arXiv:2603.09780v1 [cs.CE] 10 Mar 2026

通过密度梯度引导投影实现可变厚度拓扑优化中的结构边缘去模糊

Gabriel Stankiewicz[1*]、Chaitanya Dev[1] 和PaulSteinmann[1]

[1*]应用力学研究所，埃朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学¨，Egerlandstr. 5，埃朗根，91058，巴伐利亚，德国。

*通讯作者。电子邮箱：gabriel.stankiewicz@fau.de；贡献作者：chaitanya.dev@fau.de；paul.steinmann@fau.de；

摘要

可变厚度拓扑优化（VTTO）是一种用于设计高性能、高刚度薄板结构的有效方法。然而，该方法通常面临两个主要挑战：1）形成不理想的低厚度区域，从而造成制造困难；2）结构边缘出现模糊。这种模糊是保证问题适定性所需的正则化滤波器所固有的伪影。本文提出了应对这两个挑战的解决方案。首先，为减轻低厚度区域问题，我们引入了一种稳健的组合方法。该策略采用基于SIMP的惩罚和改进的投影方法，可有效抑制几乎所有低厚度域。其次，本文的主要贡献是提出一种用于结构边缘去模糊的新方法，称为密度梯度引导（DGI）投影。该投影利用局部密度梯度信息，在高梯度区域（即结构边缘）选择性地施加强投影，以恢复锐度，同时最大限度地减少对结构内部低梯度区域的影响。数值算例表明，DGI 投影能够成功实现结构边缘去模糊，恢复清晰的实体-空隙过渡，同时保持内部形态。最重要的是，这种边缘定义方面的显著改善对最终结构柔度的影响可以忽略不计。因此，DGI 投影成为一种用于增强VTTO设计的非侵入式有效正则化工具。

关键词： 拓扑优化、变厚度板材、密度梯度信息投影、边缘锐化、低厚度惩罚

1 引言

自 Michell经典理论（Michell(1904））提出最优桁架结构以来，结构优化，尤其是拓扑优化（TO），已发展成为一种强大的工具，可用于创建性能优异且易于制造的结构。早期框架包括基于均匀化的拓扑优化（Bendsøe 和 Kikuchi (1988)、基于密度的方法（Bendsøe (1989)), andlevel-settechniques（Wang 等人 (2003)) 塑造了这一领域，其中基于密度的 SIMP（带惩罚的实体各向同性材料）方法因其公式简单且易于集成到商业有限元工具中而被广泛采用。通过惩罚中间密度（$p > 1$），SIMP 倾向于生成黑白设计，并避免出现非物理的灰度区域。相反，早在 20 世纪 70 年代，Rossow 和

Taylor(1973) 提出了一种结合变厚度薄片（VTS）的二维优化框架，其与基于密度的方法密切相关。

在 SIMP 方法中不施加惩罚时（$p = 1$），设计变量的含义会发生变化：中间值可以理解为厚度，正如Rossow 和 Taylor (1973) 的变厚度结构（VTS）优化中所采用的那样。变厚度拓扑优化（VTTO）是 VTS 方法的一种特例，代表一种基于密度或基于均匀化的方法，并允许发生拓扑变化。尽管惩罚型拓扑优化方法取得了巨大发展，VTTO 在早期却鲜少受到关注。惩罚型拓扑优化方法的一个典型特点是形成视觉上引人注目的桁架状特征。所获得的结构往往模仿生物组织，这表明将其与自然演化并优化自身造物的倾向进行比较是合理的，也进一步推动了惩罚型拓扑优化方法的科学发展。另一方面，VTTO 方法生成的片状结构在视觉上不那么引人注目。然而，由于不对中间密度施加惩罚，设计空间得以扩大，与惩罚型方法相比，可能获得刚度更高的解。直到最近，Sigmund 等人 (2016) 才对（细薄的）桁架状结构与片状结构进行了对比研究，明确表明片状结构具有更高的刚度。

对VTTO的重新关注也与去均匀化方法有关：该方法将粗尺度变厚度场后处理为高分辨率桁架状结构（Groen and Sigmund（2018）；Larsen 等人（2018）），或在水平集框架下的多片微结构（Li 等人（2018））。此外，其他VTS方法已扩展至板和壳（Zhao 等人（2017）；Meng 等人（2022））、多材料设计（Banh and Lee（2019）；Nguyen and Bui（2022））以及复合材料（Stegmann and Lund（2005）；Sørensen 等人（2014））。先进的公式将厚度与形状或材料优化相耦合（Meng 等人（2022）；Sjølund 等人（2018）；Kashanian and Kim（2021））。

VTTO的复兴凸显了这类公式的潜力与挑战。Kandemir 等人(2018)比较了多种生成 VTTO 结构的方法，包括应用惩罚拓扑优化；而Yarlagadda 等人(2022)提出了采用节点厚度变量的 SIMTP 扩展。然而，VTTO 面临的一项主要挑战是形成极薄的薄片，这类薄片容易发生屈曲、难以解读且难以制造。例如，Groen and Sigmund(2018)和Larsen 等人(2018)提出了一种专用的平滑Heaviside投影函数，用于在去均质化步骤中抑制低厚度区域。Giele 等人(2021)提出了两种受切割单元法启发的策略，通过引入额外的水平集场来截断低厚度区域，Geoffroy- Donders 等人(2022)；Pozo 等人(2023)提出了其他惩罚定律以避免出现薄弱部分，而Endressand Zimmermann(2023)则应用类SIMP规则来抑制低于阈值的厚度。所有这些研究都旨在获得稳定、可投入生产的设计，避免出现脆弱的薄片结构。本文提出一种通用方法以避免低厚度区域，该方法鲁棒性强、易于控制，并且对参数选择具有较高的容差。

作为其主要贡献，本研究解决了VTTO固有的另一项挑战，即模糊结构边缘的形成。模糊边缘是采用任何类型的模糊滤波器（即半径型或Helmholtz型PDE滤波器）的自然结果Lazarov 和 Sigmund （2011年）。上述低厚度投影方法部分缓解了该问题，可形成锐利的结构边缘，但仅限于厚度 ρ_{low}。厚度为 $\rho > \rho_{\text{low}}$ 的锐利结构边缘在VTTO问题中自然出现，如未滤波密度场中所见。然而，当施加为保证拓扑优化适定性所必需的模糊滤波器时，它们会被完全消除。在期望黑白设计的标准拓扑优化中，该问题通过施加平滑Heaviside投影得以解决，该投影仅将每个滤波密度推向0或1（Wang 等人 （2011年））。在VTTO中，范围 $\rho \in [0, 1]$内的任何密度均被同等允许，因而无法采用这种形式的Heaviside投影。因此，本文提出一种投影方法，以恢复VTTO问题中结构边缘的原始锐度，并实现范围 $\rho \in [\rho_{\text{low}}, 1]$内任意厚度下具有清晰结构边缘的完全稳健可变厚度结构设计。所提出的投影方法利用有关密度

梯度，以专门针对结构边缘，同时尽量减少对结构内部的影响。此外，还提出了一种处理低厚度区域的改进策略，从而可以选择更激进的延续参数，并每次都获得稳定解。

本文结构如下。第2节简要介绍基于密度的拓扑优化背景下的VTTO概念。在第3 节中，我们提出并测试了一种改进且高度稳健的方法，以消除不期望的低厚度区域。本文的主要贡献，即用于获得清晰结构边缘的密度梯度引导（DGI）投影，在第4节中介绍并测试。最终结论与展望在第5节给出。

