arXiv:2603.09711v1 [math.LO] 10 Mar 2026

局部 $\aleph_0$ 范畴理论与局部 Roelcke 预紧群

ITAÏ BEN YAACOV 和 TODOR TSANKOV

摘要。众所周知，波兰 Roelcke 预紧群正是能够表示为连续逻辑中 $\aleph_0$ 范畴结构的自同构群的那些群，并且群的性质与结构的性质之间存在精确对应。本文旨在将这种对应扩展到局部 Roelcke 预紧群和局部 $\aleph_0$ 范畴结构这两类对象；后者由我们在此定义。

我们通过等距作用刻画局部 Roelcke 预紧群。我们定义局部 $\aleph_0$ 范畴理论和结构，证明适当版本的 Ryll-Nardzewski 定理，并确认波兰局部 Roelcke 预紧群正是这类结构的自同构群。在所有局部 $\aleph_0$ 范畴结构中，都存在一种可定义度量，我们称之为局部化度量，它刻画相应自同构群的粗几何结构。我们证明，两个局部 $\aleph_0$ 范畴结构双可解释，当且仅当它们的自同构群同构。最后，我们证明，Banach 空间（的单位球）是 $\aleph_0$ 范畴的，当且仅当相应的仿射空间作为度量空间是局部 $\aleph_0$ 范畴的。

目录

引言 1
1. 局部 Roelcke 预紧波兰群 2. 度量化定理与素模型 5
3. 局部 $\aleph_0$-范畴理论 4. 局部 $\aleph_0$-范畴结构中的可定义性 5. 局部 $\aleph_0$-范畴结构中的解释 6. 示例 参考文献 9 14 20 24 27 31

引言

回忆一下，若置换群 $G \leq \mathrm{Sym}(M)$ 作用在集合 M 上，且对每个n，对角作用 $G \curvearrowright M^n$ 都有有限多个轨道，则称其为寡轨群。根据 Ryll-Nardzewski 的经典定理，寡轨置换群恰好是 $\aleph_0$-范畴结构的自同构群；若M 是这样的结构，则M^n 中的可定义子集就是G-不变集合。这使得我们能够从不同视角研究寡轨群，并促进了模型论、群论、组合学与计算机科学之间丰富的交互。

群与 $\aleph_0$-范畴结构之间的对应关系被推广到 [BT2016]中的度量情形。我们回顾一下，拓扑群G 是

日期：2026年3月11日。2020 数学学科分类号。03C15,03C66,22F50。关键词与短语。局部 Roelcke 预紧群、局部 $\aleph_0$-范畴结构、模型论、波兰群。作者的部分研究工作获得了法国国家科研署项目 MAS（ANR-25-CE40-5294）的资助。1

Roelcke 预紧，如果它在 Roelcke 一致性下预紧；等价地，对于每个非空开集$U \subseteq G$，都存在有限$F \subseteq G$，使得$UFU = G$。所有紧群都是 Roelcke 预紧的，其他典型例子包括对称群 $\mathrm{Sym}(A)$（其中A为任意集合）、任意希尔伯特空间的酉群，以及乌雷松球的等距群。

当(A,d) 是一个度量空间，且$G \curvearrowright A$ 是由等距变换构成的群作用时，我们令

$$A/\!\!/G = \{\overline{Ga} : a \in A\}$$

表示轨道闭包的集合。集合距离在$A/\!\!/G$上定义了一个度量；若A 完备，则该空间也完备。

以下内容结合了连续逻辑中的 Ryll-Nardzewski 定理 [BBHU2008] 以及 [BT2016]和 [BK2016]中的结果。

事实。设 M 是一个可分的连续逻辑结构，并设 $G = \mathrm{Aut}(M)$。那么以下条件等价：

(i) 结构 M 是 $\aleph_0$-范畴的。(ii) 空间 $M/\!\!/G$ 是紧致的，并且以下任一等价条件成立：*(a)* 对每个 n，空间 $M^n/\!\!/G$ 都是紧致的。*(b)* 群 G 是 *Roelcke* 预紧的。

如果这些等价条件成立，那么此外还有：

- 谓词 $P\colon M^n \to \mathbf{R}$ 是可定义的，当且仅当它连续且具有 G-不变性。
- 一个 $\aleph_0$-范畴结构 N 与 M 双可解释，当且仅当$\mathrm{Aut}(N) \cong G$ 作为拓扑群。

由于每个波兰群 G 都可以表示为某个可分结构的自同构群 M，其中 $M/\!\!/G$ 是单元素集，因此这给出了 Roelcke 预紧群的一种刻画：它们恰好是$\aleph_0$-范畴结构的自同构群。此外，可以建立 G 的动力学性质与M 的模型论性质之间的精确对应关系。更多详情请参见 [BT2016、Iba2016、BIT2018]。

本文旨在建立 Roelcke 预紧群的自然推广与 $\aleph_0$-范畴结构之间的类似对应关系；由于不同的原因，这两者都可以称为“局部的”。

局部 Roelcke 预紧群由 Rosendal 引入 [Ros2022]，，是指单位元具有一个 Roelcke 预紧邻域的拓扑群。Zielinski 也研究过这类群 [Zie2021]，，他将局部 Roelcke 预紧群刻画为 Roelcke 完备化局部紧的群；Hallbäck 也研究了其模型论方面的一些问题 [Hal2020]，。例如，Roelcke 预紧群、局部紧群、度量齐性图的等距群、Hilbert 空间的仿射等距群、无限维双曲空间的等距群，以及乌雷松度量空间的等距群，均属于此类。

在模型论方面，我们希望将上一段中的结构称为 局部 $\aleph_0$范畴的。它们的共同特征是，该理论的模型可以表示为若干个彼此处于无限距离的 局部分量的不交并，彼此之间没有相互作用；而该结构本身则是唯一的可分局部模型（即仅由单个分量构成）。术语“局部”借自 Hrushovski [Hru2020]，，他讨论了相关概念。

将局部 Roelcke 预紧群与 Roelcke 预紧群区分开来的主要新特征，是粗几何方面的考量。这意味着人们不再只关注单位元附近发生的情况，

还要关注大距离处的情况。关于局部 Roelcke 预紧群，我们的主要结果是用其等距作用来刻画它们（见定理 1.10）。我们回顾一下，如果一个度量空间的所有闭球都是紧致的，则称其为适当的；拓扑群 G 在度量空间 (X, d) 上的作用若满足：对于每个 $x \in X$ 和 $r \in R$，集合 $\{g \in G : d(x, gx) < r\}$ 在 G 中粗有界，则称该作用为粗适当的（更多细节见 [Ros2022]）。

定理。 设 X 是一个完备可分度量空间，且 $G \leq \mathrm{Iso}(X)$ 满足 $X/\!/G$ 是一个适当度量空间。则以下条件等价：

(i) 群 G 是局部 *Roelcke* 预紧的，且作用 $G \curvearrowright X$ 是粗适当的。(ii) 对于每个 n，商空间 $X^n/\!/G$ 都是适当度量空间。

一种（非平凡的）粗几何结构，最方便的编码方式是使用一个（无界）度量。从模型论的角度看，我们可以将无界度量d 视为一个可定义谓词，前提是允许它取值于紧致区间 $[0,\infty]$。这样一来，d 就是一个广义度量，在理论的其他模型中可能取值为无穷大。

如果 d 是理论 T中的一个可定义广义度量，那么由下式给出的关系$d(a,b) < \infty$ 在 T 的模型上是开的，也就是说，它由类型空间 $S_2(T)$中的一个开集给出，并且它是一个等价关系。其逆命题是一个度量化定理，对我们而言将非常有用；我们也认为它本身具有独立的研究价值（见定理 2.7）。

定理。 设 T 是可分语言中的一个理论，且 $\sim$ 是 T 的模型上的一个等价关系，由一个开集的2-类型给出。那么，T 存在一个可定义广义度量 d，在一致等价与粗等价意义下唯一，使得 $d(a,b) < \infty$ 当且仅当 $a \sim b$。

我们将弱局部理论 定义为这样一种理论：其模型可表示为若干局部分支的不交并，且这些分支之间没有相互作用。形式上，这是一个二元组$(T, \sim)$，其中T 是一个理论，$\sim$ 是 T 的模型上的一个不变等价关系，并且 T 模型的每个 $\sim$-等价类（局部分支）都是一个初等子结构；T 模型之间的映射是初等映射，当且仅当它保留 $\sim$，且在每个分支上分别是初等映射（见定义 3.1）。如果等价关系 $\sim$ 具有以下形式：对于某个可定义广义度量d，$d(x,y) < \infty$，那么d 在粗等价与一致等价意义下唯一，我们称其为局部化度量。

可分语言中的一个理论称为局部 $\aleph_0$-范畴的，如果它相对于某个等价关系 $\sim$是弱局部的，并且在同构意义下仅有一个可分的局部模型（即仅由一个分量构成）（见定义 3.9）。当 $\sim$ 是平凡等价关系（即所有成员都等价）时，这就与通常的 $\aleph_0$-范畴性一致。

本文不尝试在局部 $\aleph_0$-范畴的语境之外，给出局部理论（或局部逻辑）的一般定义。

为了给出局部 $\aleph_0$-范畴理论的 Ryll-Nardzewski 式刻画，我们需要稍微弱化孤立型的概念。设 a 是一个 n 元组，且 $p = \mathrm{tp}(a)$。对于 $i, j < n$，若 $\mathrm{tp}(a_i, a_j)$ 是孤立的，则称 $i \sim_p j$。我们称 p 局部孤立，如果首先，$\sim_p$ 是 n 上的一个等价关系；其次，p 在每个指标等价类上的限制都是孤立的；最后，p 由 $\sim_p$ 及其各等价类上的限制所确定（见定义 3.3）。

按照这个定义，Ryll-Nardzewski 对 $\aleph_0$-范畴理论的刻画（即所有类型都是孤立的理论）可推广如下（见定理 3.8）。

定理。弱局部理论$(T,\ \sim)$局部 $\aleph_0$-范畴，当且仅当它是完备的且所有类型都是局部孤立的。

此外，若这些等价条件成立，则：$a\ \sim b$ 当且仅当 完全类型$(a,\ b)$ 是孤立的；T 的唯一可分局部模型就是它的素模型；对于每个 n，$S_n(T)$ 中的孤立类型构成一个开集；并且 T 具有一个局部化度量，即存在一个可定义广义度量 d，使得 $d(a,\ b) < \infty$ 当且仅当 $a\ \sim b$。

如果一个结构 M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，就称其为局部 $\aleph_0$-范畴的，即它是其理论的唯一可分局部模型。正如我们在开头所回顾的，M 是 $\aleph_0$-范畴的，当且仅当对所有 n，$M^n/\!/G$ 是紧致的；这又当且仅当 G 是 Roelcke 预紧的且 $M/\!/G$ 是紧致的，其中 $G\ = \mathrm{Aut}(M)$。局部$\aleph_0$-范畴性的类似刻画不可能仅仅通过 G 的作用来给出。例如，(整数集 Z, s)（其中 s 是后继函数）和 (整数集 Z, $<$) 是两个底层集合相同、且自同构群为 (整数集 Z, $+$) 的结构，该自同构群是局部紧的。前者是局部 $\aleph_0$-范畴的（见例 6.1）。然而，后者并非如此，因为序是一种非局部关系，它允许不同局部分支之间发生相互作用（例 6.2）。问题在于，自同构群的作用只能提供关于已实现类型（等价地说，孤立类型）的信息，而 M 的理论包含非孤立类型（除非 M 实际上是 $\aleph_0$-范畴的）。

为克服这一障碍，我们需要规定可定义谓词在无穷远处的行为。为此，我们引入真G-不变性的概念。一元谓词若是真G-不变的，则称之为G-不变；二元谓词 P 若是真G-不变的，则它是G-不变的，且对所有$g\to\infty\ P(a,gb)$ 的极限都存在$a,b\ \in M$（此处g 是G 中的一个元素，且$g\ \to\ \infty$ 表示g 最终会离开每个粗有界集）。更高元数情形的定义更加复杂，我们将其推迟到定义 4.1。

一项关键的技术工具，是从一个完备可分度量空间A^G 构造度量结构A，并配以一个闭子群$G\ \leq \mathrm{Iso}(A)$（见定义 2.10）。结构A^G 的特征如下：它是自身理论的素模型，$\mathrm{Aut}(A^G)\ = G$，并且在满足这两个性质的前提下，A^G 上的可定义谓词集是极小的（命题 2.11）。

有了这些准备，我们可以陈述 $\aleph_0$-范畴结构刻画的完整类比。以下是我们的主要结果摘要（见 推论 3.12、定理 3.13、定理 4.4、推论 4.5、定理 5.7、定理 6.4 以及推论 6.5）。

定理。设 M 是一个带有（可能无界的）度量 d 的可分连续逻辑结构，且 $G\ =$ $\mathrm{Aut}(M)$。则以下条件等价：

（i）M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，且 d 是局部化度量。（ii）度量空间 $M/\!/G$ 是紧致的，M 中的每个原子公式都是适当地 G-不变的，并且以下任一等价条件成立：*(a)* 对每个 n，度量空间 $M^n/\!/G$ 都是适当的。*(b)* 群 G 是局部 *Roelcke* 预紧的，且作用 $G\ \curvearrowright\ M$ 是粗适当的。

如果这些等价条件成立，我们还可以得到：

- 结构 M 与 MG 双可定义。
- 谓词 P：$Mn\ \to [-\infty,\infty]$ 可定义，当且仅当它是一致连续且真G-不变的。
- 局部 $\aleph_0$-范畴结构 N 与 M 双可解释，当且仅当$\mathrm{Aut}(N)\ \cong G$ 是拓扑群。

尽管这些结果大多与关于$\aleph_0$-范畴结构的结果相平行（事实上是对它们的推广），但局部情形要微妙得多。一个重要的

障碍在于：与 $\aleph_0$-范畴性不同，局部 $\aleph_0$-范畴性在约化结构下并不保持（见例 6.3）。

将该定理应用于波兰群在其左完备化上的作用，可得如下刻画。

推论。 一个波兰群是局部 *Roelcke* 预紧的，当且仅当它是某个局部 $\aleph_0$-范畴结构的自同构群。

在实践中，要检验某一特定结构是否为局部 $\aleph_0$-范畴的，通常需验证该定理的条件 (ii.a) 。特别地，对于纯度量空间，我们有如下结果（见推论 6.6）。

推论。 设 (A,d) 为完备可分无界度量空间，并设 $G = \mathrm{Iso}(A)$。则 (A,d) 是局部 $\aleph_0$-范畴的，当且仅当 $A/\!/G$ 是紧致的，且对每个 $n \in \mathbf{N}$，$A^n/\!/G$ 是适当的。

一类重要的局部 $\aleph_0$-范畴度量空间是仿射巴拿赫空间。根据 Mazur–Ulam 定理，巴拿赫空间的每个等距变换自动都是仿射的，因此在纯度量语言中考察仿射巴拿赫空间是很自然的。对于巴拿赫空间 E，令 E_1 表示赋予线性结构迹的闭单位球（这是在连续逻辑中考察巴拿赫空间的常用方式）。已知许多巴拿赫空间（的单位球）是$\aleph_0$-范畴的（例如希尔伯特空间、L^p 空间，其中 $1 \leq p < \infty$，以及 Gurarij 空间）。下面的结果（见定理 6.12）特别表明，相应的仿射空间是局部 $\aleph_0$-范畴的。

定理。 设 E 是可分巴拿赫空间。当且仅当单位球 E_1 （带有其线性结构）是 $\aleph_0$-范畴的，E（在纯度量语言中）才是局部 $\aleph_0$-范畴的。

一个结构是连续逻辑中的绝对范畴的（即其理论在同构意义下有唯一模型），当且仅当它是紧致的；而它是紧致的，当且仅当它是$\aleph_0$范畴的，且其自同构群是紧致的。局部情形下的类似结果如下（见定理 3.15）。

定理。设 T 是一个局部 $\aleph_0$-范畴理论，M 是其配备局部化度量 d 的素模型，且 $G = \mathrm{Aut}(M)$。以下条件等价：

(i) 度量空间(M, d) 是适当的。(ii) 群 G 是局部紧的。(iii) 结构 M 在同构意义下是 T 的唯一局部模型。

当 T 不是 $\aleph_0$-范畴时，这些条件还等价于(iv) 理论 T 对某个（每个）不可数基数 κ 都是 κ-范畴的。

1. 局部 Roelcke 预紧波兰群

设 G 是一个波兰群。根据 Birkhoff–Kakutani 定理，它存在一个与群拓扑相容的左不变度量，我们通常记作 d_L。任意两个这样的度量都一致等价，因此导出唯一的（作为一致空间的）左完备化 $\widehat{G}_L$。关于以下事实，参见 [RD1981]和 [BT2016]。

事实 1.1. 设 G 为一个波兰群，d_L 是 G 上相容的左不变度量，(X,d) 是一个度量空间，且 $G \curvearrowright X$ 是一个连续的等距作用。那么：

- 作用映射 $G \times X \to X$ 唯一延拓为连续映射 $\widehat{GL} \times \widehat{X} \to \widehat{X}$，记作 $(\widehat{a},\widehat{x}) \mapsto \widehat{ax}$，其中 $\widehat{X}$ 是 X 的完备化。对于 $\widehat{} \in \widehat{GL}$，映射 $\widehat{x} \mapsto \widehat{ax}$ 是等距的。对于 $x \in X$，映射 $a \mapsto ax$ 是一致连续的（其连续模取决于 x）。

