arXiv:2603.09766v1 [math.RA] 10 Mar 2026

格拉斯曼代数不变子代数的基础与分类

Mithat Konuralp Demir

导师：Zahra Nazemian

2025年8月

摘要

本文记录了作者在 2025 年 7 月和 8 月期间，在 DRP T¨urkiye 2025 提供的指导下，围绕格拉斯曼代数这一主题开展的研究。

格拉斯曼代数是数学中的一种基本结构，在数学和物理学的多个领域有着广泛应用。尤为重要的是，它构成了微分几何的基础，为微分形式提供了自然的容纳空间。本文首先介绍格拉斯曼代数的定义性质，并概述该代数关键机制——楔积的运作原理。随后，我们阐述如何从自由结合代数形式化地构造格拉斯曼代数，旨在说明这些性质如何在代数结构中得以体现。第 4 节探讨外积与行列式之间的内在关系。最后，我们研究不变子代数，这是本文的主要关注点之一，并提出一种关于不变子代数的新分类。

目录

1 引言 21.1 预备知识.3

2 外代数 **6**

2.1 外代数的定义.6 2.2 楔积.7 2.3 欧几里得几何中的解释.10

3 外代数的形式构 造 13

3.1 多项式环.13 3.2 外代数.14

4 行列式 **20**
4.1 泛性质.20 4.2 行列式的唯一性.21

5 不变子空间与子代数 25
5.1 自同构.25 5.2 不变子代数的分类.31

1. 引言

格拉斯曼代数是19世纪数学中的一项重大发现，由德国数学家兼文理中学教师赫尔曼·格拉斯曼提出。它也被称为外代数。格拉斯曼在其著名著作$Ausdehnungslehre$ 中首次提出这一代数，该书可追溯至1844年，其英文名为扩张理论。外代数这一名称源于该代数的几何解释：一个代数元素可通过与另一元素作（外）乘积而“扩展”成更高阶的元素，这一点将在第2节进一步阐明。在本引言中，我们将其称为格拉斯曼代数，并简要讨论这一代数的起源与历史。相比之下，在本文后续部分中，我们采用外代数这一名称，因为本文关注的是该代数的内在代数结构及其与几何的内在联系，这一名称似乎更为恰当。

本文介绍了作者对格拉斯曼代数的初步研究。第 2 节介绍该代数的核心工具——楔积，并举例说明其在欧几里得几何中的应用。第 3 节逐步从自由结合（非交换）代数构造该代数，并将其与多项式环的类似构造进行比较，旨在揭示该代数最重要的内在性质——反交换性（或反对称性）是如何在其中实现的。请注意，这些环是定义在 n个变量上的自由结合代数。第 4 节讨论外代数与行列式之间的基本联系。最后一节将更加严谨地探讨该代数的一些代数性质，主要是该代数的自同构，以及在这些自同构下保持不变的子代数。

格拉斯曼代数是数学中一个颇为奇特的例子：它在创立很久之后，才得到应有的认可与赞赏。赫尔曼·格拉斯曼为推广自己的思想付出了相当大的努力；尽管早在19世纪，人们就已知道他的代数在力学中的应用，但这并未引起数学界的广泛兴趣。John Browne 在其著作 [1], 中评论了这一奇特现象，并指出：“当时的数学尚未准备好接受格拉斯曼提出的新思想，而如今到了21世纪，似乎才刚刚开始意识到这些思想的潜力。”

19世纪末，格拉斯曼代数取得了重大进展。其中之一是皮亚诺以更现代、更公理化的方式重新阐述格拉斯曼的思想，这也是他闻名于世的原因之一。他是少数认识到格拉斯曼著作深度的人之一，而他的重新阐述使格拉斯曼的理论更广为人知，也更容易为其他数学家所理解。若非皮亚诺，这一理论或许还会在默默无闻中停留更久

。另一项重大进展是 Cartan 将外代数应用于微分几何。通过定义外微分 d，从而为微分形式代数赋予微积分结构，他揭示了格拉斯曼代数的诸多潜力。这一革命性举措使该代数成为几何学不可或缺的工具。

如今，这种代数的重要性显而易见地遍及众多与几何相关的科学领域，尤其是数学和物理学。因此，预计会有更多数学家投身于格拉斯曼代数的研究与进一步发展，而它也将在数学界获得更广泛的关注。

1.1. 预备知识

我们先介绍一些预备定义。就本文而言，我们只考虑定义在特征为零的代数闭域上的向量空间和代数。在这种情况下，设 k 为这样的域。

定义 1.1. 二元运算 $*$ 是非空集合 S 上的一个映射，定义为 $*: S\times S \to S$

定义 1.2. 设 S 为一个集合，$*: S \times S \to S$ 为一个二元运算。若 $a*(b*c) = (a*b)*c$, 则称该运算为结合的；若 $a*b = b*a$，则称其为交换的，对所有a、b、$c \in S$均成立。

定义 1.3. 群是一个元组 $(S,*)$，其中 S 是一个集合，$*$ 是 S上的二元乘法，并满足以下 *4* 条公理：

- 封闭性：$*$ 在 S上封闭
- 结合律：$*$ 是结合的
- 单位元：存在单位元 id
- 逆元：对每个元素 $a \in S$，都存在一个逆元 $b \in S$，使得 $ab = ba = id$

定义 1.4. 环是一个三元组 $(R,+,\cdot)$，其中 R 是一个配备了两种运算的集合，即加法 $+$ 和乘法 $\cdot$; 该集合在加法+下构成阿贝尔（交换）群，乘法 $\cdot$ 满足结合律，并对加法满足分配律。

定义 1.5。 设 R 是一个乘法为 $\cdot$ 的环。双边 理想 $I \subseteq R$ 是集合 $R,+)$ 的加法子群，并且满足：对于任意 $r \in R$ 和 $x \in I$、$r \cdot x \in I$ 和 $x \cdot r \in I$

定义 1.6. $\mathbb{k}$-向量空间 是三元组 $(V,\mathbb{k},+,\cdot)$，其中 V是一个集合，配备了相容的二元运算 $+$和 $\cdot$，分别称为向量加法、数乘。在加法 $+$下，它构成一个阿贝尔群；乘法 $\cdot$ 满足：对于所有 u、$v \in V$ 以及a、$b \in \mathbb{k}$，$a(u+v) = au+av$，$(a+b)u = au+bu$，$(ab)u = a(bu)$　$1u = u$。

定义 1.7. 设 V、W、U是同一域$\mathbb{k}$上的向量空间。映射 $\varphi\colon V\times W\to U$称为双线性的，如果对于所有 v、$v'\in V$、 w、$w'\in W$以及 $a\in\mathbb{k}$，均有:

$$(av)\cdot w = a(v\cdot w)$$
$$v\cdot(aw) = a(v\cdot w)$$
$$v\cdot(w+w') = v\cdot w + v\cdot w'$$
$$(v+v')\cdot w = v\cdot w + v'\cdot w$$

定义 1.8. $\mathbb{k}$-代数 A是一个在$\mathbb{k}$ 上的向量空间，配备了一个双线性乘法运算 $\cdot\colon A\times A\to A$，且在乘法下封闭。

Defi定义 1.9. 设 $\cdot\colon V\times V\to W$ 是一个双线性映射。我们称该运算为 :

- 交错的 （幂零的），若 $v\cdot v=0$
- 反交换的 （反对称的），若 $u\cdot v=-v\cdot u$

对所有 $u,v\in V$ 都成立

注 1.10. 对于 $char(\mathbb{k})\neq 2$，双线性映射 $\cdot$的交错性质与反交换性等价。具体而言，若 $\cdot$是交错的，则 $0=(v+w)(v+w)\ =v^2+vw+wv+w^2=\ vw+wv$，因此可推出反交换性。反过来，由反交换性推出交错性质则更容易看出。

另一方面，在 $char(\mathbb{k})\ =2$ 中，交错的仍然蕴含反交换性。然而，由于 $vw=-wv=wv$ *(*$-1=1$ *in* $char=2$*)*，反交换性等价于交换性，而且我们可以有 $v^2\neq 0$，但仍有 $vw=-wv$。

因此，尽管“交错的”和“反交换性”这两个术语常被交替使用，但它们只有在特定条件下才等同，必须谨慎使用。

定义 1.11. 当 G 是一个群时，若一个 $\mathbb{k}$-代数 A 可以分解为 $\mathbb{k}$-向量子空间的直和，则称其为G-分次，例如:

$$A=\bigoplus_{i\in G}A_i$$

其中， i 遍历 G，且

$$A_g\cdot A_h\subseteq A_{gh}\quad\forall g,h\in G$$

每当 A 是 $\mathbb{Z}$-分次的且满足 $A_i=0$，对每个 $i<0$，我们就称 A 为一个分次代数。

定义 1.12. 连通分次代数 是按 *1.11* 中的方式定义的分次代数，其中 $A_0=\mathbb{k}$

定义 1.13. 一般线性群 定义为向量空间 V 上的群，记作 $GL(V)$，它由所有 V 上的非奇异矩阵在矩阵乘法下构成。换言之，它是从 V 到自身的所有可逆线性变换在映射的复合下构成的群。

定义 1.14. 设 V 是域 $\mathbb{k}$ 上的向量空间。若映射 $\varphi:\ V^n\to\mathbb{k}$ 对第多重线性 个自变量（其中 $1\leq i\leq n$）满足以下条件，则称其为:

$$\varphi(\cdots,av+bw,\cdots)=a\ \varphi(\cdots,v,\cdots)+b\ \varphi(\cdots,w,\cdots)$$

对任意的 v、$w\in V$以及 a、$b\in\mathbb{k}$

定义 1.15. 集合 X 上、交换环R 上的自由结合代数 $R\langle X\rangle$ 是由 X中形式字的所有有限 R-线性组合构成的非交换、结合的、含单位元的 R-代数。乘法由连接（将符号相邻书写）定义，并按线性性延拓：它对加法满足分配律，且对数乘满足分配律。

