arXiv:2603.09710v1 [math.FA] 10 Mar 2026

(λ^+)-内射巴拿赫空间

TOMASZ KANIA 和 GRZEGORZ LEWICKI

ABSTRACT. 在一篇配套论文（*Studia Math.*，2023年）中，我们证明了对于每个 $\lambda \in (1,2]$，都存在 ℓ_∞ 的一个 (λ^+)-内射重新赋范，使其不是 λ-内射，从而在该范围内确立了 Pe-lczy´nski 一项被遗忘的定理。互补范围 $\lambda \in (2,\infty)$ 尚未解决。

在本文中，我们解决了这一遗留情形：对于每个 $\lambda > 2$，我们构造一个巴拿赫空间，它是 (λ^+)-内射的，但不是 λ-内射的，由此完成了 Pe-lczy´nski 关于所有 $\lambda > 1$的定理。该构造只用到一种方法：‘零和’子空间 $\Sigma_N(Y) \subset Z_\infty^N$，它在保持不可达性的同时，将相对投射常数乘以 $\mu_N = 2 - 2/N$。反复应用这一操作，可将问题归约到配套论文已处理的范围 $(1,2]$。由于迭代中出现的外围空间是 ℓ_∞的有限 ℓ_∞-和，所得例子可以实现为 ℓ_∞的子空间。

我们还证明，若两个巴拿赫空间各自都与其自身的平方等距同构，且每个空间都等距同构于另一个空间的一个 1-可补子空间，那么它们的巴拿赫–马祖尔距离至多为 $9+6\sqrt{3}$。因此，我们得到估计 $d_{\mathrm{BM}}(L_\infty[0,1],\ \ell_\infty) \leqslant 9+6\sqrt{3}$，从而改进了 Korpalski 和 Plebanek 最近的一个结果。

1. INTRODUCTION

Isbell 和 Semadeni [4] 证明，每个无限维 1-内射巴拿赫空间都包含一个超平面，该超平面对每个 $\varepsilon > 0$ 都是 $(2+\varepsilon)$-内射的，但不是 2-内射的；他们还在脚注中提到，Pe-lczy´nski 已证明，对每个 $\lambda > 1$，都存在一个 $(\lambda+\varepsilon)$-内射空间 $(\varepsilon > 0)$，它不是 λ-内射的。遗憾的是，Pe-lczy´nski 这一结果的证明已无从考证。

在我们的姊妹论文 [5], 中，我们通过对 ℓ_∞进行适当的重新赋范，证明了关于 $\lambda \in (1,2]$ 的结果。情形 $\lambda \in (1,\ 2)$ 利用了 ℓ_∞ 上奇异泛函的超平面核，并结合 Baronti–Franchetti [2] 和 Blatter–Cheney [3]的结果；端点$\lambda = 2$ 则通过奇异泛函的范数可达性性质加以处理，从而重新得到 Isbell–Semadeni 的原始定理。

在 [5] 的结尾，我们指出，互补范围 $\lambda \in (2,\ \infty)$ 对我们而言仍是个谜。超平面方法本质上仅适用于 $\lambda \leqslant 2$，因为巴拿赫空间中任意超平面的投射常数至多为 2。要突破这一障碍，就必须研究余维数更高（但仍有限）的子空间。

在本文中，我们提出一种不同且完全显式的方法。给定 1-内射空间 Z 中的闭子空间 Y，其相对投射常数为 $\alpha \in (1,2]$ 未取到，如 [5]所构造），我们引入零和子空间

$$\Sigma_N(Y) := \Big\{(y_1,\ldots,y_N) \in Y_\infty^N : \sum_{i=1}^N y_i = 0\Big\} \subset Z_\infty^N.$$

