 A 的一项泛性质。

证明。 由定理23，有限一般代数 A 除一维子代数外没有真子代数，并且由定理 22， A是单的。因此 A是内在半单代数。由定理11，簇 var A 中的任意有限代数 B 都是与 A的子代数同构的代数的直积，从而 $B \in$ qvar$A$。由于簇 var A 是局部有限的，故 var A 中的每个代数也满足 A的所有准恒等式。于是我们得到包含关系 var $A \subset$ qvar$A$。由于相反的包含关系是平凡的，定理得证。

□

6.6 幂零代数与可解代数的数目。 回顾 $\varphi(m)$表示阶为 q的域$\mathbf{F}$ 上不同构的 m维代数的数目。设 $\nu(m)$（设 $\sigma(m)$）为其中幂零（相应地，可解）代数的数目。由下面的结果可知

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log \nu(m)}{\log \varphi(m)} = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\log \sigma(m)}{\log \varphi(m)} = \frac{2}{3}.$$

命题 20。 维数为 m 的幂零代数 $\nu(m)$ 的数量等于$\exp_q \left(\binom{m^3}{3} + O(m^2) \right)$。

—

证明。 在维数为 m 的幂零代数 A 中，存在一列理想 $\{0\} = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_m = A$，其因子的维数均为 1，并且对于 $j = 1, \ldots, m$，条件 $AI_j \subset I_{j-1}$ 和 $I_j A \subset I_{j-1}$ 成立。反过来，具有这样一列理想的代数 A 是幂零的（见第 2.1 节）。

因此， A 是一个具有基 $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ 的代数，并且对于任意 $j = 1, \ldots, m$，乘积 $e_j e_\ell$ 和 $e_\ell e_j$ 都是基向量的线性组合，其指数为 $< j$。我们用 $\mu(n)$ 表示在基 E 下满足这些条件的结构常数集合的数量。

对于代数 A/I_1，我们有一个基 $\{e_2 + I_1, \ldots, e_m + I_1\}$，满足类似的条件，从而相对于此基得到 $\mu(m-1)$ 个结构 m^3 元组，

也就是说，不带指数的结构常数 c_{ij}^{k} 等于 1。为了得到 A 的所有常数，我们可以用任意形如 c_{ij}^{1} 的常数补全它们，其中 i、$j>1$（c_{1j}^{ℓ} 和 c_{i1}^{ℓ} 为零）。这些附加常数有 $\exp_q((m-1)^2)$ 种选取方式。由此可得 $\mu(m) = \exp_q((m-1)^2)\,\mu(m-1)$，因此由归纳法可得 $\mu(m) = \exp_q(\lambda(m))$，其中 $\lambda(m) = (m-1)m(2m-1)/6$。该值为 $\binom{m^3}{3} + O(m^2)$。根据引理 19 (i) 和等式 (20)，$\overline{\nu(m)}$ 也可以写成 $\exp_q\left(\binom{m^3}{3} + O(m^2)\right)$。

□

注 17. 在经典簇中，维数为 m 的不同构幂零代数的数量也增长迅速，而维数为 m 的单代数却寥寥无几。但对于任意线性代数，考察定理 22 和命题 20 可知，情况恰恰相反：单代数的数量约为幂零代数数量的立方！

命题 21. 维数为 m 的可解代数的数量 $\sigma(m)$ 等于 $\exp_q\left(\binom{2m^3}{3} + O(m^2)\right)$。

证明. 设 A 是一个维数为 m 的可解代数，则它存在一个由子理想组成的合成列 $\{0\} = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_m = A$，其所有因子的维数均为 1，且满足条件 $I_j^2 \subset I_{j-1}$，其中 $j = 1, \ldots, m$。反过来，具有此类合成列的代数 A 是可解的。

因此，A 是一个代数，它有一个基 $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$，使得对于任意的 $j = 1, \ldots, m$, $\ell \le j$，乘积 $e_j e_\ell$ 和 $e_l e_j$ 都是基向量的线性组合，其指数为 $< j$。我们用 $\rho(n)$ 表示相对于基 E 满足这些条件的结构 m^3-元组的数量。

对于 I_{m-1} 的基 $E' = (e_1, \ldots, e_{m-1})$，具有所给性质的结构 m^3-元组有 $\rho(m-1)$ 个。附加常数 c_{mj}^{ℓ} 和 c_{im}^{ℓ} 只需满足条件 $c_{mj}^{m} = 0$ 和 $c_{im}^{m} = 0$。因此，附加常数的选取有 $\exp_q(2m^2 - 3m + 1)$ 种可能，即 $\rho(m) = \exp_q(2m^2 - 3m + 1)\rho(m-1)$ 在这种情况下，由归纳法可得 $\rho(m) = \exp_q\left(\binom{2m^3}{3} + O(m^2)\right)$。

根据引理 19 (i) 和等式 (20)，$\overline{\sigma(m)}$ 也可以写成 $\exp_q\left(\binom{2m^3}{3} + O(m^2)\right)$。

□

因此，维数为 n 的非同构可解代数的数量，约等于该维数下非同构幂零代数数量的平方。

参考文献

[1] Artamonov, V.A., 论无子代数的素数维有限代数，《代数杂志》 **42**(1976), 247-260.

