arXiv:2603.09728v1 [cs.CE] 10 Mar 2026

用于脆性断裂随机相场模型的正则化集合卡尔曼滤波器

Lucas Hermann[1] Ralf J¨anicke[2] Knut Andreas Meyer[3] Ulrich R¨omer[1]

[1]布伦瑞克工业大学，声学与动力学研究所[2]布伦瑞克工业大学，应用力学研究所[3]查尔姆斯理工大学，机械工程系

2026年3月9日

摘要

脆性断裂的相场方法提供了一个连续体框架，可用于模拟裂纹的萌生和扩展，而无需显式表示离散裂纹面，前提是空间离散足够精细，能够解析正则化长度尺度。然而，由于材料缺陷导致的局部材料参数不确定性可能显著影响模拟结果，例如裂纹路径和剩余结构强度。与此同时，利用传感器持续监测结构的能力，使得模型预测可以通过位移测量等数据加以补充。

在本研究中，我们将这两种互补的信息来源联系起来，并提出一种贝叶斯推断方法，以便利用传入的传感器数据更新当前模型状态。我们为模型状态（包括位移和相场）构建贝叶斯先验，并采用集合卡尔曼滤波器（EnKF）执行更新。在 EnKF 中，通过对每个集合成员进行卡尔曼位移来计算更新。由于标准 EnKF 可能产生违反常见建模假设的同化状态，我们提出一种基于相场的正则化技术，通过近端步骤校正实现模型一致的更新。1D 和二维数值示例展示了所提方法的性能与精度，并表明更新后的状态与真实值相当吻合。与已应用于脆性断裂的传统贝叶斯反演技术不同，我们推断的不是模型参数，而是模型状态，即位移场和相场。尽管观测到的只有位移，但两个场之间的强相关性也使得推断后验相场成为可能。

1 引言

相场断裂建模最初被提出用于模拟脆性材料中的裂纹扩展 [1, 2],并随后被扩展至延性断裂 [3]和疲劳裂纹扩展 [4]。梯度正则化可确保在空间离散足够精细时获得网格无关结果。然而，无论在物理实验还是模型中，裂纹扩展都高度依赖于边界条件与局部材料缺陷的变化。鉴于材料参数和初始条件往往仅部分已知，不确定性量化（UQ）方法被用于建立概率前向问题 [5, 6]。

在此背景下，前向问题是将输入参数中的不确定性传播到模型输出。输入参数可与材料属性、初始条件和边界条件相关。目标则是确定模型输出所诱导的概率分布，例如位移、相场以及相应的裂纹路径。在此背景下，针对输出概率密度的多元高斯近似颇具吸引力，有助于降低计算成本。这些高斯分布通过区域内各点的均值和方差，以及二点相关函数和场间相关性来定义。

对于非线性相场问题，输出中的不确定性可能相当大。为减轻这种不确定性，可以收集真实世界数据，例如通过数字图像相关（DIC） [7]获取。在贝叶斯框架下，可以基于这些数据对先验分布进行条件化，参见例如 [8], ，从而有效地将数据同化到模型中。对于特定的数据模型结构，这会得到一个新的高斯后验，其方差有所降低，尤其是在传感器位置附近。

相场断裂模型采用准静态时间步进方案，通过逐步增加载荷来追踪不断演化的损伤。在某些情况下，模拟过程中可能会在不同时间步或不同载荷下获得测量数据，因此需要根据输入数据对时变概率分布进行条件化。可以通过卡尔曼滤波来处理这一过程：模型推进至存在可用数据的时间步，然后根据测量数据对解进行条件化，所得后验分布则作为后续不确定性传播的初始条件。对于非线性模型，通常采用扩展卡尔曼滤波器（EKF）对问题进行线性化。另一种方法是将集合卡尔曼滤波器（EnKF）用于非线性问题；该方法采用蒙特卡洛方式运作，随着集合中的不同成员逐渐趋向共同均值，不确定性也会随时间降低。关于这一问题的讨论，请参阅 [9] 及其中的参考文献。

将卡尔曼滤波应用于相场脆性断裂模型面临若干挑战。由于相场变量旨在模拟弥散但局部化的裂纹，因此需要进行精细离散化，并在裂纹路径周围布置传感器。此外，相场变量具有历史依赖性，因此在条件化过程中需要采取措施，避免产生不符合物理规律的解。上述非线性进一步增加了滤波方法的复杂性。

本文旨在为相场断裂问题提供数据校正解，尤其是在裂纹路径解不唯一时。这种情况可能出现在相场对网格参数、初始条件或材料配置 [5]高度敏感时。我们的目标是利用两个场之间基于模型的相关性，根据位移数据推断相场解。

值得注意的是，已有其他研究将数据同化方法应用于数值断裂问题。例如， [10] 提出了一种贝叶斯方法，用于更新相场模型的标量参数，但并未像本文这样更新完整的高维状态。[11] 中的作者采用线弹性断裂力学方法，并将其与扩展卡尔曼滤波器结合使用。该方法对裂纹进行参数化，因此，在给定载荷增量的情况下，裂纹长度或裂纹表面的角度等参数取特定值。这些参数存在不确定性，并通过扩展卡尔曼滤波器随时间更新。作者指出，迄今为止，在给定框架中只能对直线形裂纹进行参数化和更新。在 [12], 中，作者采用水力压裂模型，并再次使用扩展卡尔曼滤波器更新其参数。这里，相关裂纹表面，即裂纹路径的形状，由少数几个参数进行参数化，并通过扩展卡尔曼滤波器更新。 [13]的作者关注疲劳断裂。该模型基于扩展有限元法，利用扩展卡尔曼滤波器更新源自Paris定律、用于描述疲劳裂纹扩展的三个裂纹参数。在 [14], 中，作者使用集合卡尔曼滤波更新二维断裂场中多条直线形裂纹的断裂长度和角度参数。上述文献的共同点是采用了卡尔曼滤波器和参数化断裂模型。这类参数化断裂模型的缺点是，尽管计算成本相对较低，但与相场模型相比，在裂纹路径方面缺乏灵活性。在许多情况下，需要预先了解预期裂纹的整体形状和大致路径。几何形状复杂的裂纹表面很难建模。尤其对于扩展有限元法而言，在三维空间中追踪裂纹颇具挑战性。然而，本文采用的脆性断裂相场方法并不假设裂纹具有特定几何形状，而且扩展到三维也相当简单。该方法并非只更新少数几个参数，而是使用集合卡尔曼滤波同时更新相场和位移的完整状态。这样便能够从复杂裂纹路径中获取真实世界数据，理论上也能得到比参数化模型更接近现实的模型解。 [15]详细解释了相场断裂模型与参数化模型（此处为扩展有限元法）之间的差异。

本文结构如下：下一章介绍相场脆性断裂建模，重点关注微形态相场模型 [16]。随后给出随机正向问题，从而得到适用于数据同化的先验状态。下一节讨论随机数据模型以及滤波。我们特别关注后验正则化，这对于强制满足物理相关性质是必要的。一维数值示例与理论同步展开，以说明该过程。最后一章使用二维示例，在更相关的设定中展示这些思想。

1.1 记号

在进入相场模型和卡尔曼滤波技术之前，我们首先说明本研究通篇使用的记号。标量（标量场）用罗马体表示，而向量（向量场）用粗斜体字符表示。此外，黑板粗体字符专用于函数空间和集合（例如 $\mathbb{R}$）。离散化之后，粗斜体字符再次用于向量和矩阵。

高斯随机向量记为 $\boldsymbol{a} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}})$，其均值向量为 $\bar{\boldsymbol{a}}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{a}}$。我们用 $p(\boldsymbol{a})$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的（多元）概率密度函数，用 $p(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ 表示在 $\boldsymbol{b}$条件下的密度。由于含义可从上下文明确，我们对随机变量/向量及其相应实现使用同一符号。量 $\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{C}}^2 = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{a}$ 表示加权欧几里得范数。我们将按如下方式使用下标：$\boldsymbol{a}_{n,k}$ 表示位移增量 n 处牛顿-拉夫森迭代的第 k 次迭代，$\boldsymbol{a}_n$ 指最终迭代。在卡尔曼滤波过程中，我们区分预测状态 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}$ 与由数据得到的同化状态 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}$ 。在集合卡尔曼滤波器的语境中，$\boldsymbol{a}_{n\,i}^{\mathrm{F/A}}$,表示第 i 个集合成员在增量 n 处的预测/同化状态。最后，我们ˆ区分函数及其所取的值，例如，E 指一个函数，而 E 是它在给定具体自变量时所取的值。

2 相场脆性断裂

本章概述的相场建模方法提出于 [16, 17, 18]。令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，$d = 1$，2 为一个开有界域，其中充满线弹性连续体。边界分为狄利克雷边界 Γ_{D}^u，以及除自然边界条件外还施加了规定条件的诺伊曼边界Γ_{N}^u，使得 $\Gamma_{\mathrm{D}}^u \cap \Gamma_{\mathrm{N}}^u = \varnothing$。相场本身不施加边界条件，因此仅涉及齐次诺伊曼条件。连续体内部可能产生裂纹，如图1a所示。



a) 裂纹由尖锐的断裂面表示，这在数值处理上颇具挑战。　　b) 通过相场正则化，断裂面可由一个平滑场有效近似。

图 1：基于 [16] 的连续体中断裂的相场正则化

尖锐裂纹会导致连续体沿着随时间演化的裂纹表面出现不连续性 Γ_{c}。脆性断裂的相场方法旨在通过相场变量 $\varphi(\boldsymbol{x},\ t) \in [0, 1]$对不连续性进行正则化，其中 0 表示未损伤材料，1 表示完全断裂的材料。长度尺度参数 $\ell \in \mathbb{R}^+$ 控制所得正则化裂纹的宽度，如图1b所示。脆性断裂的相场方法基于能量泛函的最小化

$$E(\boldsymbol{u}, \varphi) = \int_\Omega g(\varphi)\Psi^+(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \Psi^-(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}^u} \boldsymbol{t}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \frac{G_{\mathrm{c}}}{c_{\mathrm{w}}\ell}\left(w(\varphi) + \ell^2|\nabla\varphi|^2\right)\mathrm{d}\Omega, \tag{1}$$

其中，$\Psi^{\pm}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u}))$ 为分裂弹性应变能密度，其中 Ψ^+ 是断裂驱动部分。此外，$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u})$ 是位移梯度的对称部分，而 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t)$ 表示位移。在数值算例中，采用体积-偏差分裂，并且对于 $\Psi^{\pm}$ 有

$$\Psi^+ = \frac{1}{2}K\langle \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\rangle^2 + \mu(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{dev}} : \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{dev}}), \quad \Psi^- = \frac{1}{2}K\langle -\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\rangle^2, \tag{2}$$

诺伊曼边界 Γ_{N}^u 上的边界项对施加的牵引力进行建模。最后，我们采用所谓的AT2断裂模型，其中

$$g(\varphi) = (1-\varphi)^2, \quad c_w = 2, \quad w(\varphi) = \varphi^2 \tag{3}$$

其中 g 为退化函数， w 为局部耗散函数， c_w 为相应的缩放，以使G_c 成为断裂能。请注意，这是一个准静态问题，因此该数值问题将按定常问题处理。因此，在推导的此处我们省略时间指标，待其与集合卡尔曼滤波相关时再行引入。目前只需将 φ' 引入为上一时间/加载步的相场。

本文将采用相场问题的一种修正版，即根据 [16]提出的微形态方法。随后，能量泛函的参数化将扩展为包含微形态变量 d，并添加一项惩罚相场 φ 与 d 之间差异的项，从而得到

$$\begin{aligned} E = \hat{E}(\boldsymbol{u}, \varphi, d) = \int_\Omega g(\varphi)\Psi^+(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \Psi^-(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\mathrm{N}^u} \boldsymbol{t}_\mathrm{N}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Gamma \\ + \int_\Omega \frac{G_\mathrm{c}}{c_\mathrm{w}\ell}\left(w(\varphi) + \ell^2|\nabla d|^2\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{\alpha}{2}(\varphi - d)^2\mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