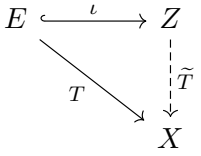
关键结果（引理 3.2）是，$\lambda(\Sigma_N(Y)\ Z_\infty^N) = \mu_N \cdot \lambda(Y,\ Z)$，其中 $\mu_N = 2 - 2/N$，而且——至关重要的是——下确界的不可达性得以保留。由于 $\mu_N < 2$，因子 μ_N 可以迭代：经过 m 次应用后，相对投射常数等于 $\mu_N^m \cdot \alpha$，通过适当选择 N 和 m，可以使其与任意给定的 $\lambda > 2$ 相匹配。

关于内射空间和可分内射空间的背景知识可参见 [1]；将 1-内射空间刻画为 $\ell_\infty(\Gamma)$ 上压缩投影的值域，归功于 Kelley [6]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 46B04；次要分类 46B25、46E15、46B03。

Key words and phrases. 内射巴拿赫空间、投射常数、内射模数、零和子空间、巴拿赫–马祖尔距离、等距平方空间。

IM CAS（RVO 67985840）。



$\|\widetilde{T}\| \leqslant \lambda\|T\|.$

FIGURE 1. 定义 λ-内射性的延拓性质：定义在子空间 $E \subset Z$ 上的每个有界算子 $T\colon E \to X$，都能沿包含映射 ι 延拓，且范数增加不超过因子 λ。

结合 [5]，的结果，我们得到 Pe-lczy´nski 定理的完整解决。

定理 A. 对于每个 $\lambda > 1$，都存在一个巴拿赫空间，它是(λ^+)-内射的，但不是 λ-内射的。

情形 $\lambda = 1$比较特殊：在 $\mathbb{R}$上，Lindenstrauss [8]证明了每个 (1^+)-内射实巴拿赫空间都是 1-内射的。本文不讨论相应的复标量问题，该问题至今仍未解决。

我们的第二个结果涉及巴拿赫–马祖尔距离。回顾一下，对于同构巴拿赫空间 X 和 Y，巴拿赫–马祖尔距离 定义为

$$d_{\mathrm{BM}}(X,Y) := \inf\{\|T\|\,\|T^{-1}\| : T\colon X \to Y \text{ is an isomorphism}\}.$$

一个巴 空间 X 若可通过满射线性等距映射与自身等距同构，则称为等距平方 .

定理 B. 设 X 和 Y 为巴拿赫空间，满足

(i) X 与 Y 的一个1-补子空间等距同构，且 Y 与 X的一个1-补子空间等距同构；(ii) X 和 Y 均为等距平方。

则 $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) \leqslant 9 + 6\sqrt{3}$。

推论。 $d_{\mathrm{BM}}(L_\infty[0,1],\ell_\infty) \leqslant 9 + 6\sqrt{3} \approx 19.39$。

由于 $(3+\sqrt{2})^2 = 11 + 6\sqrt{2} \approx 19.49 > 9 + 6\sqrt{3}$，这改进了 Korpalski 和 Plebanek [7]给出的显式上界。

结构安排。 除非另有明确说明，巴拿赫空间均视为定义在固定标量域 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 上。第2–4节展开定理 A 的证明。第5节证明定理 B。

2. PRELIMINARIES: INJECTIVITY AND PROJECTION CONSTANTS

我们记

$$\mathcal{P}(F,E) := \{P\colon F \to E : P|_E = \mathrm{Id}_E\}$$

表示集 合，即从巴拿赫空间 F 到闭子空间 $E \subset F$ 上的有界投影，以及

$$\lambda(E,F) := \inf\{\|P\| : P \in \mathcal{P}(F,E)\}$$

表示 相对投影常数，即 E 在 F中。

定义 2.1. 设 X 为巴拿赫空间，且 $\lambda \geqslant 1$。

(i) X 是 λ-内射的，当且仅当对于任意巴拿赫空间 Z、任意子空间 $E \subset Z$以及任意有界算子 $T\colon E \to X$，都存在一个延拓 $\widetilde{T}\colon Z \to X$，满足 $\|\widetilde{T}\| \leqslant \lambda\|T\|$。(ii) X 是(λ^+)-内射的，当且仅当它对所有 $\varepsilon > 0$都是$(\lambda+\varepsilon)$-内射的。