2 可变厚度拓扑优化

Rossow 和 Taylor (1973)通过向每个有限元分配厚度变量 τ_i 提出了可变厚度结构问题。在厚度约束 $\tau_i^L \leq \tau_i \leq \tau_i^U$的限制下，该方法本质上避免了低厚度区域。然而，既无法实现拓扑变化，也无法形成域内结构边缘。不过，原始的可变厚度结构问题与传统的基于密度的拓扑优化密切相关，其中从SIMP方法中省略了惩罚因子。通过采用密度 ρ_e 作为设计变量，处理体积约束柔度最小化问题的VTTO表述如下

$$
\begin{aligned}
\min_{\forall \rho} \; &: \; \mathcal{F}_{\mathrm{c}}(\rho, \boldsymbol{u}) = \int_{\partial \mathcal{B}} \boldsymbol{u}(\rho) \cdot \boldsymbol{t}_0 \, \mathrm{dA}, \\
\text{s.t.} \; &: \; \mathcal{G}_{\mathrm{vol}}(\rho) = \frac{\int_{\mathcal{B}} \rho(\boldsymbol{X}) \, \mathrm{dV}}{V_0} - \overline{V}_{\mathrm{frac}} \leq 0, \\
&: E(\rho_e) = [\rho_e [1 - \rho_{\min}] + \rho_{\min}] E_0, \\
&: 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1, ..., N_e,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中，$\mathcal{F}_{\mathrm{c}}(\rho, \boldsymbol{u})$ 是柔度目标，$\mathcal{G}_{\mathrm{vol}}(\rho)$ 是体积分数约束。$E(\rho_e)$ 是插值后的单元杨氏模量，其中应用了单元密度 ρ_e ，而未使用惩罚指数 p ——回顾 SIMP 公式 $E(\rho_e) = \rho_e^p E_0$。 的最小值被视为空洞，因此允许形成域内空洞区域。与传统 TO 不同，（0, 1）范围内的中间值具有物理意义且是所需的，因为它们代表挤出结构的面外厚度。由于惩罚指数p是一种限制性度量，只允许黑白结构，因此它实际上缩小了设计空间。结果是，性能目标较差的设计被得到，如 Sigmund 等人（2016）所示，其柔顺度与片状结构相比约大 30%。

对于本文中的所有数值测试，我们均采用悬臂梁基准算例的常见设置，如图所示：1。

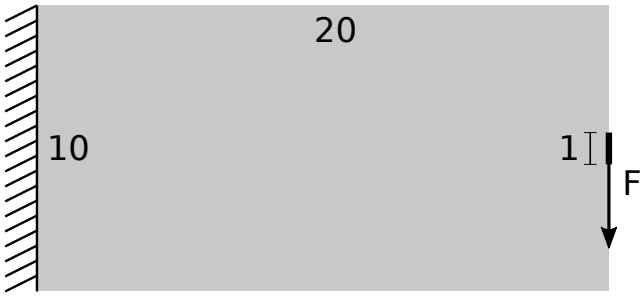


图 1：本文中使用的悬臂梁基准算例标准设置。

除非另有说明，本文所有算例均采用相同的参数设置，汇总于表：1。

所实现的优化器是 Kim 等人提出的广义最优性准则法（GOCM）Kim 等人 (2021）。据我们的经验，GOCM 在处理纯柔顺度最小化问题和多约束问题（即包含应力约束的问题）时表现出色，同时保持了原始最优性准则法的简洁性。每次迭代都会将步长乘以衰减参数，以帮助收敛。采用 Helmholtz 型偏微分方程滤波器进行正则化（Lazarov 和 Sigmund (2011年）由于我们采用自适应粗化与细化，因此使用细化层级的概念：允许的最粗层级 0 对应的单元尺寸为 $h_0 = 1$ ，允许的最细层级 4 对应的单元尺寸为 $h_4 =$

表1：数值测试的通用参数设置。

常规	
ρ^{init}	0.3
V_{frac}	0.3
材料	
Type	线弹性
E	1
μ	0.3
优化器	
Type	GOCM
初始步长	0.05
步长衰减	0.98
最小步长	10^{-4}
设计更新	指数
滤波器	
Type	PDE
半径	0.375 ($1.5h_2$)
停止准则	
Type	$\Delta\rho_{\text{mean}}$
容差	10^{-4}
自适应网格	
初始细化层级	2
细化判据	$[\![\rho_e]\!]_{\max} > 0.05$
粗化判据	$[\![\rho_e]\!]_{\max} < 0.001$
最大细化层级	4
最小细化层级	0
第0层单元尺寸	$h_0 = 1$

$1 \cdot 0.5^4 = 0.06125$。初始网格层级为 2，对应于 80×40 网格和单元尺寸 $h_2 = 1 \cdot 0.5^2 = 0.25$。有关网格自适应处理方式的详细说明，请参阅 Stankiewicz 等人 (2025a，关于 *deal.II* FEM 库 Bangerth 等人(2007) 的实现细节；Arndt 等人 (2021）。网格自适应的判据是密度跃变 $[\![\rho_e]\!]_{\max}$。也就是说，对于每个单元 e，我们会求出该单元 e 与其邻居之间的最大密度差，具体方法见 Stankiewicz 等人 (2025b)。

备注 1。 我们强调，对于所提出的方法论而言，网格自适应既非必要，也不会影响本文的主要发现。虽然网格自适应有利于提高计算效率，但会增加实现复杂度。由 320×160 个单元组成的固定网格能够为悬臂梁基准算例提供相同的分辨率，并且在标准硬件上仍然可行。

对于停止准则，我们采用平均密度变化，并考虑不同单元尺寸，其定义如下：

$$\Delta\rho_{\text{mean}} = \frac{\sum_e v_e \Delta\rho_e}{\sum_e v_e}. \tag{2}$$

其中， $\Delta\rho_e$ 表示优化迭代之间单元 e 的密度变化， v_e 表示单元 e的体积。图 2 展示了悬臂梁基准算例中标准方法与 VTTO 的对比。中间密度惩罚使柔度目标增加约 17.2%。

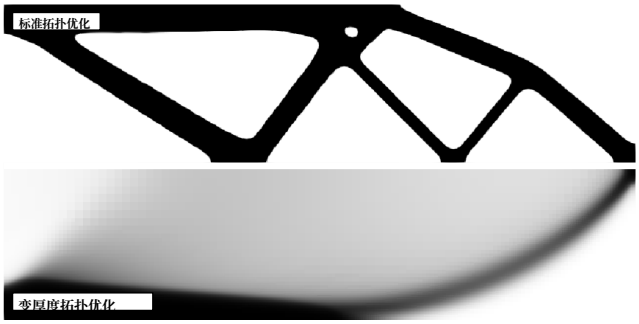


图 2：采用标准的基于 SIMP 的 TO 和 VTTO，对常见基准问题——悬臂梁——进行比较。最终的柔度值分别为 $\mathcal{F}_c = 7.61 \cdot 10^{-5}$ 和 $\mathcal{F}_c = 8.92 \cdot 10^{-5}$，这表明密度惩罚导致目标值增加了 17。2%。

虽然 VTTO 由于扩大了设计空间而实现了更优的性能，但也面临一些问题，例如厚度极薄的区域和模糊的结构边缘。以下各节将对这些问题进行处理。

3 低厚度区域的广义处理

VTTO 天生会产生非常薄的薄片，这些薄片不仅难以解释和制造，而且对目标值的贡献也不显著，正如 Giele 等人（2021）所指出的。因此，有必要对低厚度密度施加惩罚，以获得有意义的结构，见图 3。

我们将范围 $\rho \in (0, \rho_{\text{low}})$内的密度值归类为不可接受的薄片，其中 ρ_{low}是一个临界值，低于该值时，我们认为生成的厚度不可取。降低

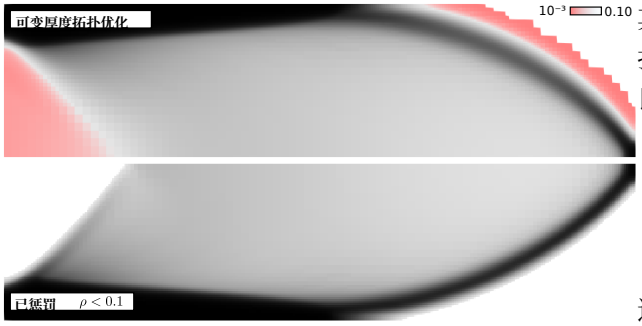


图3：对低厚度密度进行惩罚（此处为 $\rho < 0.1$）有助于生成可制造结构，同时对性能目标的影响可以忽略不计。在此情况下，惩罚仅导致柔顺度增加了 a0.26%。