引入函数空间

$$\mathbb{U} = \{\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^2 \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\mathrm{D} \quad \text{on } \Gamma_\mathrm{D}^u\}, \tag{5a}$$

$$\mathbb{U}_0 = \{\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^2 \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_\mathrm{D}^u\}, \tag{5b}$$

$$\mathbb{D} = H^1(\Omega), \tag{5c}$$

与式（4）相关的欧拉-拉格朗日方程为：求（$\boldsymbol{u}$， d， φ） $\in \mathbb{U}\times\mathbb{D}\times L^2(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega g(\varphi)\boldsymbol{\sigma}^+ : \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^- : \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\mathrm{N}^u} \boldsymbol{t}_\mathrm{N}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad \forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}_0, \tag{6}$$

$$\int_\Omega \frac{2G_\mathrm{c}\ell}{c_\mathrm{w}}\nabla d\cdot\nabla\delta d\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \alpha(\varphi - d)\delta d\,\mathrm{d}\Omega = 0 \qquad \forall\delta d\in\mathbb{D}, \tag{7}$$

$$\int_\Omega \delta\varphi\left(g'(\varphi)\Psi^+(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u})) + \frac{G_\mathrm{c}}{c_\mathrm{w}\ell}w'(\varphi)) + \alpha(\varphi - d)\right)\mathrm{d}\Omega = 0 \qquad \forall\delta\varphi\in L^2(\Omega)\,. \tag{8}$$

方程（8）意味着

$$g'(\varphi)\Psi^+(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u})) + \frac{G_\mathrm{c}}{c_\mathrm{w}l}w'(\varphi) + \alpha(\varphi - d) = 0, \tag{9}$$

几乎处处[1] 成立于 Ω 中；然而，我们将假设额外的正则性，使得（9）在 Ω 中逐点成立。于是，可以对 φ施加约束、对 $\dot{\varphi}\geq 0$施加不可逆性约束，并对 $0\leq\varphi\leq 1$施加界约束，从而在局部强制满足这些条件。对于所选的 AT2断裂模型，方程（9）可解析求解为

$$\varphi = \hat{\varphi}(\boldsymbol{u}, d, \varphi', \ell) = \min\left(\max\left(\frac{2\Psi^+(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u})) + \alpha d}{2\Psi^+(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{u})) + \alpha + \frac{G_\mathrm{c}}{\ell}}, \varphi'\right), 1\right), \tag{10}$$

其中突出显示了对量（$\boldsymbol{u}$， d， φ'， ℓ）的依赖，因为这些量稍后将作为卡尔曼滤波器的一部分进行修改。

相场断裂的有限元法

采用有限元法（FEM）求解相场断裂问题，并引入以下近似

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) = \sum_i \boldsymbol{\phi}_i^u(\boldsymbol{x})a_i^u, \quad d(\boldsymbol{x}) \approx d_h(\boldsymbol{x}) = \sum_i \phi_i^d(\boldsymbol{x})a_i^d \tag{11}$$

使得能量 $E \approx \hat{}E(\boldsymbol{u}_h, d_h;\, \varphi_h', \ell) = \hat{}E_h(\boldsymbol{a}^u, \boldsymbol{a}^d;\, \boldsymbol{\varphi}', \ell)$。注意，由于 $\varphi_h = \hat{}\varphi(\boldsymbol{u}_h, d_h, \varphi_h'; \ell)$，我们将 $\hat{}E(\boldsymbol{u}_h, \varphi_h, d_h)$ 重写为 $= \hat{}E(\boldsymbol{u}_h, d_h;\, \varphi_h', \ell)$，其中现在明确说明了对 φ_h', ℓ 的依赖关系。

[1]不过，勒贝格测度为零的集合除外。

ˆ 此记号将用于引入卡尔曼滤波正则化。最小化 E_h 得到

$$R_i^u(\boldsymbol{a}^u,\boldsymbol{a}^d;\boldsymbol{\varphi}',\ell)=\int_\Omega \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\phi}_i^u):\left[g(\varphi_h)\boldsymbol{\sigma}^+ +\boldsymbol{\sigma}^-\right]\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}^u}\boldsymbol{\phi}_i^u\cdot\boldsymbol{t}_{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}\Gamma=0, \tag{12}$$

$$R_i^d(\boldsymbol{a}^u,\boldsymbol{a}^d;\boldsymbol{\varphi}',\ell)=\int_\Omega \nabla\phi_i^d\cdot\left[\frac{2G_{\mathrm{c}}\ell}{c_{\mathrm{w}}}\nabla d_h\right]\,\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega \phi_i^d\alpha(\varphi_h-d_h)\,\mathrm{d}\Omega=0. \tag{13}$$

以下 [16], 我们 采用外推凸化 [19], , 使用外推的微形态场 d,

$$\check{\boldsymbol{a}}^d=\boldsymbol{a}_{n-1}^d+\Delta_{t_n}\frac{(\boldsymbol{a}_{n-1}^d-\boldsymbol{a}_{n-2}^d)}{\Delta_{t_{n-1}}},\quad \check{d}_h=\sum_i\phi_i^d\check{a}_i^d, \tag{14}$$

ˇ 和 $\varphi\approx\check{\varphi}=\hat{\varphi}_h(\boldsymbol{u}_h,d_h;\,\varphi_{n-1},\ell)$（见式 (12) 和 (13)）。请注意，为了简化记号，我们只标出过去的索引 $n-1,n-2$，而不标出当前索引 n。此外，在下文中我们使用 φ 代替 $\check{\varphi}$，同时牢记此处始终将 d_h 用作参数。根据这些定义，我们现在汇总状态变量（每个积分点对应一组） $\boldsymbol{\varphi}$、未知量 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^u,\boldsymbol{a}^d)$以及残差 $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{R}^u,\boldsymbol{R}^d)$，从而得到完整的方程组

$$\boldsymbol{R}^u(\boldsymbol{a}^u,\check{\boldsymbol{a}}^d;\boldsymbol{\varphi}_{n-1},\ell)=0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{R}^d(\boldsymbol{a}^u,\boldsymbol{a}^d;\boldsymbol{\varphi}_{n-1},\ell)=0, \tag{16}$$

我们在每个时间步中使用标准牛顿-拉夫森方法对其进行整体求解。请注意，式 (16) 关于 $\boldsymbol{a}^d$是线性的，因为使用 $\check{\boldsymbol{a}}^d$ 来计算 φ_h。

注释。 求解本节定义的有限元方程组在计算上非常耗费资源。在 [20], 中，我们比较了不同求解方案所需的 CPU 小时。我们的目标不仅是求解确定性相场问题，还要基于集成策略求解随机问题，而这可能涉及数百次并行模型评估，因此必须采取一些措施，降低每个集合成员所需的 CPU 小时，从而确保随机评估切实可行。

首先，在预计不会出现裂纹的区域采用较粗的网格，以减少所得有限元方程组的自由度。其次，我们有意选择整体式求解策略，而非交错式策略，因为前者所需的 CPU 小时显著更少[20]。最后，选择体积-偏能量分解，而非谱分解，因为后者的计算开销高于体积-偏差分裂。

2.1 相场问题的确定性解 / 真实底层解

对于一组固定参数求解相场问题，可得到确定性解。在后续过程中，该解可作为参考解，从中观测数据。我们希望通过一个简单示例来阐释本文提出的概念。为此，我们引入一个

一维域上的相场问题。图 2 展示了力学设置：Ω 上的一根拉伸杆 $=[-1,1]$在 [毫米] 中以位移控制的方式拉伸，直至断裂。

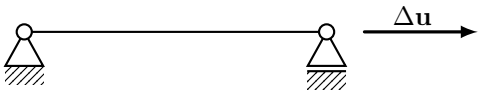


图 2：一维数值实验

参数	数值
断裂模型	AT2
E	210000 [牛顿/毫米^2]
ν	0.3 [-]
G_{c}	2.7 [牛顿/毫米]
l	$2.5e-2$ [毫米]
α	$\beta G_{\mathrm{c}}/\ell$

表1：一维拉伸杆示例的模型参数

每个 u 和 d具有 $N=200$ 个自由度，即网格尺寸为 $h=1e-2$毫米，长度尺度固定为 $l=2.5e-2$。我们对 u 和 d采用分段线性近似。左边界固定，而右边界采用狄利克雷边界条件，以施加位移增量

$\Delta u = 1e-4$ [毫米] 每个伪时间步。在此问题中，由于是一维问题，能量分解不适用。表1列出了模型所选用的全部参数。在某一位置，相场的初始值为 $\varphi = 0.7$，本例中该位置为 $x_0 = 0.57$；这也就是初始损伤，它作为裂纹发展的核。在图4中，蓝色显示了单个时间步下相场和位移的确定性解。整个时间序列可汇总为力-位移图，如图3所示。红色标记的时间步即为下一节各图中显示位移和相场的时间步。

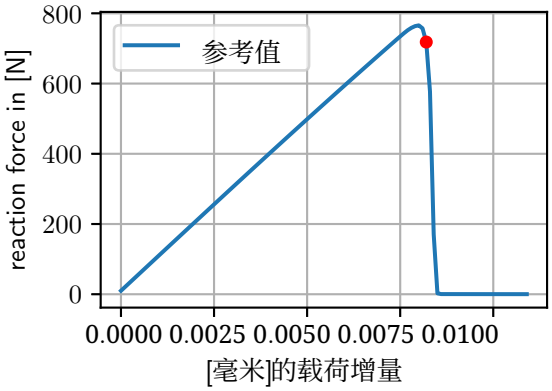


图3：一维数值示例中反作用力随伪时间的变化。线弹性区间之后，裂纹突然出现，剩余刚度随之丧失。红点标记了将在后文进行数据同化时的第一个载荷增量及相应反作用力。

3 数据同化

如果预测模型和测量数据都已知，那么将二者联系起来以期获得更准确预测的过程称为数据同化 [21]。对于线性模型的正态分布输出，如果测量数据也服从正态分布，则可通过对多元高斯分布进行条件化，以闭式形式完成同化，参见 [22]。对于时变情形，可以使用卡尔曼滤波器。有关卡尔曼滤波器最重要的几种形式及相关技术的详细介绍，参见 [23]。卡尔曼滤波器与多元高斯分布的常规条件化非常相似，不同之处在于，更新后的分布会作为后续时间步的先验。标准卡尔曼滤波器是针对线性问题推导的。如果问题是非线性的，则线性化会得到扩展卡尔曼滤波器（EKF）。处理非线性的另一种方法是使用无导数采样方法。基于采样的数据同化方法包括集合卡尔曼滤波器（EnKF） [24]和粒子滤波 [25]。无论采用哪种方法，都需要先验；这里的先验是通过将不确定性传播到预测模型中获得的。以下介绍和讨论基于 [9, 23]。

3.1 随机正问题

数值建模的许多方面都需要作出假设、应对知识不足并量化误差，例如由离散化引起的误差。在这些情况下，与其使用确定性量，不如考虑并传播不确定性，这至关重要。对于给定的相场问题，不确定性来源众多。一个典型例子是参数不确定性，例如边界、初始条件和材料参数的不确定性；这些参数既可以是标量，也可以是场。另一个不确定性来源是所选的初始损伤场。本文将聚焦于后者，并引入随机初始损伤场。这些输入参数的不确定性也会导致解场的不确定性。对于线性模型，随机系数服从高斯分布时，解也将服从高斯分布。集合卡尔曼滤波（EnKF）是本文采用的数据同化技术，它将一个粒子集合传播通过模型，可用于近似输出统计量并获得先验。因此，不确定性传播以类似蒙特卡罗（MC）的方式进行，即通过改变模型输入的实现，反复模拟相场模型。

图4展示了随机相场问题的多个样本。这些样本源于将相场的初始值视为随机变量：每次实现中，损伤核的位置和幅值都不同，因此由此产生的裂纹的位置及其随时间的变化也各不相同。位置取自正态分布 $x_0 \sim \mathcal{N}$（-0.25，0。12），而相场的初始幅值取自均匀分布 $\varphi_{\mathrm{mag}} \sim \mathcal{U}$（0。73，0。76）。初始损伤的形状定义为一个高斯分布，其幅值为 φ_{mag}，标准差为 $\sigma = 0.05$，均值为 x_0。根据集合，