- 在 $X = (G, dL)$ 的特殊情形下，这定义了一个半群律 $\widehat{GL} \times \widehat{GL} \to \widehat{GL}$。
- 在一般情形下，$GL \times X \to X$ 定义了一个半群作用，我们的意思是，对于 $a(bx) = (ab)x$，$a, b \in \widehat{GL}$ 且 $x \in \widehat{X}$。

定义 1.2。设 G 是一个群，(X, d) 是一个度量空间，且 $G \curvearrowright X$ 通过等距变换作用。对于 $x \in X$，我们用 $[x]$ 表示轨道闭包 $\overline{Gx} \subseteq X$。所有轨道闭包构成的集合记为 $X/\!\!/G$。

对于 $x, y \in X$，令 $d(x, [y])$ 和 $d([x], [y])$ 分别表示在X中点到集合以及集合之间的距离。

设 $G \curvearrowright X$ 是一个如定义 1.2中所述的作用。由于它是等距的，关系$x \in \overline{Gy}$是一个等价关系，并且有

$$d(x, [y]) = d(x, Gy) = d([x], [y])$$

对所有x、$y \in X$。由此可知，集合之间的距离在$X/\!\!/G$上定义了一个度量；若X 完备，则$X/\!\!/G$也完备。

引理1.3。设群 G 通过等距变换作用于完备度量空间 X。则 $X/\!\!/G$ 紧致，当且仅当存在一个紧子集 $K \subseteq X$，使其与 $X/\!\!/G$ 中的每个轨道闭包相交。

证明。设 $\pi\colon X \to X/\!\!/G$ 表示商映射。若$K \subseteq X$ 是一个与每个轨道闭包相交的紧集，则 $\pi(K) = X/\!\!/G$ 是紧致的。

反过来，假设 $X/\!\!/G$ 紧致。对每个 $k \in \mathbb{N}$，取 P_k 为 $X/\!\!/G$ 中的有限2^{-k}-网。我们可以通过对 k 作归纳法，选取子集 $A_k \subseteq X$，使得$|A_k| = |P_k|$，$\pi(A_k) = P_k$，并且对每个 $x \in A_{k+1}$，都有 $d(x, A_k) < 2^{-k}$。事实上，若$[z] \in P_{k+1}$，则存在 $y \in A_k$，使得 $d([z], [y]) = d([z], y) < 2^{-k}$；而任取满足 $d(x, y) < 2^{-k}$ 的 $x \in [z]$，都可作为 $[z]$的原像。

并集 $\bigcup_k A_k$ 是全有界的，因此 $K = \bigcup_k A_k$ 是紧致的。若 $p \in X/\!\!/G$，则存在 $p_k \in P_k$ 使得 $p_k \to p$。令 $x_k \in A_k$ 为相应的原像。若 $y \in K$ 是 $(x_k)_k$ 的极限点，则 $[y] = p$，即 $y \in p$。■

我们赋予度量空间的有限乘积最大度量：

$$d(x, y) = \max_i d(x_i, y_i).$$

因此，G 的有限个等距作用的乘积导出一个等距作用。特别地，我们得到自然的连续等距作用 $G \curvearrowright G_L^n$，且商空间 $\widehat{G_L^n}/\!\!/G$ 在度量的一致等价意义下是良定义的。

当 $n = 1$ 时，商空间 $G_L/\!\!/G$ 是单点集。当 $n = 2$ 时，有一个典范的拓扑嵌入 $G \subseteq \widehat{G_L^2}/\!\!/G$，将 $g \in G$ 与 $[1, g] = [g^{-1}, 1] \in \widehat{G_L^2}/\!\!/G$ 对应起来。G 从 $\widehat{G_L^2}/\!\!/G$ 继承的一致结构称为 Roelcke 一致性。等价地，Roelcke 一致性由一组围道生成：$\{(g, vgu) : g \in G; v, u \in V\}$，其中 V 遍历单位元的邻域。因此，$\widehat{G_L^2}/\!\!/G$ 是 G 的 Roelcke 完备化，也记作 $R(G)$。

关于这些构造的更多细节，例如，请参见 [BT2016]。

定义 1.4。设G 是一个拓扑群。

- 子集$A \subseteq G$ 若在 Roelcke 一致结构下全有界，则称为*Roelcke* 预紧。等价地，若A 在 Roelcke 完备化$R(G)$ 中的像是预紧的。等价地，对于恒等元的每个邻域U，都存在一个有限集合$F \subseteq G$，使得$A \subseteq UFU$。
- 若群G 存在一个单位元的 Roelcke 预紧邻域，则称其为局部 *Roelcke* 预紧。

我们还需要一些关于拓扑群粗几何的概念，这些概念由 Rosendal 在 [Ros2022]中提出。

定义 1.5。 设G是一个拓扑群。若子集$B \subseteq G$对于G上的每个连续左不变伪度量都是有界的，则称其为粗有界。等价地，对于每个满足$G = \bigcup_n U^n$且$U_n^2 \subseteq U_{n+1}$的对称开集序列U_n，都有$B \subseteq U_n$对某个n成立。若群G存在一个粗有界的单位元邻域，则称其为局部有界。

对于局部 Roelcke 预紧群，Zielinski 已确定了粗有界集 [Zie2021]。

事实 1.6。 设 G 是一个 *Polish* 局部 *Roelcke* 预紧群。则 G 的粗有界子集恰好是 *Roelcke* 预紧子集。

定义 1.7. 设 G 是一个拓扑群，通过等距变换作用于度量空间(X,d)。我们称作用 $G \curvearrowright X$ 是粗适当 的，如果对每个 $r > 0$ 以及每个（等价地，某个）$x \in X$，集合 $\{g \in G : d(gx,x) < r\}$ 是粗有界的。

一个相容的左不变度量 d_L 在 G 上称为粗适当 的，如果左平移作用 $G \curvearrowright (G,d_L)$ 是粗适当的，即 d_L-有界集恰好是 G 的粗有界子集。

以下是其直接推论，来源为 [Ros2022，定理 2.28].

事实 1.8. 设 G 为波兰群。则 G 是局部有界的，当且仅当它具有一个粗适当的、相容的左不变度量。特别地，若 G 是局部 *Roelcke* 预紧的，则它具有这样一个度量。

我们回顾一下，若一个度量空间的所有闭有界集都是紧致的，则称该空间为适当空间。

引理 1.9. 设 G 是一个 *Polish*、局部 *Roelcke* 预紧群。那么，满足以下条件的 $G \curvearrowright X$ 作用构成的类在有限乘积下封闭：X 是完备度量空间，作用连续、等距且粗适当，并且商空间 $X/\!/G$ 是适当度量空间。

证明。设 $G \curvearrowright X$ 和 $G \curvearrowright Y$ 如命题所述。显然，$X \times Y$ 是完备度量空间，且作用 $G \curvearrowright X \times Y$ 连续、等距且粗适当。剩下要证明 $(X \times Y)/\!/G$ 是适当度量空间。换言之，我们需要证明，若 $B \subseteq X \times Y$ 有界，则它在 $(X \times Y)/\!/G$ 中的像（记为 $B/\!/G$）是全有界的。我们不妨假设 $B = B_1 \times B_2$，，其中 $B_1 \subseteq X$ 和 $B_2 \subseteq Y$ 有界。

给定 $\delta > 0$。根据假设，$B_1/\!/G$ 是全有界的，因此存在一个有限族 $\{x_i\}_i \subseteq B_1$，使得对于每个 $x \in B_1$，都有 $d([x],[x_i]) < \delta$，其中某个 i满足条件。换言之，对于某个 i以及某个 $g \in G$，有 $d(x,gx_i) < \delta$。注意，在这种情况下，

$$g \in E_1 = \{g \in G : d(B_1, gB_1) < \delta\}.$$

由于作用 $G \curvearrowright X$ 是粗适当的，且 B_1 在 X 中有界，因此集合 E_1 是粗有界的。同样，存在一个有限族 $\{y_j\}_j \subseteq B_2$，使得对于每个 $y \in B_2$，都有 $d(y,gy^j) < \delta$，其中某个 j以及粗有界集中的某个 g 满足条件

$$E_2 = \{g \in G : d(B_2, gB_2) < \delta\}.$$

选取一个单位元邻域$U \subseteq G$，使得$d(ux_i,x_i) < \delta$ 且$d(uy^j,y^j) < \delta$ 对所有$u \in U$ 以及i、j成立。集合$E_1^{-1}E_2$是粗有界的，因此是 Roelcke 预紧的，故存在有限集合F，使得$E_1^{-1}E_2 \subseteq UFU$。

设$(x,y) \in B = B_1 \times B_2$。由构造，存在$i$、$j$以及$(g,h) \in E_1 \times E_2$，使得

$$\max\big(d(x,gx_i), d(y,hy_j)\big) < \delta.$$

那么存在$f \in F$以及u、$v \in U$，使得$g^{-1}h = ufv$。现在，令$\sim$表示“距离为$< \delta$”，我们有

$$[x_i, fy_j] \sim [u^{-1}x_i, fvy_j] = [gx_i, hy_j] \sim [x,y].$$

由此可知，半径为2δ、中心位于$[x_i, fy_j]$的有限个球（其中i、j和f变化）覆盖了$B/\!/G$。■

定理 1.10. 设X是一个完备可分度量空间，且$G \leq \mathrm{Iso}(X)$是一个闭子群。假设$X/\!/G$是一个适当度量空间。那么以下命题等价：

(i) 群G是局部*Roelcke*预紧的，且作用$G \curvearrowright X$是粗适当的。(ii) 对于每个n，商空间$X^n/\!/G$是一个适当度量空间。(iii) 对于每个$x \in X$和$r > 0$，集合$O = \{g \in G : d(x,gx) < r\}$是*Roelcke*预紧的。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)。由 引理1.9。

(ii) $\Longrightarrow$(iii)。设$V \subseteq G$为单位元邻域。必要时将V替换为一个更小的集合，我们可以假设存在$y \in X^k$，$\varepsilon > 0$使得

$$V = \{g \in G : d(y,gy) < \varepsilon\}.$$

定义$\theta\colon G \to X^{2k}/\!/G$为$\theta(g) = [y, gy]$。集合$\theta(O) \subseteq X^{2k}/\!/G$是有界的，因而全有界。特别地，存在有限集合$\{h_i : i < m\} \subseteq O$，使得对每个$g \in O$，存在$i < m$满足

$$d\big(\theta(g), \theta(h_i)\big) < \varepsilon.$$

由定义，这意味着存在$v \in G$使得

$$\max\big(d(y,vy), d(gy,vh_iy)\big) < \varepsilon.$$

等价地，$v \in V$且$u = h_i^{-1} v^{-1} g \in V$。特别地，存在$v$，$u \in V$使得$g = vh_iu$。因此$O \subseteq V\{h_i : i < m\}V$，正如所承诺的。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)。因为 Roelcke 预紧集合总是粗有界的。■

以下推论中第一项与最后一项的等价性归功于 Zielinski [Zie2021]。

推论 1.11。设G是一个波兰群。则以下各项等价：

(i) 群G是局部*Roelcke*预紧的。(ii) 群G存在一个相容的、粗适当的左不变度量d_L，且$\widehat{\ }$对每个n，$G_L^n/\!/G$上的诱导度量都是适当的。(iii) *Roelcke*完备化$R(G)$是局部紧的。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)。令d_L为$\widehat{G}$上的一个粗适当、相容的左不变度量（由事实 1.8可知其存在），并令G_L表示其完备化。于是作用$\widehat{G} \curvearrowright G_L$是粗适当的，并且$G_L/\!/G$是单元素集。根据 定理 1.10，$G_L^n/\!/G$对每个$n$都是适当的。

(ii) $\Longrightarrow$(iii). Roelcke 完备化$R(G) = \widehat{G}_L^2/\!/G$是一个适当度量空间，因此是局部紧的。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)。令$U \subseteq R(G)$为$1 = [1_G, 1_G]$的任意紧邻域。则$U \cap G$是1的一个Roelcke 预紧邻域。■

显然，如果 G 是一个局部紧群，且 $G \curvearrowright X$ 上的作用是适当的等距作用，那么每个点的稳定子都是紧致的。我们以这一事实在 Roelcke 预紧情形下的适当类比来结束本节。

引理 1.12. 设 X 是一个完备度量空间，G 是一个波兰群，且 $G \curvearrowright X$ 通过等距变换连续作用。对于 $x \in X$，令 $G_x \leq G$ 表示在此作用下 x 的稳定子。对任意固定的 n，定义映射 $\iota_x : X^n /\!\!/ G_x \to X^{n+1} /\!\!/ G$，将 $[y] \mapsto [x,y]$ 映到。则：

(i) 该映射 ι_x 定义良好。它是 1-*Lipschitz* 的，并将无界集映为无界集。
(ii) 假设 Gx 是一个 G_δ 集。那么，当且仅当 ι_x 的像是一个适当度量空间时，ι_x 是一个同胚嵌入，且 $X^n /\!\!/ G$ 是一个适当度量空间。(iii) 若 $G \curvearrowright X$ 是传递的，则 ι_x 是满射。

证明。 设y、$z \in X^n$，并设$x = (x、x、\ldots、x) \in X^n$，且$g \in G$。那么，一方面，

$$d(G_x y, G_x z) = d\big(G_x \cdot (x,y), G_x \cdot (x,z)\big) \geq d\big(G \cdot (x,y), G \cdot (x,z)\big),$$

因此 ι_x 确实定义良好且是 1-Lipschitz。另一方面，

$$d(G_x y, G_x \bar{x}) = d(y, \bar{x}) \leq d(x, gx) + d(y, g\bar{x}) \leq 2d\big((x,y), g \cdot (x,\bar{x})\big),$$

因此 ι_x 将无界集映为无界集。对于第二个断言，设 $y \in X^n$且 $\varepsilon > 0$。令 $V = \{g \in G : d(y, gy) < \varepsilon\}$。根据 Effros 定理 [Eff1965],$Vx$ 在 Gx 中是开的，因此对某个 $\delta > 0$，它包含 $B(x,\delta) \cap Gx$。现在假设对于某个 $z \in X^n$，有 $d\big([x,y],[x,z]\big) < \delta$。那么存在 $g \in G$，使得 $d(x,gx) < \delta$且 $d(y,gz) < \delta$。因此，存在 $h \in V$，使得 $hgx = x$。于是 $hg \in G_x$，并且

$$d(y, hgz) \leq d(y, hy) + d(hy, hgz) < \varepsilon + \delta.$$

因此 $d\big([y],[z]\big) < \varepsilon + \delta$，这足以说明 ι_x^{-1} 在 ι_x 的像上连续。根据第一项，集合 $K \subseteq X^n /\!\!/ G_x$ 有界，当且仅当其像有界，因此正则性也得以保留。

最后一个断言显然成立。 ■

命题 1.13。 设 X 是一个完备可分度量空间，且 $G \leq \mathrm{Iso}(X)$ 是一个在 X 上传递作用的闭子群。则以下条件等价：

(i) 群 G 是局部 *Roelcke* 预紧的，且作用 $G \curvearrowright X$ 是粗适当的。(ii) 对于某个（每个）$x \in X$，稳定子 G_x 是 *Roelcke* 预紧的，且 $X /\!\!/ G_x$ 是适当度量空间。

证明。 (i) $\Longrightarrow$(ii)。由 定理 1.10，对于每个n，$X^{n+1} /\!\!/ G$ 都是适当度量空间；由引理 1.12，$X^n /\!\!/ G_x$ 是适当的。将$G_x \curvearrowright X$代入定理 1.10 ，可知稳定子$G_x = \{g \in G_x : d(x,gx) < 1\}$ 是 Roelcke 预紧的。

(ii) $\Longrightarrow$(i). 由于 G_x 是 Roelcke 预紧的，因此它是粗有界的，所以 $G_x \curvearrowright X$是粗适当的。根据 定理 1.10，$X^n /\!\!/ G_x$ 对每个 n 都是适当的；根据引理 1.12，$X^{n+1} /\!\!/ G$ 是适当的。由此根据定理 1.10得出结论。 ■

2. 度量化定理与素模型

通常，连续逻辑中的谓词和公式都要求是有界的，其取值属于某个固定的紧区间。然而，本文发挥关键作用的粗几何结构，自然是通过无界可定义度量来表达的。此外，乌雷松空间等大多数例子本身就配备了这样的度量。

为了在逻辑中纳入无界度量，我们允许谓词（和公式）的取值属于紧区间 $[-\infty,\infty]$。这会带来两个后果：首先，谓词的一致连续性要求应根据该区间作为紧空间时的一致结构来考量；其次，根据紧致性定理，在某些模型中，谓词实际上可以取无穷大值。特别是，如果一个可定义度量无界，那么它应被视为可定义的广义度量，也就是说，这种度量可以取值 ∞。

不必对此过于担心。上确界和下确界量词在 $[-\infty,\infty]$ 上同样适用，因为它与 $[0,1]$ 序同胚。至于联结词，一个取值于 $[-\infty,\infty]$ 的公式可以与其他公式结合，所用的连续函数（连续联结词）可定义在 $[-\infty,\infty]$ 上；但要记住，通常的算术运算并不总能连续延拓到 $[-\infty,\infty]$。