VTTO 中有几种方法可以降低薄厚度区域的影响，包括采用选择性的基于SIMP的惩罚（Endress 和 Zimmermann (2023)）、在正则化步骤中采用基于投影的方法（Groen and Sigmund (2018)；Larsen 等人(2018)），或使用额外的设计场（Giele 等人 (2021)）。

下文将结合基于SIMP的和基于投影的方法，并严格遵循标准拓扑优化的逻辑，即同时采用惩罚和投影来获得清晰的黑白结构。此举也受到相关研究结果的启发：仅采用基于惩罚或基于投影的方法，要么无法严格消除低厚度密度，要么无法收敛到有意义的结构，并且对延拓方案表现出高度敏感性。我们的数值研究表明，结合基于SIMP的和基于投影的方法，可以稳定且有效地抑制低厚度区域，即使采用激进的参数延拓策略也是如此。

3.1 基于SIMP的抑制

作为处理低厚度区域策略的第一部分，我们考虑 Endress 和 Zimmermann (2023)提出的基于惩罚的方法：

$$\rho_e^{\mathrm{VT}} = \begin{cases} \rho_e, & \text{if } \rho_e \geq \rho_{\mathrm{low}} \\ \left(\frac{\rho_e}{\rho_{\mathrm{low}}}\right)^p \rho_{\mathrm{low}}, & \text{else.} \end{cases} \tag{3}$$

其中， ρ_e^{VT}是选择性惩罚后的密度， p 是标准拓扑优化中的惩罚指数。随后，计算每个单元的杨氏模量：

$$E(\rho_e) = \left[\rho_e^{\mathrm{VT}}\left[1-\rho_{\min}\right]+\rho_{\min}\right] E_0, \tag{4}$$

惩罚因子取为 $p = 3$。为了在优化的初始迭代中保留完整的设计自由度，采用了一种简单的延拓方法

1. 从 $p = p_{\mathrm{init}} = 1$开始2. 在每次迭代中执行：

$$p^{I+1} = \min(c_p p^I, p_{\max}) \tag{5}$$

其中 $p_{\max} = 3$。

惩罚密度的演化 ρ_e^{VT}在延续过程中如图4所示。

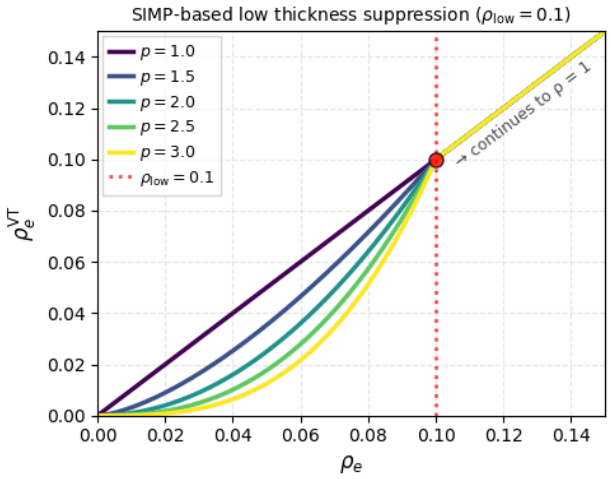


图4：基于SIMP的惩罚用于抑制 $\rho_{\mathrm{low}} = 0.1$的低厚度区域，其中包括惩罚项指数的延续：$p = 1 \to 3$。

这种惩罚方法在 $\rho_e = \rho_{\mathrm{low}}$ 处包含不连续性，因此，式 3 在 ρ_{low} 处不可求导。因此，就梯度计算而言，这种方法在数学上是不一致的。然而，考虑到数值处理涉及浮点运算，单元密度从不

严格满足条件 $\rho_e = \rho_{\text{low}}$。因此，对于密度 ρ_e 的任意数值，只需通过不等式条件即可确定是否应针对 $\rho_e < \rho_{\text{low}}$ 计算灵敏度。利用例如 sig moid 类型的切换函数，可以构造式 3 的连续版本。然而，为了使公式简洁，本文选择使用当前这种不连续的式 3 。

3.2 更新的基于投影的抑制

处理低厚度区域的策略的第二个组成部分采用了一种更常见的方法，即在正则化步骤中使用投影函数。该投影步骤采用一种 sigmoid 型平滑 Heaviside 投影形式，最早由Wang 等人(2011年提出。为仅针对低厚度区域而调整的函数由GroenandSigmund(2018)提出；Larsen 等人(2018)。然而，这些方法对¯锐度 β 和阈值 $\bar{\eta}$ 都采用延续策略，使用预先设定的¯成对 $\{\beta, \bar{\eta}\}$ 数值。图Larsen 等人(2018)的投影版本见图5。¯该 β 参数的变化并非单调，因此难以针对不同问题进行调整。对于不同的低厚度阈值，需要定义一组新的¯预设成对 $\{\beta, \bar{\eta}\}$ 数值。

为应对上述挑战，我们调整投影函数，使其满足以下标准：(i) 延续策略纯粹基于改变投影锐¯度 β；(ii) 延续策略通过单一参数以如下方式进行控制 $\bar{\beta}^{I+1} = \bar{c}_\beta \bar{\beta}^I$；(iii) 参数选择与低厚度阈值 ρ_{low}无关；(iv) 数值 $\rho > \rho_{\text{low}}$ 应尽可能不受影响。标准 (i) 和 (ii) 的制定参考了标准拓扑优化中使用的平滑海维赛德投影（Wang 等人 (2011年）） 。通过采用与标准拓扑优化中类似的参数选择和延拓策略，我们指出了若干实际优势，例如直观的参数选择，以及在标准拓扑优化和 VTTO 共存于同一代码中时，实现简洁且一致的代码实现。

因此，我们采用一种使用两个基本函数的方法： $\bar{\beta}$-惩罚密度 $\tilde{\rho}^{\bar{\beta}}$ 和恒等函数 $\tilde{\rho}$ ，二者通过切换¯函数 $S(\tilde{\rho}、\ \beta、\ \rho_{\text{low}})$ 按照以下方式进行插值：

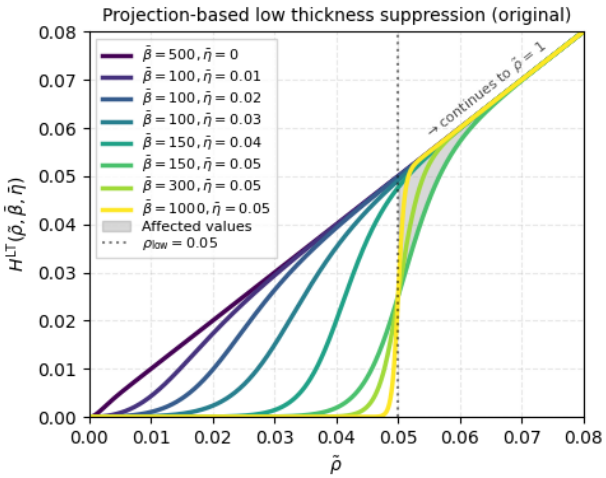


图 5：用于低厚度区域的基于投影的抑制函数，由 Larsen 等人¯（2018）提出，绘出了延续方案中使用的每组参数 $\{\beta, \bar{\eta}\}$对应的曲线。灰色区域表示投影对密度的影响$\rho > \rho_{\text{low}}$。

$$H^{\text{LT}}(\tilde{\rho}, \bar{\beta}) = [1 - S(\tilde{\rho}, \bar{\beta}, \rho_{\text{low}})]\tilde{\rho}^{\bar{\beta}} + S(\tilde{\rho}, \bar{\beta}, \rho_{\text{low}})\tilde{\rho} \tag{6}$$

where the switching function $S(\tilde{\rho}, \bar{\beta}, \rho_{\text{low}})$ is a sigmoid function given by

$$S(\rho, \beta, \eta) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\beta\left[\frac{\rho}{\eta} - \eta^{1/\beta}\right]\right)\right]. \tag{7}$$