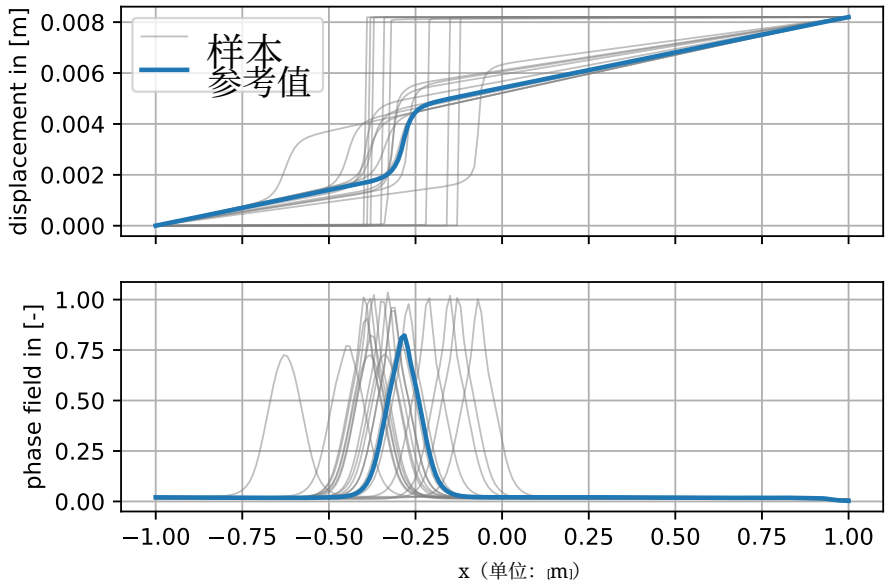


图4：单个时间步上一维相场脆性断裂问题的解。确定性参考解以蓝色显示，而先验集合以灰色显示。部分集合成员表明已完全断裂（相场为1，位移为阶跃函数），而其他成员的相场仅小于1，因此存在一定的刚度退化，但尚未完全断裂。先验集合是算法1第6行的结果。

可以计算高斯近似，即由样本计算均值和协方差。迈向数据同化的下一步，是借助数据模型将先验集合与数据联系起来。

3.2 数据模型

将模型预测与数据同化的基础是观测值模型。数据模型将相场有限元解与传感器数据联系起来，本节的推导主要遵循 [8]。首先，基于 [26]，我们将测量数据生成过程建模为

$$\boldsymbol{y}_n = \rho \boldsymbol{H} \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{\delta}_n + \boldsymbol{\eta}_n \tag{17}$$

现在显式加入迭代索引 n，时刻 $n\Delta_t$ 的测量数据 $\boldsymbol{y}_n \in \mathbb{R}^N$ 以及线性观测映射$\boldsymbol{H}$：$\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$，该映射将解的高维状态空间映射到较低维的测量空间。通过在传感器位置处计算有限元基函数，可以构造该矩阵。通常，$\boldsymbol{H}$ 通过离散化将有限元解与可测量量联系起来的相应算子来构造。此外，$\boldsymbol{\eta}_n \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0},\ \sigma_n^2 \boldsymbol{I})$对测量噪声进行建模，并

$$\boldsymbol{a}_n \sim \mathcal{N}\left(\bar{\boldsymbol{a}}_n, \boldsymbol{C}_{a;n}\right)$$

是同时包含位移 $\boldsymbol{u}$ 和微形态场 $\boldsymbol{d}$的有限元解向量。在每个时间/载荷步，都可以生成数据。请注意，测量仅针对位移进行，而不会针对相场变量进行，因此观测矩阵仅在与位移向量相关的部分非零。测量数据可以在区域内任意点采集，不限于有限元网格的节点。最后，传感器噪声用高斯分布 $\boldsymbol{\eta}_n$ 建模，而模型-数据失配则用另一个高斯分布 $\boldsymbol{\delta}_n$表示。请注意，$\boldsymbol{\delta}_n$，$\boldsymbol{\eta}_n$ 与 $\boldsymbol{a}_n$相互独立。为此

需要选择一个核函数，例如平方指数型或 Mat´ern 型，然后在传感器点处计算该核函数。在本文给出的数值算例中，采用 Mat´ern 核函数

$$c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\sigma^2\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\sqrt{2\nu}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|}{l}\right)^{\nu}K_\nu\left(\frac{\sqrt{2\nu}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|}{l}\right) \tag{18}$$

将贯穿全文使用。它由尺度参数 $\sigma\in\mathbb{R}^+$、 $\Gamma(\nu)$伽马函数以及K_ν 修正贝塞尔函数定义。此外， $l\in\mathbb{R}^+$ 是长度尺度参数，而 $\nu\in\mathbb{R}^+$ 控制核的光滑性。当 $\nu\to\infty$ (18) 时，它变为平方指数核。详见 [22] ，其中对此有详尽讨论。

需要校准连接模型与测量的数据模型。校准通过调整模型误差协方差来完成。相应的超参数 $\boldsymbol{w}=(\nu$、σ、$l)$ 可以通过最小化数据模型的负对数似然来从给定数据中学习，例如使用 L-BFGS 优化器。如果需要获得参数估计的不确定性，也可以采用基于马尔可夫链蒙特卡洛 (MCMC) 的完整基于采样的方法。校准数据模型后，可以通过对数据进行条件化来推导下文将介绍的卡尔曼滤波方程。对于单次观测，我们得到

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w})=\frac{1}{(2\pi)^{n_{\text{sens}}/2}|\boldsymbol{G}|}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{a}})^\top\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{a}})\right) \tag{19}$$

其中 n_{sens} 表示传感器数量，

$$\boldsymbol{G}=\rho^2\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_a\boldsymbol{H}^\top+\boldsymbol{C}_\delta+\boldsymbol{C}_e \tag{20}$$

(17) 的协方差。取自然对数可得

$$\log p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w})=-\frac{n_{\text{sens}}}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2}\log|\boldsymbol{G}|-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{a}})^\top\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{a}})\,. \tag{21}$$

对于每个传感器有多个观测值的情况，我们得到

$$\log p(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{w})=\sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}}\log p(\boldsymbol{y}_i|\boldsymbol{w})\,, \tag{22}$$

如果某个传感器位置 n_{obs} 存在多个相互独立的观测值，则可以应用该方法。根据给定的似然函数进行优化后，可以利用估计得到的超参数评估数据模型。

为了生成合成人工测量数据，可以从具有一组固定参数的数据模型中进行抽样。另一种方法是通过更改参数或添加不同的边界项等来增加模型复杂度，从而错误设定模型。本文选择了一个固定的初始相场，该相场不属于先验集合。此外，为避免逆犯罪， [27], 参考解是在不同的三角剖分上计算得到的， $\mathcal{T}_{\text{data}}$ 相较于先验集合， $h_{\text{data}}<h$ 。过程还添加了一个不相关且均值为零的噪声项 $\boldsymbol{e}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{C}_e)$。随后对所得的数据生成过程进行 n_{obs}次抽样。

3.3 集合卡尔曼滤波器

集合卡尔曼滤波是卡尔曼滤波器的一种等权粒子系统变体 [24]。这使得无需显式线性化即可使用非线性模型。另一种基于采样的变体是粒子滤波 [28], ，其中每个集合成员都会被赋予一个权重，并且该权重会随时间更新。众所周知，粒子滤波适用于非线性问题 [29], ，因此对我们而言颇具应用前景。然而，粒子滤波的问题在于难以扩展至高维情形，相关文献已对此有所说明 [30]: 参数数量仅达到数百个时就可能发生滤波崩溃，而本文采用的高维状态空间系统包含数万个甚至更多状态参数。 [9], 中也在 statFEM 的背景下探讨了上述问题，作者选择了集合卡尔曼滤波而非粒子滤波。鉴于其在高维问题上的局限性，本文也采用集合卡尔曼滤波。在集合卡尔曼滤波中，每个集合成员的权重相同；在更新步中，随着数据到来，会根据数据分别对每个成员进行条件化。

集合卡尔曼滤波由两个反复执行的步骤组成：首先，在预测步中，偏微分方程的近似解随时间演化。随后，得到的场既可以直接作为初始条件，继续随时间演化，也可以进行更新。因此，第二步是更新步，即分析步。如果某个时刻有测量数据可用，则通过卡尔曼位移更新每个集合成员的解场；这一过程可以置于贝叶斯更新框架中。需要注意的是，只有在线性高斯设定下，随着粒子规模增大，集合卡尔曼滤波才会收敛至真实滤波器 [31]。然而，相场问题本质上是非线性的，因此粒子近似的准确性不那么显而易见。近期研究为近高斯设定建立了理论，见 [32, 31], ；关于高斯近似的界限，如 [23], 中所讨论的，也已逐渐得到确立。本引言以及下文介绍的滤波器实现均遵循 [9, 23]。

从优化视角来看待集合卡尔曼滤波更新将很有帮助。我们还在此处重新引入时间指标 n。根据 [23], ，我们考虑目标函数

$$J_{n,i}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i}) = \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i}\right\|^2_{\Gamma} + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i}\right\|^2_{\boldsymbol{C}_n}, \tag{23}$$

其中，分析向量 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,\ i}$对于每个集合成员 i，通过最小化确定。预报$\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,\ i}$ 是根据相场模型，从前一个时间步传播粒子而得到的，具体内容将在第 3.3.1 节中详述。为简单起见，这里仅考虑单个时间步 n 及其对应的数据。我们可以观察到，模型并未受到强约束，因此分析结果可能违反相场模型所施加的约束；除非 $\boldsymbol{C}_n$ 趋于零且数据不产生任何影响。由于非线性模型不属于优化的一部分，因此可以推导出闭式解，即（27）。与此同时，我们观察到，标准的集合卡尔曼滤波更新可能会失败，并将其确切归因于更新方程中缺少相场模型的显式影响，以及相场方程的强非线性。为解决这一问题，下面将引入一种约束方法。

集合卡尔曼滤波首先需要初始化。由于这是一种基于采样的方法，因此要针对输入参数的 n_{ens} 个样本求解前向问题。不确定的输入参数可以是初始损伤场的空间分布、随机材料参数，或是在初始化时或每个时间步施加的带有随机扰动的概率强迫。

3.3.1 预报

考虑时间/加载步 $\{\boldsymbol{a}_{n-1,i}\}_i$ 时的集合 $n-1$，它可能源自滤波器的初始化，也可能源自此前的预测或更新。注意，我们省略对 $\boldsymbol{y}_{1:n-1}$、$\boldsymbol{w}_{1:n-1}$ 的依赖。对于每个集合成员，均根据残差方程组（16）计算预测值 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,\ i}$ = （$\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,\ i}^{\mathrm{u}}$、、 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,\ i}^{\mathrm{d}}$、）。随后可计算预测值的均值和协方差：

$$\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{F}}_n = \frac{1}{n_{\mathrm{ens}}}\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}} \boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i} \tag{24}$$

and

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{F}}_n = \frac{1}{n_{\mathrm{ens}}-1}\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}} \left(\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i} - \bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{F}}_n\right)\left(\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i} - \bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{F}}_n\right)^{\top}, \tag{25}$$

分别为。为简化记法，从这里开始，我们省略预报对先前时间步的依赖，例如 $\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{F}}_{n|n-1}$。预测步会迭代执行，直至到达有数据可用的时间步。随后，根据给定的测量数据更新每个集合成员。在一维数值示例中，从时间步 82 开始，每隔 10 个时间步即可获得数据。由于使用了有限集合规模，协方差通常会膨胀，并采用局部化过程。相关细节见 A。

3.3.2 分析

更新先验状态，即根据新数据 $\boldsymbol{y}_n$ 对其进行条件化的第一步，是更新数据模型的超参数 $\boldsymbol{w}_{1:n-1}$ ，以防这些参数随时间发生变化。如果确实发生变化，则在为各个参数选择适当先验分布的情况下，最小化数据模型的负对数边缘后验。使用更新后的超参数 $\boldsymbol{w}_{1:n}$，通过卡尔曼位移更新每个集合成员。卡尔曼位移是

优化问题的解析解（23），详见 [23] 。对于一个成员的状态以及每个传感器的一次观测，我们得到

$$\boldsymbol{a}_{n,i}^{\mathrm{A}} = \boldsymbol{a}_{n,i}^{\mathrm{F}} + \boldsymbol{C}_n^{\mathrm{F}}\boldsymbol{H}^\top \left(\rho^2 \boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_n^{\mathrm{F}}\boldsymbol{H}^\top + \boldsymbol{C}_\delta + \boldsymbol{C}_e\right)^{-1} \left(\boldsymbol{y}_n - \rho\boldsymbol{H}\boldsymbol{a}_{n,i}^{\mathrm{F}}\right). \tag{26}$$

对于 [8]，中提出的数据模型，即每个传感器都有多个可用读数，单个集合成员的更新状态满足

$$\boldsymbol{a}_{n,i}^{\mathrm{A}} = \boldsymbol{a}_{n,i}^{\mathrm{F}} + \boldsymbol{C}_n^{\mathrm{F}}\boldsymbol{H}^\top \left(\rho^2 n_{\mathrm{obs}} \boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_n^{\mathrm{F}}\boldsymbol{H}^\top + \boldsymbol{C}_\delta + \boldsymbol{C}_e\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n_{\mathrm{obs}}} \boldsymbol{y}_{n,j} - \rho n_{\mathrm{obs}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{a}_{n,i}^{\mathrm{F}}\right). \tag{27}$$