引理2.2。 设 $X_1,\dots,X_n$ 是1-内射巴拿赫空间。那么有限 ℓ_∞-和 $X_1 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty X_n$ 是1-内射的。

证明。设 $E \subset F$为巴拿赫空间，且 $T = (T_1, \dots, T_n)$: $E \to X_1 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty X_n$ 有界。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$由于每个 X_j 都是 1-内射的，因此存在 T_j: $F \to X_j$的一个延拓，使得 T_j且 $\|T_j\| = \|T_j\| \leqslant \|T\|$。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$定义 $T{:=}(T_1, \dots, T_n)$。那么 T延拓了 T，并且 $\|T\| = \max_j \|T_j\| \leqslant \|T\|$。□

引理2.3。设 Z 是一个1-内射巴拿赫空间，且 $Y \subset Z$ 是一个闭子空间，满足$a := \lambda(Y, Z) < \infty$。若定义 $\lambda(Y, Z)$ 的下确界无法取到，则 Y是(a^+)-内射的，但不是 a-内射的。

证明。固定 $\varepsilon > 0$。根据 a的定义，存在 $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(Z, Y)$，使得 $\|P_\varepsilon\| < a + \varepsilon$。设 $E \subset F\widetilde{\ }$为巴拿赫空间，并设 T: $E \to Y$ 是有界的。由于 Z 是 1- 内射的，存在 T: $F \to Z\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$，它将 T 延拓为 $\|T\| = \|T\|$。于是 $T{:=}\, P_\varepsilon T$: $F \to Y$延拓了 T（因为 $P_\varepsilon|_Y = \mathrm{Id}_Y$），且$\|\widehat{T}\| \leqslant \|P_\varepsilon\|\,\|T\| < (a + \varepsilon)\|T\|$。由于 $\varepsilon > 0$是任意的， Y是(a^+)-内射的。

若 Y是 a-内射的，将定义应用于有序对 $Y \subset Z$ 和恒等映射 Id_Y: $Y \to Y$，便可得到 $P \in \mathcal{P}(Z, Y)$，其中 $\|P\| \leqslant a$，这与不可达性矛盾。□

3. The zero-sum construction

对于非零巴拿赫空间 X 和整数 $n \geqslant 2$，记 $X_\infty^n := X^n$，并赋予其范数 $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|$，再定义零和子空间

$$\Sigma_n(X) := \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in X_\infty^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\Big\}.$$

我们还定义中心化投影

$$S_n^X(x_1, \dots, x_n) := \Big(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\Big)_{i=1}^n$$

并令 $\mu_n := 2 - 2/n$。

引理 3.1. 设 $X \neq \{0\}$ 是巴拿赫空间，且 $n \geqslant 2$。则 S_n^X是从 X_∞^n到 $\Sigma_n(X)$ 的投影，并且 $\|S_n^X\| = \mu_n$。

证明。 $S_n^X x$ 的各坐标之和等于 $\sum_i x_i - \sum_j x_j = 0$，因此 $S_n^X x \in \Sigma_n(X)$。若$x \in \Sigma_n(X)$，则 $\sum_j x_j = 0$，从而 $S_n^X x = x$。因此， S_n^X是到 $\Sigma_n(X)$上的投影。

对于上界，令 $M := \max_i \|x_i\|$。那么，对每个 i，

$$\begin{aligned}\Big\|x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\Big\| &= \Big\|\frac{n-1}{n}x_i - \frac{1}{n}\sum_{j\neq i} x_j\Big\| \\ &\leqslant \frac{n-1}{n}\|x_i\| + \frac{1}{n}\sum_{j\neq i}\|x_j\| \leqslant \frac{n-1}{n}M + \frac{n-1}{n}M = \mu_n M.\end{aligned}$$