[2]Bahturin,Y.; Diniz, D.; Martinez Correa, D.; Yikihide Yasumura, F，多项式恒等式与有限素型泛代数，《塞尔迪卡数学杂志》，《塞尔迪卡数学杂志》，(2025)[3] Bahturin,Y.; Olshanskii, A，有限李环中的恒等关系，《苏联数学汇刊》96(138) (1975), 543–559.[4] Bahturin, Y.; Olshanskii, A, 幂零代数的泛性质，《国际代数与计算杂志》，(2025)，已接受。[5] Bakhturin, Yu. A.; Strade, H，局部有限维单李代数，《俄罗斯科学院数学汇刊》81 (1995), 137 - 161[6] Bergman, George M.; Lewin, Jacques，自由理想环的理想半群（通常）是自由的，《伦敦数学学会杂志》11 (1975), 21–31.[7] Birkhoff, G，论抽象代数的结构，《剑桥哲学学会数学学报》31(1935), 433–454.[8] Burgin, M. S，线性 Ω-代数的 wreath 积，《高等院校数学学报》1971年第9期，9-17.[9]Cohn, P. M，自由环及其关系，Academic Press，1985，xxii+588.[10] Cohn, P. M，泛代数，Harper & Row 出版社，纽约-伦敦，1965，xv+333 页。[11]《德涅斯特笔记》。《环与模理论未解决问题》，第4版，新西伯利亚，1993.[12] Higgins, P. J，带多个算子的群，《伦敦数学学会会刊》6 (1956), 366-416.[13] Jacobson, N，《环的结构》，AMS Coll. Publ.，37 (1956)，299页。[14] Herstein I. N，《非交换环》，Carus 专著，15(1994)，202页。[15] Hobby, D., McKenzie, R，《有限代数的结构》，当代数学，76(1988)，普罗维登斯，RI。[16] Kegel, O. H.; Wehrfritz, B. A. F，局部有限群，《北荷兰数学文库》3，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-伦敦，(1973)，xi+210 页。[17] Kharlampovich, O.; Sapir, M，簇中的算法问题，《国际代数与计算杂志》5 (1995), 379-602.[18] Kov´acs, L.G., Newman, M.F，群的交叉簇，《伦敦皇家学会学报 A》292(1966), 530 -536。

[19] Kruse, R. L. 有限环满足的恒等式，《代数学杂志》26（1973），298–318.[20] Kurosh, A. G.，《一般代数学讲义》，Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit.，莫斯科，1962，396页；英文译本：Chelsea Publishing Co.，纽约，1963，335页。[21] Lewin J.，《自由代数和自由群代数上的自由模：施赖尔技巧》，美国数学会汇刊，145（1969），455-465.[22] L’vov, I.，《结合环簇 I》，《代数与逻辑》12.3（1973），150–167.[23] L’vov, I.，《有限替代环生成的簇》，《代数与逻辑》17.3（1978），195–198.[24] Lyndon, R.，《有限代数中的恒等式》，美国数学会会刊5（1954），8-9.[25] Malcev, A. I.，《具有相同定义关系的代数》（俄文），数学文集，新辑26(68)（1950），19–33.[26] Malcev, A. I.，《代数系统》，施普林格出版社，数学科学基础丛书192（1973），322页。[27] Medvedev, Yu.，《代数的交叉簇》，《苏联数学文集》43（1982），347–376.[28] Mikhalev, A.A.; Shpilrain, V.; Yu, Jie-Tai，《组合方法：自由群、多项式与自由代数》，CMS 数学丛书19（2004），315页。[29] Mursky, V. L.，《三值逻辑中存在一个具有有限基的闭类，但它没有有限恒等式完备系统》，苏联数学文献6（1965），1020–1024[30] Neumann, B. H.，《群中的相同关系 I》，数学年刊114（1937），506 - 525.[31] Neumann, H.，《群簇》，施普林格出版社纽约公司，纽约，1967，192页[32] Oates-Williams, S/; Powell, M. B.，《有限群中的相同关系》，《代数学杂志》1（1964），11–39.[33] Oates-Macdonald, S.; Vaughan-Lee, M. R.，《使一个交叉的簇》，澳大利亚数学会杂志，A辑，26（1978），368 - 382.[34] Polin, S.，《有限代数的恒等式》，《西伯利亚数学杂志》17.6（1976），992–999.

[35] Vaughan-Lee, M.R., 可置换簇中的幂零性，《普遍代数与格论》，数学讲义，**1004**（1983）293 - 308。[36] Warning, E., 关于 *Chevalley* 先生上述工作的备注，汉堡大学数学研讨班论文集。11（1935），76 - 83。