更新后的状态现在再次作为下一预测步的初始条件。在图5中展示了运行示例的集合分析。集合成员现在紧密聚集在参考解附近，尽管可以清楚地看到，后验集合成员呈现出强烈的非物理噪声。此外，相场降至零以下，这违反了偏微分方程组中编码的约束。由于这一影响，下一时间步的后续牛顿迭代可能无法收敛。这些问题的原因是位移场中的强梯度。这个问题可以通过

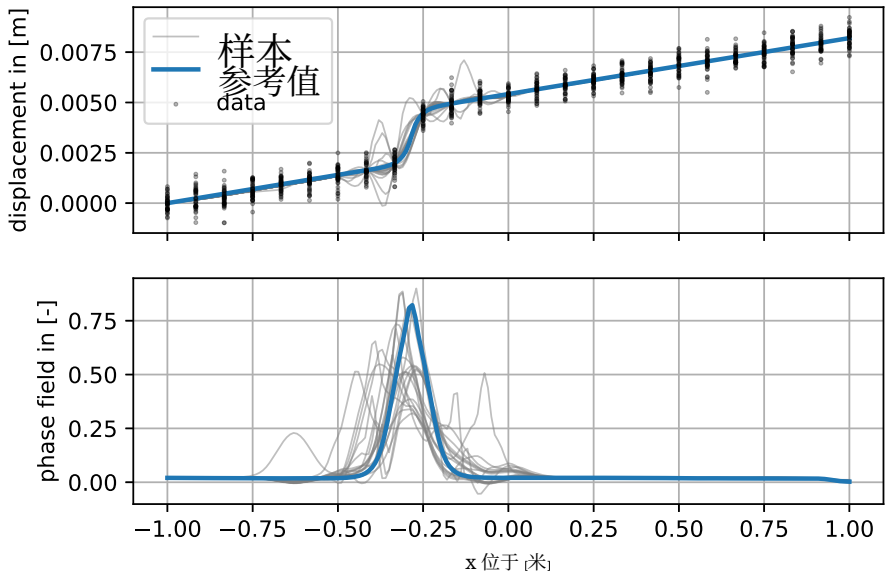


图 5：灰色显示的后验集合与蓝色显示的参考解进行比较，含噪测量由该参考解生成。与先验相比，集合现在更紧密地聚集在参考解周围。然而，会出现数值伪影和非物理相场解，这可能导致下一时间步无法收敛。此后验集合（或称分析）是算法1中的第 10 行的结果。

在某种程度上，可通过在更新前对位移场进行平滑来实现，如图 6 a) 所示。所得后验集合的噪声明显减少，但仍会出现负相场，位移也仍不符合物理规律。通过对相场和位移的各个方程采用交错求解并进行正则化，可以克服后验结果中的这种非物理行为。下一节将对此进行讨论。

算法 1总结了预报时间步进和集合卡尔曼滤波分析。 $\boldsymbol{T}$ 表示在这些伪时间步上，针对不同载荷求解相场问题。 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{D}}$ 表示数据可用并执行集合卡尔曼滤波更新的时间步集合。

3.3.3 正则化

图5 展示了运行示例的更新后的集合。可以清楚地看到，卡尔曼更新既会在位移中产生伪振荡，也会产生具有负值的相场变量。可以采用若干途径来消除这些效应。可以将相场变量变换为

算法1 相场集合卡尔曼滤波器

要求： $\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{F}} = \left\{(\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{0,i,u}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{0,i,d})\right\}_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}}$，$t = t_0 = 0$ ▷ $t=0$处的初始集合

对于 $t \in \boldsymbol{T}$，**执行**

  $t = t + \Delta t$

  $n = n + 1$

  ▷ 计算下一次伪时间预测.....

  对于 $i = 1$ 到 n_{ens} **执行** ▷ .....对于每个集合成员

    更新 $\check{\boldsymbol{a}}^d$，$\boldsymbol{\varphi}_{n-1}$ 基于 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n-1,i,d}$

    整体求解：
    $\boldsymbol{R}^u(\boldsymbol{a}^u, \check{\boldsymbol{a}}^d; \boldsymbol{\varphi}_{n-1}, \ell) = 0,$
    $\boldsymbol{R}^d(\boldsymbol{a}^u, \boldsymbol{a}^d; \boldsymbol{\varphi}_{n-1}, \ell) = 0$

    集合 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i,u}$ 等于 $(\boldsymbol{a}^u, \boldsymbol{a}^d)$

  $\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{F}} = \left\{(\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i,u}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i,d})\right\}_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}}$

  如果 $t \in \boldsymbol{T}_{\mathrm{D}}$ **则**

    对于 $i = 1$ 到 n_{ens} **do**

      执行集合卡尔曼滤波分析，方程（27） $\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i} \to \boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i}$

    $\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{A}} = \left\{(\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i,u}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i,d})\right\}_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}}$

    对于 $i = 1$ 至 n_{ens} **do**

      执行迭代正则化（见下节） $\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i} \to \boldsymbol{a}^{\mathrm{R}}_{n,i}$

    $\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{R}} = \left\{(\boldsymbol{a}^{\mathrm{R}}_{n,i,u}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R}}_{n,i,d})\right\}_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}}$

    $\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{F}} = \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{R}}$

强制界限 $[0,1]$ 并平滑位移，然而，我们发现平滑尤其难以在高维中实现。另一种选择是在三维变分或四维变分类方法中将相场模型作为强约束加以强制。然而，这似乎实现代价很高，留待未来研究。

这里，我们提出了一种不同的解决方案：利用相场模型进行少量精心选择的交错迭代，对卡尔曼位移进行正则化。我们不采用标准的高斯-牛顿方法求解各个方程，而是将每个牛顿步视为近端算子的单步近似，以平衡纯粹基于偏微分方程的正则化与集合卡尔曼滤波分析所提供的数据影响。其背后的理由将在第5节中讨论。

正则化后验的第一步，是在同一伪时间步再次计算位移和相场。不同于预测中所用的整体式方法，我们分别求解 $\boldsymbol{u}$ 和 d，并采用更大的相场长度尺度 $L > \ell$。

1. 给定集合卡尔曼滤波更新的结果，即 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i,u}$，求解

$$\boldsymbol{R}^d(\boldsymbol{a}^{\mathrm{A},u}_{n,i}, \tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \boldsymbol{0}, L) = 0 \tag{28}$$

   求解 $\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R}}_{n,i,d}$。

2. 求解 $\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R}}_{n,i,u}$，约束条件为

$$\boldsymbol{R}^u(\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \boldsymbol{0}, L) = 0. \tag{29}$$

   请注意，借助 $\boldsymbol{\varphi} = 0$，我们在此步骤实质上移除了不可逆性约束。记号$\boldsymbol{F}_{1;n}$ 表明，我们仍在步骤 n施加规定的位移。

结果见图 6b)。相场看起来宽得多，但仍能准确地固定参考解。较宽的相场覆盖了裂纹位置周围的大部分噪声。这也反映在使用正则化相场计算得到的相应位移中。其缺点是，尽管位移确实固定了裂纹正确的参考位置，但裂纹处剩余的刚度低于参考解。这是因为较宽的相场导致区域内总体累积损伤增加。反过来，这会使裂纹在高维情形下以更快的传播速度扩展。一旦裂纹充分发展，这种影响便不再重要。尽管如此，我们认为，与含噪且不符合物理规律的后验相比，这种影响更可取。

第二部分是根据正则化位移重新计算相场，这次使用原始长度尺度：

3. 给定正则化位移，即 $\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},u}_{n,i}$，求解 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}$ 并满足

$$\boldsymbol{R}^{d}(\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \mathbf{0}, \ell) = 0. \tag{30}$$

4. 使用不含可逆性约束的相场模型，求解 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},u}_{n,i}$，使得 t hat

$$\boldsymbol{R}^{u}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \mathbf{0}, \ell) = 0. \tag{31}$$

结果见图 6 c)。显然，仍存在一定的不确定性，这可以预期，因为传感器数量有限且存在测量噪声。作为对比，将正则化方案应用于完全断裂的一维域，即相场最大值为 1。结果见图 7。

最后，完整状态向量重构为

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{R}}_{n} = \left\{ (\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}) \right\}_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}} \tag{32}$$

并作为下一个伪时间步的初始值。算法 2 总结了上述正则化过程。

算法 2 卡尔曼分析的正则化

要求： $\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n} = \left\{ (\boldsymbol{a}^{\mathrm{A},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{A},d}_{n,i}) \right\}_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}}$ ▷ 集合卡尔曼滤波分析后的集合

确保： $L > \ell$

对于 $i = 1$ 至 n_{ens}，**执行** ▷ 正则化每个集合成员

  使用 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{A},u}_{n,i}$ 和 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{A},d}_{n,i}$

  求解 $\boldsymbol{R}^{d}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{A},u}_{n,i}, \tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \mathbf{0}, L) = 0$ 对于 $\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},d}_{n,i}$

  其中 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{R},d}_{n,i}$ 和 $\varphi_{n-1}^{\mathrm{R}} \stackrel{!}{=} 0$

  求解 $\boldsymbol{R}^{u}(\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \mathbf{0}, L) = 0$ 对于 $\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},u}_{n,i}$ ▷ *Degrade stresses*

  其中 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{R},u}_{n,i}$ 和 $\varphi_{n-1}^{\mathrm{R}} \stackrel{!}{=} 0$

  求解 $\boldsymbol{R}^{d}(\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \mathbf{0}, \ell) = 0$ 对于 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}$

  对于 $j = 1$ 到 n_{stagger} **执行** ▷交错求解方案

    其中 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{R},d}_{n,i}$ 和 $\varphi_{n-1}^{\mathrm{R}} \stackrel{!}{=} 0$

    求解 $\boldsymbol{R}^{u}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \mathbf{0}, \ell) = 0$ 对于 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},u}_{n,i}$

    与 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},u}_{n,i}$ 和 $\varphi_{n-1}^{\mathrm{R}} \stackrel{!}{=} 0$

    求解 $\boldsymbol{R}^{d}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}; \mathbf{0}, \ell) = 0$ 对于 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}$

  $= \left\{ (\boldsymbol{a}^{\mathrm{R},u}_{n,i}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{R},d}_{n,i}) \right\}_{i=1}^{n_{\mathrm{ens}}}$ ▷ 正则化后的集合

正则化过程与最初求解相场问题时采用的交错方法类似[33, 34] 。如果后续牛顿迭代仍未能收敛，则可以重复交错方案。不过值得注意的是，随着交错方案的每次新迭代，刚度可能进一步降低或升高，因此裂纹扩展速度也会随之增大或减小，如图6 c2）所示。裂纹位置仍能被正确推断。这一现象表明，所提出的方法能够成功实现裂纹定位，这正是高维情形下所需的功能；但重复执行交错方案时，该方法在准确推断裂纹前缘处相场的幅值方面效果较差。