注 1.16. 如果一个代数除了其类型所规定的关系（如结合律、单位元、交换性等）之外，没有其他关系，那么它就是自由的。在此语境中，“自由”这一形容词表示该代数除了其类型所规定的关系（如结合律、单位元、交换性等）之外，没有其他关系。例如，自由结合代数没有施加结合律和单位元以外的关系，而自由交换代数除了结合律、交换性和单位元之外，没有其他关系。实际上，自由这一概念取决于我们所考虑的范畴（代数类型）。（这就是为什么结合对象有自由性，而交换对象也有另一种不同的自由性。）这一概念源自范畴论，其中自由对象由泛性质刻画。范畴论的讨论超出了本文的范围；因此，我们不会深入探讨，而是满足于介绍其代数版本。感兴趣的读者或可在范畴论的语境下进一步研究这一主题。

注 1.17. 乘法是 R-双线性的：对于所有 a、$b \in R$、 f、g、$h \in R\langle X\rangle$，我们有

$$(af + bg)h = a(fh) + b(gh)$$
$$h(af + bg) = a(hf) + b(hg)$$

2. 外代数

外代数是一种强大的数学系统，它通过为向量和张量提供代数框架来描述物理世界。它最大的优势之一，是能够以代数方式编码对象之间的线性相关性。这种优势源于代数内置的乘积运算，即楔积。

记号 2.1。 楔积也称为外积。两种情况下均用楔积符号 $\wedge$表示

2.1. 外代数的定义

在给出楔积的定义和性质之前，我们先引入多向量的概念。外代数 $\bigwedge^*(V)$ 是定义在向量空间 V 上的代数，其中楔积被指定为乘法运算。

在接下来的讨论中，我们假设 V 是一个 n维向量空间，其固定有序基为 $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$。

记号 2.2。 全文中，我们用字母 A表示任意向量空间 $\bigwedge^*(V)$ 上的外代数。按照此约定， A_k 表示以下子空间:

$$A_k := \bigwedge^k V = \underbrace{V \wedge V \wedge \cdots \wedge V}_{k\ many}$$

我们定义由 A 的偶数阶元素子空间及奇数阶元素子空间构成的直和集合如下:

定义 2.3。

$$A_{even} = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{2i}$$

$$A_{odd} = \bigoplus_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} A_{2i+1}$$

我们知道，子空间的直和是一个子空间。因此， A_{even} 和 A_{odd} 是 A 的子空间。

外代数有两种自然的分次。其中一种是 $\mathbb{Z}_2$ 分次:

$$A = A_{even} \oplus A_{odd}$$

另一种分次是 $\mathbb{N}$ 分次:

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigwedge^i A_i$$

其中 $A_0 = \mathbf{k}$ $A_1 = V$。从 $\mathbb{N}$ 分次的角度来看，外代数是一种连通分次代数。

2.2. 楔积

当然，楔积是赋予该代数其函数的主要工具。下面列出它的定义和主要性质:

定义 2.4. 设 V 是域 $\mathbb{k}$ 上的向量空间。楔积 是一种结合的、双线性的交错运算

$$\wedge : A_k \times A_l \to A_{k+l}$$

注 2.5. 交错的 性质可转化为线性相关，这一点在包含高次元素的例子中会更加明显。

注 2.6. 回忆一下，根据 *1.10*，定义中的形容词交错的 意味着对 $char(\mathbb{k}) \neq 2$满足反交换性 ，因此

$$x \wedge y = -y \wedge x, \quad \forall x, y \in V$$

我们将看到， 反交换性对于在几何中编码对象的定向至关重要。

继续之前，我们需要对子空间作出完整描述 A_k.

定义 2.7. A_k 的任意元素称为元素，或称为次数为 k的多向量，即 k-向量或 k-元。 特别地，术语向量 专指 A_1 的 *1*-元。

设 x, y是 $A_1 = V$的元素。 $x \wedge y$ 不属于 V。换言之，它不是向量，而是多向量的一种。特别地，相对于楔积，它是一个含有两个因子的双向量 。同时，根据上文引入的命名约定，它是一个次数为 2 的元素。它属于子空间 A_2。

为了便于转写，我们引入多重指标记号。

记号 2.8. 一个有序多重指标 （或简称多重指标） I ，其次数为 k，或称为 k-多重指标，在 $\mathbb{N}^n$ 中是一个 n元组，其中各项均为非负整数，并且满足

$$I = (i_1, i_2, \cdots, i_n)$$
$$where\ i_j \in \mathbb{N}\ with\ ordering\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n.$$

当多重指标 I 的各项无序时，我们明确注明无序。

例 2.9. 设我们有一个向量集合 $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，以及一个 k 阶多重指标 $I =(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 在此情境下，由 I 索引的 S 中向量的楔积为

$$v_I = v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$$

定义 2.10. 设 $c \in \mathbb{k}$，并设 $x = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$，其中 $e_i \in B$。则 cx 称为次数为 k 的不可约元素。

命题 2.11. 设 $x = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$，其中 $v_i \in V$。如果某个向量（相差一个数乘）出现不止一次，那么 $x = 0$

证明。假设在乘积中，$\frac{1}{a}\ v_i = \frac{1}{b}\ v_j$ 对于某个 $a, b \in \mathbf{k}$ 和 $i \neq j$。利用反交换性重新排列，使 v_i 紧邻 v_j。然后利用结合律将这两个向量单独提取出来。根据交错性质，$v_i \wedge v_j = 0$。因此，$x = 0$。

□

命题2.12. 设 $B_k = \{e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid \forall\ k\text{-多重指标为 } I\}$。这里，可能的 k-多重指标集合 I 等价于所有次数为 k 的不可约元素，而 I 遍历来自 $\{1, \cdots, n\}$ 的所有严格递增的 k 元指标组。B_k 是外代数外幂 k^{th} 的一组基，该外幂为子空间 A_k。因此，

$$dim(A_k) = \binom{n}{k}$$

证明. 由定义 $A_k := \bigwedge^k V$ 可立即得证。对于任意元素 $v \in A_k$，v 都是次数为 k 的不可约元素的线性组合。根据 2.11，我们要求向量互不相同。将楔积对线性组合进行分配后，可得到 B_k 中元素的线性组合

□

该命题还确定了外代数 A 的维数：

命题2.13. $dim(A) = 2^n$，其中 $dim(V) = n$

证明。

$$dim(A) = dim\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} dim(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

□

例2.14。设 $dim(V) = 4$ 和 $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是 V 的一组基。那么，以下各组分别构成相应子空间的一组基：

- $B_1 = B$, *for* A_1 $(dim(A_1) = 4)$
- $B_2 = \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$, *for* A_2 $(dim(A_2) = 6)$
- $B_3 = \{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$, *for* A_3 $(dim(A_3) = 4)$
- $B_4 = \{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$, *for* A_4 $(dim(A_4) = 1)$

借助多重指标记号来描述高次元素，我们希望说明楔积的性质如何推广到任意次数的多向量。

命题2.15。设 v 是 V 中向量的楔积，满足

$$v = \cdots \wedge x \wedge \cdots \wedge y \wedge \cdots \qquad where\ x, y \in V$$

通过交换向量因子 x 与 y 的顺序，我们改变乘积 v 的符号，即

$$v' = -v = \cdots \wedge y \wedge \cdots \wedge x \wedge \cdots$$

证明。 由楔积的结合律，我们可以将任意两个相邻的向量因子配对。不失一般性，我们将 y 与其左侧元素归为一组并对它们进行反对易，从而使乘积的符号翻转一次。设 x 与 y 之间的因子个数为m。我们将 y 向左“移动” $m+1$ 次，直至 x的左侧相邻位置。现在我们将 x “移动”到 y 的初始位置，这将导致 m 次符号变化。总共发生了 $2m+1$ 次符号变化，这等于一次符号变化。 □

细心的读者会发现，这里讨论的是排列；事实上，交换两个向量因子的顺序等价于一个奇置换，也等价于 $2m+1$ 个对换。

定义 2.16. 一个置换 σ 总可以表示为 m个对换的复合。若这个数目 m 是奇（偶）整数，我们称 σ 为奇（偶）置换。

置换的符号定义为 $(sgn\ \sigma)$：$=(-1)^m=\begin{cases}-1 & \sigma \text{ 为奇数} \\ +1 & \sigma \text{ 为偶数}\end{cases}$

命题 2.17. 设 $x_I=v_{i_1}\wedge v_{i_2}\wedge\cdots\wedge v_{i_k}$，其中 $v_{i_j}\in V$。设 $\sigma\in S_k$。σ 在 x_I 上的作用为：

$$\sigma\cdot x_I=(sgn\ \sigma)\ x_{\sigma(I)}=(sgn\ \sigma)\ v_{i_{\sigma(1)}}\wedge v_{i_{\sigma(2)}}\wedge\cdots\wedge v_{i_{\sigma(k)}}$$

命题 2.18. 设 $x\in A_k$、$y\in A_l$ 分别是次数为任意次数 k 和 l的多向量。那么，

$$x\wedge y=(-1)^{|x||y|}y\wedge x$$

这里，$|x|=k$ 表示元素 x的次数。

证明。 例如，在我们的设定中，元素 x 是由次数为 k 的元素组成的齐次和（不含其他次数的元素）。y 也是如此。取 x 与 y 的乘积中的任意一项。该项由 $k+l$ 个向量因子组成。将 y 的第一个向量乘积移到 x 的左侧，相当于进行 k 次对换。我们对 y 的所有因子都执行此操作，总共执行 l 次。最终，我们令置换 σ 作用于乘积 $x\wedge y$。这个置换由 l 个单独的置换复合而成，这些置换将元素向左移至 x，且每个置换都由 k 次对换组合而成。总之，σ 是由 $k\cdot l$ 个置换复合而成的，从而得到 $(sgn\ \sigma)=(-1)^{k\cdot l}=(-1)^{|x||y|}$。 □