或者，令 $\theta\colon [0,\infty]\to[0,1]$ 为序同胚 $\theta(t)=1-e^{-t}$。不难验证，d 是广义度量，当且仅当$d'=\theta\circ d$ 是一个取值于$[0,1]$的度量，并满足更强的三角不等式

$$d'(x,z)\leq d'(x,y)+d'(y,z)-d'(x,y)d'(y,z). \tag{2.1}$$

因此，指定一个可定义广义度量，等同于指定一个满足 (2.1) 的可定义度量。类似地，如有需要，我们可以用有界谓词替换其他无界谓词。

约定 2.1. 结构 M 上的可定义度量 正是其字面含义：由一个公式定义的度量。可定义度量可以是无界的，此时其定义公式必须是 $[0,\infty]$-值的，其含义如前文所述。有界度量或广义度量等变体将明确地如此加以限定。

在理论 T 的所有模型所构成的类上，我们既可以有广义可定义度量，也可以有有界度量，并且我们将力求始终小心地将它们明确限定为二者之一。

定义 2.2. 设 T 为一个理论。（T 的模型上的）不变二元关系 是 2-型的一个集合 $R\subseteq \mathrm{S}_2(T)$。它在每个模型 $M\vDash T$ 上诱导一个二元关系，其中当完全类型$(a,b)\in R$ 时，$R(a,b)$ 成立。若它在每个模型上诱导一个等价关系，则它是一个不变等价关系。若 $R\subseteq \mathrm{S}_2(T)$ 是一个开子集，则它是一个开关系。

显然，如果d 是T的模型上的可定义广义度量，那么关系$d(a,b)<\infty$ 是一个开等价关系。下文将借鉴乌雷松的论证证明其逆命题。

定义 2.3。 设T 为一个理论。给定子集A、$B\subseteq \mathrm{S}_2(T)$，定义

$$A\cdot B=\{\mathrm{tp}(a,c):\exists b\ \mathrm{tp}(a,b)\in A,\ \mathrm{tp}(b,c)\in B\}\subseteq \mathrm{S}_2(T),$$
$$A^{\mathrm{op}}=\{\mathrm{tp}(b,a):\mathrm{tp}(a,b)\in A\}.$$

若$A=A^{\mathrm{op}}$，则称A 是对称的。

由类型的 amalgamation 可知，此运算具有结合性，因此迭代乘积$\prod_{i<n}A_i$ 仅取决于集合$(A_i:i<n)$这一序列。此外，若A 和B是紧致的，则$A\cdot B$ 也是紧致的。最后，这种乘积运算有一个中性元，即对角线

$$\Delta=\{p(x,y)\in \mathrm{S}_2(T):p\vDash x=y\}.$$

引理 2.4. 设 T 为一个理论。设当 $i<n$ 时，$K_i\subseteq \mathrm{S}_2(T)$ 为紧致的，$U\subseteq \mathrm{S}_2(T)$为开的，并假设 $\prod_i K_i\subseteq U$。则存在开集 $V_i\subseteq \mathrm{S}_2(T)$，使得 $K_i\subseteq V_i$ 且 $\prod_i V_i\subseteq U$。

证明。由归纳法，只需考虑 $n = 2$ 的情形。反设，对于 K_0 和 K_1，的每一对开邻域 $\alpha = (V_0, V_1)$，都存在类型 $p_\alpha(x, y, z) \in S_3(T)$，使得 $p_\alpha|_{xy} \subseteq V_0$，$p_\alpha|_{yz} \subseteq V_1$，且 $p_\alpha|_{xz} \not\subseteq U$。若按反向包含关系排列指标，则 p_α 构成一个网；该网的任一极限点都表明 $K_0 \cdot K_1 \not\subseteq U$。■

以下是度量化定理证明中使用的技术性定义。

定义 2.5。设 T 为一个理论，$\sim$ 为模型上的一个开等价关系。设 $S \subseteq \mathbf{R}^{>0}$，并且对每个 $s \in S$，令 $U_s \subseteq S_2(T)$ 为一个开集。

若满足以下条件，我们称族 $U_S = \{U_s : s \in S\}$ 是良好的：

- 每个 U_s 都是对称的，并且满足 $\Delta \subseteq U_s \subseteq U_s^2 \subseteq \sim$；并且
- 每当 $s_0, \ldots, s_{n-1}, t \in S$ 满足 $\sum_{i<n} s_i < t$ 时，都有 $\prod_{i<n} U_{s_i} \subseteq U_t$。

引理 2.6. 设 $S \subseteq \mathbf{R}^{>0}$ 为有限，并设 U_S 为按定义 2.5所述的良族。则对每个 $t > 0$，U_S 可扩张为一个良族 $U^{S\cup\{t\}}$。

此外，若 $V_0 \subseteq S_2(T)$ 是开的，使得 $\Delta \subseteq V_0 \subseteq V_0 \subseteq \sim$，并且若对所有 $s \in S$，均有 $t < s$（相应地，$t > s$），则我们可以选取 U_t 使其包含于（相应地，包含）V_0。

证明。设

$$K = \bigcup \left\{ \prod_{i<n} \overline{U_{s_i}} : s_0, \ldots, s_{n-1} \in S, \sum_{i<n} s_i < t \right\}.$$

注意，K 作为紧集的有限并是紧致的。由于 $\sim$ 是等价关系，且每个 $U_{s_i} \subseteq \sim$，我们有 $K \subseteq \sim$。我们将情形 $n = 0$ 纳入上述并中，故 $\Delta = \prod \varnothing \subseteq K$。由于每个 U_s 是对称的，故 K亦然。

令 $K_s = K's \overline{=} U_s$，其中 $s \in S$ 且 $K_t = K$。考虑一个序列 $(s_i : i < n)$，其中 $s_i \in S \cup \{t\}$，且 $r \in S$，使得 $\sum_i s_i < r$。根据 K 的定义以及族 U_S 是良好的这一事实，我们有 $\prod_i K_{s_i} \subseteq U_r$。由引理 2.4，存在一个开集 $V \supseteq K$，使得若定义 $K't = V$，则 $\prod_i K's_i \subseteq U_r$ 也成立。需要考虑的这类序列只有有限多个，因此存在一个 V 对所有这些序列都适用。此外，我们可以假设 $V \subseteq \sim$。令 $U_t = V \cap V^{op}$，则族 $U^{S\cup\{t\}}$ 是良好的。

此外部分显然成立。■

定理 2.7。设 T 是可分语言中的一个理论，且 $\sim$ 是 T 的模型上的一个开等价关系。那么 T 存在一个可定义广义度量 d，使得 $d(a,b) < \infty$ 当且仅当 $a \sim b$。

此外，该可定义度量在一致等价和粗等价意义下是唯一的。换言之，如果 d 和 d' 是两个这样的度量，那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$d(x,y) < \delta \implies d'(x,y) < \varepsilon, \qquad d(x,y) > 1/\delta \implies d'(x,y) > 1/\varepsilon,$$

反之亦然。

证明。取一个可数稠密集 $S \subseteq \mathbf{R}^{>0}$。根据引理 2.6 并通过归纳法，我们可以构造一个良好的开集族 U_S。由于语言是可分的，$S_2(T)$ 是第二可数的，因此我们可以确保 $\bigcap_s U_s = \Delta$ 以及 $\bigcup_s U_s = \sim$。由于 S 是稠密的，并且对于所有 $s < t$，$U_s \subseteq U_t$，对每个 $p \in S_2(T)$，我们都有等式

$$\sup \{ s \in S : p \notin \overline{U_s} \} = \inf \{ s \in S : p \in U_s \}.$$

将这个公共值称为 $d(p)$。特别地，$p \in \Delta$ 当且仅当 $d(p) = \inf S = 0$，并且 $p \not\in \sim$ 当且仅当 $d(p) = \sup S = \infty$。

对于 $p \in S_2(T)$ 和 $t \in R^+$，$d(p) < t \iff p \in \bigcup_{s<t} U_s$，且 $d(p) \leq t \iff p \in \bigcap_{s>t} U_s$，因此 d 是连续的。所以我们可以将其视为一个 $[0,\infty]$-值公式 $d(x,y)$。考虑某个 T的模型中的 a、b 和 c。根据构造，$d(a,b) = d(b,a)$，并且 $d(a,b) = 0$ 当且仅当 $tp(a,b) \in \Delta$，当且仅当 $a = b$。现在假设 s、t、$r \in S$，$d(a,b) < s$，$d(b,c) < t$，并且 $s + t \leq r$。则 $tp(a,b) \in U_s$，$tp(b,c) \in U_t$，且 $U_s \cdot U_t \subseteq U_r$。因此 $d(a,c) \leq r$，这足以证明三角不等式。我们得出，公式 d 定义了一个广义度量。此外，$d(a,b) < \infty$ 当且仅当 $tp(a,b) \in \sim$ 当且仅当 $a \sim b$，正如所要求的。

对于此外部分，假设d' 是另一个这样的广义度量。若$\varepsilon > 0$，则闭条件$d(x,y) = \infty$ 蕴含开条件$d'(x,y) > 1/\varepsilon$。因此，由紧致性，存在 $\delta > 0$ 使得$d(x,y) > 1/\delta$ 蕴含$d'(x,y) > 1/\varepsilon$。关于零附近一致等价的论证是类似的（且是标准的）。■

注记 2.8. 证明 定理 2.7 仅使用紧致性与 amalgamation，因此结论在更一般的 *Robinson* 理论中仍然成立，即模型满足 amalgamation 性质的全称一阶理论。在此情形下，等价关系 $\sim$ 与广义度量 d 均用无量词类型定义。

现在转向素模型。设T 为可分语言中的完备理论。回顾$p \in S_n(T)$ 是孤立的，若逻辑拓扑与由类型度量给出的拓扑在p处重合；等价地，若p 在T的每个模型中都被实现；等价地，若在T的任一模型中，p的实现之集是可定义集。令$\mathfrak{I}_n(T) \subseteq S_n(T)$ 表示孤立的n-类型（T的）所成空间。模型$M \models T$ 是原子的，若它只实现孤立类型。

标准事实是，模型 $M \models T$ 是素模型（即可以初等嵌入到每个T的模型中），当且仅当它是可分且原子的。素模型存在，当且仅当对于每个n，$\mathfrak{I}_n(T)$ 在 $S_n(T)$ 中稠密，并且它在同构意义下唯一。此外，如果M 是素模型，那么它是齐性的：如果a、$b \in M^n$ 具有相同的类型，那么存在$g \in \mathrm{Aut}(M)$，使得$d(ga, b)$ 可以任意小。

给定 $M \models T$ 和 $p \in S_n(T)$，令 $p(M)$ 表示 p 在 M 中的实现集合。对于 $a \in M^n$，类型距离 $d(tp(a), p)$ 等于集合距离 $d(a, p(N))$，其中 $N \succeq M$ 是充分饱和的，但一般而言，它可能严格小于 $d(a, p(M))$（事实上，p 甚至未必在 M 中有实现）。一个直接但重要的观察是：当 p 是孤立的时，这种情况不可能发生。

事实 2.9. 设 T 是一个完备理论，且 $p \in \mathfrak{I}_n(T)$。那么，在 $S_n(T)$ 中到 p 的距离是一个连续函数，即一个可定义谓词，我们可以将其记作 $d(x,p)$。若 $M \models T$ 是任意模型，且 $a \in M^n$，那么 $d(a,p)$ 就是 a 到 M 中 p 的实现集合的距离。

因此，若 M 是 T 的一个素模型，且 $G = \mathrm{Aut}(M)$，那么 $M^n/\!/G \simeq \mathfrak{I}_n(T)$通过映射 $[a] \mapsto \mathrm{tp}(a)$等距地对应；而 $[a]$ 是 M 中 $\mathrm{tp}(a)$ 的实现集合。

证明。 由于 p 的实现集合是可定义的，我们可以对其进行量化。特别地，存在一个公式，我们可以将其记作 $\varphi(x) = \inf_{p(y)} d(x,y)$，使得 $\varphi(a)$ 在每个模型 $M \models T$中都取值为到 $p(M)$ 的距离。特别是，经过初等扩张后，这个距离不会改变，因此它等于 $d(\mathrm{tp}(a),p)$。这就证明了我们的第一个断言。

现在假设 M 是素模型，并令 $a \in M^n$。那么每个 $b \in G$ 都实现完全类型 tp(a)；由于公式是一致连续的，每个 $b \in G$ 与 $a = [a]$ 都实现完全类型 $\overline{\mathrm{tp}(a)}$。反过来，由于 M 是齐性的，M 中 p 的每个实现都属于 [a]。由于 M 中实现的类型恰好是孤立类型，映射 $[a] \mapsto \mathrm{tp}(a)$ 定义了一个双射 $M^n/\!/G \simeq \mathfrak{I}_n(T)$。根据我们的第一条断言，它是等距的。■

我们以构造一个结构来结束本节：该结构由适当的群作用 $G \curvearrowright A$ 得到。所构造的结构自动就是其理论的素模型。

定义 2.10。设A 是一个完备可分度量空间，G 是一个群，且$G \curvearrowright A$ 是一个等距变换作用。我们定义度量结构A^G，为A 配备一个n元谓词符号D_a，对每个$n \in \mathbf{N}$ 以及每个$a \in A^n$，其解释为

$$D_a(b) = d(b, Ga).$$

若$a_k \to a$ 属于A^n，则$D_{a_k} \to D_a$ 在模 $\mathrm{Th}(A^G)$的意义下是一致的。因此，A^G 的语言（模其理论）是可分的。

在A^G中，谓词D_a 仅取决于轨道闭包 $[a] = \overline{Ga} \in A^n/\!\!/G$。因此，给定$p \in A^n/\!\!/G$，我们可以用$D_p$ 表示任意满足$p = [a]$的谓词D_a。显然，G 通过自同构作用于A^G。

命题 2.11。设 (A,d) 是一个完备可分度量空间，设 $G \curvearrowright A$ 是一个等距变换作用，且 A^G 如定义 定义 *2.10*。则 A^G 是其理论 T 的素模型。若 $G \leq \mathrm{Iso}(A)$ 是一个闭子群，则$\mathrm{Aut}(A^G) = G$。

反过来，设 $\mathcal{L}$ 是某个词汇表，且 $A^{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{L}$ 在 (A,d) 上的一个解释，使得 $\mathcal{L}$ 关于 $T^{\mathcal{L}} = \mathrm{Th}(A^{\mathcal{L}})$ 是可分的。进一步假设 $A^{\mathcal{L}}$ 是 $T^{\mathcal{L}}$ 的素模型，且 $G = \mathrm{Aut}(A^{\mathcal{L}})$。那么，对于每个 $a \in A^n$，D_a 在 $A^{\mathcal{L}}$ 中是可定义的。

证明。设 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}^n$。由于 G 通过自同构作用于 A^G，每个 $\mathrm{b} \in \mathrm{G}$ 都实现了 a 的完全类型，而由于公式是一致连续的，每个 $\mathrm{b} \in [\mathrm{a}]$ 也同样如此。反过来，如果 b 实现了 a 的完全类型，那么 $\mathrm{D}_a(\mathrm{b}) = \mathrm{D}_a(\mathrm{a}) = 0$，因此 $\mathrm{b} \in [\mathrm{a}]$。所以，如果 $\mathrm{p} = \mathrm{tp}(\mathrm{a})$，那么 p 在 A^G 中的实现集合是 $[\mathrm{a}]$，，且到该集合的距离由 D_a 定义。特别地，A^G 中实现的每个类型都是孤立的，因此 A^G 是其理论的素模型。如果 $\mathrm{G} \leq \mathrm{Iso(A)}$，那么按照构造，G 在 $\mathrm{Aut}(\mathrm{A}^G)$ 中稠密；如果 G 是闭的，那么 $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathrm{A}^G)$。

反之，假设 $\mathrm{A}^{\mathcal{L}}$ 具有可分语言，是素的，且其自同构群为 G。若 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}^n$ 且 $\mathrm{p} = \mathrm{tp}^{\mathcal{L}}(\mathrm{a})$，则 p 的实现集合为$[\mathrm{a}]$，，而 $\mathrm{D}_a(\mathrm{x}) = \mathrm{d(x,p)}$ 根据事实 2.9 在 $\mathrm{A}^{\mathcal{L}}$ 中是可定义的。
■

命题 2.11 的第二部分断言，A^G 是具有自同构群 G的 A 上的最小素结构。

备注 2.12。考虑定义 2.10的特殊情形，其中 G 是一个波兰群$\widehat{\ }$，配备左不变度量 d_L，且作用为 $G \curvearrowright G_L$。

$\widehat{\ }$根据事实 1.1，这延拓为一个半群作用 $\mathrm{G}_L \curvearrowright \mathrm{G}_L$。对于 $\mathrm{a} \in \mathrm{G}_L$，记映射 $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{xa}$ 为 $\mathrm{R}_a\colon \mathrm{G}_L \to \mathrm{G}_L$。这些映射是一致连续的，$\widehat{\ }$并且由距离和映射 R_a 组成的符号族（其中 $\mathrm{a} \in \mathrm{G}_L\widehat{\ }$（甚至只在 G 中））可以被视为 G_L的另一种语言。特别是对于例子而言，注意到这一点将很有用：这种语言与定义 2.10 中给出的 $\widehat{\ }\mathrm{G}_L^G$的语言是双可定义的。