正则化后，可以计算下一次伪时间预测。图8展示了分析时间线的更多快照：随着更新次数增加，集合会更加紧密地聚集在参考值周围，因此不确定性会降低。

传感器数量会影响后验集合的质量。直观而言，更多传感器意味着数据所占权重更大，而先验所占权重更小。图9 展示了同一时间步的分析，但区域内的传感器数量不同。

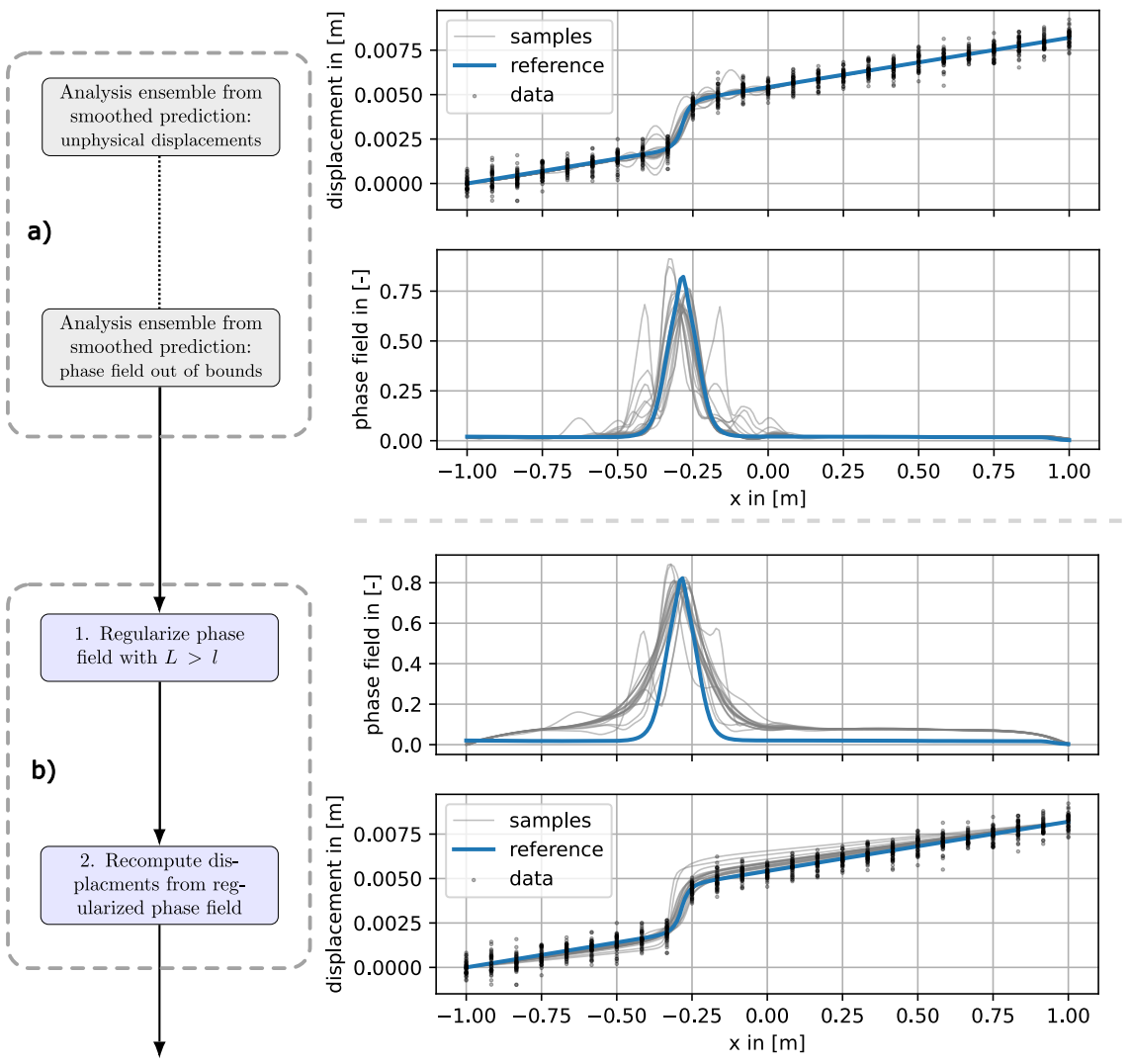


图6：a）：通过高斯过程进行先验平滑后的后验集合。最明显的伪影已被滤除，但不符合物理规律的相场仍然存在。

b)：灰色所示为第一次正则化步骤后的后验集合，并与蓝色参考解进行比较。通过投影到具有更大相场长度尺度 L的解空间，大部分数值伪影被滤除。然而，更大的长度尺度会导致整个区域产生更多累积损伤，从而造成总刚度损失，这体现为略大的位移。该中间结果对应于第 $2-5$ 行（算法2）。

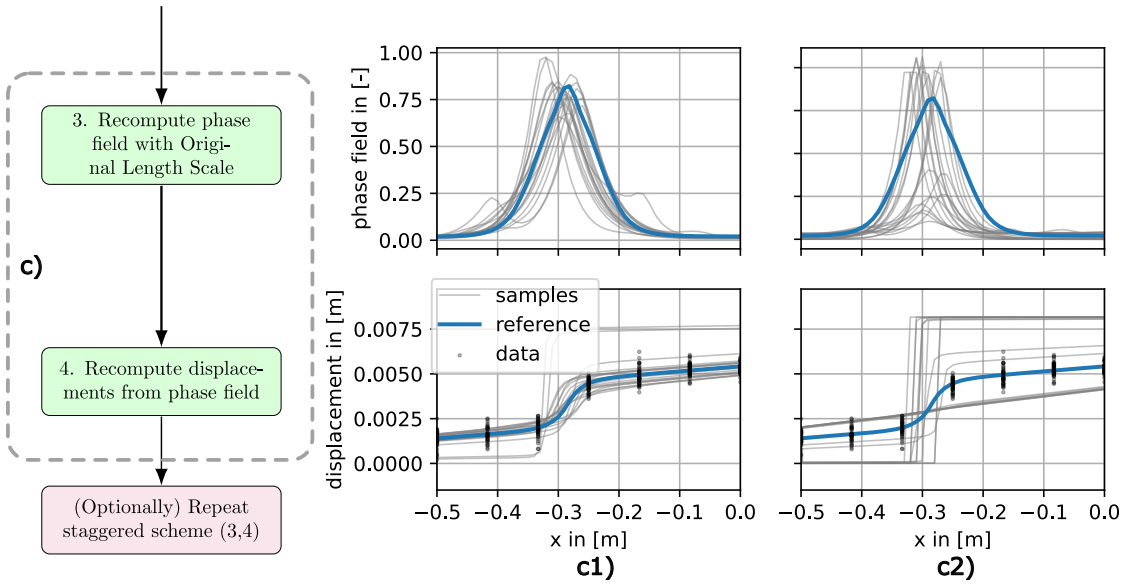


图6：c）：采用原始相场长度尺度进行校正。在左侧的 c1) 中，该过程重复了一次。在右侧的 c2) 中，该过程重复了四次。可以看出，重复一次得到的结果更接近参考值。这是因为此处的推断涉及两种现象：裂纹起始和裂纹定位。在这种情况下，对裂纹起始进行贝叶斯处理似乎困难得多；迭代得到的结果显示，损伤要么几乎完全发生，要么仅有极少损伤。不过，裂纹定位效果符合预期：找到了裂纹的正确位置。此时我们主要关注裂纹定位。该正则化集合对应于算法2。

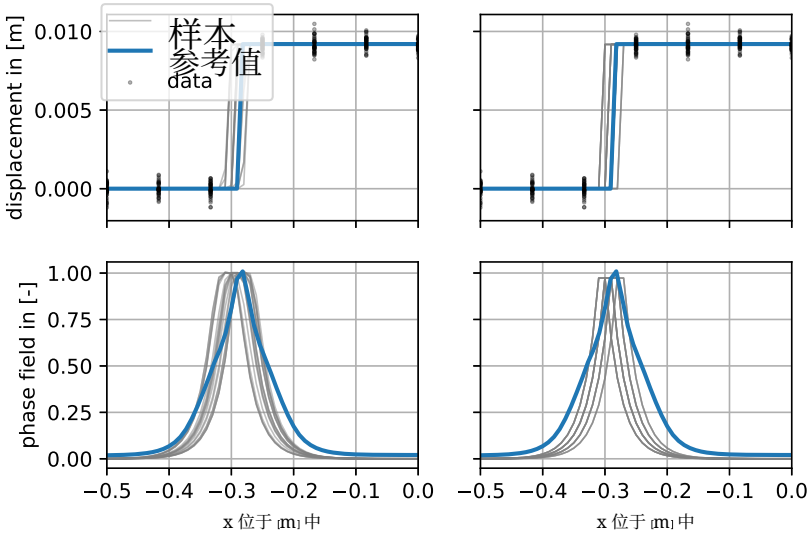


图7：在较晚的时间步执行集合卡尔曼滤波分析和正则化过程，此时参考解和所有集合成员均已在相应位置显示完全损伤。左侧的过程重复了一次，右侧重复了四次。可以看出，重复一次便已能得到良好的结果。重复交错方案会得到相似的结果，但集合成员的相场形状会收敛。此处裂纹成核不起作用，因此推断更简单，而且样本中的标准差较小。

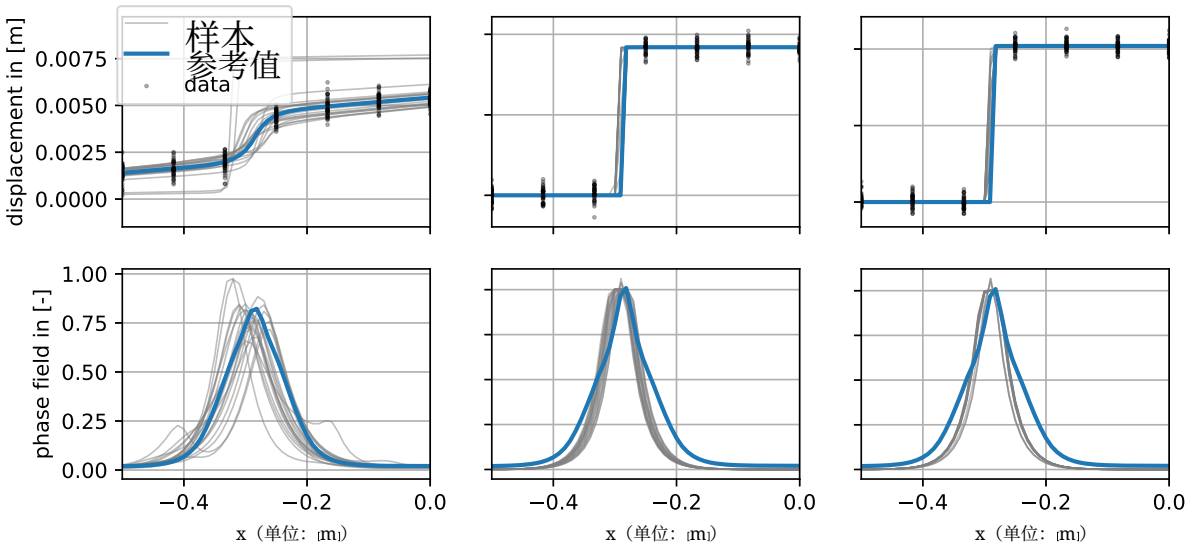


图8：在不同时间步（82、92 和 102）中纳入的集合卡尔曼滤波分析步越多，裂纹位置的不确定性就越小：位移和相场逐渐收敛至参考值。在每个时间步，交错方案均重复执行了一次。

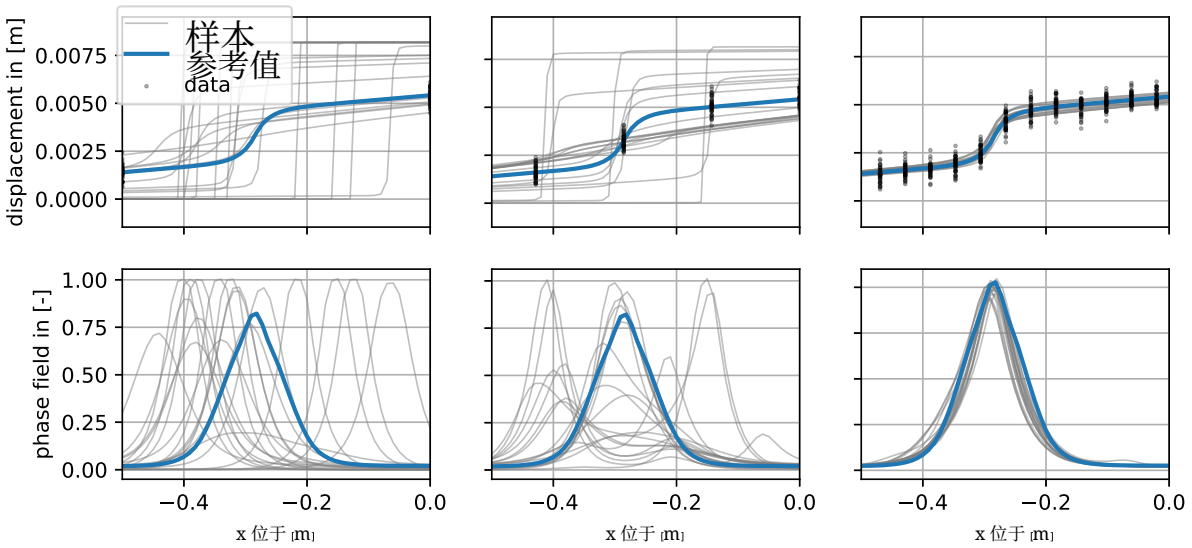


图9：数据生成和分析中使用的传感器位置（5、15、50）越多，裂纹位置的不确定性就越小。与图8 中使用 25 个传感器位置的情况比较。所有图均显示时间步 82 处的首次分析。

4 数值研究

4.1 剪切作用下的单边缺口试件（SENS）

对于一个二维示例，选取 SENS 基准算例。如图 10所示，力学设置由一个单位正方形组成，其边长为 [毫米], , 底部固定。左右边缘不允许发生竖向位移。在有限元网格中建立了一个长度为边长一半的缺口，以红色表示。结构以准静态方式在顶部边界施加载荷。顶部边界上的狄利克雷边界条件用于规定前 70 个伪时间步中每个伪时间步的位移增量为 $\Delta u = 1e-4$ [毫米]。从该时间步开始，增量减小为 $\Delta u = 1e-5$ [毫米]。