对 i 取最大值得到 $\|S_n^X x\|_\infty \leqslant \mu_n \|x\|_\infty$。

对于反向不等式，取满足 $\|u\| = 1$ 的 $u \in X$，并令 $x := (u, -u, \dots\dots, -u) \in X_\infty^n$。那么 $\|x\|_\infty = 1$ 且$\sum_j x_j = (2 - n)u$。 $S_n^X x$ 的第一个坐标等于 $u - (2 - n)u/n = \mu_n u$，其余各坐标均等于 $-u - (2 - n)u/n = -2u/n$。因此 $\|S_n^X x\|_\infty = \mu_n$，从而得到$\|S_n^X\| \geqslant \mu_n$。□

下面的引理是本文的核心机制。

引理 3.2. 设 $Y \subset Z$ 为巴拿赫空间，满足 $a := \lambda(Y, Z) < \infty$，并假设定义 $\lambda(Y, Z)$ 的下确界未达到。固定 $n \geqslant 2$，并令 $W := \Sigma_n(Y) \subset Z_\infty^n$。那么

$$\lambda(W, Z_\infty^n) = \mu_n\, a,$$

且定义 $\lambda(W, Z_\infty^n)$ 的下确界无法取得。

证明。上界。固定 $\varepsilon > 0$ 并选择 $Q_\varepsilon \in \mathcal{P}(Z,\ Y)$，使得 $\|Q_\varepsilon\| < a + \varepsilon$。定义逐坐标算子 $\widehat{Q}_\varepsilon\colon\ Z_\infty^n \to Y_\infty^n$, $\widehat{Q}_\varepsilon(z_1,\ \ldots,\ z_n) := (Q_\varepsilon z_1,\ \ldots,\ Q_\varepsilon z_n)$，使得 $\|\widehat{Q}_\varepsilon\| = \|Q_\varepsilon\|$。令 $P_\varepsilon := S_n^Y \circ \widehat{Q}_\varepsilon\colon\ Z_\infty^n \to W$。由于 S_n^Y投影到 $\Sigma_n(Y) = W$ 上，算子 P_ε映入 W。如果 $w \in W$，则 $w \in Y_\infty^n$, $\widehat{Q}_\varepsilon w = w$，且 $S_n^Y w = w$；因此 $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(Z_\infty^n,\ W)$。根据引理 3.1,

$$\|P_\varepsilon\| \leqslant \|S_n^Y\|\,\|\widehat{Q}_\varepsilon\| = \mu_n \|Q_\varepsilon\| < \mu_n(a+\varepsilon).$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，$\lambda(W,\ Z_\infty^n) \leqslant \mu_n a$。

下界与不可达性。令 $P \in \mathcal{P}(Z_\infty^n,\ W)$ 为任意元素。对于一个置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，令 $U_\sigma\colon\ Z_\infty^n \to Z_\infty^n$ 为坐标置换 $U_\sigma(z_1,\ \ldots,\ z_n) := (z_{\sigma^{-1}(1)}\ \cdots,\ z_{\sigma^{-1}(n)})$。每个 U_σ 都是满射线性等距映射，且 $U_\sigma(W) = W$。定义对称化

$$\widetilde{P} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} U_\sigma^{-1}\, P\, U_\sigma.$$

$\widetilde{P}$于是 $P \in \mathcal{P}(Z_\infty^n,\ W)$，$\|\widetilde{P}\| \leqslant \|P\|$，且 $\widetilde{P}$与每个坐标置换都可交换。