确实，在一个方向上，对于$g \in G^n$，

$$D_g(x) = \inf_y \bigvee_{i<n} d(x_i, yg_i).$$

由于G 在 $\widehat{\ }G_L$中稠密，这足以恢复 $\widehat{\ }G_L^G$的语言。

$\widehat{\ }$反过来，固定一个 $\in G_L$。由于R_a 是一致连续的，因此存在一个连续、递增的连续模 $\mu\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$，使得 $\mu(0) = 0$ 且

$$d(xa, ya) \leq \mu \circ d(x,y).$$

我们可以假设，对所有t，都有 $\mu(t) \geq t$。若x、$y \in \widehat{G}_L$ 且$h \in G$，则
$\mu \circ \mathrm{d}\big((\mathrm{x}, \mathrm{y}), (\mathrm{h}, \mathrm{ha})\big) \geq \mu \circ \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{h}) \vee \mathrm{d}(\mathrm{y}, \mathrm{ha}) \geq \mathrm{d}(\mathrm{xa}, \mathrm{ha}) \vee \mathrm{d}(\mathrm{y}, \mathrm{ha}) \geq \mathrm{d}(\mathrm{xa}, \mathrm{y})/2$。因此，在 $\widehat{\mathrm{G}}_L^G$ 中，

$$\mu \circ D_{[1,a]}(x,y) = \mu \circ d\big([x,y],[1,a]\big) \geq d(xa,y)/2.$$

因此，

$$d(xa,y) = \inf_z \big(d(y,z) + 2\mu \circ D_{[1,a]}(x,z)\big),$$

其中，下确界在 $z = xa$ 处取得。由此我们得出，对于每个 $a \in \widehat{G}_L$，映射 R_a 在 $\widehat{G}_L^G$ 中是可定义的。

3. 局部 $\aleph_0$-范畴理论

本文的主要目标是将 $\aleph_0$-范畴结构理论中的一部分推广到局部具有此性质的结构。虽然我们对局部 $\aleph_0$-范畴理论的定义相当有把握，但一般的局部理论则更为微妙，且可能有多种定义。就本文的目的而言，以下较弱的变体已足够。

定义 3.1。设T 为一个理论，$\sim$ 为T的模型上的一个等价关系。若T 相对于 $\sim$是弱局部的，或者称这一对$(T,\sim)$ 是一个弱局部理论，如果满足以下条件：

- 如果$M \models T$，且$M_0 \subseteq M$ 是一个等价类，那么$M_0 \preceq M$。
- 从T 的模型之间的映射当且仅当它在每个等价类上都是初等的，并且将不同的等价类映到不同的等价类时，才是初等映射。

M 中的等价类称为其局部分支。如果$M \models T$ 只有一个局部分支，那么M 就是T的一个局部模型。

局部理论$(T,\sim)$ 的局部化度量 是一个可定义广义度量d，满足$a \sim b$ 当且仅当$d(a,b) < \infty$。

根据 定理 2.7，如果$(T,\sim)$ 是可分语言中的弱局部理论，且$\sim$ 是开的，那么它存在一个局部化度量，该度量在一致等价与粗等价意义下唯一。

定义 3.2。若弱局部理论$(T,\sim)$ 具有可分语言，且在同构意义下存在唯一的局部可分模型，则称其为局部 $\aleph_0$-范畴的。

定义 3.3。设T 是一个完备理论，且$p =$ 完全类型$(a) \in \mathrm{S}_n(T)$。对于i、$j < n$，若完全类型$(a_i, a_j) \in \mathrm{S}_2(T)$ 是孤立的，我们记$i \sim_p j$。若p 满足以下条件，则称其为局部孤立的：

- $\sim_p$ 是n上的一个等价关系；
- 对于每个等价类$I \subseteq n$，$p_I =$ 完全类型(a_I) 是孤立的，其中$a_I = (a_i : i \in I)$；并且
- 若$q \in \mathrm{S}_n(T)$ 满足：$\sim_q$ 与p一致，且对于每个等价类I，$q_I =$ 等于p_I，则$q =$ 等于p。

引理 3.4. 假设 T 是完备的，且 T 的所有类型都是局部孤立的。那么每个1-类型都是孤立的。此外，对于每个 1-类型 p，都存在 $\varepsilon > 0$，使得对于实现 p 的任意 a、b，若 $d(a, b) < \varepsilon$，则完全类型(a, b) 是孤立的。

证明。根据定义，局部孤立的 1-型必定是孤立的。此外，局部孤立意味着，对于每个 1-型 p，至多存在一个非孤立的 2-类型 $q = \mathrm{tp}(a,b)$ 满足 $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b) = p$。由于$p$ 是孤立的，$\mathrm{tp}(a,a)$也必定是孤立的。因此，若存在这样的类型q，则$a \neq b$，我们可以取 $\varepsilon = d(a,b) > 0$；若不存在这样的类型，则任意 $\varepsilon > 0$ 均可。■

引理 3.5。 假设 T 是可分语言中的一个完备理论，且 T 的所有类型都是局部孤立的。设 $q(x) \in S_n(T)$ 是孤立的，并令 $Q \subseteq S_{n+1}(T)$ 为所有扩张 q 的类型的集合。则 Q 中孤立类型的集合在 Q 中稠密。

证明。 设 $U \subseteq S_{n+1}(T)$ 是开的，并假设$p(x,y) \in U \cap Q$。设$r(y) \in S_1(T)$ 是p 对最后一个变量的限制。

如果 p 是孤立的，结论便得证，因此假设它不是孤立的。由于类型空间可度量，存在一个类型序列 $p_k(x, y) \in S_{n+1}(T)$，使得 $p_k \to p$ 在逻辑拓扑中收敛，但在类型度量中不收敛。设 $q_k(x)$ 和 $r_k(y)$ 分别是它们对相应变量的限制。那么，$q_k \to q$ 和 $r_k \to r$ 在逻辑拓扑中收敛。根据假设，类型 q 是孤立的；而 r 作为 1-型自然是孤立的，因此 $q_k \to q$ 和 $r_k \to r$ 在类型度量中也收敛。这意味着（在一个充分饱和的模型中），我们可以找到实现 $(a_k, b_k) \models p_k$，以及 $a'k \models q$ 和 $b'k \models r$，使得 $d(a_kb_k, a'kb'k) \to 0$。令 $p'k = tp(a'k, b'k)$。那么 $d(p_k, p'k) \to 0$；并且由于 $p_k \to p$ 在逻辑拓扑中收敛、但在度量中不收敛，同样的结论也适用于序列 $(p'k)_k$。因此，对于某个足够大的 k，有 $p'k \in U$ 且 $p'k \neq p$。然而，$p'k$ 与 p 对 x 和 y 的限制相同，而这两个限制都是孤立的。由于 p 是非孤立的，根据局部孤立性，$p'k$ 必须是孤立的（否则 $p = p'k$），这表明 $U \cap Q$ 包含一个孤立类型。■

引理 3.6. 假设 T 是可分语言中的完备理论，且 T 的类型都是局部孤立的。对于 $M \models T$ 以及 $a,b \in M$，若 完全类型(a,b) 是孤立的，则称 $a \sim b$。于是 $\sim$ 是一个不变等价关系，并且 T 相对于 $\sim$是弱局部的。

证明。 显然， $\sim$ 是一个不变的对称关系。自反性由引理 3.4得出。传递性由类型的局部孤立得出。

现在假设 $M \models T$，且 $N \subseteq M$ 是一个等价类。由于孤立类型构成一个度量闭集，N 是 M 的一个闭子集。因此，为了看出 $N \preceq M$，我们只需证明：若 $a \in N^x$，$b \in M$，且 $\varphi(x, y)$ 是一个公式，其中 y 为单元素，并满足 $\varphi(a, b) > 0$，则存在 $b' \in N$，使得 $\varphi(a, b') > 0$。由局部孤立，在 N 中实现的每一个类型都是孤立的，特别地，$q = $完全类型(a) 也是孤立的。由引理 3.5，存在一个孤立型 $p \in S_{x,y}(T)$，使得 $\varphi(p) > 0$，且其对 x 的限制为 q。由于 p 是孤立的，我们可以对其实现的集合进行量化；又由于其到 x 的限制为 q，我们有：

$$M \models \inf_{(x,y) \models p} d(a, x) = 0.$$

换言之，存在 p 的实现 $(a_m, b_m) \in M^{x,y}$ 使得 $a_m \to a$。特别地，$\varphi(a_m, b_m) = \varphi(p) > 0$。不妨设 a 非空。记 c 为 a 的首元，记 c_m 为 a_m的首元。若 $d(a, a_m)$ 足够小，则首先，$\varphi(a, b_m) > 0$；其次，根据引理 3.4，$tp(c, c_m)$ 是孤立的。由局部孤立性，$tp(a, a_m, b_m)$ 是孤立的，因此 $b_m \in N$。这就完成了 $N \preceq M$ 的证明。

关于初等映射的条件现在由局部孤立性立即得到，因此 $(T, \sim)$ 确实是弱局部的。■

引理 3.7。 设 T 是可分语言中的完备理论，且 T 的所有类型都是局部孤立的。那么对于每个 n，孤立的 n-类型的集合在 $S_n(T)$ 中是开的。特别地，$\sim$ 引理 *3.6* 中的联合孤立关系是开的。

证明。假设 $p_k \to p$ 属于 $S_2(T)$，其中 p_k 是非孤立的。令 q(x) 和 r(y) 分别为 p(x, y) 在第一和第二个变量上的限制；q_k 和 r_k也同理。于是 $q_k \to q$，且 $r_k \to r$。由于 q 和 r 是 1-型，因此它们是孤立的，所以 $d(q_k, q) + d(r_k, r) \to 0$。取一个子序列后，不妨假设 $d(q_k, q) + d(r_k, r) < 2^{-k}$。特别地，$d(q_k, q^{k+1}) + d(r_k, r^{k+1}) < 2^{-k}$。

由引理 3.6，T 是弱局部理论。假设 T 存在非孤立型，因此它必然存在一个非局部模型 $M \models T$。令 M' 为 M 的任意一个局部分支。则 M' 是 T 的模型；由于类型 q_k 是孤立的，我们可以在 M'中构造一个序列 $(a_k)_k$，使得 $a_k \models q_k$ 且 $d(a_k, a_{k+1}) < 2^{-k}$。令 $a = \lim_k a_k \in M'$。类似地，在另一个局部分支中构造一个序列 $(b_k)_k$，使得 $b_k \models r_k$且 $b_k \to b$。由局部孤立性，$tp(a_k,b_k) = p_k$，所以 $p = tp(a,b)$。由于 a 和 b 属于不同的局部分支，p 是非孤立的。

这证明了 $S_2(T)$ 中的孤立类型集合是开的。根据局部孤立，$S_n(T)$ 中的一个类型是孤立的，当且仅当它在 2-型上的所有限制都是孤立的，因此孤立类型也构成 $S_n(T)$ 中的一个开集。■

定理 3.8 (局部 Ryll-Nardzewski)。 设 T 是可分语言中的一个理论，且 $\sim$ 是 T 的模型上的一个不变等价关系。则以下条件等价：

(i) 理论$(T,\sim)$ 是局部 $\aleph_0$-范畴的。(ii) 理论 T 是完备的，T 的类型是局部孤立的，并且 $a \sim b$ 当且仅当完全类型(a,b) 是孤立的。

若这些等价条件成立，则还有以下结论：

- 对于每个 n，$Sn(T)$ 中的孤立类型构成一个稠密开集。
- T的模型是局部的，当且仅当它是原子的；特别地，T唯一的局部可分模型就是其素模型。
- 任意T的模型的同构类型由其局部分量的同构类型及其重数决定。

证明。 首先假设$(T,\sim)$ 是局部 $\aleph_0$-范畴的，并令M_0 表示T唯一的局部可分模型。T 的每个模型都包含一个可分子模型，而T 的每个可分模型都至少包含一个与M_0 同构的局部分支。因此，T 是完备的，且M_0 是其素模型。此外，每个1-型都在某个可分模型的局部分支中实现。因此，所有1-型都是孤立的。

考虑一个2-型p。我们可以在某个可分模型中由一对(a,b)实现p。如果p 是孤立的，那么p 在M_0, 中实现，因此$a \sim b$。反之，如果p 不是孤立的，那么它不可能在a的局部分支中实现，因此$a \nsim b$。我们得出，$a \sim b$ 当且仅当$tp(a,b)$ 是孤立的。

现在考虑任意类型 $p \in S_n(T)$，它由某个可分模型 M 中的元组 a 实现。根据我们对 $\sim$ 的刻画，显然，定义 3.3 中的关系 $\sim_p$ 是一个等价关系。现在假设 $q \in S_n(T)$ 是另一个类型，且具有相同的关系 $\sim_q$，并且在等价类上的限制 $p_I = q_I$ 相同。若 $n = 0$，则由于 T 完备，$q = p$，因此我们可以假设 $n > 0$。我们可以在一个充分饱和的模型 $N \models T$ 中实现 q，例如由 b 实现。特别地，N 的局部分支至少与 M 一样多。设 $M_\alpha \preceq M$ 是 M 的一个局部分支，并令 $I = I_\alpha = \{i < n : a_i \in M_\alpha\}$。若 $I \neq \varnothing$，则它是 $\sim_p$ 的一个等价类，并且存在一个初等嵌入 $f_\alpha: M_\alpha \to N$，将 $a_I \mapsto b_I$。若 $I = \varnothing$，则我们可以选择一个初等嵌入 $f_\alpha: M_\alpha \to N$，将 M 嵌入 N 中一个未使用的局部分支。并集 $f = \bigcup_\alpha f_\alpha$ 将 a 映到 b。此外，它在每个局部分支上都是初等的，并将不同的局部分支映到不同的局部分支，因此它是初等嵌入。因此，$p = q$，这就证明了 T 的类型确实是局部孤立的。

对于逆向蕴含，由引理 3.6 可知$(T,\sim)$ 是弱局部的。由此还可知，每个局部模型都是原子的，因此局部 $\aleph_0$-范畴性由可分原子模型的唯一性得出。

孤立类型的集合是开的，这由引理 3.7 得出，并且它是稠密的，因为该理论具有一个素模型。定理第二部分中的另外两项是显然的。■

定义 3.9。如果一个理论局部 $\aleph_0$-范畴，$\aleph_0$则称其相对于唯一可能的局部性关系（根据 定理 3.8）是局部 $\aleph_0$-范畴的，即：

$$a \sim b \iff \mathrm{tp}(a,b) \text{ is isolated.}$$

结构 M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，如果 $\mathrm{Th}(M)$ 是局部 $\aleph_0$-范畴的，并且 M 是其唯一的可分局部模型。

由定理 2.7 可知，每个局部 $\aleph_0$-范畴理论或结构都存在一个局部化度量 d ，其含义见定义 3.1。这是一个广义可定义度量，满足：对于任意n元组 a，完全类型 (a) 是孤立的，当且仅当$d(a_i,aj) < \infty$ 对所有i、$j < n$均成立。特别地，在每个局部 $\aleph_0$- 范畴结构上，它的取值都是有限的（即它是一个度量）。

如果 M 是一个 $\aleph_0$-范畴结构，那么它特别是局部的。此外，$T = \mathrm{Th}(M)$ 的每个类型都在 M 中实现，并且 T 的每个模型都是局部的。因此，M 上的每个可定义度量都是局部化度量且有界。

命题3.10. 设 T 是一个局部 $\aleph_0$-范畴、非 $\aleph_0$-范畴理论，M 是其唯一的可分局部模型。设 d 是 M 上的可定义度量。那么，d 是局部化度量当且仅当它无界。

证明. 由于 T 不是 $\aleph_0$-范畴的，因此它存在一个非孤立类型，所以局部化度量必定无界。为证明反向蕴含，假设 d 无界，并设 $p(x,y) \in S_2(T)$。

如果 p 是孤立型，那么它在 M 中实现，因此 $d(x, y)^p < \infty$。反过来，假设 p 是非孤立型，并设 q(x) 和 r(y) 分别表示它在各个变量上的限制。由紧致性，存在一个类型 $p_0 \in S_2$ (T)，使得 $d(x, y)^{p_0} = \infty$。由于 S_1(T) 的直径有限，因此存在一个延伸 q(x) 和 r(y) 的 $p_1 \in S_2$(T)，使得 $d(p_1, p_0) < \infty$。于是 $d(x, y)^{p_1} = \infty$，所以 p_1 不在 M 中实现，且是非孤立的。根据类型的局部孤立性，$p_1 = p$，因此 $d(x, y)^p = \infty$。因此，d 是局部化度量。■

通过取最大值，我们将局部化度量扩展到n元组上：

$$d(a,b) = \max_{i<n} d(a_i,b_i).$$

于是，我们可以用相应的广义度量结构赋予类型空间 $S_n(T)$ 。

推论 3.11. 设 T 是一个局部 $\aleph_0$-范畴理论。令$S_n(T)$ 赋有由局部化度量 d 诱导的广义度量结构，并令 $\mathfrak{I}_n(T) \subseteq S_n(T)$表示孤立类型的集合。