命题 2.19。 设 x、y 为任意的次数不可约元素。

$$x\wedge y=0$$

如果 x 和 y 的分解都包含同一个基向量 e_i 的一个副本。

证明。 证明与 2.11 的证明类似。在乘积 $x\wedge y$ 中，将 y 中的 e_i 副本移到 x 中另一个副本旁边。利用结合律将它们单独括出，根据交错性质，该乘积为 0。因此，乘积 $x\wedge y=0$ □

注记 2.20. 特别地，根据 *2.19*，显然不存在次数大于 n 的元素，而 n 是底层向量空间 V 的维数。此外，如果 $x\in A_k$ 且 $y\in A_l$，则 $x\wedge y=0$。这是组合学中抽屉原理的直接推论：在乘积 $x\wedge y$ 的分解中，必有一个向量至少出现两次。

2.3. 关于欧几里得几何的解释

自古以来直到不久之前，几何学中的一个基本问题就是如何将数字与几何联系起来。格拉斯曼希望发展一种描述线性（欧几里得）几何并可推广到更高维度的代数。Fearnley-Sanders 在 [4], 中描述了是什么促使格拉斯曼创立外代数理论；该理论以代数方式刻画几何。他指出，在 Ausdehnungslehre 中，格拉斯曼提到，他最初的动机源于思索下列公式的机制。该公式给出了三个共线点 A, B, C 所确定的长度之间的关系：

$$AB + BC = AC$$

描述：

$$A \text{——} B \text{——} C$$

然而，他意识到一个引人入胜的事实：如果我们决定采用 $BA = -AB$，该公式在三个共线点的任何构型中都成立。

现在，考虑点 B 与 C 的位置互换，从而使 C 位于其间：

$$A \text{——} C \text{——} B$$

根据我们的设定，我们有：

$$AB = AC + CB = AC - BC \implies AB + BC = AC$$

格拉斯曼花费了生命中相当大的一部分来研究这一现象如何在几何中体现，并最终得出结论：反对称性（反交换性）应被设定为旨在编码几何的代数的定义性质。

在格拉斯曼的体系中，任意维数的几何对象都可以用代数方式表示。由于我们去掉几何对象的坐标，也就是舍弃位置数据，它们便只作为方向而存在。向量 $x \in A_1 = V$ 在几何上可解释为表示空间中的一个独立方向（图 1）。考虑向量（1-元）x, y, $z \in A_1$。如果空间具有度量, x 的模可解释为其长度。双向量 $x \wedge y$是 A_2的基的线性组合，表示空间中的一个平面方向（图 2）。

定义 2.21. 余维数 是 k-向量 $x \in A_k$ 的余维数，其中 $dim(V) = n$ 等于 $n - k$

从直观上看， $\mathbb{R}^3$ 中的 2-向量可以视为与其垂直的正规方向，这也是在 $\mathbb{R}^3$中确定平面的标准方法。

在（图 2）中，平面维数被等同于与其垂直的一个向量，但请注意，我们之所以能够用一个向量来表示它，仅仅是因为我们处于 $\mathbb{R}^3$ 中，并且二维平面的余维数 为 1，而一个垂直空间 由 1-向量组成。在此我们并不过多讨论外代数中的补以及余维数这一概念。

在这种情况下，其模被解释为面积。三向量 $x \wedge y \wedge z$ 是 A_3 的基的一个线性组合，表示空间中的一个三维方向（图 2）（在 $\mathbb{R}^3$ ($dim(A_3) = 1$) 中，所有三向量都表示同一方向），而三向量的模表示体积。

类似地，我们建立了任意维数下体积的概念。下面给出一个具体示例，演示如何计算楔积。

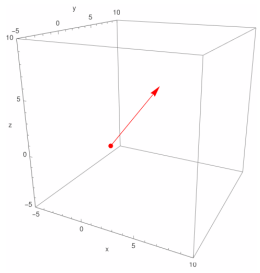


图 1： $\mathbb{R}^3$中的一个方向

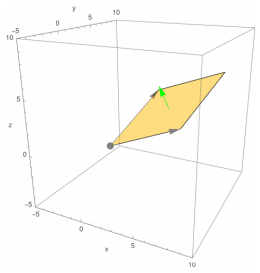


图 2： $\mathbb{R}^3$中的一个平面方向

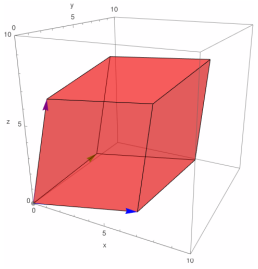


图 3： $\mathbb{R}^3$中的一个三向量方向

例 2.22. 设我们的环境为以基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为基的三维欧几里得（$\mathbb{R}^3$）空间。令

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3$$
$$y = (y_1, y_2, y_3) = y_1\, e_1 + y_2\, e_2 + y_3\, e_3$$

其中， x_i、 y_i 为标量。

取 x 和 y 的外积，得到双向量 $x \wedge y$，并将其表示为 A_2的基双向量的线性组合：

$$\begin{aligned} x \wedge y = &(x_1\, y_1)\, e_1 \wedge e_1 + (x_1\, y_2)\, e_1 \wedge e_2 + (x_1\, y_3)\, e_1 \wedge e_3 + \\ &(x_2\, y_1)\, e_2 \wedge e_1 + (x_2\, y_2)\, e_2 \wedge e_2 + (x_2\, y_3)\, e_2 \wedge e_3 + \\ &(x_3\, y_1)\, e_3 \wedge e_1 + (x_3\, y_2)\, e_3 \wedge e_2 + (x_3\, y_3)\, e_3 \wedge e_3 \end{aligned}$$

由同一个基向量 e_i 的两个副本相乘得到的双向量为0 ，因此会相互抵消。此外，由于反交换性， $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ ，所以共享相同向量因子的双向量本质上相同，因此还可以进一步化简。我们将乘积改写得更简洁；

$$x \wedge y = (x_1\, y_2 - x_2\, y_1)\, e_1 \wedge e_2 + (x_1\, y_3 - x_3\, y_1)\, e_1 \wedge e_3 + (x_2\, y_3 - x_3\, y_2)\, e_2 \wedge e_3$$

可以看出， $x \wedge y$ 等于 $\mathbb{R}^3$中的常规叉积： x 与 y 的叉积。交换双向量，例如将 $e_1 \wedge e_2$ 与不明显的基向量 e_3 交换，有助于理解这一结果。因为在 $\mathbb{R}^3$中，平面方向与垂直方向相同，也就是

互补维度方向，在这种情况下是一个 $3-2=1$ 维垂直向量。

叉积仅对 $\mathbb{R}^3$ 定义，因为在乘积中，我们需要将每个线性无关项对应到一个方向，也就是一个向量。为了满足这一性质，我们要求余维数$=1$ ，而这仅对 $\mathbb{R}^3$成立

例 2.23。 让我们对三向量 $x \wedge y \wedge z$的 $\mathbb{R}^3$ 进行类似的计算，其中向量为

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3 \\ y &= (y_1, y_2, y_3) = y_1\, e_1 + y_2\, e_2 + y_3\, e_3 \\ z &= (y_1, y_2, y_3) = z_1\, e_1 + z_2\, e_2 + z_3\, e_3 \end{aligned}$$

对乘积进行一系列繁琐的化简后，我们得到

$$x \wedge y \wedge z = (x_1\, y_2\, z_3 - x_1\, y_3\, z_2 - x_2\, y_1\, z_3 + x_2\, y_3\, z_1 + x_3\, y_1\, z_2 - x_3\, y_2\, yz_1)\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

这里必须指出一个非常重要的观察：系数是向量 x、 y、 z 构成的行列式。这个行列式显然等于度量空间中由这三个向量张成的平行六面体的体积。这并非巧合，作为几何中核心代数对象的行列式与外代数之间存在直接关系。我们将把对这一关系的探讨推迟到第 4 节。

3. 外代数的形式构造

本节着重介绍如何从自由结合代数构造外代数，即张量代数。张量代数可以看作张量积的非交换推广。这一构造揭示了张量代数——这一物理学中的核心结构——与外代数之间的内在联系，也让我们得以窥见外代数在精确建模物理现象和几何方面的强大能力。为了阐明这一构造，我们先将它与一个类似但更熟悉的例子进行比较：从由一组变量 X生成的自由结合代数构造变量 n 的多项式环。

3.1. 多项式环

如前所述，我们将首先介绍以 n 个变量构造多项式环的方法，以此作为熟悉的基础，进而考察张量代数的构造。

定义 3.1. 设 R 是含幺交换环， $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 是变量的集合。以 R 为系数、变量为 n 的多项式环 记作 $R[X] = R[x_1, x_2, ..., x_n]$

注 3.2. 众所周知，多项式环 $R[x_1, ..., x_n]$ 在通常的乘法和标量加法下是一个交换的 R-代数。

设 A 是一个以 n 个变量构成的多项式环。元素 $p \in A$ 是单项式 $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n}$ 的 R-线性组合，其中 $a_i \in \mathbb{N}_0$。注意， $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。因此，每个元素都具有如下形式:

$$p = \sum_{I=(a_1,...,a_2)} c_I \; x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m} \quad \text{with} \quad c_I \in R \quad \text{I are multi-indices}$$

Pro位置 3.3. 以下是多项式环的定义性质 *:*

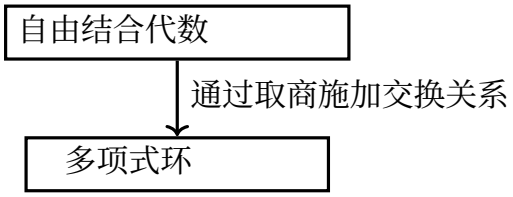
- 交换性：乘法是交换的，使得 $x_i x_j = x_j x_i$
- 一个自由交换的 代数：（不要与自由结合代数混淆）这些变量是代数独立的，这意味着除了由交换性和结合律所强制的那些关系之外，它们之间不存在非平凡的多项式关系。
- 连通分次：该代数按总次数自然分次且是连通的，即