真实值，即测量含噪数据所依据的解场，见图 11。数据

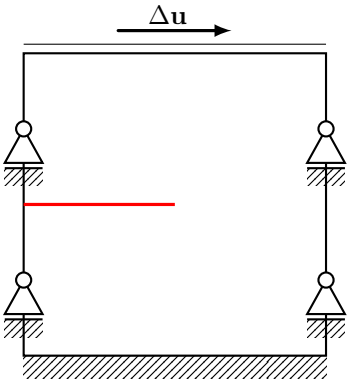


图10：SENS 数值实验。边长 1.0毫米，缺口长度：0.5 毫米。

参数	值
断裂模型	AT2
能量分解	体积-偏差
E	210000 [牛顿/毫米^2]
ν	0.3 [-]
G_c	2.7 [牛顿/毫米]
l	$1.5e-2$ [毫米]
α	$\beta G_c/l$

：

表 2：二维数值示例的相场模型参数

在稀疏传感器位置（$n_{\text{sens}} << n_{\text{dof}}$）采集两个空间维度上的位移数据，位置以黑色十字标出。数据同化的参数见表 3。先验集合为

参数	值
n_{ens}	100
n_{sens}	100
n_{obs}	20
σ_e	$4e-4$
n_{dof}	34071
n_{dof} 真实值	36070
r	1.05
l_{loc}	0.45

表 3：数据同化问题的参数

参数	值
l_{reg}	$4l$
n_{iter}	4

表4：正则化参数

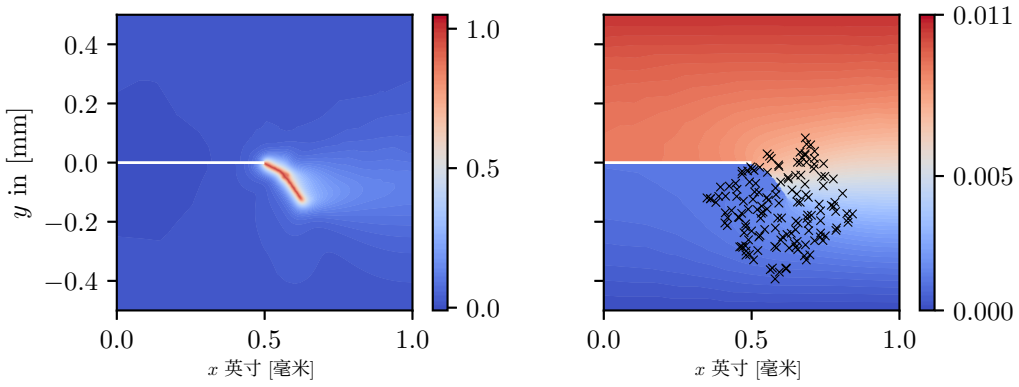


图11：测量数据取自所示相场解的位移场。集合卡尔曼滤波仅利用先验过程和测量来恢复相场和位移。传感器位置以黑色十字标出。

通过随机抽取 n_{ens} 种不同的相场初始条件构建。每个样本由x-y平面上靠近狭缝的单个孔隙定义。孔隙的位置由两个随机

变量

$$X_0 \sim 0.51 + (0.62 - 0.51) \cdot \mathrm{Beta}(8, 8) \tag{33}$$

$$Y_0 \sim -0.11 + (0.02 - (-0.11)) \cdot \mathrm{Beta}(8, 8). \tag{34}$$

图 12中展示了一个先验位移样本在 x方向上的分布及其对应的相场，同时还展示了绝对误差。第二列显示的是经过一次集合卡尔曼滤波分析步后的时间步。从定性角度来看，绝对误差有所降低，即后验相场与真实值更加吻合。第三列显示的是经过第二次分析后的较晚时间步。误差仍然很小。所选集合成员与真实值的偏差尤为明显，但分析后误差仍然很小。值得注意的是，所有其他集合成员也都如此：如果偏差原本就很小，误差便会降低或保持在较低水平。

另一方面，图 13中没有对该样本执行分析步，因此位移和相场的误差都会随时间增大。因此可以认为，对先验集合进行卡尔曼位移确实能够降低单个样本的误差，从而也降低整个集合的不确定性。

4.1.1 更新后的反作用力与外推

评估某一裂纹路径影响的一个重要量是结构的剩余强度。不同的路径可能导致不同的残余承载能力，而这在实践中可能是决策所依据的重要量。自然地，集合卡尔曼滤波集合中的每个随机样本在每个时间步都表现出不同的反作用力。图 14 展示了二维 SENS 示例的完整时间线。无论给定的初始损伤如何，所有样本在伪时间线的第一部分（仅弹性阶段）表现相似。只有当断裂驱动能大到足以引发一条到达初始损伤的裂纹时，差异才会显现。不同反作用力的离散度在所绘制的样本中可见。在时间步 A，执行集合卡尔曼滤波分析步。此时可以观察到若干有趣的现象：

- 首先，离散度减小。虽然存在一些离群值以及明显但较小的离散度，但大多数集合成员现在表现出相似的反作用力。

- 随着时间推移，平均反作用力仍然紧密跟随参考值，即稀疏数据所依据的解。请注意，更新后的集合的离散度也会随时间增加。对于时间步 E，图15 展示了更新后的集合直方图，并将其与未执行卡尔曼分析步的同一集合模拟进行了比较。所得分布的标准差小于在 A 点未执行分析步时的标准差。此外，参考值仍落在概率密度函数范围内。

- 图16 展示了每个样本峰值力的直方图，即结构所能承受的最大载荷。这里的方差也较先验显著降低。

图17中引入了两个分析步，与图12相一致。请注意，与仅执行一次卡尔曼位移相比，方差进一步减小。这一点也体现在外推时间步 E 的直方图以及图18 和19中的峰值力直方图中。

5 讨论

回顾集合卡尔曼更新的目标函数

$$J_n(\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i}) = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{H}\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i}\right|^2_{\Gamma} + \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{a}^{\mathrm{A}}_{n,i} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}_{n,i}\right|^2_{\boldsymbol{C}_n}, \tag{35}$$

这表明，物理模型仅通过先验集合的模拟产生轻微影响。事实上，集合卡尔曼更新并不受相场模型物理约束的限制，这正是数值实验中观察到稳定性问题的根源。正则化将数据驱动的集合更新重新投影至物理可容许流形附近，同时通过增大长度尺度来滤除伪振荡。本节将从

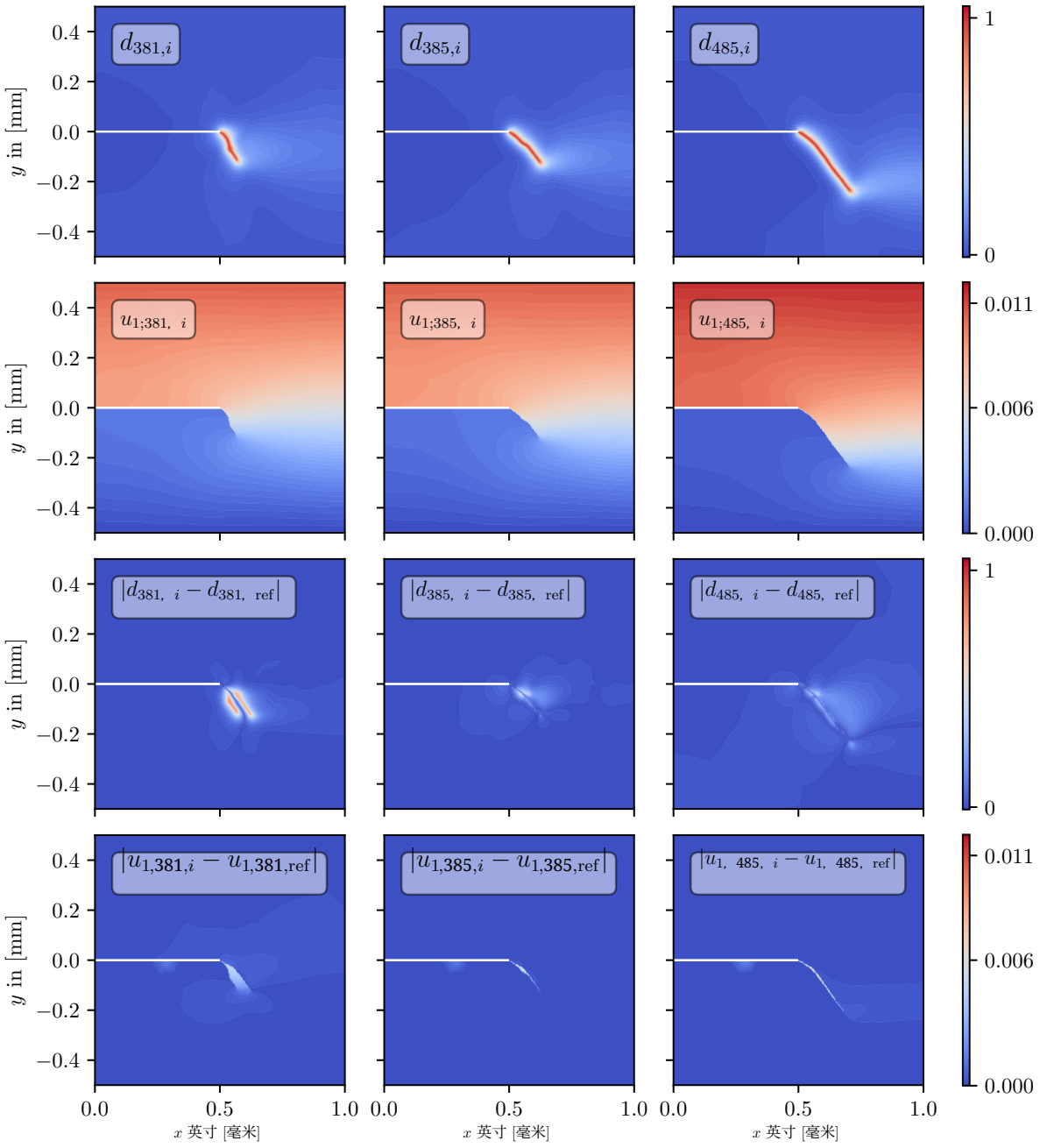


图 12：单个集合成员的 SENS 分析时间线。从左到右显示了三个不同的时间步。在时间步 381，尚未进行数据同化。相场和位移均存在明显误差。在时间步 382，已进行了首次数据同化和正则化过程。由于正则化带来了平滑效果，样本需要经过几个时间步才能再次形成清晰的裂纹。因此，在时间步 385，可以看到样本已发生变化，与真实值更加接近。误差有所减小。在时间步 485，进行了第二次分析。误差仍然较小。