那么，对于所有 n，$(\mathfrak{I}_n(T),d)$ 都是适当度量空间。

证明。如果 $p, q \in \mathfrak{I}_n$(T)，那么它们可以在 T 的素模型中实现，因此彼此距离有限。因此，$(\mathfrak{I}_n(T), d)$ 是度量空间。现在假设 $K \subseteq \mathfrak{I}_n$(T) 在度量意义下闭且有界。取 K 中任意一个序列 $(p_k)_k$ 。取一个子序列后，不妨设 $p_k \to p$ 在逻辑拓扑下收敛于 S_n(T) 中的某个点。由于 K 有界，存在固定的 C，使得 $d(p_0,p_k) \leq C$；又由于 S_n(T) 上的度量是下半连续的，$d(p_0,p) \leq C < \infty$。由此可知，p 也是孤立的。因此 $d(p_k, p) \to 0$，尤其是 $p \in K$。我们已经证明，(K, d) 中的每个序列都存在一个收敛子序列，所以 (K, d) 是紧致的。■

推论 3.12. 设 M 为一个局部 $\aleph_0$-范畴结构，并设 $G = \mathrm{Aut}(M)$，$T = \mathrm{Th}(M)$。为 M 配备一个局部化度量。则下列结论成立：

(i) 对每个 n，轨道闭包空间 $M^n/\!\!/G$ 可通过映射 $[a] \mapsto$ 完全类型(a) 等距地等同于$\mathfrak{I}_n(T) \subseteq S_n(T)$，即 T 的孤立的 n-类型的空间。对每个 n，它都是适当度量空间，且当 $n = 1$ 时为紧致的。(ii) 自同构群 G 是局部 *Roelcke* 预紧的，且作用 $G \curvearrowright M$ 是粗适当的。

证明。由于 M 是 T 的素模型，根据事实 2.9，等距识别 $M^n/\!\!/G \simeq \mathfrak{I}_n(T)$ 成立。由推论 3.11，$M^n/\!\!/G$ 是一个适当度量空间。对于 $n = 1$，我们有 $\mathfrak{I}_1(T) = S_1(T)$，因此 $S_1(T)$ 上的类型度量与逻辑拓扑相容，并且 $M/\!\!/G$ 是紧致的。这证明了 (i)，而 (ii) 由定理 1.10 得出。

■

定义 定义 2.10 的构造为我们提供了一类重要的局部 $\aleph_0$-范畴结构的例子。

定理 3.13。设 (A, d) 是一个完备度量空间，并设 $G \curvearrowright A$ 通过等距变换作用。假设 $A/\!\!/G$ 是紧致的，并且对于每个 n，$A^n/\!\!/G$ 是一个适当度量空间。那么结构 A^G 是局部 $\aleph_0$-范畴的，其理论消去量词，并且 d 是一个局部化度量。

证明。令 $T = \mathrm{Th}(A^G)$。由于 $A/\!\!/G$ 是紧致的，$A/\!\!/G = S_1(T)$。考虑对角嵌入 $A/\!\!/G \to A^n/\!\!/G$，将 $[a] \mapsto [a, a, \ldots, a]$ 映射过去。该映射是等距的，因此其像 $\Delta_n \subseteq A^n/\!\!/G \subseteq S_n(T)$ 是紧致的。

证明一个类型 $p \in S_n(T)$ 是孤立的，当且仅当对所有 $i,j < n$，都有 $d(x_i,x_j)^p < \infty$。若 p 是孤立的，则它在素模型 A^G 中实现，其中所有距离都是有限的。反过来，我们可以选取 $\alpha \in \mathbf{R}$，使 $\max_{i<j<n} d(x_i,x_j)^p < \alpha < \infty$。集合

$$\Delta_n^\alpha = \left\{q \in A^n/\!\!/G : d(q, \Delta_n) \leq \alpha\right\}$$

在 $A^n/\!\!/G$ 中是闭且有界的，因此由正则性可知它是紧致的。令

$$U^\alpha = \left\{q \in S_n(T) : \max_{i<j<n} d(x_i, x_j)^q < \alpha\right\}.$$

这是一个开集，$p \in U^\alpha$，且 $U^\alpha \cap (A^n/\!\!/G) \subseteq \Delta_n^\alpha$。由于 $A^n/\!\!/G$ 在 $S_n(T)$中稠密，且 Δ_n^α 是紧致的，$p \in \Delta_n^\alpha \subseteq A^n/\!\!/G$，因此 p 是孤立的。

为了实现量词消去，我们来考虑无限距离处原子公式的解释。A^G 的语言包含两类谓词符号，即度量符号 d 和类型距离谓词 D^p。若 $p \in A^n/\!\!/G$，$a \in A^n$，且 $i, j < n$，则 $D^p(a) \geq \frac{1}{2}\left(d(a_i, a_j) - d(x_i, x_j)^p\right)$。因此，若 b 是某个 T的模型中的一个 n 元组，且 $d(b_i, b_j) = \infty$，则 $D^p(b) = \infty$。

让我们考虑 T 的一个模型中的元组 a。我们可以将 a 划分为有限距离分量，记为 $(a_0, \ldots, a_{k-1})$。根据我们的第一个论断，每个 $p_i(x_i) = \mathrm{tp}(a_i)$ 都是孤立的，而 $\mathrm{tp}^{qf}(a)$ 告诉我们 $D^{p_i}(x_j) = 0$，也就是说，$\mathrm{tp}(a_i) = p\{v13)$。因此，$\mathrm{tp}^{qf}(a)$ 确定了有限距离分量的划分，以及每个分量的（孤立的）类型。反过来，我们对原子公式的分析告诉我们，$\mathrm{tp}^{qf}(a)$ 由 a 按有限距离分量的划分，以及每个分量的无量词类型共同确定。我们得出结论：a 的无量词类型恰好由该划分和各分量的无量词类型组成。

我们还需要作最后一个技术性观察。设 $p \in S_n(T)$（不一定是孤立的），$q = [b] \in A/\!\!/G = S_1(T)$（自动是孤立的），并假设 A 的直径无限。选取一个序列 $(a_k)_k$，其中 $a_k \in A^n$，使得 $\mathrm{tp}(a_k) \to p$。由于 A 无界，我们可以找到 $c_k \in A^n$，使其与 a_k的距离至少为 k。令$\delta_k = d([c_k], [b]) = d(c_k, q)$。那么存在 $b_k \in [b]$，使得 $d(b_k, c_k) < \delta_k + 1$。

最后，由于 A∥G 是紧致的，其直径有限，记为 R。总而言之，我们找到 a_k 和 b_k，它们属于 A，且 $\mathrm{tp}(a_k) \to p$，$\mathrm{tp}(b_k) = q$，并且 $d(b_k, a_k) \geq k - R - 1$。现在令 $r \in S_{n+1}(T)$ 为序列 $\mathrm{tp}(a_k, b_k)$ 的一个极限点，令 $M \models T$ 充分饱和，并令 $a' \in M^n$ 实现 p。于是存在 $b' \in M$，使得 $\mathrm{tp}(a', b') = r$，进而 $\mathrm{tp}(b') = q$，且 b' 与 a'之间的距离无限。

现在我们可以使用往返判据证明 T 消去量词。为此，设 $M \models T$ 充分饱和，且 $a, a' \in M^n$ 满足 $a \equiv^{qf} a'$。那么，a 和 a' 以相同的方式划分为有限距离分量，分别为 $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ 和 $(a'_0, \ldots, a'_{k-1})$，并且对每个 $i < k$，$a_i \equiv a'_i$。令 $b \in M$，并考虑两种情况。

首先假设 b 与a的某个分量处于有限距离内，例如与a_0处于有限距离内。那么，我们可以找到$b' \in M$，使得$a_0 b \equiv a'_0 b'$。ab划分为有限距离分量后为$(a_0 b, a_1, \ldots, a_{k-1})$，对$a'b'$也同样如此。根据我们对无量词类型的刻画，有$ab \equiv^{qf} a'b'$。

另一种需要考虑的情况是，b 与a之间的距离为无限距离。此时A 的直径为无限直径，并且我们已经看到，存在$b' \in M$，使其与a' 之间的距离为无限距离，且$b \equiv b'$。在这种情况下，ab 的划分为$(a_0, \ldots, a_{k-1}, b)$，$a'b'$的情况也类似，并且同样有$ab \equiv^{qf} a'b'$。

这就完成了来回准则的证明，从而也完成了T中的量词消去证明。结合我们对无量词类型的刻画，可知所有类型都是局部孤立的。此外，$d(a,b) < \infty$ 当且仅当 $\mathrm{tp}(a,b)$ 是孤立的，因此d 是局部化度量，证明完毕。■

推论 3.14。设 G 是一个局部 *Roelcke* 预紧波兰群，配备了粗适当、左不变且相容的度量 d_L。那么，与作用 $G \curvearrowright G_L$ 相关联的结构 $\widehat{G_L^G}$ 是局部 $\aleph_0$-范畴的。

特别地，波兰群 G 局部 *Roelcke* 预紧，当且仅当它是某个局部 $\aleph_0$-范畴结构的自同构群。

$\widehat{}$证明。空间 $G_L /\!\!/ G$ 是一个单点，并且对每个 n，$G_L^n /\!\!/ G$ 由推论 1.11 可知是适当的。现在应用定理 3.13。■

（可分语言中的）结构是紧致的，当且仅当它是其理论在同构意义下的唯一模型；这又当且仅当它是 $\aleph_0$-范畴的，且其自同构群是紧致的。相应的局部版本如下。

定理 3.15。设 T 是局部 $\aleph_0$-范畴理论，M 是其唯一的局部可分模型，配备局部化度量 d，且 $G = $ 自同构(M)。则以下条件等价：

(i) 度量空间 (M, d) 是适当的。(ii) 群 G 是局部紧的。(iii) M 到某个局部模型中的每个初等嵌入都是同构。(iv) 结构 M 是 T 在同构意义下的唯一局部模型。

当 T 是 $\aleph_0$-范畴时，当且仅当 T 在同构意义下存在唯一模型时，这些条件成立，而该模型必为紧致的。当 T 不是 $\aleph_0$-范畴时，这些条件还等价于

*(v) </style}*理论 T 对某个（任意）不可数基数 κ 是 κ-范畴的。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)。适当度量空间的等距群是局部紧的，其任意闭子群也是如此。

$\widehat{}$(ii) $\Longrightarrow$ (iii)。由M的齐性，我们可以将G_L 视为从M 到自身的初等嵌入所构成的半群。在局部紧群中，左$\widehat{}$一致结构是完备的，因此$G = G_L$，且M 到自身的每个初等嵌入都是同构。

等价地说，M 不存在真可分局部初等扩张。由向下勒文海姆–斯科伦定理可知，M 不存在真局部初等扩张，这正是我们想要的。

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)。由于M 初等嵌入T的每个模型中。
(iv) $\Longrightarrow$ (i)。我们首先证明T 具有以下性质：

$(*)$ 对于每个$R > r > 0$，存在$N \in \mathbf{N}$，使得T 禁止存在一个序列$(a_i : i < N)$，满足$r \leq d(a_i,a_j) \leq R$ 对所有$i < j$成立。

事实上，假设对于 $0 < r < R$不存在这样的N 。那么根据紧致性，T 有一个模型，其中包含一个不可数序列$(a_\alpha : \alpha < \aleph_1)$，使得$r \leq d(b_\alpha,b_\beta) \leq R$ 对每个 $\alpha < \beta < \aleph_1$ 都成立。该序列必须属于同一个局部分支，而该局部分支是 T 的不可分局部模型。

根据$(*)$，T 的每个局部模型都是适当的。

(iv) $\Longrightarrow$(v)。我们假设 T 不是 $\aleph_0$-范畴的，因此 M 不是紧致的，并且 T 有任意稠密特征的模型。任何具有不可数稠密特征的 T 的模型 κ 都必须由 κ 个局部分量组成，且它们都与 M同构。由 定理 3.8 可知，任意两个这样的模型都同构。

(v) $\Longrightarrow$ (i)。如上所述，只需证明性质 $(*)$。设 κ 为不可数。我们假设 T 不是 $\aleph_0$- 范畴的，因此 M 不是有界的，并且 T 有任意多个局部分量的模型。利用向下 Löwenheim–Skolem 定理，T 有一个由 κ 个可分局部分支组成的模型。如果$(*)$ 不成立，那么通过类似的论证，T 有一个稠密特征为 κ的局部模型。这两个模型不同构，因此T 不是 κ-范畴的。■

注 3.16。 紧致度量结构自动是 $\aleph_0$-范畴的，而真度量结构则不一定局部 $\aleph_0$-范畴——参见 例 6.2。

4. 局部 $\aleph_0$-范畴结构中的可定义性

本节的首要目标是根据孤立类型来描述局部 $\aleph_0$-范畴理论 T 的完整类型空间 $S_n(T)$ 。从本质上说，这等同于描述局部 $\aleph_0$-范畴结构 M 上的可定义谓词代数。我们先作一些一般性探讨。

回顾一下，当 G 是一个拓扑群时，按照 Rosendal [Ros2022]，的定义，粗有界子集构成 G 的一个子集理想，其中包含所有紧集。当 G 是 Polish 且局部有界时，它存在一个相容的左不变度量 d_L ，该度量是粗适当的，也就是说， d_L-有界集恰好是粗有界集。当 G 是 Polish 且局部 Roelcke 预紧（这蕴含局部有界）时，粗有界集恰好就是 Roelcke 预紧集。

对于下面的定义，我们不需要拓扑，只需要一个粗结构，也就是一种合理的方式来描述序列 $(g^k)_k$ 中 G 的元素“趋于无穷远”。例如，可以用 G 上的左不变伪度量 d_L来编码这一概念：若 $d_L(1,g^k) \to \infty$，我们就称$g^k \to \infty$ ；但并不要求 d_L 源自某个拓扑结构。本节中，我们将经常考虑 G 的笛卡尔幂中的序列，并需要使用双重指标。尤其是，元素上的上标表示指标，而不是群中的幂。

定义 4.1. 设G 为一个配备左不变伪度量d_L的群，并作用于集合X。固定$n \geq 1$，并令x 表示X^n中的一个元组。设 $\sim$ 为n上的一个等价关系，并令$n/\sim$ 为将n 划分为等价类的相应划分。若 $\sim$ 仅有一个等价类，则称其为平凡 。

- 对于$G_n/\sim$中元素的序列$(g_k)_k$，若对所有$I \neq J$，均有$d_L(g_{kI}, g_{kJ}) \to_k \infty$，则记$g_k \rightsquigarrow \infty$。特别地，若 $\sim$是平凡的，则$g_k \rightsquigarrow \infty$空真成立。

- 对于 $I \in n/\sim$，我们用 $x_I \in X_I$ 表示 x 到指标集 I 的限制。
- 对于 $g = (g_I : I \in n/\sim) \in G_n/\sim$，我们定义 $gx \in X_n$，使得对所有 $I \in n/\sim$ 都有 $(gx)_I = g_I x_I$，从而诱导出一个作用 $G_n/\sim \curvearrowright X_n$。
- 设 K 为一个拓扑空间，且 $P\colon X_n \to K$ 为一个映射。我们称 P是 $\sim$-真G-不变的，如果对于 $G_n/\sim$中元素的每一个序列 $(g_k)_k$ 以及每一个 $x \in X_n$，若 $g_k \rightsquigarrow \infty$，则序列 $P(g_k x)$ 收敛。若此性质对 n上的每一个等价关系 $\sim$ 都成立，则称 P 是真G-不变的。

当 $\sim$ 为平凡时，我们总有 $g^k \rightsquigarrow \infty$ 属于 G，因此 P 是 $\sim$-适当地 G-不变的，当且仅当它是 G-不变的，这也就是该术语的由来。特别地，如果 P 是适当地 G-不变的，那么它就是 G-不变的。

备注 4.2。我们有如下二分法：

- 如果 d_L 是有界的，那么对于非平凡的 $\sim$，我们永远不可能有 $g_k \rightsquigarrow \infty$。因此，谓词 P 是适当地 G-不变的，当且仅当它是 G-不变的。

- 如果 d_L 是无界的，那么对于每个 $\sim$，我们都可以在$G_n/\sim$中找到一个序列 $g_k \rightsquigarrow \infty$。如果 P 是适当地 G-不变的，那么极限 $P(g_k x)$ 仅取决于x 和 $\sim$，并记作 $P_\sim(x)$。

定义 4.3。设 X 为一个度量空间，且 $G \curvearrowright$ 通过等距变换作用于X。设 d_L 为 G 上的左不变伪度量，并假设对于X中的某个（等价地，任意）$x \in$，$d_L(g^k, h^k) \to \infty$ 当且仅当 $d(g^k x, h^k x) \to \infty$。则称$d_L$ 与作用 $G \curvearrowright X$粗相容。

我们称谓词 $P\colon X^n \to K$ 为$(\sim)$真G-不变，如果它相对于任意粗相容的左不变伪度量都具有这一性质。

显然，粗相容的左不变伪度量总是存在的（例如，$d_L(g,h) = d(gx, hx)$，其中 $x \in X$）。此外，所有这类伪度量都会诱导相同的$g^k \rightsquigarrow \infty$概念，因此也会诱导相同的真$G$-不变谓词概念。

当M 是一个配备局部化度量的局部 $\aleph_0$-范畴结构，且$G = \mathrm{Aut}(M)$时，作用 $G \curvearrowright M$ 是粗适当的。因此，d_L 是G 上的粗适当左不变相容伪度量，当且仅当它与$G \curvearrowright M$上的作用粗相容。

定理 4.4. 设 M 是一个配备局部化度量的局部 $\aleph_0$-范畴结构，且 $G = \mathrm{Aut}(M)$。设 K 是一个紧空间（例如，$\mathbf{R}$ 的闭有界子集）。