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i, \quad A_d = span \; of \; degree \; d \; monomials.$$

证明。 交换性由 $R[X]$的定义得出。代数无关性本质上是多项式环的定义性质。根据单项式次数的定义，可以轻易验证其具有连通分次结构。这些都是多项式环的标准性质，可直接由其构造得出。 □

除了反交换性之外——我们想要的是反交换性，而非交换性——这些性质涵盖了我们希望外代数具备的所有性质。我们将看到，只需稍作调整，两种构造也都具有这种相似性。让我们回到对多项式环构造的考察。首先，该代数建立在由变量集合 X 在 R 上生成的自由结合代数之上。

我们构造多项式环的方法如下图所示：



考虑集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 上以 n 个变量为基础的自由结合代数。请注意，这是一个原始概念，除以下关系外不包含其他关系：

- 结合律，它来自将相邻符号组合在一起
- R-线性性，这指的是代数中的每个元素都是形式字的有限线性组合，其中系数为来自 R 的标量。

例如，它不是交换的，因此即使 $x_1 = x_2$ 在取值上也如此。理解这种结构的关键在于将每个符号字视为不同的元素，而不论这些符号的取值如何。

要从这种结构中得到交换多项式环，我们必须在这个粗略的代数结构上施加交换性关系，从而迫使变量交换。具体做法是用交换子 $\langle x_i x_j - x_j x_i \rangle$生成的双边理想对自由代数取商：

$$R[x_1, \ldots, x_n] := R\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \big/ \langle x_i x_j - x_j x_i \rangle$$

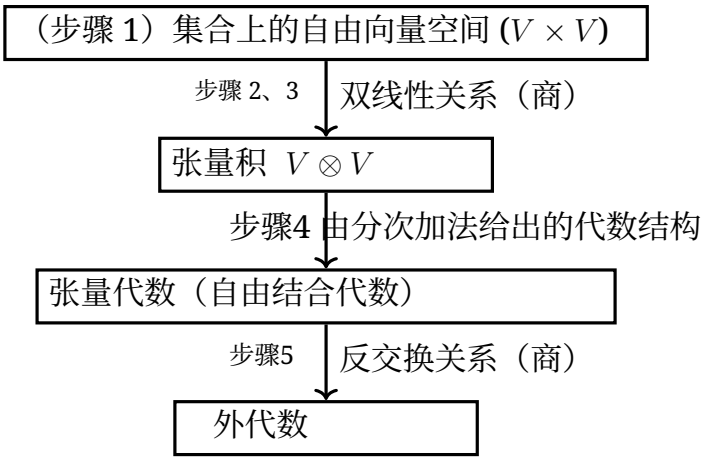
这样一来，我们就在多项式环的定义中引入了 $x_i x_j - x_j x_i = 0 \iff x_i x_j = x_j x_i$ （陪集相等），从而有效地保证了交换性关系成立。

例 3.4. 下面举例说明，以这种方式施加的交换性如何延伸到次数更高的单项式，从而在整个代数中普遍成立：

$$x_1^2 x_3 = x_1 x_1 x_3 = x_1(x_1 x_3) \underset{\text{commutativity}}{=} x_1(x_3 x_1) = (x_1 x_3)x_1 \underset{\text{commutativity}}{=} (x_3 x_1)x_1 = x_3 x_1 x_1 = x_3 x_1^2$$

3.2. 外代数

与多项式环构造不同，我们并不从同一个自由结合代数出发。相反，我们从一个更原始的概念——集合上的自由向量空间——开始，并通过在其上施加双线性关系来构造张量积。这样做的目的是揭示张量积的双线性本质，这一特征也将出现在楔积（外积）中。然后，我们将这一构造推广到张量代数，并最终施加反交换性以得到外代数。



我们首先定义集合上的自由向量空间这一概念。

定义3.5. 集合上的自由向量空间（定义*1*）设 *S* 为一个集合。集合 *S* 上的自由向量空间 *F(S)* 是一个向量空间，它允许所有形式字 $s \in S$ 的任意线性组合 $\sum a_i s$ ，如同先前自由非交换代数的情形。用集合记号表示为，

$$F(S) := \left\{ \sum_{s \in S} c_s s \middle| s \in S, c_s \in \Bbbk \right\}$$

定义3.6. 设 S 为任意集合。映射 $\varphi : S \to \Bbbk$ 的支撑 定义为

$$supp(\varphi) := \{s \in S \mid \varphi(s) \neq 0\}$$

即， φ的支撑是 S 中 φ 不为零的那些点的集合。

定义 3.7. 集合上的自由向量空间（定义 *2*）设 S 为任意集合。子集$\mathcal{F}(S)$属于 $Fun(S, \Bbbk)$，其定义如下：

$$\mathcal{F}(S) = \{\varphi \in Fun(S, \Bbbk) \mid \varphi(s) \neq 0 \text{ for finitely many } s \in S\}$$

构成 $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ 的映射也称为从 S 到$\Bbbk$ 的有限支撑线性映射。

我们知道， $Fun(S, \Bbbk)$是一个向量空间。按上述方式定义的$\mathcal{F}(\mathcal{S})$是$Fun(S, \Bbbk)$的一个子空间，称为集合 S上的自由向量空间。

注 3.8. 集合 S上的自由向量空间的两种给定定义之间的等价性是一个微妙的问题。要阐明这一点，必须考虑这样的映射：它将 S 中形式字的线性组合$\sum_{s \in S} c_s s$ 映射为函数 φ：$S \to F$，使得 $\varphi(s) = c_s$ 。这样，显然一个 $f \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ 编码了一个线性组合：它将 S 中的一个形式字（元素）映射为该线性组合中的相应系数。

张量积

让我们从构造张量积的第一步开始。

步骤 1 设 V, W 是向量空间。这些空间的笛卡尔积上的自由向量空间是 $F(V \times W)$。这样，我们就为该空间中的元素引入了加法和数乘。需要注意的一点是，$F(V \times W)$ 是无限维的，因为在自由向量空间（不是自由代数！）中，并不存在“彼此为数乘关系”这一关系；这是因为该空间除了 k-线性之外，不受任何关系约束。因此，例如，$2(v, w) \neq (2v, 2w)$，而 (v, w) 和 $(2v, 2w)$ 是 $F(V \times W)$ 中不同的基向量。因此，我们有无穷多个线性无关元素，每个元素都构成一个基元素，所以该空间是无限维的。

步骤 2 我们确定要施加的关系。就本例而言，我们希望使向量加法和数乘成为双线性的，这需要下面给出的4个关系：

- $(v + v', w) - (v, w) - (v', w)$
- $(v, w + w') - (v, w) - (v, w')$
- $(cv, w) - c(v, w)$
- $(v, cw) - c(v, w)$

我们将在下一步看到这些如何使 $F(V \times W)$ 具有双线性。

注 3.9. 值得强调的是，自由向量空间与自由结合代数之间存在区别。与自由向量空间不同，在自由结合代数中，我们有

$$(x_i + x_j)x_k = x_i x_k + x_j x_k$$

换言之，由于结构中额外包含了乘法，加法和数乘的双线性已经成立。该代数将这些关系作为恒等式满足，这些恒等式源自乘法线性性的扩展。

步骤 3 首先，我们通过取由全部 4 个关系生成的集合，构造按照双线性而相等的元素的等价类：

$$\begin{aligned} R := \langle\, & (v + v', w) - (v, w) - (v', w), \\ & (v, w + w') - (v, w) - (v, w'), \\ & (cv, w) - c(v, w), \\ & (v, cw) - c(v, w) \,\rangle \quad \text{where} \quad v, v' \in V, w, w' \in W, c \in \Bbbk \end{aligned}$$

接下来，通过取 $F(V \times W)/R$ 关于由上述 4 个表达式生成的子空间 R 的商来施加上一步的关系。由此得到的商称为向量空间的张量积：

$$V \otimes W := F(V \times W)/R$$

定义 3.10. 我们将元素 $v \in V$、$w \in W$ 的张量积 $v \otimes w := [(v, w)]$ 定义为 $F(V \times W)/R$ 中 (v, w) 的等价类 $[(v, w)]$

命题 3.11. 自然映射

$$\begin{gathered} \varphi : V \times W \longrightarrow V \otimes W \\ (v, w) \mapsto v \otimes w \end{gathered}$$

是双线性的。

证明。 我们详细说明结论对其中一个关系成立的过程，其余三个关系也可用同样的方法证明:

$$\begin{gathered} (v + v', w) - (v, w) - (v', w) \in R \\ \text{thus } \ (v + v', w) - (v, w) - (v', w) + R = 0 + R \ \text{ in } \ V \otimes W \\ \text{it follows that } (v + v', w) + R = (v, w) + (v', w) + R \end{gathered}$$

我们知道

$$\begin{gathered} (v + v') \otimes w = [(v + v', w)] = (v + v', w) + R \\ \text{and} \\ v \otimes w + v' \otimes w = [(v, w)] + [(v', w)] = (v, w) + (v', w) + R \end{gathered}$$

于是,

$$\varphi(v + v', w) = (v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w = \varphi(v, w) + \varphi(v', w)$$

其余情形可用类似的论证得出:

- $v \otimes (w, w') = v \otimes w + v \otimes w'$
- $(cv) \otimes w = c(v \otimes w)$
- $v \otimes (cw) = c(v \otimes w)$

因此，我们证明了双线性被给出的四个关系继承。 □

过渡到外代数

步骤 4 现在我们已经可以使用张量积,

$$\begin{gathered} \otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes W \\ (v, w) \mapsto v \otimes w \end{gathered}$$

这是自由向量空间结构上的一种双线性运算。利用向量空间的张量积，我们随后构造张量代数，它充当自由结合代数 $k\langle x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle$的类似物。这两个对象都是自由结合代数的例子。之后，与多项式环的情形不同，我们将在该代数上施加一种“反交换性”关系，最终得到我们所要的外代数。

定义 3.12。 我们将 V 上的张量代数 $T(V)$ 定义为以下直和：

$$T(V) = (k) \oplus (V) \oplus (V \otimes V) + \cdots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

如前所述，张量代数是 V 上的自由结合代数，因此目前还没有施加交换关系或反交换关系。现在，我们要在 $T(V)$ 中引入反交换性。有两种实现方式。我们将分别说明每种方法及其优缺点。

方法 1：使用关系 $v \otimes v = 0$
这种方法要求我们对 $T(V)$ 关于 $\langle v \otimes v \rangle$ 取商，其中 $\langle v \otimes v \rangle$ 是由 $v \otimes v$ 生成的子空间。

记号 3.13. $\langle v \otimes v \rangle = \langle v \otimes v \mid v \in V \rangle$。

Let $E(V) = T(V)/\langle v \otimes v \rangle$.