对于 $z \in Z$ 和 $1 \leqslant j \leqslant n$，令 $e_j(z) \in Z_\infty^n$ 表示一个向量，其第 j 个坐标为 z，其余坐标均为零。定义算子 $A,\ B\colon\ Z \to Y$，规定对于$\widetilde{P}$$z \in Z$，$P(e_1(z)) = (Az,\ Bz,\ \ldots,\ Bz)$。这是可行的，因为 P 在固定第一坐标的置换下保持不变，$\widetilde{P}(e_1(z))$因此 $\widetilde{P}(e_1(z))$ 的第 $2,\ \ldots,\ n$ 个坐标必须相等。由于 $P(e_1(z)) \in W \subset Y_\infty^n$，$Az$和 Bz都属于 Y。对于任意 j，取满足 $\sigma(1)$ 的 $\sigma = j$，可得$\widetilde{P}$$e_j(z) = U_\sigma e_1(z)$，且 $P(e_j(z)) = U_\sigma P(e_1(z))$，因此$\widetilde{P}$$P(e_j(z))$ 的第 j 个坐标为 Az，其余各坐标均为 Bz。由线性性，对于 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ 以及每个 i，都有$\widetilde{P}$$(Pz)_i = Az_i + B\sum_{j\neq i} z_j$。由于 $Pz \in W$，其各坐标之和为零：对于所有 z，$(A+(n-1)B)\sum_i z_i = 0$，因此 $A+(n-1)B = 0$。另一方面，对于 $y \in Y$，$e_1(y) - e_2(y) \in W$，且 P 固定 W，所以考察第一个坐标可得 $Ay - By = y$。

设 $R := A - B\colon\ Z \to Y$，则有 $R \in \mathcal{P}(Z,\ Y)$。解出 $A+(n-1)B = 0$和 $A - B = R$，得到 $A = \frac{n-1}{n}R$和 $B = -\frac{1}{n}R$，因此 $(\widetilde{P}z)_i = R(z_i - \frac{1}{n}\sum_j z_j)$，即 $\widetilde{P} = \widehat{R} \circ S_n^Z$，其中$\widehat{R}$$\widetilde{P}(z_1,\ \ldots\ldots,\ z_n) = (Rz_1,\ \ldots\ldots,\ Rz_n)$ 满足 $\|\widehat{R}\| = \|R\|$。由引理 3.1，$\|\widetilde{P}\| \leqslant \|R\|\,\mu_n$。

我们断言等号成立。固定 $\eta > 0$，并选取满足 $\|u\| = 1$ 和 $\|Ru\| > \|R\| - \eta$的 $u \in Z$。对于 $x := (u,\ -u,\ \ldots\ldots,\ -u)$，引理 3.1 的证明给出 $S_n^Z x = (\mu_n u,\ -\frac{2}{n}u,\ \ldots\ldots,\ -\frac{2}{n}u)$，因此$\widetilde{P}$$\|\widetilde{P}\| \geqslant \|\widetilde{P}x\|_\infty = \mu_n\|Ru\| > \mu_n(\|R\| - \eta)$。令 $\eta \downarrow 0$，得到 $\|\widetilde{P}\| = \mu_n\|R\|$。

由于 $R \in \mathcal{P}(Z,\ Y)$，且下确界 $\lambda(Y,\ Z) = a$未能取到，$\|R\| > a$。因此$\widetilde{P}$$\|\widetilde{P}\| \geqslant \|P\| = \mu_n\|R\| > \mu_n a$。由于 P 是任意的，从 Z_∞^n 到 W的每个投影的范数都严格大于 $\mu_n a$。结合上界，$\lambda(W,\ Z_\infty^n) = \mu_n a$，且下确界未能取到。□

4. Proof of Theorem A

情形 $\lambda \in (1, 2]$ 已在 [5] 中处理；这里我们直接引用所需结果。

定理4.1 ([5, 定理 A])。对于每个 $\alpha \in (1, 2]$，都存在一个闭子空间 $Y_0 \subset \ell_\infty$，使得 $\lambda(Y_0,\ \ell_\infty) = \alpha$，且定义投射常数的下确界未能取到。

定理 4.2。对于每个 $\lambda > 2$，都存在一个巴拿赫空间，它是(λ^+)-内射的，但不是λ-内射的。

证明。固定 $\lambda > 2$。取整数 $m \geqslant 1$，使得 $2^m \leqslant \lambda < 2^{m+1}$，然后取足够大的整数 $N \geqslant 3$，使得

$$\mu_N^m > \frac{\lambda}{2}, \qquad \text{where} \quad \mu_N := 2 - \frac{2}{N}.$$