那么，谓词 $P\colon M^n \to K$ 是可定义的（无参数）当且仅当它是一致连续且真G-不变的。

证明。我们可以为 M 配备一个局部化度量，使得作用 $G \curvearrowright M$ 根据 推论3.12是粗适当的。

首先假设 P 是可定义的。每个可定义谓词都是一致连续的，这是一个标准事实。为了验证它是真G-不变的，假设 $\mathrm{a} \in \mathrm{M}^n$，$\sim$ 是 n 上的一个等价关系，且 $\mathrm{g}^k \rightsquigarrow \infty$ 属于 $\mathrm{G}^{n/\sim}$，如定义 4.1 所述。令 $\mathrm{T} = \mathrm{Th}(\mathrm{M})$。令 $\mathrm{p}^k =$ 完全类型$(\mathrm{g}^k \mathrm{a}) \in \mathrm{S}_n(\mathrm{T})$，并对 $\mathrm{I} \in \mathrm{n}/\sim$，令 $\mathrm{p}_I =$ 完全类型$(\mathrm{a}_I) \in \mathrm{S}_I(\mathrm{T})$。

设 q 是 $(\mathrm{p}^k)_k$ 的一个极限点。若 $\mathrm{i} \sim \mathrm{j}$，则 $\mathrm{d}(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j)^q = \mathrm{d}(\mathrm{a}_i, \mathrm{a}_j)$。另一方面，若 $\mathrm{i} \not\sim \mathrm{j}$，则 $\mathrm{d}(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j)^q = \lim_k \mathrm{d}(\mathrm{g}_I^k \mathrm{a}_i, \mathrm{g}_J^k \mathrm{a}_j) = \infty$，其中 I 和 J 是

分别对应的类i 和j。根据类型的局部孤立性，q 是唯一满足以下条件的类型：$\sim_q = \sim$ 且$q_I = p_I$ 对每个$I \in n/\sim$ 都成立。因此，$p^k \to q$，且$P(g^k a) = P(p^k) \to P(q)$。

反过来，假设 P 是一致连续且真G-不变的。由推论 3.12，我们可以将 $M^n/\!\!/G$ 作为度量空间，与 $\mathfrak{I}_n(T) \subseteq S_n(T)$ 等同；后者是 T 的孤立 n-类型所构成的空间。由连续性和 G-不变性可知，P 诱导出一个连续函数 $M^n/\!\!/G \to R$。因此，剩下要证明的就是 P 存在到 $S_n(T)$ 的连续延拓（且必然唯一）。只需证明：若 $p^k \in \mathfrak{I}_n(T)$，且 $p^k \to q \in S_n(T)$，则 $P(p^k)$ 收敛。

我们可以假设 $p^k = \mathrm{tp}(b^k)$，且 $q = \mathrm{tp}(c)$，其中 $b^k \in M^n$，但 c 可能属于 T 的另一个模型。回忆一下，$\sim_q$ 是 n 上的等价关系：若 $i \sim_q j$，则 $d(c_i, c_j) < \infty$。若 $I \in n/\sim_q$，则 $q_I = \mathrm{tp}(c_I)$ 是孤立的，因此可由元组 $a_I \in M^I$实现。由于各等价类 I 互不相交，我们可以将 a_I 视为某个 $a \in M^n$ 的子元组。

如果 $I \in n/\sim_q$，那么 $\mathrm{tp}(b_I^k) \to \mathrm{tp}(c_I) = \mathrm{tp}(a_I)$ 属于 $\mathfrak{I}_I(T)$。由于在孤立类型上，类型度量与逻辑拓扑相容，因此存在 $g_I^k \in G$，使得 $d(b_I^k, g_I^k a_I) \to 0$。等价地，存在 $g^k \in G^{n/\sim_q}$，使得 $d(b^k, g^k a) \to 0$。如果 $i \not\sim_q j$，那么 $d(b_i^k, b_j^k) \to d(c_i, c_j) = \infty$，因此 $d(g_I^k a_i, g_J^k a_j) \to \infty$，其中 I 和 J 分别是相应的等价类。因此 $g^k \not\rightsquigarrow \infty$，由适当的 G-不变性可得 $P(g^k a) \to P_\infty(a)$；又由于假设 P 一致连续，$P(b^k) \to P_\infty(a)$ 也成立。■

回想一下，同一集合上的两个结构（但它们的语言可能不同）是双可定义的，当且仅当它们具有相同的可定义谓词。

推论 4.5. 设 M_0 和 M_1 是两个局部 $\aleph_0$-范畴结构，它们的语言可以不同，但底层集合 M 和自同构群 G 相同，且可定义度量一致等价。那么 M_0 和 M_1 是双可定义的。

特别地，若 M 是一个局部 $\aleph_0$-范畴结构，且 $G = \mathrm{Aut}(M)$，则 M 与 M^G 双可定义。

证明。 由于这两个结构上的度量一致等价，自同构群 G 在两个结构下都具有相同的局部 Roelcke 预紧拓扑，因此也具有相同的粗结构。我们不妨假设可定义度量是隔离的；此时 $G \curvearrowright M_i$ 是粗适当的，这意味着局部化度量也粗等价，并由此产生相同的适当 G-不变性概念。最后，利用 定理 4.4 中对可定义谓词的刻画即可得出结论。

特别是，如果 M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，那么 M^G 根据 $\aleph_0$定理3.13也是局部 ■-范畴的，因此主要条款适用。

我们已经描述了M^n上的可定义谓词代数，由此可以通过盖尔范德对偶得到类型空间 $S_n(T)$。接下来，我们将更明确地构造 $S_n(T)$，将其视为$M^n/\!\!/G = \mathfrak{I}_n(T)$关于适当一致结构的完备化。这种一致结构可以在群等距作用于度量空间的抽象设定中定义。

定义 4.6。设G 是作用于度量空间(X,d) 上的一个群，作用方式为等距变换，并设$n \in \mathbf{N}$。

- 我们回顾一下，对于 $x \in X^n$ 和 $I \subseteq n$，$x_I \in X^I$ 表示元组 x 在 I 上的限制。注意，$[x_I] \in X^I/\!\!/G$ 仅取决于 $[x] \in X^n/\!\!/G$ 和 I，因此我们可以定义 $[x]_I = [x_I]$。对于 $p, q \in X^n/\!\!/G$，令 $d_I(p, q) = d(p_I, q_I)$，于是 $d_I \leq d^n = d$ 在 $X^n/\!\!/G$ 上成立。

- 对于 $p = [x] \in X^n /\!\!/ G$、$i < n$ 和 $m \in \mathbf{N}$，定义
$$I(x,i,m) = \{j < n : d(x_i, x_j) < 2^m\}.$$
这仅依赖于 $p = [x]$, i 以及 m，因此我们也可以将其记为$I(p,i,m)$。

- 对于$m \in \mathbf{N}$ ，定义
$$U_m^\infty = \Big\{(p,q) \in (X^n /\!\!/ G)^2 : d_{I(p,i,m)}(p,q) < 2^{-m} \text{ and } d_{I(q,i,m)}(p,q) < 2^{-m} \text{ for all } i < n\Big\}.$$
- 我们用 $\mathcal{U}^\infty$ 表示$(X^n /\!\!/ G)^2$ 中那些对某个 m 包含$U^\infty{}_m$ 的子集所构成的集合。

引理 4.7. 设 G 是一个以等距变换作用于度量空间 (X,d) 上的群，并设 $n \in \mathbf{N}$。则：

(i) 对每个 m，集合 U_m^∞ 是对称的。(ii) 序列 $(U_m^\infty)_m$ 是递减的，且交集 $\bigcap_m U_m^\infty$ 是 $(X^n /\!\!/ G)^2$ 的对角线。(iii) 对每个 m，我们有 $U_{m+1}^\infty \circ U_{m+1}^\infty \subseteq U_m^\infty$。

因此，族 $(U_m^\infty)_m$ 在 $X^n /\!\!/ G$ 上生成一个可度量化的一致结构，它恰好是 $\mathcal{U}^\infty$。它比由 $X^n /\!\!/ G$ 上的度量诱导的一致结构更粗，并诱导与该度量相同的拓扑。

证明。前两个断言是直接的。对于第三个，设 $\mathrm{p} = [\mathrm{x}], \mathrm{q} = [\mathrm{y}], \mathrm{r} = [\mathrm{z}],$，并假设 $(\mathrm{p},\mathrm{q}), (\mathrm{q},\mathrm{r}) \in \mathrm{U}_{m+1}^\infty$。设 $\mathrm{i}, \mathrm{j} < \mathrm{n}$，并假设 $\mathrm{j} \in \mathrm{I}(\mathrm{p},\mathrm{i},\mathrm{m})$，即 $\mathrm{d}(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j) < 2^m$。则存在 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，使得 $\mathrm{d}\big(\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j, \mathrm{g}(\mathrm{y}_i\mathrm{y}_j)\big) < 2^{-}\mathrm{m}^{-1}$，从而 $\mathrm{d}(\mathrm{y}_i, \mathrm{y}_j) < 2^m + 1 \le 2^{m+1}$。由此可得
$$I(p,i,m) \subseteq I(p,i,m+1) \cap I(q,i,m+1).$$
因此，
$$\begin{aligned} d_{I(p,i,m)}(p,r) &\le d_{I(p,i,m)}(p,q) + d_{I(p,i,m)}(q,r) \\ &\le d_{I(p,i,m+1)}(p,q) + d_{I(q,i,m+1)}(q,r) < 2^{-m}. \end{aligned}$$
同理可证，$d^{I(r,i,m)}(p,r) < 2^{-}m$，因此$(p,r) \in U_m^\infty$。因此，$U_{m+1}^\infty \circ U_{m+1}^\infty \subseteq U_m^\infty$。

对于最后一个断言，注意到 $\{(\mathrm{p},\mathrm{q}) : \mathrm{d}(\mathrm{p},\mathrm{q}) < 2^{-}\mathrm{m}\} \subseteq \mathrm{U}_m^\infty$，所以 $\mathcal{U}^\infty$ 比由 $\mathrm{X}^n /\!\!/ \mathrm{G}$ 上的度量定义的一致结构更粗。反过来，固定 $\mathrm{p} = [\mathrm{x}] \in \mathrm{X}^n /\!\!/ \mathrm{G}$，若 $\max^{i<j} \mathrm{d}(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j) < 2^m$ 且 $(\mathrm{p},\mathrm{q}) \in \mathrm{U}_m^\infty$，则 $\mathrm{d}(\mathrm{p},\mathrm{q}) < 2^{-}\mathrm{m}$。因此 $\mathcal{U}^\infty$ 与 d 在 $\mathrm{X}^n /\!\!/ \mathrm{G}$ 上定义相同的拓扑。■

我们在$X^n /\!\!/ G$上定义了 $\mathcal{U}^\infty$，并可将其拉回为X^n上的一致结构。谓词$P\colon X^n \to \mathbf{R}$ 在此意义下是 $\mathcal{U}^\infty$-一致连续的，当且仅当它可分解为函数$\underline{P}\colon X^n /\!\!/ G \to \mathbf{R}$，且$P$ 是 $\mathcal{U}^\infty$-一致连续的。

引理 4.8。 设 (X,d) 是一个度量空间，且 $G \curvearrowright X$ 是由等距变换构成的作用。则每个$\mathcal{U}^\infty$-一致连续的有界函数 $P\colon X^n \to \mathbf{R}$ 都是关于 d 一致连续的，并且是真G-不变的。

证明。由引理 4.7，P 是 d-一致连续的。为看出它是适当 G-不变的，固定 n 上的一个等价关系 $\sim$。设 $(\mathrm{g}^k)_k$ 是 $\mathrm{G}^{n/\sim}$ 中元素的一个序列，使得 $\mathrm{g}^k \rightsquigarrow \infty$，并设 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}^n$。设 $\mathrm{p}^k = [\mathrm{g}^k\mathrm{x}]$。对每个 m，以及相对于 m 充分大的每个 k，集合 $\mathrm{I}(\mathrm{p}^k, \mathrm{i}, \mathrm{m})$ 包含在 i 的 $\sim$-类中。由此可知，序列 $(\mathrm{p}^k)_k$ 是 $\mathcal{U}^\infty$-Cauchy 的，故由假设，$\mathrm{P}(\mathrm{g}^k\mathrm{x})$ 收敛。■

现在我们可以证明，对于局部 $\aleph_0$-范畴结构 M，$\mathrm{Th}(M)$ 的全部 n-类型所成的空间可以显式构造为 $M^n/\!\!/\mathrm{Aut}(M)$ 的 $\mathcal{U}^\infty$-完备化。我们将使用以下简单的标准事实：若可度量化一致空间 X 上的一致连续有界函数代数是可分的，则 X 是预紧的。

命题 4.9. 设 M 是一个局部 $\aleph_0$-范畴结构，配备了一个局部化度量，并且 $G = \mathrm{Aut}(M)$，$T = \mathrm{Th}(M)$。那么，将 $\mathfrak{I}_n(T)$ 识别为 $M^n/\!\!/G$ 的方式可扩展为将 $\mathrm{S}_n(T)$ 识别为 $M^n/\!\!/G$ 的 $\mathcal{U}^\infty$-完备化。

证明。令 $\mathrm{UCB}(\mathrm{M}^n/\!\!/\mathrm{G}, \mathcal{U}^\infty)$ 表示 $\mathrm{M}^n/\!\!/\mathrm{G}$ 上有界且 $\mathcal{U}^\infty$-一致连续函数构成的代数。根据定理 4.4 和引理 4.8，我们可以将 $\mathrm{UCB}(\mathrm{M}^n/\!\!/\mathrm{G}, \mathcal{U}^\infty)$ 识别为连续函数代数 $\mathrm{C}\big(\mathrm{S}_n(\mathrm{T})\big)$ 的一个子代数。由于 T 的语言是可分的，代数 $\mathrm{C}\big(\mathrm{S}_n(\mathrm{T})\big)$ 也是可分的，因此 $\mathrm{UCB}(\mathrm{M}^n/\!\!/\mathrm{G}, \mathcal{U}^\infty)$ 也可分。由此可知，$\mathrm{M}^n/\!\!/\mathrm{G}$ 的 $\mathcal{U}^\infty$-完备化是紧致的；根据格尔范德对偶，得到一个连续满射 $\theta\colon \mathrm{S}_n(\mathrm{T}) \to \mathrm{M}^n/\!\!/\mathrm{G}$。

剩下要证明 θ 是单射。设 $\mathrm{p}、\mathrm{q} \in \mathrm{S}_n(\mathrm{T})$，且满足 $\theta(\mathrm{p}) = \theta(\mathrm{q})$。设 $(\mathrm{p}^k)_k$ 和 $(\mathrm{q}^k)_k$ 是 $\mathrm{M}^n/\!\!/\mathrm{G}$ 中的序列，使得在 $\mathrm{S}_n(\mathrm{T})$ 中 $\mathrm{p}^k \to \mathrm{p}$ 且 $\mathrm{q}^k \to \mathrm{q}$。若 $\lim_k \mathrm{d}(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j)^{p_k} = \mathrm{d}(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j)^p < \infty$，则称 $\mathrm{i} \sim_p \mathrm{j}$；对 q 也类似。由于 $\theta(\mathrm{p}) = \theta(\mathrm{q})$，交错序列 $(\mathrm{p}^k, \mathrm{q}^k)_k$ 是 $\mathcal{U}^\infty$-柯西序列，因此 $\sim_p$ 与 $\sim_q$ 重合。同理，对每个 $\mathrm{I} \in \mathrm{n}/\!\sim_p$，交错序列 $(\mathrm{p}_I^k, \mathrm{q}_I^k)_k$ 是 d-柯西序列，这意味着 $\mathrm{p}_I = \mathrm{q}_I$。利用类型的局部孤立性，我们得出 $\mathrm{p} = \mathrm{q}$。■

5. 局部 $\aleph_0$-范畴结构中的解释

我们转而讨论结构的可解释性问题。关于解释扩张和双重可解释性的形式定义，请参阅[Ben2023]，，这里我们简要回顾一下。粗略地说，一个可解释类是一个可定义子集，它取自基本类型的可数笛卡尔积的伪度量商基本类型，其中基本类型总是包括常数类 $\{0,1\}$。一个解释扩张是这样一种扩张：它添加一个可解释类及其诱导结构，作为新的基本类型。为了确认添加一个新型确实构成解释扩张，我们需要证明，在扩张后的结构中，新型与原结构中的某个可解释类型之间存在可定义双射，并且所有新引入的结构都能通过该双射由原有各型上的结构定义。若两个结构有共同解释扩张，则称它们双可解释。

注 5.1。 一个型可以在单个结构中解释，也可以在一个理论中解释，即在其所有模型中一致地解释。然而，在一个结构中可解释的任何型也都可以在其理论中解释，因此对于完备理论而言，这两个概念实质上是相同的。更准确地说，如果 $T = \mathrm{Th}(M)$，那么 T 和 T' 双可解释，当且仅当 M 与某个 M' 双可解释，并且 $T' = \mathrm{Th}(M')$。

如果M' 是M的解释扩张，那么 $\mathrm{Aut}(M) \cong \mathrm{Aut}(M')$。因此，如果$M'$ 与M双可解释，那么 $\mathrm{Aut}(M) \cong \mathrm{Aut}(M')$。出于类似的原因，$M$ 是其理论的素模型，当且仅当M' 是。