记号 3.14. 从现在起，用楔积符号 $\wedge$ 表示乘法，而不再使用 $\otimes$。

反 在这个设定下，反交换性是如何体现出来的？这是一个稍微有些微妙的问题。

命题 3.15. $E(V)$ 上的乘法是反交换的。

证明。

$$\begin{aligned} 0 =& (v+w) \wedge (v+w) \\ =& (v \wedge v) + (v \wedge w) + (w \wedge v) + (w \wedge w) && \text{(distributivity)} \\ =& 0 + (v \wedge w) + (w \wedge v) + 0 && \text{(in } E(V)\text{)} \\ =& (v \wedge w) + (w \wedge v) \end{aligned}$$

因此我们得到

$$(v \wedge w) = -(w \wedge v)$$

□

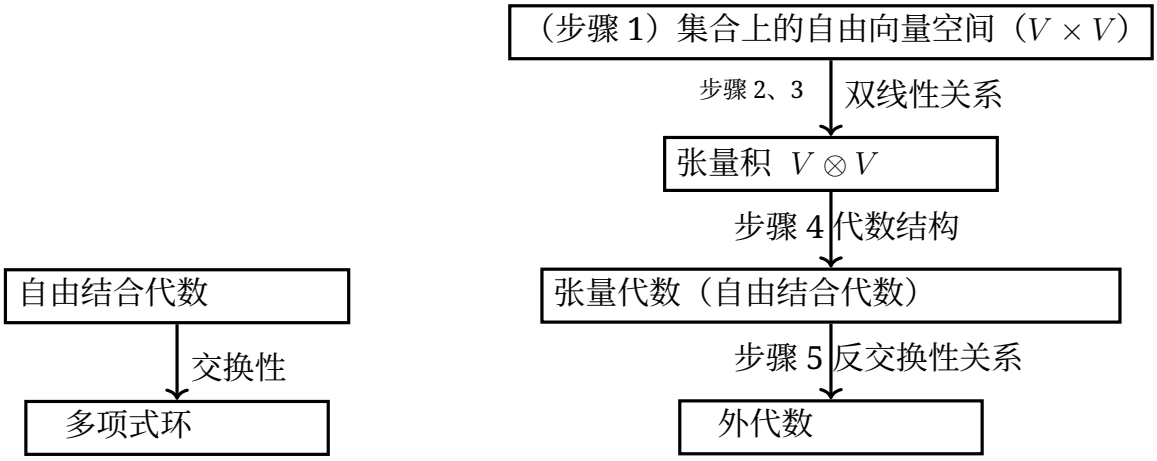
看来我们已经成功地使乘法运算具有反交换性。不过有一个注意事项：如果我们讨论的是特征为 2 的域，该怎么办？由于在一个特征为 2 的域中，对于元素 $a \in F$，我们有 $(-1)a = -a = a$。因此，最终的等式变为：

$$(v \wedge w) = -(w \wedge v) = (w \wedge v)$$

这意味着我们得到的不是反交换性，而是交换性！这是因为通过取商 $\langle v \otimes v \rangle$，我们并没有直接构造反交换元的等价类，而是隐式地施加了反交换性，因此我们对这些条件的控制有限。

方法 2：使用关系 $v \otimes w + w \otimes v = 0$
这一次，当我们取商 $E(V) = T(V)/\langle v \otimes v \rangle$ 时，便直接构造了反交换元的等价类，从而得到 $v \wedge w = -w \wedge v$。鼓励读者检验，使用这种方法构造外代数 $E(V)$，可以在任意向量空间 V 上得到所需的多重线性反交换代数，包括定义在特征为 2 的域上的向量空间。

这里概述了由 n个变量构成的多项式环与外代数的构造，以供比较。



4. 行列式

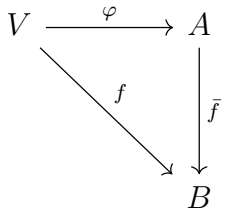
4.1. 泛性质

本节中的字母 A并不特指向量空间V上的外代数，而是表示由上下文确定的任何适当的代数。相反，我们将外代数记为 $E(V)$。前一节详细给出的构造不仅仅是一个商代数，而且是满足反交换性的最佳（“最自由”）代数。

注 4.1. 泛性的概念最初源自范畴论。与注 *1.16* 一样，我们不会援引原本的范畴论定义，而只采用它的代数版本。

泛性质通过其他同类对象如何借助保持结构的映射（同态）从该对象唯一地得到，来定义一个对象。

定义 4.2. 泛性质
设 V 是一个向量空间，且 $\varphi\colon V \to A$ 是映入某个代数 A 的典范映射，通常为商 $A = T(V)/I$，其中 I 是某个适当的理想。设 $f\colon V \to B$. 是映入另一个代数的线性映射 B，并满足某些相容条件（例如反交换性）。我们称 A 满足泛性质，如果存在唯一的同态 $\bar{f}\colon A \to B$，使得 $f = \bar{f} \circ \varphi$。换言之，存在唯一的映射 $\bar{f}$ 扩张 f，使得下图交换：



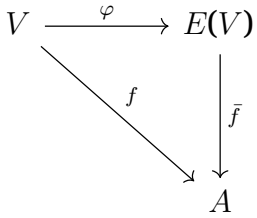
特别地，外代数满足泛性质。含幺代数是具有乘法单位元的代数。设 A 是任意一个含幺代数，f 是一个线性映射，并满足以下条件：

- $f(v)f(v) = 0 \quad \forall v \in V$
- $f(v)f(w) + f(w)f(v) = 0 \quad \forall v, w \in V$

不加证明，我们给出这一事实：

命题 4.3. 存在唯一的代数同态 $\bar{f}\colon E(V) \longrightarrow A$，它延拓了 f，且满足 $f = \bar{f} \circ \varphi$，其中 $\varphi\colon V \longrightarrow E(V)$ 是模 I 的典范映射 $v \mapsto v$，其中 $I = \langle x_i x_j + x_j x_i \rangle$，即编码反交换关系的理想。

因此，下图可交换：



特别地， $E(V)$ 在由一个含幺 k-代数 A 和一个线性映射 $f\colon V \to A$ 构成的所有满足对所有 $v \in V$ 都有 $f(v)^2 = 0$ 的偶对 (A, f) 中是始对象；这意味着 $E(V)$ 是满足相同生成元的乘积为零这一条件的最自由的 代数（因此，当 2 可逆时（$char(\mathbf{k}) \neq 2$），生成元反交换）。

换言之，任意从 V 到代数 A 的交错线性映射，都能唯一延拓为从外代数 $E(V)$到该代数的代数同态。这正是外代数在强制实施反对称性方面具有“普适性”的原因。

4.2. 行列式的唯一性

在下面的讨论中，设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵，其中 $n \in \mathbb{N}$，而 V是域 $\mathbf{k}$ 上的 n维向量空间。$a_{i,\ j}$ 表示 A 第 i 行、第 j列的元素。

定义 4.4。 ***ij* -** 子式 M_{ij} 是通过从 A中删除第i 行和第 j 列而得到的$(n-1) \times (n-1)$ 矩阵。余子式 C_{ij} 定义为$(-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$，其中 $|M_{ij}|$ 是子式 M_{ij}的行列式。

定义 4.5。 余子式展开，或拉普拉斯展开，是在一个$n \times n$ 矩阵上针对选定行或列定义的加法。不妨设我们给出 i^th 行的 $n \times n$ 矩阵 A的余子式展开定义。

$$S_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, Cij$$

显然，按所有行或所有列进行余子式展开，所得结果的值相同。此外，我们知道，对 A 的各项排列求和的莱布尼茨公式如下：

$$\sum_{\sigma \in S_n} (sgn\,\sigma) \prod_{i=0}^{n} a_{i,\sigma(j)}$$

等于矩阵 A, $det(A)$ 的行列式。

定理 4.6. 莱布尼茨公式与余子式展开等价：

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\,\sigma) \prod_{i=0}^{n} a_{i,\sigma(j)} = S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, Cij$$

证明。 我们通过对 n 使用归纳法来证明这两个公式相等。此外，不失一般性，我们考虑 1st 行的余子式展开 S_1。

基例： $n = 1$ 我们考虑 $A = [a_{11}]$ 恒等排列的符号为 $+1$ ，此时余子式定义为 1。因此基例成立。

归纳假设：假设对于所有 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵，莱布尼茨公式等于余子式展开，即行列式。

设 $\sigma \in S_n$ 与 $\bar{\sigma}$ 为 σ 在 $\{2,...,n\}$ 上的限制。 $\sigma(1)$ 不可能属于 $\bar{\sigma}$ 的像，并且由于像中有 $n-1$ 个元素，而可能的位置有 n 个，根据鸽巢原理我们只有一种选择，记作 $\sigma(1) := j_0$ 于是对于这一特定扩张 σ，我们有：

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = a_{1j_0} \prod_{i=2}^{n} a_{i\bar{\sigma}(i)}$$