切换函数 $S(\rho, \beta, \eta)$ 与 Wang 等人（2011）提出的已知平滑海维赛德投影类似，不同之处在于， $S(\rho, \beta, \eta)$ 是一种相当标准的 S 形函数，其投影范围为 $\bar{\rho} \in$ (0,1)，而不是恰好经过点 $\{0, 0\}$ 和 $\{1, 1\}$。对 S 形函数的特征性修改是阈值偏移部分： $[\rho/\eta - \eta^{1/\beta}]$，其中引入锐度参数 β ，可实现类似于 Larsen 等人（2018）方法的阈值偏移行为，而无需显式定义 η 的延拓值。图6展示了针对一组选定的 β 值绘制的更新后的投影函数。

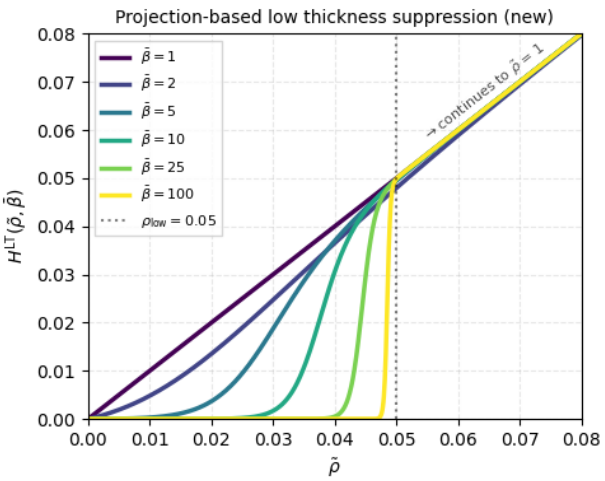


图6：低厚度区域的更新版基于投影的抑制函数。新版本仅利用 β 参数，以一种稳健且不依赖于 ρ_{low}的方式进行延拓。密度 $\rho > \rho_{\text{low}}$ 受到的影响最小。

从 $\bar{\beta}=1$ 开始，投影 $H^{\text{LT}}(\tilde{\rho},\bar{\beta})$ 是恒等函数 $H^{\text{LT}}(\tilde{\rho},1)=\tilde{\rho}$，因为两个基本函数 $\tilde{\rho}^1$ 和 $\tilde{\rho}$ 都是恒等函数。增大 $\bar{\beta}$ 会逐渐惩罚 $\tilde{\rho}^{\bar{\beta}}$，同时在 时，切换函数 $S(\tilde{\rho},\beta,\rho_{\text{low}})$ 会变得更加锐利。最值得注意的是，密度 $\tilde{\rho} > \rho_{\text{low}}$ 仅受到轻微影响，而对于 $\tilde{\rho} < \rho_{\text{low}}$，其行为与图5中的原始投影类似，仅更新了 β。与基于SIMP的抑制一样，我们以类似的方式采用延续策略：

1. 从 $\beta=\beta_{\text{init}}=1$ 开始。2. 在每次迭代中执行：

$$\bar{\beta}^{I+1}=\min(\bar{c}_{\beta}\bar{\beta}^{I},\bar{\beta}_{\max}) \tag{8}$$

3.3 组合抑制

最终，我们旨在结合使用基于SIMP的方法和基于投影的方法来抑制低厚度区域。为此，我们采用了一种联合延续方案，其方式类似于多厚度拓扑优化Stankiewicz 等人(2025b)；其中对 p 和 β 的延续按顺序进行安排。这种顺序对于多厚度拓扑优化中不同的增长率均表现良好

同样，在本文提出的低厚度抑制方法中，这种安排也效果良好。延续方案安排如下：

1. Start with $p=p_{\text{init}}=1$ and $\bar{\beta}=\bar{\beta}_{\text{init}}=1$
2. Perform in every iteration:

$$p^{I+1}=\min(c_p p^{I},p_{\max}) \tag{9}$$

其中 $p_{\max}=3$。
3. 一旦 $p=p_{\max}=3$，在每次迭代中执行：

$$\bar{\beta}^{I+1}=\min(\bar{c}_{\beta}\bar{\beta}^{I},\bar{\beta}_{\max}) \tag{10}$$

尽管由于优化过程中具有更高的稳定性，顺序抑制更受青睐，但我们的进一步研究表明，同时对 p 和 β 进行延拓同样可以获得令人满意的设计。然而，需要更加注意增长率的适当选择。最终，结合第4节介绍的 DGI 投影，强烈建议采用顺序延拓方法。

3.4 数值示例

接下来，我们将测试所提出策略的有效性，这些策略涉及基于SIMP和基于投影的低厚度抑制。首先，我们关注采用我们的延拓方法时，基于SIMP和基于投影的方法单独使用时的表现。特别是对于基于投影的方法，采用我们自行选定的增长率，使用第3.2节提出的延续策略，与图5中的参考方法相比更加激进；参考方法在每个延拓步骤之间设置了50次迭代的间隔。最后，我们将测试组合抑制方法，并将其与纯基于SIMP和基于投影的情况进行比较。评估依据是在 $\rho\in(0.001,\rho_{\text{low}})$范围内是否存在不理想的低厚度密度。数值 $\rho<0.001$被视为空洞可接受。为了可视化，我们在 $\rho\in(0.001,\rho_{\text{low}})$范围内采用反向红色至透明色标，以突出显示最不理想的密度，即接近空洞阈值的数值。红色至透明色标仅用于结构的下半部分，以利用

设计的对称性。图7 展示了所得结构。

图7 第一行展示了不同低厚度阈值下，纯基于SIMP的抑制方法所得到的结构 $\rho_{\text{low}} = \{0.05, 0.1, 0.25\}$。最大惩罚值$p_{\max}$ 和增长率 c_p 保持不变，因为改变它们并未使设计产生显著变化。基于SIMP的抑制方法能够有效形成符合低厚度阈值的结构，这与标准拓扑优化类似，这是由于低厚度区域的惩罚刚度导致其柔度过高，因而不受期望。然而，由于模糊滤波器的作用，实体与空洞之间会出现宽度与滤波半径成正比的低厚度过渡区域。这表明，在应用滤波器后需要采用基于投影的处理。

第二行展示了纯基于投影的方法得到的结构。该方法使用图5中的函数，已在文献中得到成功应用，但采用的是一种较缓和的延续策略，约跨越 300-400 次优化迭代。在本研究中，我们测试了一种更为激进的延续方案，通常跨越 100-150 次以上的迭代，这自然会带来优化稳定性降低的风险。结果确实如此。即使低厚度阈值为 $\rho_{\text{low}} = 0.05$，最终设计中仍包含大面积不理想的低厚度密度。因此，对于纯基于投影的研究，我们重点考察了最终投影锐度 $\beta_{\max}$ 和增长率 $\bar{c}_\beta$ 的影响，以探究是否能够实现改进。遗憾的是，这些参数的变化并未带来显著改变。测试图5中的原始方法，但采用我们的延续设置后，表现出了类似的行为。不理想的低厚度密度大量存在，这可以由以下事实解释：低厚度密度实际上仍然受到优化器的偏好。从物理意义上讲，与基于SIMP的方法不同，它们并不会在柔顺度方面带来额外代价。此外，投影并未达到Heaviside函数近乎完美的锐度，而这本应是对于 $\beta_{\max} \to \infty$ 的情况。因此，存在一个可产生低厚度密度的小范围密度区间；当优化器最小化目标函数时，它会被推动去寻找该区间。投影锐度越高，低厚度区域的噪声就越大，但其仍然大量存在。

纯基于SIMP和基于投影的方法所得观察结果自然地表明，可以采用组合方法，以稳定的方式完全消除低厚度区域。基于SIMP的方法会告知优化器低厚度密度是不理想的，从而使目标函数最小化；而基于投影的方法则有助于消除滤波器造成的低厚度实体到空洞的过渡区域。图7 最后一行展示了采用组合方法得到的结构。我们选择展示不同低厚度阈值下的设计，因为不同增长率、惩罚项和锐度参数的影响很小。所得设计令人满意，几乎完全不存在低厚度密度。通过采用相对激进的延续参数，证明了组合方法具有稳健性。此外，投影锐度$\beta_{\max} = 25$ 足以有效消除实体到空洞过渡区域中的低厚度密度。