这是可行的，因为当 $N \to \infty$时 $\mu_N \uparrow 2$，因此 $\mu_N^m \uparrow 2^m \geqslant \lambda > \lambda/2$。由于 $\mu_N < 2$，我们还有 $\mu_N^m < 2^m \leqslant \lambda$，故 $\alpha := \lambda/\mu_N^m \in (1, 2]$。根据定理4.1，存在闭子空间$Y_0 \subset Z_0 := \ell_\infty$，使得 $\lambda(Y_0,\ Z_0) = \alpha$ 且不可达。

递归定义，对于 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ m$,

$$Z_k := (Z_{k-1})_\infty^N, \qquad Y_k := \Sigma_N(Y_{k-1}) \subset Z_k.$$

根据引理 3.2，对于每个 k，$\lambda(Y_k,\ Z_k) = \mu_N \cdot \lambda(Y_{k-1},\ Z_{k-1})$，且不可达性得以保留。归纳可得，$\lambda(Y_m,\ Z_m) = \mu_N^m\,\alpha = \lambda$，并且下确界不可达。

还需指出，Z_m 是1-内射的：$Z_0 = \ell_\infty$ 是1-内射的，而引理2.2递归地表明，每个 Z_k 都是1-内射的。将引理2.3应用于 $Y_m \subset Z_m$，可得 Y_m 是(λ^+)-内射的，但不是 λ-内射的。□

注 4.3。外围空间 $Z_m = (\ell_\infty)_\infty^{N^m}$ 与 ℓ_∞等距同构。事实上，将 $\mathbb{N}$ 划分为 N^m 个无限集合 A_1、……、A_{N^m}，并固定双射 $\phi_j\colon\ \mathbb{N} \to A_j$。于是

$$J(x^{(1)},\dots,x^{(N^m)})(\phi_j(k)) := x_k^{(j)} \qquad (j = 1,\dots,N^m,\ k \in \mathbb{N})$$

定义了一个满射等距映射 $J\colon (\ell_\infty)_\infty^{N^m} \to \ell_\infty$。因此，$Y_m$ 可视为 ℓ_∞的闭子空间。

注 4.4。将定理4.2与 [5, 定理 A], 结合起来，其中定理 A通过超平面构造处理 $\lambda \in (1,2]$，再结合Isbell–Semadeni的经典结果 [4] 在 $\lambda = 2$中的结论，我们得到定理 A。一旦将定理4.1作为输入，证明便完全是显式的：从$(1,2]$ 推广到任意 $\lambda > 2$ 时，唯一使用的运算是零和构造 $Y \mapsto \Sigma_N(Y)$。

5. An optimised quantitative decomposition: proof of Theorem B

定理 5.1. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，满足

(i) 存在 1-补子空间 $X' \subseteq X$ 和 $Y' \subseteq Y$，其中 X 与 Y' 等距，且Y 与 X'等距；(ii) X 与 $X \oplus_\infty X$ 等距，且 Y 与 $Y \oplus_\infty Y$等距。

则 $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) \leqslant 9 + 6\sqrt{3}$。

证明。固定单位范数投影 $P\colon X \to X'$ 和 $R\colon Y \to Y'$，并令 E:=为P的核，F:=为R的核。由 (i)，固定满射等距映射 $\theta\colon X \to Y'$ 和 $\eta\colon Y \to X'$。由 (ii)，固定满射等距映射 $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)\colon X \to X \oplus_\infty X$ 和 $\psi = (\psi_1,\psi_2)\colon Y \to Y \oplus_\infty Y$。

设 $a > 0$ 并令

$$\mu := \frac{1}{a}, \qquad \nu := \frac{\sqrt{2a+1}}{a}, \qquad b := \frac{a}{\sqrt{2a+1}} = \frac{1}{\nu}.$$