将 j_0 移到第一个位置，使得 $\sigma(1) = j_0$ 相对于 $\bar{\sigma}$（即其余指标的置换）对符号的贡献为 $(-1)^{1+j_0}$ 。因此， σ 与 $\bar{\sigma}$ 的符号关系如下：

$$(sgn\ \sigma) = (-1)^{1+j_0}(sgn\ \bar{\sigma})$$

根据归纳假设，子式 M_{1j_0} 的行列式——它是一个 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵——为：

$$det(M_{1j_0}) = \sum_{\bar{\sigma}\in S_{n-1}} (sgn\ \bar{\sigma}) \prod_{i=2}^{n} a_{i\bar{\sigma}(i)}$$

对每个满足 $\sigma(1) = j_0$ 的 σ：

$$(sgn\ \sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = (-1)^{1+j_0}(sgn\ \bar{\sigma})a_{1j_0}\prod_{i=2}^{n} a_{i\bar{\sigma}(i)} = a_{1j_0}(-1)^{1+j_0}det(M_{1j_0})$$

现在我们按 $\sigma(1) = j$ （对 $j \in \{1,...,n\}$）对 S_n 进行划分。然后对所有 σ 求和：

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\ \sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \sum_{\bar{\sigma}\in S_{n-1}} \prod_{i=2}^{n} a_{i\bar{\sigma}(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\, det(A_{1j}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, C_{1j} \end{aligned}$$

□

行列式具有以下几项定义性质。

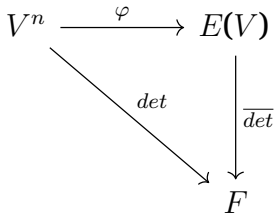
推论4.7。 行列式 $det:\ V^n \to \mathbb{k}$ 是一个关于各行多重线性的交错函数，它将 V 的标准基映射到1。

证明。 单位矩阵的行列式等于 1 这一事实可由定义直接得出。其余性质可轻易由莱布尼茨公式推出。 □

我们希望证明，行列式是从 V^n 到 k、满足 4.7 中所给性质的唯一函数。回想一下，根据外代数的泛性质，任何交错线性 $f: V \to A$ 都分解为两步，并经过 V的外代数$E(V)$，第一步是到 $E(V)$的典范映射，第二步是从它出发的唯一同态。

定理 4.8. 行列式是满足 *4.7* 中所给性质的唯一函数

证明。 考虑下面的图示:



我们改变了设定，以便适当地涵盖任意一个记作 det 的交错行列式函数。现在我们将向量空间 V^n 和域 k 视为代数。典范映射明确定义为

$$\varphi : V^n \to \bigwedge^n V$$
$$(v_1, \cdots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$$

¡也就是说， φ 是到 $\bigwedge^n V \subseteq E(V)$ 中的一个单射，并且对每个自变量都是线性的 .
我们指出，存在唯一的同态（线性映射） $det: \bigwedge^n V \subseteq E(V) \overline{\to} \mathbf{k}$ 与 det 对应，使得

$$f(v_1, \cdots, v_n) = \bar{f}(v_1, \cdots, v_n)$$

这诱导出一个同构 θ: $Hom(V^n, \mathbf{k}) \to Hom(\bigwedge^n V, \mathbf{k})$。然而， $\bigwedge^n V$是一维的。线性变换由其对基元素的映射唯一确定。在这种情况下，任何非零向量都构成一个基。我们选取仅由元素 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$组成的典范基，以及单位矩阵 $I \in M_{n\times n}$。 $det(I) = 1$，我们有等式$det(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$，这刻画了 det。—因此

$$\left| Hom(\bigwedge^n V, \Bbbk) \right| = 1$$

因此, $\overline{det}$ 在相差一个标量的意义下是唯一的，故相应的 det 是唯一的行列式函数。

□

2.23 中的计算暗示了楔积与行列式之间的一种内在关系。这种关系以及行列式的唯一性体现在下面的单位元中:

推论 4.9。

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = det(A)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

其中， A 是矩阵 $[v_1 \cdots v_n]$，每个 v_i 占据一列。

证明。 我们将 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ 视为 $\bigwedge^n V$ 的标准基。由于 $\bigwedge^n V$ 是一维的，任意 n-向量 $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \bigwedge^n V$ 都可唯一地写成某个 $c \in \mathbf{k}$ 的数乘 $v = c \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$。给定的单位元诱导出一个映射

$$\begin{aligned} \alpha : \bigwedge^n V &\to \mathbb{k} \\ v &\mapsto c \end{aligned}$$

α 显然是多重线性且交错的，并且我们有 $\alpha(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$。根据 4.8， α 就是行列式。 □

注 4.10。 这意味着行列式是楔积的自然结果，而楔积是行列式的底层结构。

体积

假设向量空间 V 上有一个度量，因此体积的概念也就有了定义。体积是通过将 n 个线性无关向量相乘得到的，这又促使我们考虑 $\bigwedge^n V$。本文不关注空间上度量的严格构造，也不打算仔细定义体积，因此我们希望直观地说明体积与行列式之间的关系。为了便于理解，可以考虑我们对欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 的说明。设有三个向量，分别为 v_1、$\cdots$、$v_n \in V$。我们可以讨论由这些向量张成的平行多面体，并将其有向体积记为 $vol(v_1, \cdots, v_n)$。假设我们将其中一个向量 v_i 换成 $v_i' = c\, v_1 + x$，其中 $c \in$、$\mathbf{k}$ 和 $x \in V$ 的选取任意。直观而言，我们有 $vol(v_1, \cdots, v_i', \cdots v_n) = c \cdot vol(v_1, \cdots, v_i, \cdots v_n) + vol(v_1, \cdots, x, \cdots v_n)$。这应当体现出体积的多重线性。回想线性代数，体积是有向的；交换任意两个向量因子的次序时，其定向会改变，这与楔积中的符号变化有关。最后，标准基的乘积的体积，即 $vol(e_1, \cdots, e_n) = 1$。因此，我们将体积视为具有这些性质的唯一函数，即行列式。我们用符号 $vol = det$ 总结这一关系。

5. 不变子空间与子代数

文献 [5] 证明了，k-代数 R（不一定是交换的）是 k 上的多项式环，当且仅当它是有限生成的、连通分次的，且没有非平凡不变子空间。回忆一下， R 的 k-子空间 W 称为不变的（或 Aut-稳定的），如果对于每个自同构 $f \in \mathrm{Aut}_{\Bbbk}(R)$，都有 $f(W) \subseteq W$。回忆一下，$\mathrm{Aut}_{\Bbbk}(R)$ 中的元素是环同构，同时也是 k-线性的。子空间 0、k 和 R 称为平凡子空间。尽管存在保持分次的自同构，使得 $f(A_i) \subseteq A_i$，但此处我们考虑所有自同构，无论它们是否保持分次。首先，我们总结文献 [3] 中给出的外代数自同构分类。

5.1. 自同构

当 n 个变量生成的格拉斯曼代数中， n 为有限时，自同构 ˇ 已在 D. Z. Djokovi´c 的开创性著作中得到全面理解和研究。

我们首先给出外代数 A 的自同构群的抽象描述。为此，我们需要引入一些代数概念。在下面的讨论中，我们考虑 $dim\,(V) = n$ 有限且 $char\,(\mathbf{k}) \neq 2$ 的情形。令 Γ 为 A 的自同构群。

定义 5.1. 如果一个代数只有一个极大理想，则称其为局部代数。

命题 5.2. *A* 是一个唯一极大理想为 $M = \sum_{i=1}^{n} A_i$ 的局部代数

证明。 由第一同构定理可知，显然有 $A/M \cong A_0 =$k。众所周知，由于 A/M 是一个域，不存在满足 $M \subset J \subset R$ 的 A 的理想 J，因此 M 是极大理想。这是唯一的极大理想，因为在任何环中，每个极大理想都等于该环中非可逆元组成的集合。等价地，每个极大理想都包含于可逆元集合的补中，而在此情形下，该补为 k。因此，非可逆元组成的集合恰为M，每个极大理想都必须是 M。所以它是 A 的唯一极大理想。 □

记号 5.3. 我们定义理想

$$M_k := \sum_{i=k}^{n} A_i$$

注意， $M^0 = A$。

这个记号与代数结构一致，因为乘法保持分次。事实上，对所有 i，都有 $A_i \wedge A_i \subseteq A_{2i}$。因此，来自 M^k 的元素的乘积仍属于 $M^{2k} \subseteq M^k$，所以 M^k 构成一个乘法滤过，这也说明了该记号的合理性。（滤过是一个与乘法相容的嵌套子结构序列。）

理想 M^i 构成一条降链:

$$A = M^0 \supset M^1 \supset \cdots M^n \supset 0$$

定义 5.4. 我们称自同构 σ 稳定 一条链 $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \cdots$，如果 $\sigma(S_i) = S_i$ 对 $0 \leq i \leq n$。

由此可得 t 包含关系在链稳定自同构下仍然成立 .