3.5 尚存的挑战：低厚度边缘

组合低厚度抑制方法已被证明能够可靠地消除低厚度区域。然而，这类设计的一个典型特征是会形成厚度恰好等于阈值参数的结构边缘 ρ_{low}。这是采用模糊滤波器和低厚度投影进行组合正则化的自然结果，而这对于处理棋盘格和网格依赖性是必要的。图8中对这类低厚度边缘进行了仔细检查。

为了理解 PDE 滤波器的影响，尤其是滤波半径的选择，我们比较了三种情况：$r \in \{h_2, 1.5h_2, 2h_2\}$。自然，优化器会尝试形成厚度也超过 ρ_{low} 的结构边缘，这一点从原始（未滤波）密度场中可以看出，见图 8 的第一列。我们确定了两个关键位置，在这些位置上，密度正则化对结构边缘形成的影响清晰可见。对这两个区域进行局部放大，可以看出原始密度 ρ 与正则化密度 $\bar{\rho}$ 在结构边缘锐度方面存在显著差异

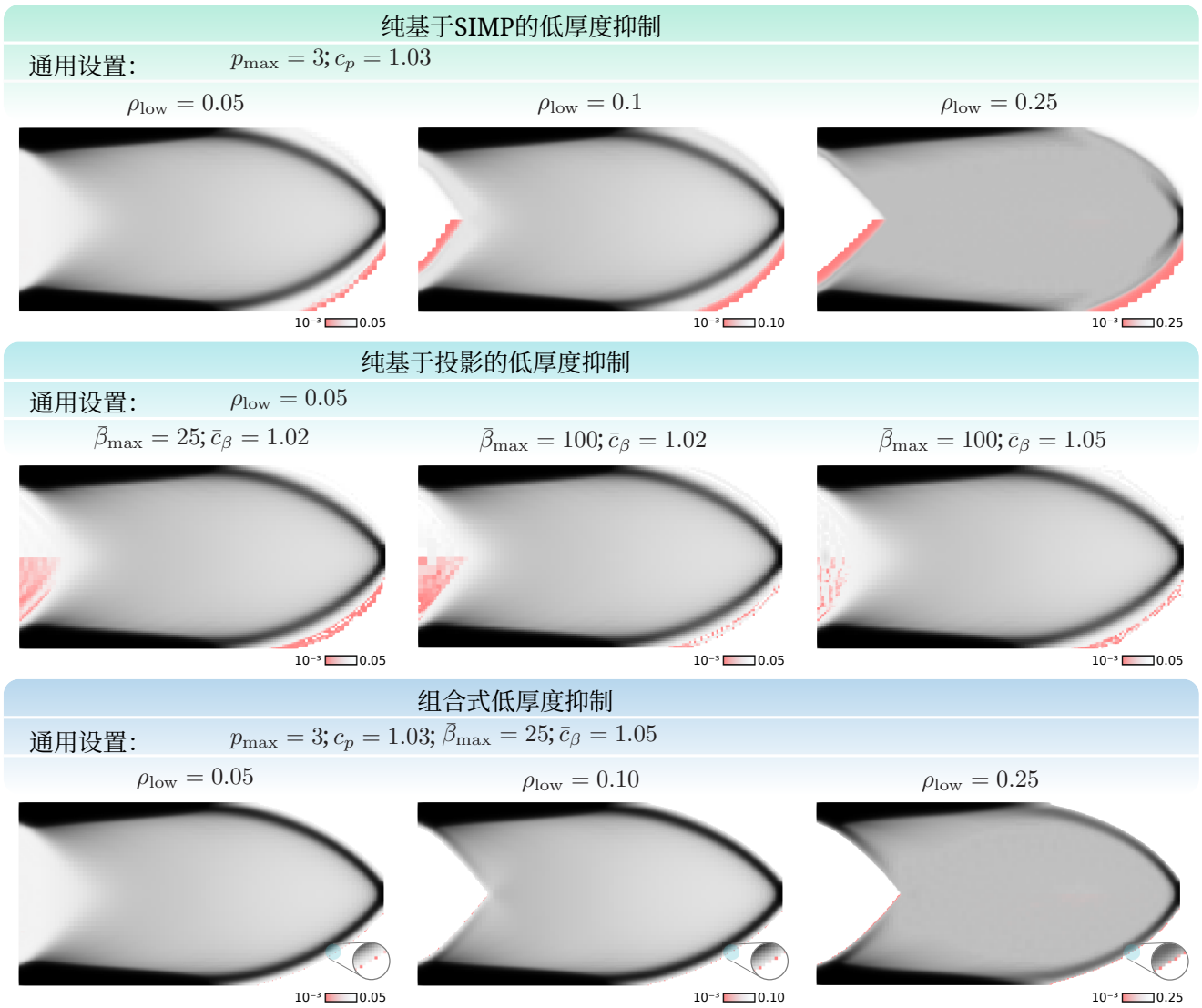


图 7：针对所研究的低厚度抑制方法进行数值测试。从上到下依次为：纯基于SIMP的方法、纯基于投影的方法以及组合抑制。使用红色到透明的渐变突出显示范围为 $\rho \in (0.001, \rho_{\text{low}})$ 的不理想低厚度密度。采用组合方法时，低厚度密度的数量可以忽略不计。

。优化器尝试在狄利克雷边界条件附近形成厚度为 $\rho = 1$ 的锐利结构边缘。有趣的是，随着滤波半径增大，ρ 场中的结构边缘变得更加锐利，这表明优化器会更积极地阻止模糊的低厚度边缘形成。

借助将有限元沿面外方向简单拉伸的三维可视化，可以更直观地理解低厚度边缘，拉伸程度与其厚度成正比。结构边缘由 ρ_{low} 的密度值清晰地形成；随着滤波半径增大，密度斜率逐渐减小。