近端校正的角度阐释这一正则化，并就这一背景下强约束变分数据同化的前景进行探讨。

为此，从离散层面上的能量最小化视角进行考察很有启发性，参见第2节。从这一视角出发，我们可以将第 3.3.3 节的正则化步骤改写如下：

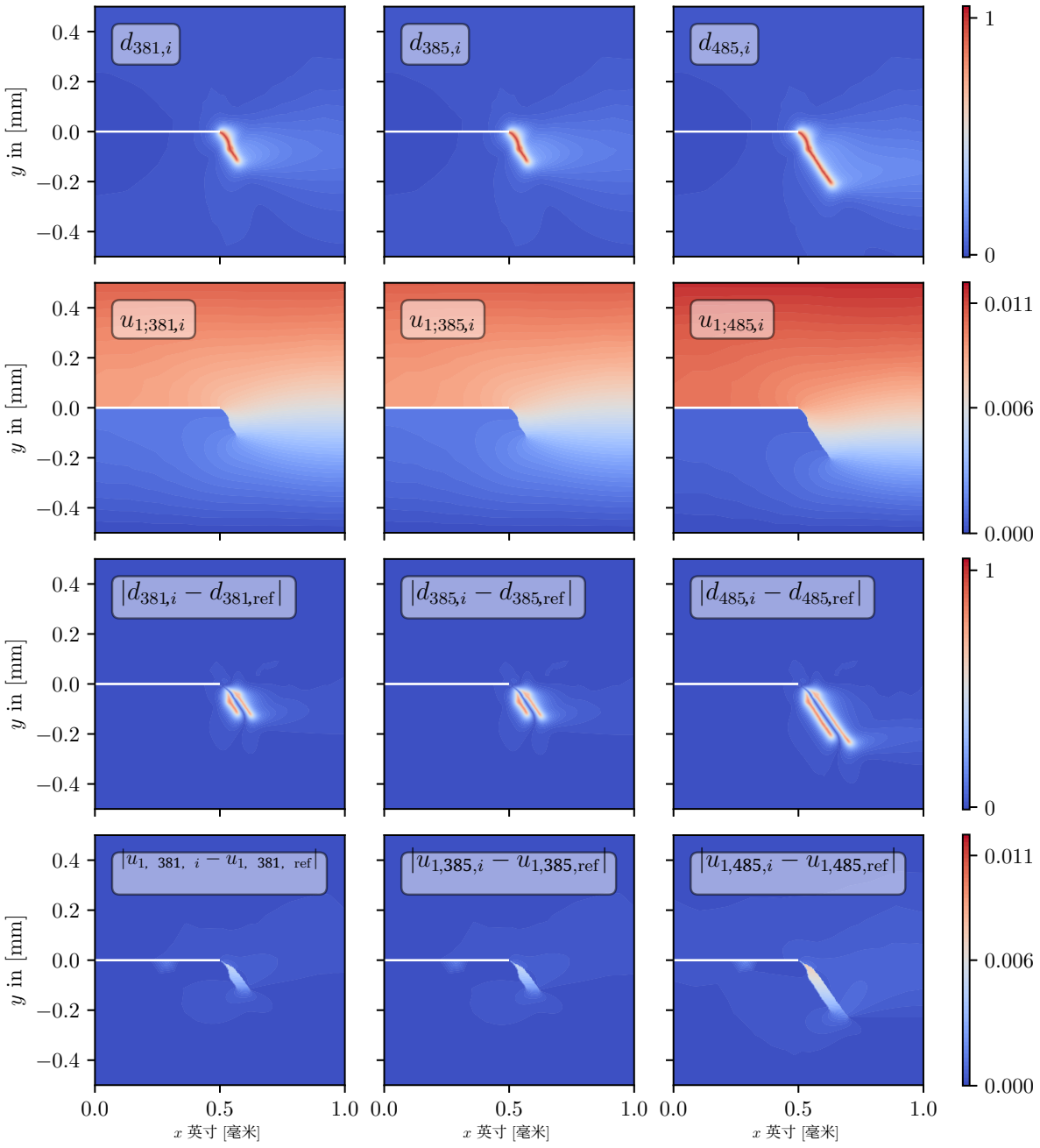


图 13：单个集合成员在未进行数据同化时的 SENS 时间线。可以看出，误差随着每个时间步的推进而增加。

给定一个经集合卡尔曼滤波同化的状态 $(\boldsymbol{u}^{\mathrm{A}}_{n,\,i},\ \boldsymbol{d}^{\mathrm{A}}_{n,\,i})$，考虑

$$\tilde{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{R}}_{n,i} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{d}} \left(\tau \|\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^{\mathrm{A}}_{n,i}\|_{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{d}}} + E_{h;n}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{A}}_{n,i}, \boldsymbol{d}; \boldsymbol{0}, L) \right), \tag{36}$$

其中，通过设置 $\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{0}$ 解除裂纹不可逆性，并通过采用$L > \ell$对相场进行平滑处理。该近端步将完全由数据驱动的卡尔曼位移投影回物理模型的方向，而参数 τ 控制数据贡献与物理贡献之间的平衡。此外，集合卡尔曼更新的协方差矩阵会自然地赋予方差较小的集合部分较高权重。然而，由于将完整的协方差矩阵存储在内存中需要占用大量内存，因此在本文所展示的示例中，我们用单位矩阵替代它。

鉴于已凸显物理模型在相场数据同化中的重要作用，

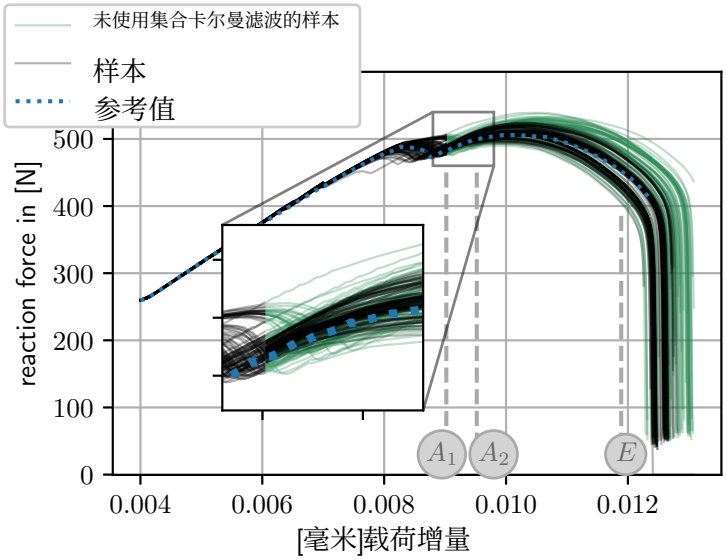


图14：在时间步 A_1 进行单次分析步的 SENS 基准测试反作用力，黑色曲线为可见部分。经过卡尔曼位移后，集合成员更加集中在参考解附近。作为对比，未进行卡尔曼位移的集合以绿色显示。

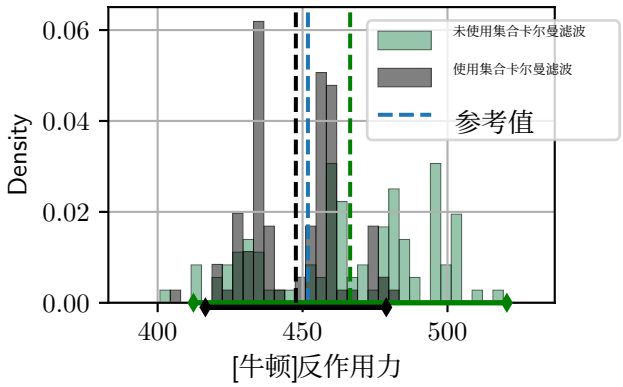


图15：SENS 基准测试在时间步 A 进行单次分析步后，于外推时间步 E 的反作用力分布直方图。离散度（2σ）有所降低，而参考解仍处于后验协方差的范围内。

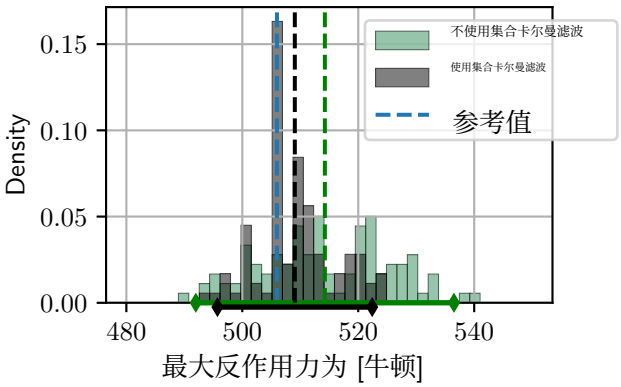


图16：SENS 基准测试在时间步 A 进行单次分析步后的最大反作用力分布直方图。离散度（2σ）有所降低，而参考解仍处于后验协方差的范围内。

未来工作自然可以着眼于强约束变分数据同化。例如，4DVAR 方法考虑在包含 N_T+1 个时间步的时间窗口内进行平滑，而非滤波，并将模型作为强约束。相应的优化问题旨在确定该时间窗口起始时刻的解向量 $\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{A}}$，使得

$$J_0(\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{A}}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N_T-1} \left|\boldsymbol{y}_{n+1} - \boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}^{\mathrm{A}}\right|_{\boldsymbol{\Gamma}}^2 + \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{A}} - \boldsymbol{m}_0\right|_{\boldsymbol{C}_0}^2, \tag{37}$$

受相场更新约束

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}^{\mathrm{A}} = \mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{a}}_n^{\mathrm{A}}), \tag{38}$$

被最小化。这里，$\boldsymbol{m}_0$ 是一个初始猜测，例如该时间步的预报$\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{F}}$。优化问题包含同化窗口内所有有数据的时间步。这意味着，在优化器的每次迭代中

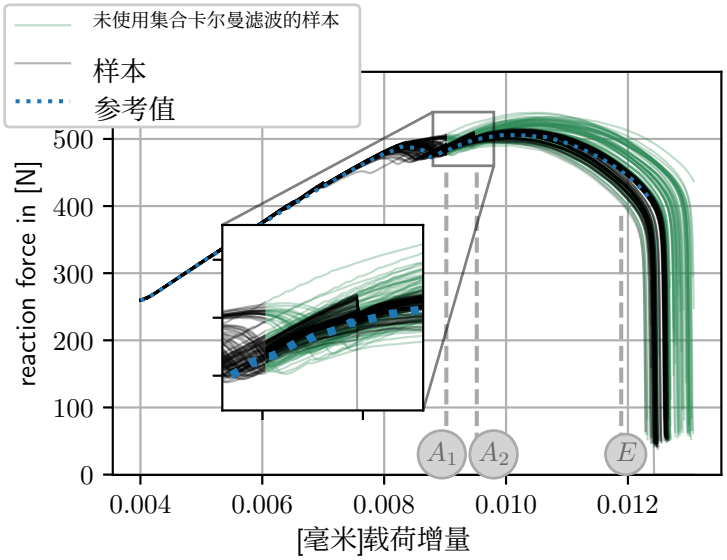


图17：SENS 基准测试中，在时间步 A_1 和 A_2进行两次分析步时的反作用力，黑色曲线为反作用力。经过卡尔曼位移后，集合成员更紧密地聚集在参考解周围。作为对比，绿色曲线表示未进行卡尔曼位移的集合。

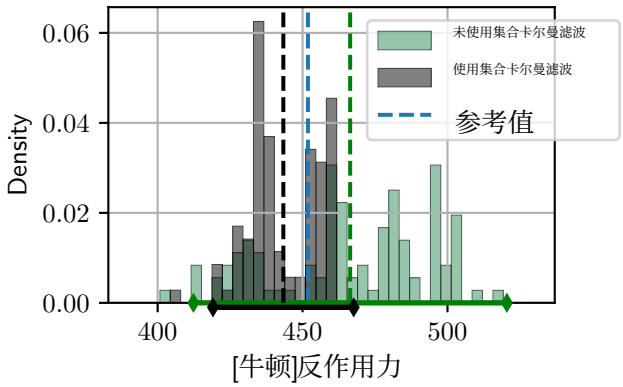


图18：SENS 基准测试中，在时间步 A_1 和 A_2 进行两次分析步时，外推时间步 E 处反作用力分布的直方图。离散度（2σ）有所降低，而参考解仍处于后验协方差的范围内。

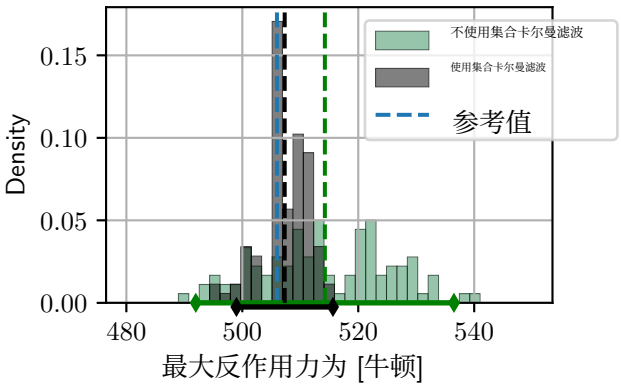


图19：SENS 基准测试中，在时间步 A_1 和 A_2 进行两次分析步时，最大反作用力分布的直方图。离散度（2σ）有所降低，而参考解仍处于后验协方差的范围内。

都必须从时间 0 开始求解模型，直至时间 N_T，以便评估目标函数。尽管 4DVAR 是针对均值向量而非集合制定的，但也可以将时间 0 的均值替换为一个集合成员，并将协方差 $\boldsymbol{C}_0$ 替换为集合近似协方差。

原则上，同化窗口可以缩短至单个时间步，从而强制模型对分析向量成立，因此只允许物理可行解。其缺点是，4DVAR 优化问题不存在闭式解，因此需要采用梯度下降法或其他方法。这反过来会导致巨大的计算成本，因为在同化窗口内的每个时间步都需要多次求解模型，而且通常还需要计算梯度。

6 结论与展望

本文介绍了一种通过数据同化来量化并降低相场脆性断裂问题中不确定性的方法。随机初始条件会导致裂纹路径具有随机性，进而使所研究结构的剩余刚度也具有随机性。实践中，人们希望了解这两个量。因此，利用集合卡尔曼滤波器，根据稀疏的测量数据降低相关不确定性，便能比单独使用随机模型或数据，对给定结构的承载能力作出更准确的判断。