命题 5.5。 任意自同构 $\sigma \in \Gamma$ 都会稳定上述有限理想链 M_i 。

证明。 根据 5.2， M 是 A 的唯一极大理想，因此自同构 $\sigma \in \Gamma$ 必须将其映射到自身，即 $\sigma(M) = M$。由此可得

$$\sigma(M^k) = \sigma(M)^k = M^k$$

□

定义 5.6。 设 $\sigma \in \Gamma$。对于某个 $0 \leq i \leq n$，有 $\sigma(M^i) = M^i$ 且 $\sigma(M^{i+1}) = M^{i+1}$。那么 σ 自然诱导出商空间上的线性映射 σ_i ， 定义如下:

$$\sigma_i : M^i/M^{i+1} \to M^i/M^{i+1}$$
$$x + M^{i+1} \mapsto \sigma(x) + M^{i+1}$$

命题 5.7。 设 $\sigma \in \Gamma$ ，并且 σ_i 如前一个定义中所定义。σ_i 是向量空间 M^i/M^{i+1} 的自同构

证明。 σ_i 是良定义的，这意味着该映射在陪集上没有歧义。换言之，该映射不依赖于陪集代表元的选取：设 x, y 属于同一个陪集，使得 $x - y \in M^{i+1}$。那么，

$$\sigma_i(x) - \sigma_i(y) = \sigma_i(x - y) \in \sigma_i(M^{i+1}) = 0 + M^{i+1}$$

σ_i 继承了 σ的线性性和双射性。 □

存在一个典范映射 φ: $A_i \to M^i/M^{i+1}$，因此我们可以将 σ_i视为 A_i的一个自同构。

注意， A_i 是一个向量空间，而 A_i 的自同构集合是 $GL(A_i)$。映射f_i： $\Gamma \to GL(A_i)$由 $f_i(\sigma) = \sigma_i$ 定义，显然是一个同态。对于任意 $\sigma \in \Gamma$， σ_0 是单位元，满足 $\sigma_0(c) = c \cdot \sigma_0(1) = c \cdot 1 = c$ ，其中 $c \in A_0$。众所周知， f_1 是满射。这是由以下事实得出的: 由于 $A_1 = V$ 是代数A的生成空间， V的任意基的线性变换都唯一确定整个外代数 A 的一个代数自同构。我们将 $GL(A_1)$记作 G，下文亦如此。特别地，任意 $\tau \in G$ 都可以通过乘法扩张为一个自同构 $g(\tau) \in \Gamma$，使得

$$g(\tau)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) := \tau(v_1) \wedge \cdots \wedge \tau(v_m)$$

定义 5.8。 设 π： $A \to B$。截面 g： $B \to A$ 是一个满足 $\pi \circ g = id_B$ 的映射

g： 上文隐式定义的 $G \to \Gamma$ 是一个截面，也是一个同态，满足 $f_1 \circ g = id_{GL(A_1)}$。事实上，验证一下这个复合映射（针对 $\tau \in G$）：

$$f_1(g(\tau)) = (g(\tau))_1 = \tau$$

由于 $g(\tau)$ 在 A_1 上限制为 τ

令 $N = ker(f_1)$，则我们有短正合列 $\mathcal{S}$:

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} \Gamma \underset{g}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} G \xrightarrow{t} 1$$

定义 5.9。一个序列

$$\cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \cdots$$

称其在 X_2 处正合，如果 $im（f_1）= ker（f_2）$。

定义 5.10. 群的一个序列称为：

- 正合 如果它在每个位置都正合
- 短 如果它以 *1*（平凡群）开始和结束，而不是像长正合序列那样无限延续

下面的命题给出了一个序列为短正合序列的条件。特别地，我们针对序列 $\mathcal{S}$ 陈述该命题，以强调.....

下面的命题给出了序列为短正合序列的条件。我们在此针对序列 $\mathcal{S}$ 陈述该命题，以满足我们的目的。

命题 5.11. 序列 $\mathcal{S}$ 是短正合的，当且仅当 ϕ 是单射， f_1 是满射，且 $im(\phi) = ker(f_1)$

证明. 对于典型的短序列 $\mathcal{S}$，映射 $1 \to N$ 的像为 id_N （ N的单位元）。

- 若 ϕ是单射，则 $ker(\phi) = id_N = im(1 \to N)$，因此我们在 N处得到正合性。
- 平凡同态 t 将 G映到 1，因此 G 全部都是 t的核。若 f_1 是满射，则我们还有 $Im(f_1) = G = ker(t)$，因此在 G处正合。
- 最后，若 ϕ 是单射且 $N = ker(f_1)$，则 $im(\phi) = N = ker(f_1)$，因此 $\mathcal{S}$ 在中间处正合，即在 Γ处正合。

我们定义 ϕ是单射且 f_1 是满射，因此 $\mathcal{S}$ 确实是一个短正合列。 □

定义 5.12。 设 N、Q 为群，并设 φ： $Q \to Aut(N)$ 是描述 Q 对 N的作用（即共轭）的群同态。关于 φ 的 N 与 Q的半直积是群 $G = N \rtimes_\varphi Q$，其乘法集合为 $N \times Q$（有序对 $(n、 q)$），并定义乘法为

$$(n_1, q_1) \cdot (n_2, q_2) = (n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2), q_1 q_2)$$

单位元为 $(1_N、 1_Q)$，逆元的形式为：$(n、 q)^{-1} = (\varphi(q^{-1})(n^{-1})\ q^{-1})$。 N 的副本在半直积中是正规子群。

定理 5.13。 可分裂的短正合列 $\mathcal{S}$ （存在截面 g）给出了半直积分解

$$\Gamma = N \rtimes G$$

证明。 存在一个截面 $g : G \to \Gamma$，它是一个群同态，因此 Γ 是分裂的，这意味着我们可以由 N 和 G 重构 Γ。证明如下：

引理 5.14。 给定截面 g，每个 $\sigma \in \Gamma$ 都可以唯一地写成

$$\sigma = n \cdot g(\tau)$$

其中 $n \in N, \tau \in G$。

证明。 取 $\sigma \in \Gamma$。令 $\tau := f_1(\sigma) \in G$ 由于 $f_1(g(\tau)) = \tau$， σ 和 $g(\tau)$ 在 G 上的投影相同。因此

$$f_1(\sigma \cdot g(\tau)^{-1}) = f_1(\sigma) \cdot f_1(g(\tau))^{-1} = \tau \cdot \tau^{-1} = 1$$

因此 $\sigma \cdot g(\tau)^{-1} \in N = ker(f_1)$ 令 $n := \sigma \cdot g(\tau)^{-1}$ 为该元素。我们将 σ 重写为

$$\sigma = n \cdot g(\tau), \quad n \in N, \tau \in G$$

还需证明这种分解的唯一性。假设

$$n_1 \cdot g(\tau_1) = n_2 \cdot g(\tau_2)$$

对两边应用 f_1 ，得到 $\tau_1 = \tau_2$。从右侧约去 $g(\tau_1)$，得到： $n_1 = n_2$

□

最后， Γ 的半直积的分解中的乘法如下：令 (n_1, τ_1)，$(n_2, \tau_2) \in N \rtimes G$

$$\begin{aligned}(n_1, \tau_1), (n_2, \tau_2) &= (n_1\ g(\tau_1))\ (n_2\ g(\tau_2)) \\ &= n_1\ g(\tau_1)\ n_2\ g(\tau_2) \\ &= n_1\ g(\tau_1)\ n_2\ (g(\tau_1)^{-1}\ g(\tau_1))\ g(\tau_2) \\ &= n_1\ (g(\tau_1)\ n_2\ g(\tau_1)^{-1})\ g(\tau_1)\ g(\tau_2) \\ &= n_1\ n_2'\ g(\tau_1)\ g(\tau_2) \in N \rtimes GL(A_1) = \Gamma\end{aligned}$$

$((g(\tau_1)\ n_2\ g(\tau_2)^{-1}) \in N$ 由于 N 是正规子群) □

注 5.15. 我们将 $\sigma = n \cdot g(\tau)$ 的分解视为有序对 (n, τ)

我们将简要描述子群 G 和 N的内容。

G. 回忆一下， $G = GL(A_1)$。根据半直积的分解 Γ，其中包含一份 $GL(A_1)$，它位于 Γ内。这是合理的，因为正如我们所展示的， $A_1 = V$ 的每个线性自同构都能唯一地扩张为整个外代数的自同构。具体而言，这些是保次数的自同构——它们将 A_1 中的生成元映射为生成元的线性组合，并将映射乘法延伸至楔积。

例 **例 5.16.** 设 V是一个向量空间，其基为 $\{x_1, \cdots, x_n\}$。令 $f\colon V \to V$

$$f(x_i) = \begin{cases} x_2 & if\ i = 1 \\ x_3 & if\ i = 2 \\ x_1 & if\ i = 3 \\ x_i & otherwise \end{cases}$$

这是一个次数 保持 G 的自同构。容易验证逆映射是良定义的 .

N. N 是满射映射 $f_1 : \Gamma \to G$ 的核。这意味着 N 由外代数的自同构构成，它们在 A_1 上的作用是平凡的，但可以扭曲更高次数的分量。

N 的自同构具有如下形式

$$x \mapsto x + (\text{higher order terms})$$

换言之， N中的元素将每个生成元 $x \in A_1$映射为 $x+u(x)$，其中 $u(x) \in \sum_{i=2}^{n} A_i$。我们希望举例说明 N中的一个导子，但为此，我们必须先明确内导子的概念。

定义 5.17. 设 A 是一个环， D_a : $A \to A$ 是一个线性映射。假设此映射满足莱布尼茨法则，即: $D(ab) = D(a)b + aD(b)$。我们称 D_a 为 A的一个导子。

请注意，这是一个一般且纯粹代数性的定义。尽管它具有类似的性质，但不能将其视为微积分中的微分。显然， A_{comm} 中的交换子是上述定义的导子。我们将 a 在 A上的导数定义如下:

$$\begin{aligned} D_a : A &\to A \\ x &\mapsto ax - xa \end{aligned}$$

显然，以这种方式定义的映射 D_a 等于交换子 $[a, -]$，使得$D_a(x) = [a, x]$。

引理 5.18。若 a， $b \in a_{odd}$，则 $D_a D_b = 0$

证明。设 $x \in A_k$ 是齐次的。若 k 是偶数，则由 2.18 可得

$$D_b(x) = bx - xb = 0$$

若 k 是奇数，则

$$D_b(x) = bx - xb = bx - (-1)^{|b||x|}bx = 2bx$$

其次数为 偶数。但当 a 为奇数时， D_a 在偶数次输入上取值为零，因此 e

$$D_a(D_b(x)) = 0$$

因此，对所有 x， $D_a D_b = 0$ 。 □

特别地，由引理 5.18 可得 $D_a^2 = 0$ for $a \in A_{odd}$。

Definition 5.19. 导子的指数 D, $exp(D)$ 形式化地定义为 *as:*

$$exp(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$

在我们的情形下， 由于幂零性 $D_a^2 = 0$，指数级数截断为 $exp(D_a) = 1 + D_a$。
d

命题 5.20. $exp(D_a)$ 是外代数的一个自同构。

证明。 具体而言，对于 $x,\ y \in A$,

$$\begin{aligned}(1+D_a)(xy) &= xy + D_a(xy)\\ &= xy + D_a(x)y + xD_a(y)\\ &= xy + D_a(x)y + xD_a(y) + D_a(x)D_a(y) \quad \text{by lemma 5.18, } D_a(x)D_a(y) = 0\\ &= (1+D_a)(x)(1+D_a)(y)\end{aligned}$$

因此 $exp(D_a) = 1 + D_a \in \Gamma$ □

最终，对于 $a \in A_{odd}$,

$$(1+D_a)(x) = x + ax - xa \quad \forall x \in A$$

这意味着 $exp(D_a)$ 固定了 A_1 in M_1/M_2。因此显然 $exp(D_a)$ 属于 N.