显然，低厚度边缘是滤波造成的伪影。当前的正则化策略会阻止形成任何厚度的自然结构边缘。虽然这一现象不会对简单的柔顺度最小化问题造成重大阻碍，但对于

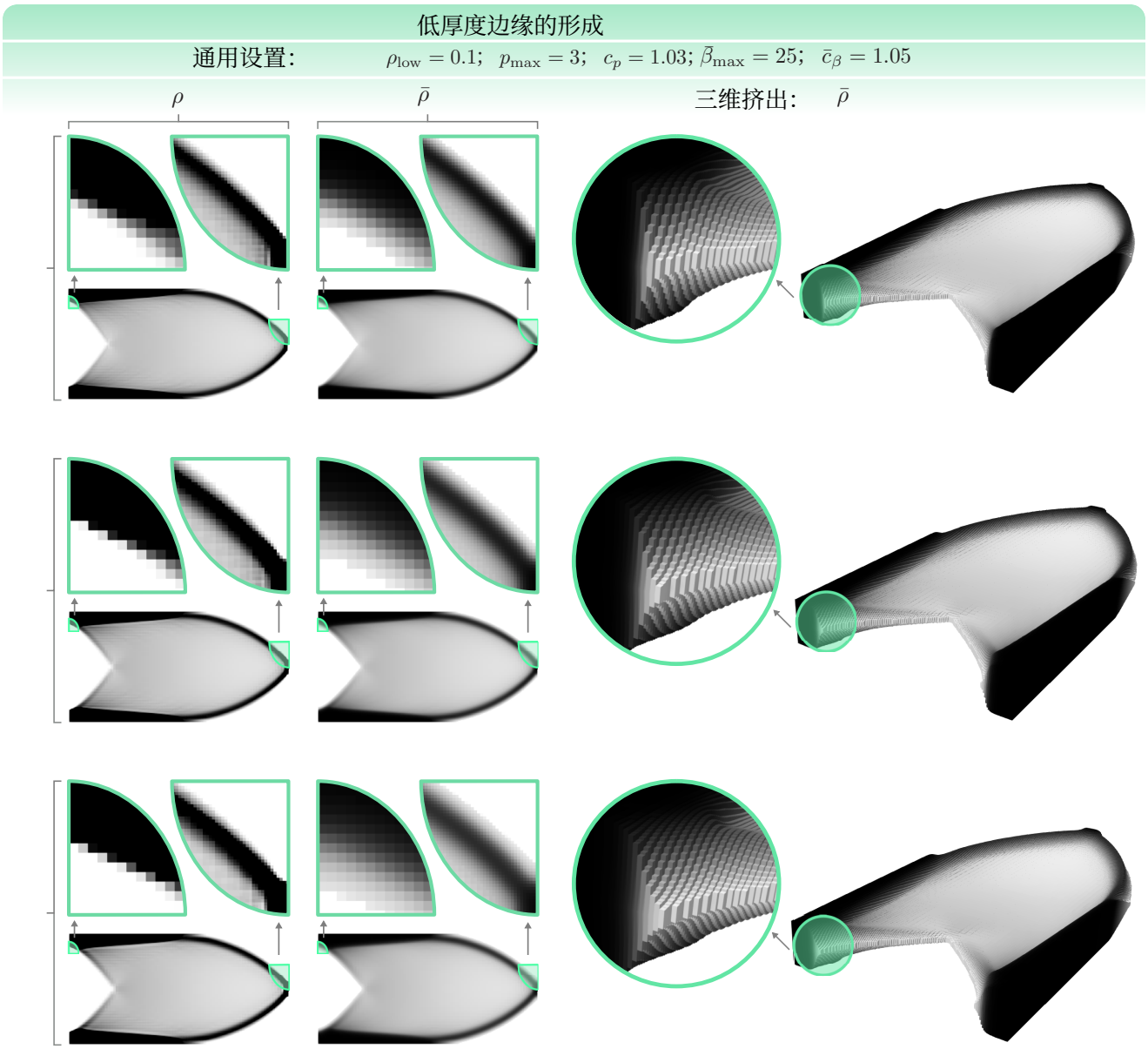


图 8：通用正则化方案（包括模糊滤波器和低厚度投影）对结构边缘形成的影响。比较了滤波半径不同的三种情况 $r \in \{h_2, 1.5h_2, 2h_2\}$。

包含类似奇异点特征的问题，例如 L形梁，影响就很大。原因在于奇异点附近会积聚应力，而如果结构边缘只能具有低厚度 ρ_{low}，应力积聚就会加剧。尽管 L形梁类问题和应力约束优化超出了本文的研究范围，但仍有必要考虑 VTTO 在处理结构边缘形成问题时的整体情况。

4 用于锐边的密度梯度信息投影

在 VTTO 中，结构边缘模糊且厚度较小，这是采用模糊滤波器（如 Helmholtz 型偏微分方程滤波器）的常见正则化方案所固有的现象。

因此，为了解决这一问题，我们提出一种投影方法，作为正则化流程中的额外步骤，用于对结构边缘进行去模糊（重新锐化）。该投影需要满足以下要求：(i) 恢复结构边缘的锐度，使其达到原始密度场中的水平 ρ；(ii) 针对结构边缘，同时尽可能减少对结构内部的影响；(iii) 使用类似 β 的直观参数来控制去模糊强度。只作用于结构边缘而不影响结构内部至关重要，这样才能保留该方法的“可变厚度”特性。

下面首先介绍所提出的投影中使用的术语。单元 e 的邻域包括距其不超过滤波半径 r的单元:

$$N_r(e) = \{e' \in \Omega_e \mid \|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_{e'}\| \leq r\}, \tag{11}$$

其中 e' 表示作为 e 邻居的单元，且 $\mathbf{x}_e$ 是单元 e 的中心。由于我们在 $r = 1.5h_2$ 数值测试中选用的滤波半径基于$h_2 = 0.25$的初始网格尺寸，且采用自适应网格划分，因此在图9 中展示了邻域 $N_r(e)$：一种情况采用自适应网格划分，网格细化最多达到 h_4；另一种情况采用均匀网格，使用 $h = h_2$。对于均匀网格，建议使用至少为 $r_{\min} = 1.5h$ 的邻域半径，以确保 e 的直接邻域存在，即使滤波半径更小。对于 $r < h$，邻域 $N_r(e)$ 仅包含单元 e 本身，因此所提出的去模糊方法不会产生任何效果。在邻域 $N_r(e)$内，我们求取最小和最大密度

$$\rho_{\min,r}(e) = \min_{e' \in N_r(e)} \{\rho_{e'}\}, \tag{12}$$

$$\rho_{\max,r}(e) = \max_{e' \in N_r(e)} \{\rho_{e'}\}. \tag{13}$$

我们将邻域 $N_r(e)$ 内的密度变化定义为以下两者之差:

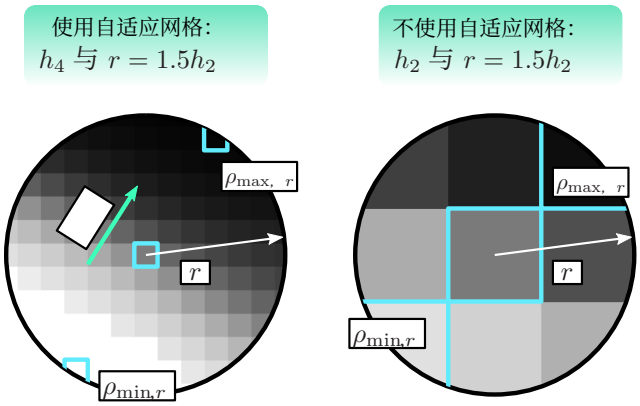


图 9：邻域 $N_r(e)$ 以及 DGI 投影所需的基本量，展示了采用和未采用自适应网格划分的情况。

最大$\rho_{\max,\ r}(e)$密度与最小 $\rho_{\min,\ r}(e)$密度

$$d_r(e) = \rho_{\max,r}(e) - \rho_{\min,r}(e) \approx \partial_x \rho(e) \cdot 2r \tag{14}$$

本质上，这是密度梯度 $\partial_x \rho(e)$ 的有限差分近似乘以邻域直径 $2r$。假设 $\rho_{\max,\ r}(e)$ 和 $\rho_{\min,\ r}(e)$ 均位于 $N_r(e)$ 的边界附近。最后，我们将中位数密度定义为

$$\rho_{\mathrm{mid},r}(e) = \rho_{\min,r}(e) + 0.5 d_r(e). \tag{15}$$

有了所有必要的量，我们提出了去模糊投影函数，它是一个经缩放 和平移 的平滑海维赛德投影

$$H_e^{\mathrm{DGI}}(\tilde{\rho}_e^{\mathrm{local}}, \hat{\beta}_d(e), \hat{\eta}(e)) = d_r(e) H(\tilde{\rho}_e^{\mathrm{local}}, \hat{\beta}_d(e), \hat{\eta}(e)) + \rho_{\min,r}(e) \tag{16}$$

其中，平滑海维赛德投影采用 Wang 等人（2011年）提出的标准形式

$$H(\rho, \beta, \eta) = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta[\rho - \eta])}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta[1 - \eta])}. \tag{17}$$

对投影标准形式的首要必要修改，是将数值按

密度差 $d_r(e)$ 进行缩放，并将数值向上平移最小密度$\rho_{\min,\,r}(e)$。这样，我们将投影限制在范围 $\rho_{\min,\,r}(e) \leq \hat{\rho}_e \leq \rho_{\max,\,r}(e)$内。此处有必要说明，我们用“帽子”符号标记与去模糊投影相关的量，例如去模糊密度 $\hat{\rho}_e$。

第二项关键修改是传递给式16中平滑海维赛德投影的调整后参数。所传递的密度经过缩放和平移

$$\tilde{\rho}_e^{\text{local}} = \frac{\tilde{\rho}_e - \rho_{\min,r}(e)}{d_r(e)} \tag{18}$$

从而使投影在局部范围 $[\rho_{\min,r}(e)\rho_{\max,\,r}(e)]$ 内起作用。作为投影阈值，我们采用中位数密度 $\rho_{\text{mid},\,r}(e)$。类似地，投影阈值也需要缩放和平移，以与 $\tilde{\rho}_e^{\text{local}}$ 保持一致

$$\hat{\eta}(e) = \frac{\rho_{\text{mid},r}(e) - \rho_{\min,r}(e)}{d_r(e)} = 0.5 \tag{19}$$