定义三个算子：

$$\begin{aligned} T_a &\colon X \to Y \oplus_\infty Y \oplus_\infty E,\\ &\quad T_a x := \big(\nu\,\psi_1\eta^{-1}Px,\ \mu\,\psi_2\eta^{-1}Px,\ x - Px\big);\\ S &\colon Y \oplus_\infty Y \oplus_\infty E \to X \oplus_\infty X \oplus_\infty F,\\ &\quad S(y_1,y_2,e) := \big(\theta^{-1}Ry_1,\ \eta y_2 + e,\ y_1 - Ry_1\big);\\ U_a &\colon X \oplus_\infty X \oplus_\infty F \to Y,\\ &\quad U_a(x_1,x_2,f) := \theta\,\varphi^{-1}(ax_1,\,bx_2) + f. \end{aligned}$$

每一个都是双射，其逆为：

$$\begin{aligned} T_a^{-1}(y_1,y_2,e) &= \eta\,\psi^{-1}\big(\tfrac{1}{\nu}y_1,\,ay_2\big) + e,\\ S^{-1}(x_1,x_2,f) &= \big(\theta x_1 + f,\ \eta^{-1}Px_2,\ x_2 - Px_2\big),\\ U_a^{-1}y &= \big(\tfrac{1}{a}\,\varphi_1\theta^{-1}Ry,\ \nu\,\varphi_2\theta^{-1}Ry,\ y - Ry\big). \end{aligned}$$

令 $W_a := U_aST_a\colon\ X \to Y$。

估计 $\|W_a\|$。设 $\|x\| \leqslant 1$。由于 $\|Px\| \leqslant 1$ 且 $\|x - Px\| \leqslant 2$，并且 $\|\psi_1\eta^{-1}Px\| \leqslant 1$，而$\|(I_Y - R)\psi_1\eta^{-1}Px\| \leqslant 2$，直接展开可得 $\|W_ax\| \leqslant \max\{a\nu,\,b(\mu+2)\} + 2\nu$。由参数的选取，$a\nu = \sqrt{2a+1}$ 且 $b(\mu+2) = \sqrt{2a+1}$，故 $\|W_a\| \leqslant 2\nu + \sqrt{2a+1}$。

估计 $\|W_a\|$。令 $\|x\| \leqslant 1$。展开复合映射，得到

$$W_ax = \theta\varphi^{-1}\Big(a\nu\,\theta^{-1}R\psi_1\eta^{-1}Px,\ b\big(\mu\,\eta\psi_2\eta^{-1}Px + x - Px\big)\Big) + \nu(I_Y - R)\psi_1\eta^{-1}Px.$$

因此

$$\begin{aligned}\|W_a x\| &\leqslant \max\Big\{a\nu\|R\psi_1\eta^{-1}Px\|,\, b\big(\mu\|\psi_2\eta^{-1}Px\| + \|x-Px\|\big)\Big\} + \nu\|(I_Y - R)\psi_1\eta^{-1}Px\| \\ &\leqslant \max\{a\nu,\, b(\mu+2)\} + 2\nu,\end{aligned}$$

因为 $\|Px\| \leqslant 1$, $\|x - Px\| \leqslant 2$, $\|R\| = 1$ 和 $\|(I_Y - R)\| \leqslant 1 + \|R\| = 2$。根据参数的选取,

$$a\nu = \sqrt{2a+1} \qquad \text{and} \qquad b(\mu+2) = \sqrt{2a+1},$$

so

$$\|W_a\| \leqslant 2\nu + \sqrt{2a+1}.$$

估计 $\|W_a^{-1}\|$。令 $\|y\| \leqslant 1$。由于 $W_a^{-1} = T_a^{-1}S^{-1}U_a^{-1}$，我们有

$$U_a^{-1}y = \big(\mu\,\varphi_1\theta^{-1}Ry,\ \nu\,\varphi_2\theta^{-1}Ry,\ y - Ry\big),$$

因此

$$S^{-1}U_a^{-1}y = \big(\mu\,\theta\varphi_1\theta^{-1}Ry + y - Ry,\ \nu\,\eta^{-1}P\varphi_2\theta^{-1}Ry,\ \nu(I_X - P)\varphi_2\theta^{-1}Ry\big).$$