在 N 中，有一个良好的阿贝尔子群 N_1，它由内导子的指数映射生成，$1 + D_a$ 适用于 $a \in A_{odd}$。这些称为外代数的内自同构。若读者希望了解另一种半直积分解，其中子群 N_1 和 A_0 的定义更加明确，并且能够分离出内自同构结构，可参阅 [3] 中的完整分类结果；该分解为 $\Gamma = N_1 \rtimes A_0$。

5.2. 不变子代数的分类

接下来，自然会产生两个问题：

1. 是否存在真（非平凡）不变子空间?

2. 如果存在，——为了进行分类——它们是什么?

下一个定理肯定地回答了第一个问题。

注 5.21. 我们回顾楔积的如下恒等式：

$$A_iA_j \subseteq A_{i+j}$$

文献 [5], 证明了，交换多项式环不存在非平凡不变子代数。然而，我们有：

引理 5.22. 设 A 是一个连通分次非交换代数。则由 A 中的交换子生成的代数是一个非平凡的不变子代数。我们将该代数记为 A_{comm}。

证明。设 $G := \{[a,b] := ab - ba | a, b \in A\}$，即 A中交换子的集合。由于 A 不是交换的，存在 $a, b \in A$ 使得 $ab \neq ba$。因此， $ab - ba \neq 0 \in G$。现设A_{comm} 为由 G生成的代数，这意味着 A 的所有包含 G的子代数的交，或等价地 A_{comm}，是 $G \cup \{1\}$中元素相乘的所有 $\mathbf{k}$-线性组合的集合。显然 A_{comm}是不变子代数，事实上对每一个 $f \in Aut_{\mathbb{k}}(A)$，我们有 $f([a,b]) = [f(a)\ f(b)]$。只需看出 A_{comm}不是平凡的。回顾$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$，并假设 A_1 非零。则若 $a, b \in A$，我们记$a = a_0 + a_1 + \cdots a_n$，对某些 $n \geq 0$与 $a_i \in A_i$。类似地 $b = b_0 + b_1 + \cdots b_m$，对某个$m \geq 0$，其中 $b_i \in A_i$。则由于 $A_0 = \mathbf{k}$，我们有 $ab - ba \in A_2 + A_3 + A_4 + ...$。这意味着 $G \subseteq A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$。因此 $A_{comm} \subseteq K + A_2 + A_3 + \cdots < A$

□

因此，由于至少存在一个非平凡不变子空间，外代数不是 $\mathbf{k}$ 上的多项式环。这引出了第二个问题：外代数还有哪些不变子代数？本节将展示外代数的不变子代数分类。

引理 5.23. 我们将 A 的中心刻画如下： $Z(A) := \{a \in A \mid ab = ba, \forall b \in A\} = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{2i} + A_n$

证明. 显然， A_{2j}中的每个元素都在中心中；并且如果 $T \in A_n$，那么对于每个 $a \in A$，都有 $Ta = 0 = aT$。这表明 $\bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{2i} + A_n \subseteq Z(A)$。另一方面，如果 $x \in Z(A)$，那么我们可以写作 $x = x_1 \oplus x_2$，其中 $x_1 \in \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{2i} \bigoplus A_n$ 且 $x_2 = 0$ 或 $x_2 \in A \setminus \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{2i} \bigoplus A_n$。由于 $xa = ax$ 且对于每个 $a \in A$都有 $x_1 a = a x_1$，我们可知 $x_2 \in Z(A)$。我们需要证明 $x_2 = 0$。否则，我们可以写作 $x_2 = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} a_{2i+1}$。令 j 为满足$a_i \neq 0$的最小 i 。由于存在 $j < n$ e_k 使得 $a_j e_k \neq 0$。因为对于每个 a_i，都有 $a_i e_k = 0 = e_k a_i$ 或$a_i e_k = (-1) e_k a_i$，所以我们得出 $x_2 e_k = (-1) e_k x_2$ ，这与 $x_2 \in Z(A)$这一事实矛盾。因此 $x_2 = 0$。

□

注记 5.24。 我们强调，当 n 为偶数时， $Z(A) = A_{even}$

命题 5.25。 对于任意代数 A， A 的中心是不变子代数。

证明。 事实上，如果 $f \in Aut_{\Bbbk}(A)$ 且 $z \in Z(A)$，那么，对于每个 $b \in A$ ：

$$f(z)b = f(z)f(f^{-1}(b)) = f(zf^{-1}(b)) = f(f^{-1}(b)z) = bf(z)$$

从而得到 $f(z) \in Z(A)$。 □

Lem引理 5.26。 A_{comm}（在引理 *5.22* 中定义）等于 $A_{even} = \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} A_{2i}$.

证明。 我们来证明包含关系 $A_{even} \subseteq A_{comm}$。 设 $m \geq 2$ 为偶数，则 $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_m} = 1/2[x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{m-1}}, x_{i_m}]$。 这意味着 $A_m \subseteq A_{comm}$，从而 $A_{even} \subseteq A_{comm}$。 对于反向包含，若 a， $b \in A$，则将 a， b写成 $a = \sum_{i=0}^{n} a_i$ 和 $b = \sum_{i=0}^{n} b_i$ 的形式，其中 a_i， $b_i \in A_i$，可知只要 i 或 j 为偶数，就有 $a_i b_j = b_j a_i$。 因此，$[a_i, b_j] = \sum_{i+j} 2a_i a_j$，其中 $i + j$ 为偶数。 □

推论 5.27. 由 *5.22* 以及 *5.26* 中所确立的 A_{even} 与 A_{comm} 的相等性， A_{even} 是一个非平凡不变子代数。

下面我们给出另一类不变子代数。

命题 5.28. 设 A 是由 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 生成的外代数。下列直和是一个不变子代数： B_i ：$= A_0 \oplus (\bigoplus_{j=i}^{n} A_j)$，其中 $i \geq 1$.

证明. 设 $f \in Aut_{\Bbbk}(A)$。注意 $x_i \wedge x_i = 0$ 与 f 是环同态，因此我们有 $0 = f(0) = f(x_i) \wedge f(x_i)$。由此可得 $f(x_i) \in \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$。 因此，对每个 $j \geq 1$，有 $f(A_i) \subseteq \bigoplus_{i=j}^{n} A_j$。 事实上，由 2.12，每个 A_i 都具有形如 $\{x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_i} \mid k\text{-多重指标 } I\}$ 的有限基。故 B 是不变的。 □

根据最后一个命题，我们现在手头已有两类充当不变子代数的子空间$A_i \in A$的直和。然而，根据 Demir 和 Nazemian 给出的不变子代数的分类 [2], ，这些并非不变子代数可能具有的唯一形式。为完整起见，我们在此陈述该分类结果而不加证明。

记号 5.29. 当 $1 \leq j \leq n$时，定义 $P_j : = \{ S \subseteq \{j, \ldots, n\} \mid j \in S \}$。

定理 5.30. 非零子代数 $B \subseteq A$ 是不变的（Aut-稳定），当且仅当 B 具有以下形式之一：

(a) 对于某个偶数 $j > 0$,

$$B = \Bbbk \oplus \bigoplus_{k \geq 0} A_{j+2k}.$$

（*b*）存在一个奇数 j、一个集合 $S \in P_j$ 以及一个偶数 $0 < i \leq j + 1$，使得

$$\{ s + i \mid s \in S, s + i \leq n \} \subseteq S$$

and

$$B = \bigoplus_{k \in S} A_k \ \oplus \ \bigoplus_{k \geq 0} A_{i+2k}.$$

参考文献

[1] John Browne。《格拉斯曼代数第1卷：基础：使用 Mathematica 探索扩展向量代数》。Bernard Publishing，2012年。[2] Mithat Konuralp Demir 和 Zahra Nazemian。《格拉斯曼代数的自同构稳定子空间》。2025年。URL: https://arxiv.org/pdf/2508.16945。[3] Dragomir Z. Djokovic。《外代数的导子与自同构》。载于：《加拿大数学杂志》30.6（1978），第1336–1344页。[4] Desmond Fearnley-Sander。《赫尔曼·格拉斯曼与线性代数的创立》。载于：《美国数学月刊》86.10（1979），第809–817页。[5] Hongdi Huang 等。《相对消去》。预印本，https://arxiv.org/abs/2503.10083。2025年。[6] Thomas W. Hungerford。《代数》。第12版。第73卷。数学研究生教材。纽约：施普林格出版社，2003年。ISBN: 9780387905181。[7] Vincenzo Nardozza。《报告126，欧洲非结合代数研讨会》。巴里阿尔多·莫罗大学，意大利。欧洲非结合代数研讨会。2025年6月。URL: https://youtu.be/5TpsZYvqoXo?si=jEi6B_Z-rakgd42h。