最终简化为 $\hat{\eta}(e) = 0.5$。决定 DGI 投影特性的关键调整作用于投影锐度参数。具体而言，我们按各单元对应的密度差来缩放其投影锐度

$$\hat{\beta}_d(e) = \hat{\beta} d_r(e), \tag{20}$$

因此得名密度梯度信息引导（DGI）投影。选择这种缩放的动机在于如下观察：模糊滤波器所产生影响的强度与被滤波密度场的梯度成正比。例如，考虑两个位置，其原始密度场分别类似于一条锐边和相对平滑的结构内部（见图10左侧的边缘与内部一维示意草图）。应用模糊滤波器会使两个区域都变平滑，但在边缘位置仍保留更陡的斜率。因此，为了专门针对结构边缘，利用该斜率信息来定义 DGI 投影的强度。

下面，为了进一步阐明 DGI 投影背后的逻辑，在图10左侧，我们考虑三种不同情景，以确定边缘的 DGI 投影行为。表示模糊密度 $\tilde{\rho}$的黑线呈 S 形曲线。自然地，该曲线的下半部分局部凸，上半部分局部凹。将选取的三个密度值 $\tilde{\rho}$ 与中位数密度 $\rho_{\text{mid},\,r}$进行比较，即可显现这一特性。[1] 无论差值 $\tilde{\rho} - \rho_{\text{mid},\,r}$ 为正还是为负，密度都会相应地向上或向下投影。此外，差值越大，投影作用越强，这与平滑海维赛德投影的特性一致，因为中位数密度 $\rho_{\text{mid},\,r}$ 会影响投影阈值 $\hat{\eta}(e)$。

接下来，在分析完整的二维数值研究之前，我们通过提取悬臂梁算例中沿所选线的密度图，探究 DGI 投影的影响，如图 10右侧所示。在此阶段，我们并非要关注完整的悬臂梁设计，而是单纯聚焦于提取的一维图。首先了解 DGI 投影在一维情形下的行为，有助于我们在考察完整二维结构时更好地评估该方法。一维图所选截面的位置在图 10中第一幅图下方的局部放大图中标出。该位置最具代表性，因为它沿着一条理想情况下应形成全厚度锐边的结构边缘延伸，并进一步经过结构内部一段密度值处于中间范围的区域。需要注意的是，这些一维图并不代表真正纯粹的一维研究，因为每个单元的邻域集合$N_r(e)$ 还会考虑绘图线垂直方向上相距不超过r 距离的单元。

图 1D 图10 展示了三个投影锐度各不相同的情况 β，见公式（20）。对于每种情况，均绘制了三个场：原始密度ρ、滤波密度 $\tilde{\rho}$ 和 DGI 投影密度 $\hat{\rho}$。请注意，原始密度形成了一个厚度完整且相对锐利的边缘——原始密度从 $\rho = 0$ 到 $\rho = 1$发生陡峭过渡。滤波过程会自然地平滑边缘，甚至减小其厚度，但能保证

[1]严格来说，只有考察由$\rho_{\min,\,r}$ 和$\rho_{\max\text{构成的}r}$直线上的所有点，才能验证凸性，而这里显然并非如此。不过，在拐点处将图10中的曲线分开后，我们便得到完全凸和完全凹的区段。尽管如此，我们的目的是指出一种趋势，即投影方向与模糊密度 $\tilde{\rho}$的局部曲率特征之间的关系。

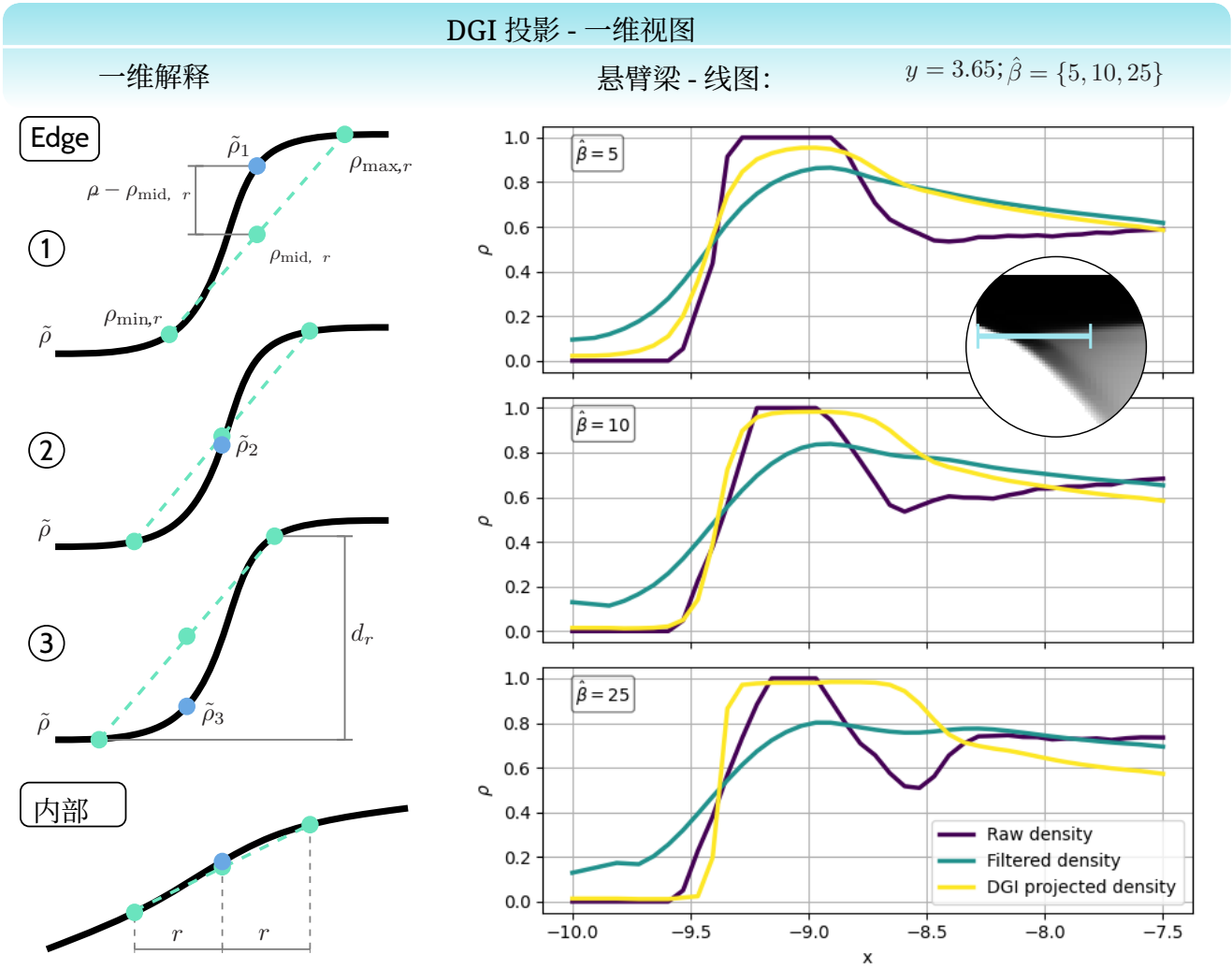


图10：DGI 投影的一维视图。左侧展示了一个模糊边缘的示意图，其中考虑了三种情景，并表示了结构的“内部”。根据差异$\tilde{\rho} - \rho_{\text{mid},\ r}$，预期会出现以下行为：在情景1）中，密度$\hat{}\rho_1$ 将向上投影；在情景2）中，$\hat{}\rho_2$ 几乎不会受到影响；在情景3）中，$\hat{}\rho_3$ 将向下投影；而在结构的“内部”，预计投影影响可以忽略不计。右侧展示了沿悬臂梁选定部分的线图，其中绘制了原始密度 ρ、滤波密度 $\tilde{\rho}$和DGI 投影密度$\hat{}\rho$ 。