定义5.2。 设T 是一个弱局部理论，设D 是T中的一个可解释类型。若对于每个模型 $M \models T$，当$M = \bigsqcup_\alpha M_\alpha$ 是其局部分支分解时，$D^M = \bigsqcup_\alpha D^{M_\alpha}$，则称$D$ 为一个局部 型。

引理 5.3。 设 M 是局部 $\aleph_0$-范畴结构，且 $G =$ 自同构(M)。设 D 是 $T =$ 理论(M)的一个局部可解释型。那么，D^M连同其诱导结构，也具有局部 $\aleph_0$-范畴性。

证明。 设 $T_D = \mathrm{Th}(D^M)$ 是在诱导结构中的理论。类型空间 $S_n(T_D)$ 与 $S_{D^n}(T)$相同；后者是将 D视为T中的可解释型时，n元组的类型空间。特别地，一种意义下的类型孤立与另一种意义下的类型孤立相同。

根据局部型的定义，每个 $p \in S_1(T_D) = S_D(T)$ 都在 T 的某个局部模型中实现，因此它必定是孤立的。同样，由于 D 的每个元素都由唯一的局部（因而也是原子的）分量表示，D 上的联合孤立关系是一个等价关系。

设 $N \models T$ 是 T 的一个 $\aleph_1$-饱和模型，并设 $p \in S_n(T_D)$。那么，p 由某个 $a \in (D^N)^n$ 实现。设 $N = \bigsqcup_\alpha N_\alpha$ 是 N 分解为局部成分后的分解；对于 $i < n$，令 α_i 为满足 $a_i \in D^{N_{\alpha_i}}$ 的那个成分的指标。

对于每个 i，$\mathrm{tp}(a_i)$ 都是孤立的（因为 N^{α_i} 是原子的）。同样，若 $\alpha_i = \alpha_j$，则 $\mathrm{tp}(a_i, a_j)$ 是孤立的。反过来，假设 $\mathrm{tp}(a_i, a_j)$ 是孤立的。那么，对于每个 $N' \models T$，它都在 $D^{N'}$ 中实现；特别是在可分局部模型中实现，设由 (b, b') 实现。由于 N 是 $\aleph_1$-饱和的，存在一个初等嵌入 $N' \preceq N$，将 (b, b') 与 (a_i, a_j) 对应起来。由于 N' 是局部的，它嵌入 N 的单个局部分量中，因此 $\alpha_i = \alpha_j$。

我们得出，$\alpha_i = \alpha_j$ 当且仅当 $\mathrm{tp}(a_i,a_j)$ 是孤立的，我们将其记为$i \sim_p j$。对于每个类I，$a_I \in (D^{N_{\alpha_I}})^I$ 对应唯一的 α_I。若$I \neq J$ 是不同的类，则 $\alpha_I \neq \alpha_J$。因此，$\mathrm{tp}(a)$ 完全由类型 $\mathrm{tp}(a_I)$决定，其中$I \in n/\sim_p$。这证明了类型的局部孤立性，因此T_D 是局部 $\aleph_0$-范畴的。

最后，D^M 是可分且原子的，因此它是T_D的素模型，也是其唯一的可分局部模型。
■

若M 是一个无界的局部 $\aleph_0$-范畴结构，那么非局部解释排序的一个简单例子是 M^2。在这种情况下，结构M^2 *not*局部 $\aleph_0$-范畴。

设T 为一个理论，并设D_0,D_1 是T中的两个可解释类。赋予它们可定义度量d_0 和d_1, ，二者均有界于一。令(D,d) 为$D_0 \times D_1$ 关于以下可定义伪度量的商空间：

$$d\big((i,a_0,a_1),(j,b_0,b_1)\big) = \begin{cases} d_i(a_i,b_i) & i = j, \\ 1 & i \neq j. \end{cases}$$

于是，D 可与不交并$D_0 \sqcup D_1$, 等同，其中每个D_i 都配备相应的度量d_i，且两个集合之间的距离为 1。从 $\{0,1\} \times D_0 \times D_1$ 到第一个坐标的投影在D上诱导出一个可定义谓词，在D_i上等于i，因此每个D_i 都是D的可定义子集。$(D_0 \sqcup D_1)^n$ 中的类型空间是由D_0 和D_1的若干份副本的乘积中的所有类型空间构成的拓扑不交并。

引理 5.4。 设 M_0 和 M_1 是局部 $\aleph_0$-范畴结构，其自同构群为 $G_i = \mathrm{Aut}(M_i)$。假设：

- 对于每个 i，Di 都是 Mi 中的一个局部可解释类型（Gi 也作用于其上）；
- 存在一致同胚 θM： $M_0 \simeq D_1$ 以及 θD： $D_0 \simeq M_1$；并且
- 存在一个群同构 φ： $G_0 \simeq G_1$，它与 θM 和θD 兼容。具体而言，对于 $\in M_0$、$b \in D_0$ 和 $g \in G_0$：

$$\varphi(g) \cdot \theta_M(a) = \theta_M(ga), \qquad \varphi(g) \cdot \theta_D(b) = \theta_D(gb).$$

那么 M_0 和 M_1 是双可解释的。

证明。 构造不交并 $M_i \sqcup D_i$ 对于 $i = 0$，如上所述。于是，每一个都是相应 M_i中的局部可解释类型，因此根据 引理 5.3，其本身都是局部$\aleph_0$-范畴结构。此外，$M_i \sqcup D_i$ 是 M_i的解释扩张。通过 $M_0 \sqcup D_0$ 和 $D_1 \sqcup M_0$ 的底层集合的以下对应关系

$\theta_M \sqcup \theta_D$，根据 推论 4.5，这两个结构是双可定义的。因此，我们构造了一个 M_0 和 M_1, 的共同解释扩张，由此得出结论。■

注5.5. 设 K 为紧度量空间。由于 K 可表示为 $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ 的连续像，因此它可在任何仅使用常数类 $\{0,1\}$ 的结构中解释。由于自同构在 $\{0,1\}$ 上的作用是单位元，它们在 K 上的作用也为单位元。若 T 是一个局部理论，$\mathrm{M} \vDash \mathrm{T}$ 且 $\mathrm{M} = \bigsqcup_\alpha \mathrm{M}_\alpha$ 是将 M 分解为局部分量，则 $\mathrm{M} \times \mathrm{K}$ 分解为 $\bigsqcup_\alpha (\mathrm{M}_\alpha \times \mathrm{K})$。因此，若 M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，则 $\mathrm{M} \times \mathrm{K}$ 按照定义5.2 的意义是一个局部型，因此在诱导结构下，它也是局部 $\aleph_0$-范畴的。

引理5.6. 设 M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，并令 $G = \mathrm{Aut}(M)$。在 G 上赋予一个$\widehat{\ }$相容、粗适当、左不变的度量 d_L，并令 G_L 表示完备化。令结构 $\widehat{G}_L^G$如定义 *2.10* 所述，相对于左平移作用 $G \curvearrowright \widehat{G}_L$。

那么，$\widehat{G}_L^G$是局部 $\aleph_0$-范畴的，并且与 M 双可解释。

证明。我们有一个自然的识别：$G = \mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}(\widehat{G}_L^G)$。我们可以假设$M$ 配备了一个局部化度量。

我们可以将$M^{\mathbf{N}}$ 视为M 中的一个可解释型，并为其配备一个相容的可定义度量，例如，

$$d(a,b) = \sup_{i \in \mathbf{N}} \left(2^{-i} \wedge d(a_i, b_i)\right).$$

取 $\xi \in M^{\mathbf{N}}$，使其枚举M 的一个稠密子集，并令$p = \mathrm{tp}(\xi)$。由于M 是素的，p 是孤立的，因此$D = [\xi]$ 是一个可定义集。映射$G \to G\xi$，$g \mapsto g\xi$ 是一致同胚。因此，它扩张为完备化之间的一致同胚$\widehat{G}_L \to D$。

接下来，我们在结构 $\widehat{\mathrm{G}}_L^G$中解释 M（根据推论 3.14，该结构是局部 $\aleph_0$-范畴的）。根据引理1.3，M 中存在一个紧集，它与 $\mathrm{M}/\!/\mathrm{G}$ 中的每个轨道闭包都有交。将此集合记为 $\{\mathrm{a}_t : \mathrm{t} \in \mathrm{K}\}$，其中 K 是一个紧空间$\tilde{}$，且 $\mathrm{t} \mapsto \mathrm{a}_t$ 是到 M 中的同胚嵌入。在 $\mathrm{G} \times \mathrm{K}$ 上定义伪度量 d 如下：

$$\tilde{d}\big((g,t),(h,s)\big) = d^M(ga_t, ha_s).$$

它是一致连续的，因此可延拓为 $\widehat{\mathrm{G}}_L \times \mathrm{K}$ 上的一致连续伪度量。由于作用 $\mathrm{G} \curvearrowright (\widehat{\mathrm{G}}_L \times \mathrm{K})$ 在第二$\tilde{}$坐标上是平凡的，d 是 G-不变的。由该作用的粗适当性可知，若 $\mathrm{f}_k \to \infty$in G，则 $\tilde{\mathrm{d}}((\mathrm{g},\mathrm{t}),(\mathrm{f}_k\mathrm{h},\mathrm{s})) \to \infty$，因此 $\tilde{\mathrm{d}}$ 是真G-不变的。根据注 5.5，乘积 $\widehat{\mathrm{G}}_L \times \mathrm{K}$ 配备从 $\widehat{\mathrm{G}}_L^G$ 诱导的结构后，是局部 $\aleph_0$-范畴的。因此，根据定理 4.4，$\tilde{\mathrm{d}}$ 是可定义的（在 $\widehat{\mathrm{G}}_L^G \times \mathrm{K}$ 中，因此也在$\widehat{\mathrm{G}}_L^G$中）。

令 E 表示$(\widehat{G}_L \times K, \tilde{d})$的完备商，即将其按零距离等价关系取商后再作完备化。映射 $G \times K \to M$ 将$(g,t) \mapsto ga_t$，其像稠密（由K的选取可知），并诱导出一个等距双射$E \simeq M$。

我们已经构造了M 中的解释集D 以及 $\widehat{G}_L^G$中的解释集E，以及一致$\widehat{\ }$同构 $\theta_D : G_L \simeq D$ 与 $\theta_E : E \simeq M$。考虑g、$h \in G$ 以及$t \in K$。则

$$g\theta_D(h) = gh\xi = \theta_D(gh), \qquad g\theta_E\big([h,t]\big) = gha_t = \theta_E\big(g[h,t]\big).$$

$\widehat{\ }$由稠密性可知，这在 G_L 或 E 上处处成立。利用 引理 5.4 得出结论。

■

由此，我们推得 Coquand定理在局部 $\aleph_0$-范畴结构中的一个类似结果。

定理 5.7. 设 M_0 和 M_1 是局部 $\aleph_0$-范畴结构。则 M_0 与 M_1 双可解释，当且仅当 $\mathrm{Aut}(M_0) \cong \mathrm{Aut}(M_1)$ 作为拓扑群同构。

证明。若这些结构双可解释，则在同构意义下，它们存在一个共同解释扩张 (M_0, M_1)；此时 $\mathrm{Aut}(M_0) \cong \mathrm{Aut}(M_0,M_1) \cong \mathrm{Aut}(M_1)$。反过来，令 $G = \mathrm{Aut}(M_0) = \mathrm{Aut}(M_1)$。每个 M_i 都与 $\widehat{G}_L^G$ 双可解释，因此这三个结构都存在一个共同解释扩张（具有三个型 $(M_0,M1, \widehat{G}_L)$），故 M_0 与 M_1 双可解释。■

推论 5.8. 设 M_0 与 M_1 是双可解释的局部 $\aleph_0$-范畴结构。设 d_i 是 M_i 上的局部化度量，其中 $i = 0,1$。则度量空间 (M_0,d_0) 与 (M_1,d_1) 粗等价。

证明。设 $G = \mathrm{Aut}(M_0) \cong \mathrm{Aut}(M_1)$。由推论 3.12，作用 $G \curvearrowright M_i$ 是粗适当的。它们也是共有界的（因为 $M_i/\!/G$ 是紧致的），因此每个度量空间 (M_i,d_i) 都与 G 粗等价。■

6. 例子

我们从一族已经出现过的自然例子开始。假设 G 是一个波兰的、局部 Roelcke 预紧群。设 d_L 是一个相容的、粗适当的左不变度量，并且对 $g \in G$，令 $R_g\colon x \mapsto xg$ 表示相应的右平移映射。由注记 2.12，结构 $(\widehat{G}_L, d_L, R_g)_{g\in G}$ 与定义 2.10 中的 $\widehat{G}_L^G$ 双可定义，而由推论 3.14，后者是局部 $\aleph_0$- 范畴的。此外：

- 若 $S \subseteq G$ 生成一个稠密子群，那么考虑子语言 $(d_L,R_g)_{g\in S}$ 中的 $\widehat{G}_L$ 不会造成任何损失。
- 当 G 局部紧时，d_L 完备，因此 $G_L = G$，并得到结构 $(G,d_L, R_g)_{g\in S}$。
- 当 G 是离散可数群时，我们可以用等号关系代替 d_L，因为 $d(g_n,h_n) \to \infty$ 当且仅当 $h_n^{-1} g_n$ 离开每个有限集合，而这可以用等号和右平移映射定义。
- 因此，当 G 有限生成且 S 为生成集时，我们得到一个局部 $\aleph_0$-范畴结构 $(G,R_g)_{g\in S}$，它是 G 的标记右凯莱图。在这种情况下，局部化度量就是 G 上的词度量。

例 6.1。当 $G =$ **整数集 Z** 且 $S = \{1\}$ 时，我们得到局部 $\aleph_0$-范畴结构 $(\mathbf{Z},s)$，其中 s 是后继映射。

例 6.2。一个非常相似的反例是结构 $(\mathbf{Z}, \leq)$，其中 $\mathbf{Z}$ 上的通常度量可定义为一个 $[0,\infty]$-值谓词。这是一个真度量结构，其自同构群同构于 $\mathbf{Z}$。然而，$(\mathbf{Z}, \leq)$ 并非局部 $\aleph_0$-范畴，因为它的理论有唯一的 1-型，却有两个非孤立的 2-型，分别是 $x \ll y$ 和 $x \gg y$。

一个 $\aleph_0$-范畴理论的约化结构仍然是 $\aleph_0$-范畴的。下面的例子表明，局部 $\aleph_0$-范畴理论或结构的一般约化结构未必仍具备这一性质。

例子 6.3. 考虑 2**整数集 Z** $\curvearrowright$ **整数集 Z** 在平移作用下，并令 $M = \mathbf{Z}^{2\mathbf{Z}}$ (按 定义 2.10 的含义定理 3.13， M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，并且其

理论具有量词消去。由此很容易验证，M与(**整数集 Z**,s, P)双可定义，其中P 是表示偶数的一元谓词。我们还可以在其中定义一个等价关系$Q(x,y)$，当且仅当x 与y 具有相同的奇偶性时，该关系成立。

考虑结构 $M' = (\textbf{整数集 Z}, s, Q)$。它是 M 的约化结构，而且 M 的局部化度量在 M' 中可定义（因为它可以用 s 和等号来定义）。然而，M' 只有一个 1-型，却有两个彼此不同且距离为无限距离的 2-型：一个满足$Q(x,y)$，另一个则不满足。因此，M' 不是局部 $\aleph_0$-范畴的，其理论也不是。

我们证明，在附加假设下，局部 $\aleph_0$-范畴结构的约化结构也局部 $\aleph_0$-范畴。事实上，这些假设意味着该结构与其约化结构双可定义，因此适用范围更窄。尽管如此，这使我们能够构造出重要的例子：首先是形如 M^G的结构，然后利用以下定理，构造出语言更自然的结构。

定理 6.4. 设 M 是一个局部 $\aleph_0$-范畴结构，配备有局部化度量，且 M' 是 M 的约化结构。假设 M 和 M' 具有相同的度量和自同构群。那么 M' 是局部 $\aleph_0$-范畴的，并且与 M 双可定义。

证明。记 $\mathrm{T} = \mathrm{Th}(\mathrm{M})$ 和 $\mathrm{T}' = \mathrm{Th}(\mathrm{M}')$。令 $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathrm{M}) = \mathrm{Aut}(\mathrm{M}')$。再令 M^G 为定义 2.10 中构造的结构。根据定理 3.13，它是局部 $\aleph_0$-范畴的。根据推论 4.5，M^G 与 M 双可定义。

对于 $R > 0$，定义

$$B_R = \left\{ p \in \mathrm{S}_n(T) : d(x_i, x_j)^p < R \text{ for all } i < j < n \right\}.$$

由于 d 是局部化度量，$\mathrm{B}_R \subseteq \mathfrak{I}_n(\mathrm{T}) = \mathrm{M}^n/\!/\mathrm{G}$ 且在其中有界，因此 B_R 在度量拓扑下是紧致的。约化结构映射 $\pi_n\colon \mathrm{S}_n(\mathrm{T}) \to \mathrm{S}_n(\mathrm{T}')$ 在相应的型度量下是 1-Lipschitz 的，因此 $\mathrm{B}''\mathrm{R} := \pi_n(\mathrm{B}_R)$ 在度量拓扑下是紧致的。于是，B″R 上的度量拓扑与逻辑拓扑重合。另一方面，$\mathrm{B}'\mathrm{R} := \pi_n(\mathrm{B}_R) \subseteq \mathrm{S}_n(\mathrm{T}')$ 是开映射，因为 d 在 T′ 中可定义。因此，对于每个 $\mathrm{p}' \in \mathrm{B}'\mathrm{R}$，$\mathrm{S}^n(\mathrm{T}')$ 的度量拓扑与逻辑拓扑在 p' 处重合，也就是说，p' 是 T′ 的一个孤立型。