应用 T_a^{-1} 得到

$$W_a^{-1}y = \eta\psi^{-1}\Big(\frac{1}{\nu}\big(\mu\,\theta\varphi_1\theta^{-1}Ry + y - Ry\big),\ a\nu\,\eta^{-1}P\varphi_2\theta^{-1}Ry\Big) + \nu(I_X - P)\varphi_2\theta^{-1}Ry.$$

因此,

$$\begin{aligned}\|W_a^{-1}y\| &\leqslant \max\Big\{\frac{1}{\nu}(\mu+2),\ a\nu\Big\} + 2\nu \\ &= \max\{b(\mu+2),\, a\nu\} + 2\nu = 2\nu + \sqrt{2a+1}.\end{aligned}$$

因此 $\|W_a^{-1}\| \leqslant 2\nu + \sqrt{2a+1}$。

令 $K(a) := 2\nu + \sqrt{2a+1} = \frac{a+2}{a}\sqrt{2a+1}$，可得 $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) \leqslant K(a)^2 = g(a)$，其中

$$g(a) := 2a + 9 + \frac{12}{a} + \frac{4}{a^2}.$$

解 $g'(a) = 0$ 可得 $a^3 - 6a - 4 = 0$，其唯一正根为 $a = 1 + \sqrt{3}$。代入后得到 $g(1+\sqrt{3}) = 9 + 6\sqrt{3}$。□

推论 5.2. $d_{\mathrm{BM}}(L_\infty[0,1], \ell_\infty) \leqslant 9 + 6\sqrt{3}$。

证明。我们验证定理 5.1 的假设。正如在 [7, 推论 5.2], 的证明中所指出的， $L_\infty[0,1]$ 和 ℓ_∞ 都是 1-内射的且等距平方。

此外，该证明还给出了两个方向的等距嵌入： ℓ_∞ 通过互不相交的区间等距嵌入到 $L_\infty[0,1]$ 中，而 $L_\infty[0,1]$ 由于其对偶球是弱*-可分的，因而等距嵌入到 ℓ_∞ 中。由于外围空间是 1- 内射的，这些嵌入的像是 1- 可补的。因此，定理 5.1 的假设均得到满足，从而 $d_{\mathrm{BM}}(L_\infty[0,1], \ell_\infty) \leqslant 9 + 6\sqrt{3}$. □

备注 5.3。定理 5.1 中的估计是通过优化一个显式的单参数同构族得到的。除可补嵌入外，唯一用到的是这两个空间的平方结构。

致谢。第一作者谨此感谢获得NCNSonata-Bis 13(2023/50/E/ST1/00067)项目的支持。

References

[1] A. Avil
´ ´ ´ *Separably Injective Banach* es、
Spaces 2132, 2016
F. Cabello Sanchez、J. M. F. Castillo、M. Gonzalez和Y. Moreno，《数学讲义》，第施普林格卷，柏林，。[2] M. Baronti和C. Franchetti，《》，帕尔马大学数学杂志**16** (1990年)，331–342。[3] J. Blatter和E. W. Cheney，《》，纯粹与应用数学年刊**101** (1974年)，215–227。[4] J. R. Isbell和Z. Semadeni，《》，美国数学会汇刊**107** (1963年)，38–48。[5] T. Kania和G. Lewicki，《》（）（Studia Mathematica（），–。[6] J. L. Kelley，《》，美国数学会汇刊**72** (1952年)，323–326。[7] M. Korpalski和G. Plebanek，《》，arXiv:2511.12672，2025年。[8] J. Lindenstrauss，《》，美国数学会回忆录**48** (1964年)，112页。

（T. Kania） Mathematical Institute, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, 115 67 Praha 1, Czech Republic and Institute of Mathematics and Computer Science, Jagiellonian University, Łojasiewicza6, 30-348 Kraków, Poland*Email address*: kania@math.cas.cz, tomasz.marcin.kania@gmail.com

（G. Lewicki） Institute of Mathematics and Computer Science, Jagiellonian University, Łojasiewicza6, 30-348 Kraków, Poland*Email address*: Grzegorz.Lewicki@im.uj.edu.pl