随机相场模型随时间向前推进，直至到达有数据可用的时间步。此时，将测量数据与模型进行同化，并对结果进行正则化，从而为下一个伪时间步构造合适的初始条件。本文结合一个说明性的一维示例，对该过程进行了详细分析。一个二维数值基准示例则用于展示该方法在更贴近实际的场景中的适用性。结果表明，位移和相场状态可以得到非常准确的更新。然而，单纯使用集合卡尔曼滤波器无法获得令人满意的结果：必须进行后续正则化，才能得到具有物理意义的解。正则化不足的问题或许可以通过从变分视角看待数据同化并采用 4DVAR 等方法来解决；这类方法能够将分析结果约束在可行的模型输出范围内，而无需在推断后显式地对分析结果进行投影。然而，此类方法需要在推断过程中针对多个时间步重新求解模型，因此会导致计算成本大幅增加。

此外，还应考虑不同的不确定性来源，例如参数和网格中的随机性，并将该方法扩展到动力学相场方法。这些方法涉及时间导数，因此需要对集合卡尔曼滤波进行调整。

协方差膨胀与局部化

集合卡尔曼滤波通常不用于大集合极限，即集合成员数多于自由度的情况。在本文的示例中，与相场问题中为解析裂纹所需的大量自由度相比，使用的集合成员少得多。这可能导致数值问题，例如虚假长距离相关性，以及经验协方差矩阵秩亏造成的滤波器塌缩 [35]。集合卡尔曼滤波文献通常建议采用两种对策：首先，使用协方差膨胀来确保协方差不会消失。正如 [36], 所提出的，为了膨胀协方差，在分析步之前对每个集合成员分别进行膨胀。膨胀因子 r通常略大于 1。0。对于时间步 $[i]$ 时的集合成员 n，可得

$$\boldsymbol{a}_{n,i}^{\mathrm{inf}} = r(\boldsymbol{a}_{n,i} - \bar{\boldsymbol{a}}_n) + \bar{\boldsymbol{a}}_n. \tag{39}$$

根据膨胀后的集合成员，计算得到膨胀协方差矩阵 $\boldsymbol{C}_n^{\mathrm{inf}}$ d.

第二种应对措施是协方差局部化，它能防止虚假相关性，从而避免后验状态中出现不符合物理规律的效应。根据例如 [37], ，协方差局部化通过将局部支撑相关矩阵 $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{loc}}$ 与协方差矩阵进行舒尔积来实现，即

$$\boldsymbol{C}_n^{\mathrm{loc}} = \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{loc}} \circ \boldsymbol{C}_n^{\mathrm{loc}}. \tag{40}$$

[37] 中的作者指出，有许多合适的 $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{loc}}$，其中一种常用方法由 [38] 定义，与平方指数协方差十分相似。因此，本文使用平方指数协方差函数进行局部化，该方法适用于本文讨论的问题。

致谢

本文开发的源代码将在论文录用后发布于 GitHub 和 Zenodo。代码主要使用 Julia [39] 编写，并以 Ferrite.jl [40] 作为有限元法后端。

声明

- 资助 本研究获得的成果经费由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）提供，项目编号：255042459 GRK2075/2。

- 利益冲突 作者对本文讨论的任何材料均无财务或所有权方面的利益。

- 数据可用性：本研究期间生成或分析的所有数据均已包含在这篇已发表的文章中。

- 作者贡献：概念构思与方法设计：LH、UR、KAM、RJ；正式分析、调查、验证与可视化：LH；软件：LH、KAM；撰写初稿：LH；审阅与编辑：LH、UR、KAM、RJ；经费获取、项目管理与资源提供：UR、RJ；监督：UR、KAM、RJ。

参考文献

[1] G. A. Francfort, J. J. Marigo，将脆性断裂重新审视为能量最小化问题，《固体力学与物理学杂志》46 (8) (1998) 1319–1342. doi:10.1016/S0022-5096(98)00034-9.[2] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker，热力学一致的断裂相场模型：变分原理与多场有限元实现，国际工程数值方法杂志 83 (10) (2010) 1273–1311. doi:10.1002/nme.2861.[3] M. Ambati, T. Gerasimov, L. De Lorenzis，延性断裂的相场建模，《计算力学》55 (5) (2015) 1017–1040. doi:10.1007/s00466-015-1151-4.[4] M. Kalina, T. Schneider, J. Brummund, M. K¨astner，统一框架下疲劳断裂相场模型综述，工程断裂力学 288 (2023) 109318. doi:10.1016/j. engfracmech.2023.109318.[5] T. Gerasimov, U. R¨omer, J. Vond˘rejc, H. G. Matthies, L. De Lorenzis，脆性断裂的随机相场建模：计算多种裂纹模式及其概率，《计算机在应用力学与工程中的方法》372 (2020) 113353. doi:10.1016/j.cma.2020.113353.[6] S. Nagaraja, U. R¨omer, H. G. Matthies, L. De Lorenzis，各向异性脆性断裂的确定性与随机相场建模，《计算机在应用力学与工程中的方法》408 (2023) 115960. doi:10.1016/j.cma.2023.115960.[7] TC. Chu, WF. Ranson, M. A. Sutton，数字图像相关技术在实验力学中的应用，《实验力学》25 (1985) 232–244.[8] M. Girolami, E. Febrianto, G. Yin, F. Cirak，统计有限元法（statFEM）：观测数据与模型预测的协调综合，《计算机在应用力学与工程中的方法》375 (2021) 113533. doi:10.1016/j.cma.2020.113533.[9]C. Duffin, E. Cripps, T. Stemler, M. Girolami，针对误设模型的统计有限元，美国国家科学院院刊 118 (2) (2021) e2015006118. doi:10.1073/pnas. 2015006118.[10] T. Wu, B. Rosi´c, L. De Lorenzis, H. G. Matthies，断裂相场建模的参数识别：一种采用无采样更新的贝叶斯方法，《计算力学》67 (2) (2021) 435–453. doi:10.1007/s00466-020-01942-x.[11] A. Pulikkathodi, E. Lacazedieu, L. Chamoin，利用基于PGD的模型降阶和扩展卡尔曼滤波，对不确定微结构中的裂纹进行实时反演追踪，《计算力学》71 (2) (2023) 311–332. doi:10.1007/s00466-022-02240-4.[12] F. A. Rochinha, A. Peirce，水力裂缝监测：采用扩展卡尔曼滤波器进行状态估计，《反问题》26 (2) (2010) 025009. doi:10.1088/0266-5611/26/2/025009.[13] E. Kuncham, S. Sen, P. Kumar, H. Pathak，一种采用扩展卡尔曼滤波器的在线模型疲劳寿命预测方法，《理论与应用断裂力学》117 (2022) 103143. doi: 10.1016/j.tafmec.2021.103143.

[14] J. Ping, D. Zhang，结合基于向量的水平集参数化方法，利用集合卡尔曼滤波器进行裂缝分布历史匹配，《石油科学与工程杂志》108 (2013) 288– 303. doi:10.1016/j.petrol.2013.04.018.[15] M. Cervera, G. B. Barbat, M. Chiumenti, J.-Y. Wu，扩展有限元法、混合有限元法与相场模型在准脆性开裂中的比较综述，《计算工程方法档案》29 (2) (2022) 1009–1083. doi:10.1007/s11831-021-09604-8.[16] R. Bharali, F. Larsson, R. J¨anicke，一种用于脆性和准脆性断裂的微形态相场模型，《计算力学》73 (3) (2024) 579–598. doi:10.1007/s00466-023-02380-1.[17] L. De Lorenzis, T. Gerasimov，脆性断裂相场模型的数值实现，载于：L. De Lorenzis, A. D¨uster (编)，《采用创新数值方法对固体和流体进行工程建模》，施普林格国际出版公司，沙姆，2020，第75–101页。[18] D. Khimin, L. Kolditz, V. Kosin, K. Mang, T. Wick，相场断裂问题的建模、离散化、优化与模拟（2023年11月）。doi:10.15488/15172.[19] T. Heister, M. F. Wheeler, T. Wick，一种原始-对偶主动集方法及预测-校正网格自适应方法：采用相场方法计算裂纹扩展，《计算机在应用力学与工程中的方法》290 (2015) 466–495. doi:10.1016/j.cma.2015.03.009.[20] P. Kristensen，断裂相场方法——特别关注氢辅助断裂，博士论文，丹麦技术大学 (2022).[21] G. Evensen，《数据同化：集合卡尔曼滤波器》，施普林格，柏林，海德堡，2009. doi: 10.1007/978-3-642-03711-5.[22] C. E. Rasmussen, C. K. I. Williams，《机器学习中的高斯过程》，自适应计算与机器学习，麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州，2006.[23] D. Sanz-Alonso, A. M. Stuart, A. Taeb，《反问题与数据同化》（2023年2月）。arXiv: 1810.06191, doi:10.48550/arXiv.1810.06191.[24] G. Evensen，集合卡尔曼滤波器：理论公式与实际实现，《海洋动力学》53 (4) (2003) 343–367. doi:10.1007/s10236-003-0036-9.[25] N. Gordon, D. Salmond, A. Smith，一种用于非线性/非高斯贝叶斯状态估计的新方法，《IEE F辑：雷达与信号处理》140 (2) (1993) 107. doi:10.1049/ip-f-2.1993.0015.[26] M. C. Kennedy, A. O'Hagan，计算机模型的贝叶斯校准，《英国皇家统计学会杂志：B辑（统计方法）》63 (3) (2001) 425–464. doi:10.1111/1467-9868.00294.[27] J. P. Kaipio, E. Somersalo，《统计与计算反问题》，应用数学科学丛书第160卷，施普林格，纽约，纽约州，2005. doi:10.1007/b138659.[28] A. Doucet, S. Godsill, C. Andrieu，关于贝叶斯滤波的序贯蒙特卡洛采样方法，《统计与计算》10 (3) (2000) 197–208. doi:10.1023/a:1008935410038.[29] D. Giles, M. M. Graham, M. Giordano, T. Koskela, A. Beskos, S. Guillas，ParticleDA.jl v.1.0：实时数据同化软件平台，《地球科学模型开发》17 (6) (2024) 2427–2445. doi:10.5194/gmd-2023-38.[30] T. Bengtsson, P. Bickel, B. Li，再探维数灾难：粒子滤波器在超大规模系统中的退化，载于：《概率与统计：纪念 David A. Freedman 文集》，第2卷，数理统计学会，2008，第316–335页。doi:10.1214/193940307000000518.[31] E. Calvello, J. A. Carrillo, F. Hoffmann, P. Monmarch´e, A. M. Stuart, U. Vaes，近线性情形下集合卡尔曼滤波器的统计精度（2025年3月）。arXiv:2503.16154, doi:10.48550/ arXiv.2503.16154.[32] E. Calvello, P. Monmarch´e, A. M. Stuart, U. Vaes，近线性情形下集合卡尔曼滤波器的精度（2025年2月）。arXiv:2409.09800, doi:10.48550/arXiv.2409.09800.

[33] M. Kirkesæther Brun, T. Wick, I. Berre, J. M. Nordbotten, F. A. Radu，《采用稳定化参数的相场脆性断裂扩展迭代交错格式》，《计算机在应用力学与工程中的方法》361 (2020) 112752。doi:10.1016/j.cma.2019.112752。[34] M. Hofacker, C. Miehe，动态断裂的连续体相场建模：变分原理与交错有限元实现，《国际断裂力学杂志》178 (1-2) (2012) 113–129。doi:10.1007/s10704-012-9753-8。[35] C. Schillings, A. M. Stuart，集合卡尔曼滤波器在反问题中的分析，《SIAM 数值分析杂志》55 (3) (2017) 1264–1290。doi:10.1137/16M105959X。[36] T. M. Hamill, J. S. Whitaker，集合数据同化中未解析尺度所致误差的处理：不同方法的比较，《月度天气评论》133 (11) (2005) 3132– 3147。doi:10.1175/MWR3020.1。[37] P. L. Houtekamer, H. L. Mitchell，大气数据同化的序贯集合卡尔曼滤波器，《月度天气评论》129 (1) (2001) 123–137。[38] G. Gaspari, S. E. Cohn，二维和三维相关函数的构造，《皇家气象学会季刊》125 (554) (1999) 723–757。doi:10.1002/qj.49712555417。[39] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, V. B. Shah，Julia：一种数值计算的新方法，《SIAM 评论》59 (1) (2017) 65–98。doi:10.1137/141000671。[40] K. Carlsson, F. Ekre，Ferrite.jl 贡献者，Ferrite.jl，Zenodo（2026年1月）。doi:10.5281/ZENODO.13862652。