由于 $\bigcup_R B'_R$ 由所有 n-类型组成，这些类型实现于 M'，后者是原子的，并且是 T' 的素模型。它是 M^G 的约化结构，并且由 命题 2.11，二者是双可定义的。因此，M' 与 M 是双可定义的，所以 M' 也是局部 $\aleph_0$-范畴的。■

推论6.5. 设 M 为一个度量 $\mathcal{L}$-结构，并设 $G = \mathrm{Aut}(M)$。进一步假设 $M/\!/G$ 是紧致的，对每个 n，$M^n/\!/G$ 是适当度量空间，并且每个原子$\mathcal{L}$-公式在 M 中是真G-不变的。则 M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，且其度量是局部化度量。

满足这些假设的特殊情形包括：

(i) 当 $M/\!/G$ 紧致、G 为局部 *Roelcke* 预紧、$G \curvearrowright M$ 为粗适当，且每个原子 $\mathcal{L}$-公式在 M 中为真G-不变时。(ii) 当 M 作为度量空间是适当的、$M/\!/G$ 紧致，且每个原子 $\mathcal{L}$-公式在 M 中为真G-不变时。(iii) 当 (M,d) 为纯度量空间（即 $\mathcal{L} = \{d\}$）、$M/\!/G$ 紧致，且对每个 n，$M^n/\!/G$ 为适当时。

证明。 根据 定理 3.13，M^G 是局部 $\aleph_0$-范畴的。根据 定理 4.4，每个原子 $\mathcal{L}$-公式都可在 M^G中定义，因此 M 是 M^G的约化结构。根据 定理 6.4，M 和 M' 双可定义，且 M 是局部 $\aleph_0$-范畴的。

对于特殊情形 (i)，只需应用 定理 1.10。对于 (ii)，只需注意，若 M 是适当的，那么 $M^n/\!/G$也如此。对于(iii)，注意 d 始终是适当的 G-不变的。 ■

推论 6.6。 设 (A,d) 是一个完备、可分的无界度量空间，且 $G = \mathrm{Iso}(A)$。那么，(A,d) 是局部 $\aleph_0$-范畴的，当且仅当 $A/\!/G$ 紧致，且对所有 $n \in \mathbf{N}$，$A^n/\!/G$ 适当。

证明。 一个方向由 命题 3.10 和 推论 3.12得出，另一个方向由推论 6.5(iii)得出。 ■

设 $\mathcal{L}$ 是 $[-\infty,\infty]$-值连续逻辑中的可数语言。特别地，距离符号 d 可以取 $[0,\infty]$值，且每个符号相对于 d 都有预先给定的一致连续模。令 $\mathcal{L}^{\mathrm{at}}(\mathrm{n})$ 表示 n 个变量的原子公式集合，并令 $\mathrm{S}_n^{\mathrm{qf}}(\mathcal{L}) \subseteq [-\infty,\infty]^{\mathcal{L}^{\mathrm{at}}(\mathrm{n})}$ 表示 $\mathcal{L}$中的无量词 n-型集合，它是一个紧空间。对于任意 $\mathcal{L}$-结构 M，无量词型映射 $\mathrm{tp}^{\mathrm{qf}}\colon \mathrm{M}^n \to \mathrm{S}_n^{\mathrm{qf}}(\mathcal{L})$ 相对于 $\mathrm{S}_n^{\mathrm{qf}}(\mathcal{L})$ 作为紧空间所带的一致结构是一致连续的。它可分解为一个一致连续映射 $\theta_n\colon \mathrm{M}^n/\!/\mathrm{G} \to \mathrm{S}_n^{\mathrm{qf}}(\mathcal{L})$，其中 $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathrm{M})$。

若每个n对应的 θ_n 都是单射，则称一个 $\mathcal{L}$-结构M 是无量词齐性的。等价地，若对于每个a、$b \in M^n$，只要它们具有相同的无量词类型，就存在自同构将a 映射到任意接近b的位置。如果总是存在一个自同构将a 映射到b，则M 是完全无量词齐性的。

推论 6.7。 设 M 是一个带有（取有限值的）度量 d 的无量词齐性 $\mathcal{L}$-结构，且 $G = \mathrm{Aut}(M)$。此外，假设 $M/\!/G$ 是紧致的，并且每个原子 $\mathcal{L}$公式在 M 上都是真G-不变的。最后，假设对于每个 n 以及每个闭有界集 $\Xi \subseteq M^n/\!/G$，映射 $\theta^{-1}n\colon \theta_n(\Xi) \to M^n/\!/G$ 是一致连续的，其中 $\theta_n(\Xi)$ 配备了由紧空间$\mathrm{S}_n^{\mathrm{qf}}(\mathcal{L})$诱导的均匀结构。

那么 M 是局部 $\aleph_0$-范畴的，且度量 d 是局部化度量。

证明。 设 $\Xi \subseteq M^n/\!/G$ 是闭且有界的，并设 $(p_k)_k$ 是 Ξ中的一个序列。那么 $(\theta_n(p_k))_k$ 是紧空间 $\mathrm{S}_n^{\mathrm{qf}}(\mathcal{L})$ 中的一个序列，因此它有一个柯西子列。因此，$(p_k)_k$ 有一个柯西子列。由于 Ξ 也完备，因此它是紧致的。

因此 $M^n/\!/G$ 是适当的，因此 推论 6.5 适用。 ■

这一观察与 [Zie2021，定理 7] 非常相似：其中定义的 *pair-propinquity* 条件，是对推论 6.7最后一个条件稍作限制后的版本。

例 6.8。 乌雷松空间 $\mathbf{U}$ 是无量词齐性的（甚至是精确无量词齐性的）。根据 Uspenskij [Usp2008，命题 7，推论 6.71]。因此 $\mathbf{U}$ 是局部 $\aleph_0$-范畴的，且 $\mathrm{Iso}(\mathbf{U})$ 是局部 Roelcke 预紧的。$\mathrm{Iso}(\mathbf{U})$ 是局部 Roelcke 预紧的这一事实最早由 Rosendal 证明 [Ros2022]。

例子6.9。 乌雷松多样性 由 Bryant、Nies 和 Tupper 在 [BNT2017]中引入。Hallbäck [Hal2020] 证明了其自同构群是局部 Roelcke 预紧的，而谓词符号是适当的 G-不变的，原因与度量具有这种性质基本相同。由 推论 6.5(i) 可知，它是局部 $\aleph_0$-范畴的。

例 6.10。 如果 $(X,\ d)$ 是一个适当度量空间，且 $X/\!/\mathrm{Iso}(X)$ 紧致，则条件 (ii) （推论 6.5 ）成立。因此，X 是局部 $\aleph_0$-范畴的，并且其

度量是局部化度量。此外，全部等价条件即 定理 3.15 所述者在此情形下均成立。例子包括欧几里得空间、有限维双曲空间 $\mathbf{H}^n$，以及拟传递局部有限图（拟传递是指该图的自同构群具有有限多个轨道）。

例 6.10 中的许多空间都存在无限维类比。例如，所有度量齐性图在局部都是 $\aleph_0$-范畴的（另见[Ros2022]）。

无限维双曲空间 $\mathbf{H}^\infty$ 在文献中已有许多讨论，其等距群也由 Duch- esne [Duc2023]进行了详细研究。关于它，我们将用到以下三个基本事实（见[BIM2005]和 [Duc2023]）。

- 它是完全无量词齐次的：$\mathbf{H}^\infty$ 的任意两个有限子集之间的等距变换都可以扩展为$G = \mathrm{Iso}(\mathbf{H}^\infty)$中的一个元素。特别地，作用$G \curvearrowright \mathbf{H}^\infty$ 是传递的。
- 它是一个测地度量空间。
- 对于每个点$x \in \mathbf{H}^\infty$，稳定子G_x 同构于正交群$O(\infty)$。

例 6.11. 度量空间 $\mathbf{H}^\infty$ 是局部 $\aleph_0$-范畴的，其度量是局部化度量，并且其等距群 $G = \mathrm{Iso}(\mathbf{H}^\infty)$ 是局部 Roelcke 预紧的。

事实上，取 $x \in \mathbf{H}^\infty$。定义 $\varphi\colon \mathbf{H}^\infty /\!\!/ G_x \to [0,\infty)$，使得 $\varphi([y]) = d(x,y)$。由三角不等式可知，φ 是一个压缩映射。它也是满射，因为 $\mathbf{H}^\infty$ 是测地且无界的。由完全齐次性可知，它是单射。最后，假设$0 \leq \alpha < \beta = d(x,y)$。由于 $\mathbf{H}^\infty$ 是测地的，存在 $y' \in \mathbf{H}^\infty$，满足 $d(x,y') = \alpha$且 $d(y',y) = \beta - \alpha$。于是 $\varphi(y) = \beta, \varphi(y') = \alpha$ 且 $d([y],[y']) = \beta - \alpha$。因此，$\varphi$ 是一个等距变换。

由此可知，$\mathbf{H}^\infty /\!\!/ G_x$ 是一个适当度量空间。此外，G_x 同构于正交群，而正交群是 Roelcke 预紧的。根据命题 1.13，G 是局部 Roelcke 预紧的，并且$G \curvearrowright \mathbf{H}^\infty$ 是粗适当的。根据推论 6.5，$\mathbf{H}^\infty$是局部 $\aleph_0$-范畴的，且带有一个局部化度量。

$\mathrm{Iso}(\mathbf{H}^\infty)$ 是局部 Roelcke 预紧的这一事实最早由 Barritault 证明。

巴拿赫空间提供了另一类重要的例子。设 $\mathrm{Iso}(E)$ 表示巴拿赫空间 E的等距变换群，并设 $\mathrm{Iso}_0(E) \leq \mathrm{Iso}(E)$ 表示原点的稳定子。根据 Mazur–Ulam 定理 [MU1932]，$\mathrm{Iso}(E)$ 与 E 的仿射等距变换群重合，而 $\mathrm{Iso}_0(E)$ 则与线性等距变换群重合。

为了将E 视为连续逻辑意义下的度量结构，可以考虑E_1，的单位球，并赋予其度量凸结构（参见[BBHU2008，2.1 示例（4）]）。在连续逻辑的语境中，这种单位球结构通常称为*Banach* 空间 。其自同构群为 $\mathrm{Iso}_0(E)$。由 Mankiewicz 定理 [Man1972] 可知，该群也与等距群 $\mathrm{Iso}_0(E_1)$ 相同（即E_1 中所有固定 0 的等距变换所成的群）。

另一种做法是将整个空间E 视为无界度量空间，其自同构群为 $\mathrm{Iso}(E) = (E,+) \rtimes \mathrm{Iso}_0(E)$。我们将这种结构称为仿射巴拿赫空间。

定理 6.12. 设 E 是可分巴拿赫空间，则以下命题等价：

(i) 仿射巴拿赫空间 E（即作为纯度量空间的 E）是局部 $\aleph_0$-范畴的。(ii) 群 $\mathrm{Iso}(E)$ 是局部 *Roelcke* 预紧的，且作用 $\mathrm{Iso}(E) \curvearrowright E$ 是粗适当的。(iii) 群 $\mathrm{Iso}_0(E)$ 是 *Roelcke* 预紧的，且 $E_1 /\!\!/ \mathrm{Iso}_0(E)$ 是紧致的。

(iv) 与 E 相关的闭单位球结构（即带有度量凸结构的 E）是 $\aleph_0$-范畴的。(v) 有基点度量空间 $(E_1, 0)$ 是 $\aleph_0$-范畴的。

证明。 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。这由 推论6.6 （以及 定理 1.10）得出。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)。由命题 1.13可知，$E/\!/\mathrm{Iso}_0(E)$ 是适当度量空间，当且仅当$E_1/\!/\mathrm{Iso}_0(E)$ 是紧致的。

(iii) $\Longleftrightarrow$(iv) $\Longleftrightarrow$ (v)。这由 [BT2016] 以及上文提到的 Mankiewicz 定理得出。 ■

适用于此结论的 $\aleph_0$-范畴 Banach 空间例如 L^p 空间（当 $1 \leq p < \infty$ 时）以及 Gurarij 空间。值得注意的是，当 $p \neq 2$ 时，群 $\mathrm{Iso}_0(L^p(R))$ 都彼此同构，因此空间 $L^p(R)$（的单位球）是双可解释的。仿射空间则不然：当 $p \neq q$ 时，$L^p(X)$ 和 $L^q(X)$ 不粗等价（参见 [Ros2022] 中例 3.18 之前的讨论）。因此，根据推论 5.8，当 $p \neq q$ 时，仿射巴拿赫空间 $L^p(X)$ 和 $L^q(X)$ 不双可解释。对于 Gurarij 空间，其仿射等距群是否局部 Roelcke 预紧被列为 [Hal2020] 中的一个开放问题。

参考文献

[BBHU2008] Itaï BEN YAACOV、Alexander BERENSTEIN、C. Ward HENSON 和 Alexander USVYAT-SOV，《度量结构的模型论》，《模型论在代数与分析中的应用》第2卷，伦敦数学学会讲义丛书，第350卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008年，第315–427页，doi:10.1017/CBO9780511735219.011。[Ben2023] Itaï BEN YAACOV，《星型分类、Lelek 扇与连续逻辑中非$\aleph_0$范畴理论的重构》，《模型论》2 (2023), 285–324，doi:10.2140/mt.2023.2.285，arXiv:2203.02184。[BIM2005] Marc BURGER、Alessandra IOZZI 和 Nicolas MONOD，《树到双曲空间的等变嵌入》，《国际数学研究通知》(2005), 第22期，1331–1369，doi:10.1155/IMRN.2005.1331。[BIT2018] Itaï BEN YAACOV、Tomás IBARLUCÍA 和 Todor TSANKOV，《Eberlein 多拟态群》，《美国数学会汇刊》370 (2018), 第3期，2181–2209。[BK2016] Itaï BEN YAACOV 和 Adriane KAÏCHOUH，《可分范畴度量结构的重构》，《符号逻辑杂志》81 (2016), 第1期，216–224，doi:10.1017/jsl.2014. 80。[BNT2017] David BRYANT、André NIES 和 Paul TUPPER，《一个通用的可分多样体》，《度量空间中的分析与几何》5 (2017), 第1期，138–151，doi:10.1515/agms-2017-0008。[BT2016] Itaï BEN YAACOV 和 Todor TSANKOV，《弱几乎周期函数、模型论稳定性与拓扑群的极小性》，《美国数学会汇刊》368 (2016), 第11期，8267–8294，doi:10.1090/tran/6883，arXiv:1312.7757。[Duc2023] Bruno DUCHESNE，《无限维双曲空间等距群的波兰拓扑》，《群、几何与动力学》17 (2023), 第2期，633–670，doi:10.4171/ggd/713。[Eff1965] Edward G. EFFROS，《变换群与 C*代数》，《数学年刊》第二辑 81 (1965), 38–55，doi:10.2307/1970381。[Hal2020] Andreas HALLBÄCK，《度量模型论、波兰群与多样体》，博士论文，巴黎大学，2020年。[Hru2020] Ehud HRUSHOVSKI，《超越 Lascar 群》，预印本 arXiv:2011.12009v3，2020年。[Iba2016] Tomás IBARLUCÍA，《Roelcke 预紧波兰群的动力学层级》，《以色列数学杂志》215 (2016), 第2期，965–1009。[Man1972] Piotr MANKIEWICZ，《赋范线性空间中等距变换的延拓》，《波兰科学院通报》数学、天文学与物理学系列 20 (1972), 367–371。[MU1932] S. MAZUR 和 S. ULAM，《赋范向量空间的等距变换》，《法国科学院周报》，巴黎 194 (1932), 946–948（法文）。[RD1981] Walter ROELCKE 和 Susanne DIEROLF，《拓扑群及其商空间上的一致结构》，麦格劳-希尔国际图书公司，纽约，1981年，高级图书计划。

[Ros2022] Christian ROSENDAL，拓扑群的粗几何，剑桥数学论丛，第223卷，剑桥大学出版社，剑桥，2022年。[Usp2008] Vladimir USPENSKIJ，关于极小拓扑群的子群，《拓扑及其应用》**155卷** (2008), 第14期，1580–1606，doi:10.1016/j.topol.2008.03.001。[Zie2021] Joseph ZIELINSKI，局部 *Roelcke* 预紧 *Polish* 群，《群、几何与动力学》**15卷** (2021年), 第4期，1175–1196，doi:10.4171/ggd/628。

ITAÏ BEN YAACOV，里昂第一大学卡米尔·贝尔纳尔 里昂 第一大学卡米尔第一大学研究所卡米尔 乔丹，法国国家科学研究中心 UMR 5208，43 11月11日大道11 11月1918，69622 维勒班纳，法国网址*https://math.univ-lyon1.fr/~begnac/*

TODOR TSANKOV，里昂第一大学卡米尔·贝尔纳尔 里昂 里昂第一大学第一大学研究所卡米尔 乔丹，法国国家科学研究中心 UMR 5208，43 11月11日大道11 11月1918，69622 维勒班纳，法国网址https://math.univ-lyon1.fr/~tsankov/