结构内部具有更加规则的密度分布。最后，DGI 投影会逆转边缘平滑效果，其程度取决于所选的锐度 $\hat{}$ $\hat{}$ 参数 β。对于 $\beta = 5$，边缘锐度只能部分恢复，而结构内部仍保留几乎相同的密度分布。将锐度参数提高至 $\beta = 10$ 后，我们达到了一个最佳点，此时原始边缘锐度与之十分接近，而内部所受影响微乎其微。对于 $\beta = 25$ 我们得到了一条过度锐化的边缘，同时结构内部的变化也更为明显。此时，必须注意，尽管 $\beta = 10$ 在本研究中是最优选择，但锐度的选择完全取决于模糊滤波器的滤波半径，因为 DGI 投影基本上是在逆转其作用。尽管如此，图中的一维图10

应能让人初步直观地了解 DGI 投影的工作原理。

4.1 关于所需的边缘锐度

观察图10中的曲线后，可能会产生这样一个疑问：为什么不追求获得完全锐利的结构边缘，也就是让相邻单元的 $\hat{\rho} = 0$直接过渡到 $\hat{\rho} = 1$？理想的锐边正是水平集方法和基于节点的形状优化在微调设计、满足特定边界敏感要求（例如曲率控制）方面表现出色的原因（Stankiewicz 等, 2022）。这是因为边缘是显式建模的。默认情况下，基于密度的拓扑优化将设计域视为由结构化网格组成。单元是完美的正方形，因此结构边缘呈阶梯状。假设结构边缘形成“理想”的锐边，即黑色直接过渡为白色，那么边缘就会呈现纯粹的阶梯状。纯阶梯状边缘有两个缺点。

首先，从物理影响来看，完全锐利或阶梯状的边缘会在单元角点处引入人为的应力集中，这与真实的材料行为不符。在实际中，制造出来的结构不可避免地会有圆角或经过平滑处理，因此，阶梯几何形状的力学响应无法反映可实现设计的力学响应。

其次，从表示的角度来看，纯阶梯状边缘实际上不如包含一定量中间密度以“填充”阶梯拐角的边缘显得“锐利”。阶梯效应类似于数字图像中的混叠伪影，其中粗糙的像素化会导致锯齿状轮廓。在计算机图形学中，这一问题通过抗锯齿得到缓解，抗锯齿可平滑过渡以逼近底层连续形态，见图11 中的示例。保持“抗锯齿”的结构边缘不仅能改善其视觉效果，还能使后处理工具更加高效，从而为制造生成更准确的显式模型。

因此，在确定锐度参数 β 时，应将这些因素纳入考量。理想情况下，在对结构边缘进行去模糊时，我们应以保持一个单元宽度的过渡区为目标，从而减轻完全锯齿状边缘的形成。

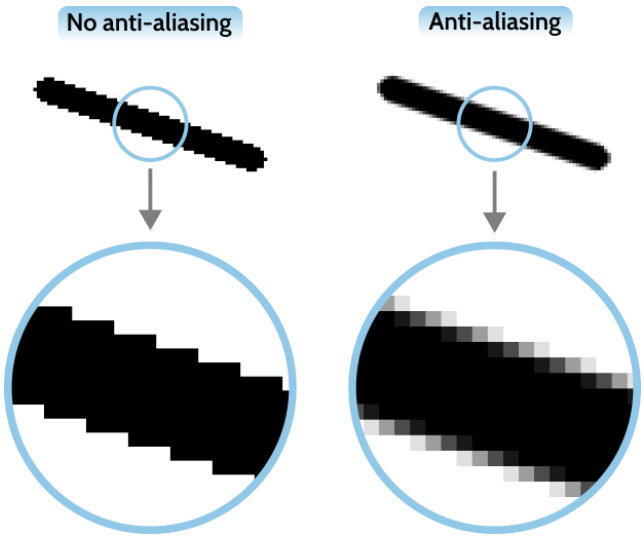


图11：像素化物体的理想轮廓在边缘处包含少量（像素宽度）的模糊。在计算机图形学中，这通过施加抗锯齿滤波器来保证，该滤波器可消除边缘的锯齿特征。

4.2 完整工作流程

最后，我们汇总本研究中考虑的所有方法，并将其安排在优化循环中，如图所示。12。这包括对边值问题（BVP）阶段和正则化阶段的重大修改。第3.1节所述的基于SIMP的低厚度抑制，属于矩阵组装步骤，与标准SIMP中的做法相同。而 DGI 投影与密度滤波起互补作用，因此紧随其后。第3.2节所述的基于投影的低厚度抑制，是正则化链中的最后一步。为进一步明确，密度变量的相关符号标注在优化循环的相应步骤旁。

对于基于投影的低厚度抑制，我们为 DGI 投影锐度β引入了一种延续方案。 β 的延续与基于投影的低厚度抑制 β的投影锐度延续同时开始。因此，更新后的延续工作流程概述如下：

1. Start with $p = p_{\text{init}} = 1$ and $\bar{\beta} = \bar{\beta}_{\text{init}} = 1$

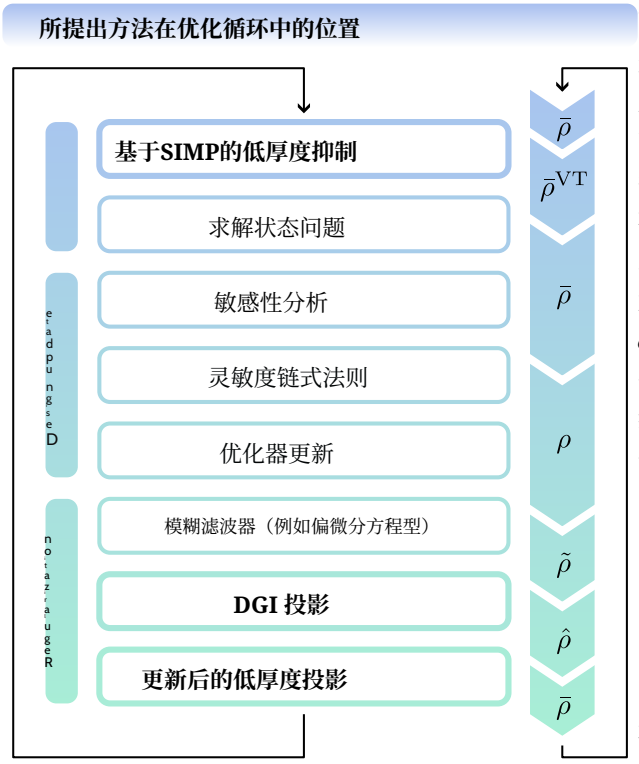


图 12：优化循环示意图，重点展示本文所引入方法的应用位置。基于SIMP的低厚度抑制在状态问题的切线矩阵组装过程中执行。DGI 投影紧接滤波（此处为：PDE滤波器）之后，随后进行低厚度投影。

2. 在每次迭代中执行：

$$p^{I+1} = c_p p^I \tag{21}$$

并继续，直到 $p = p_{\max} = 3$。

3. 一旦 $p = p_{\max} = 3$，在每次迭代中执行：

$$\hat{\beta}^{I+1} = \hat{c}_\beta \hat{\beta}^I \tag{22}$$

$$\bar{\beta}^{I+1} = \bar{c}_\beta \bar{\beta}^I \tag{23}$$

ˆ ˆ 并分别继续进行，直到 $\beta = \beta_{\max}$ and_ $_\beta = \beta_{\max}$。

4.3 数值示例

在以下数值研究中，我们采用完整的正则化过程，如前一节4.2所示。图7 中的数值研究已经展示了改变低厚度阈值 ρ_{low}的影响，因此没有必要再次开展此类研究；我们仅关注 $\rho_{\mathrm{low}} = 0.1$ 情况。另一方面，研究不同滤波半径与 DGI 投影的最终锐度参数 $\beta_{\max}$的组合至关重要，因为二者本质上是互补的。因此，本节主要关注这两个参数的变化。此外，还需要合理选择新的延拓参数c_β 。为简化起见，我们为 DGI 投影和低厚度投影 $c_\beta = \bar{c}_\beta = 1.05$选择相同的延拓值。我们开展的其他数值研究表明，该方法对这些延拓参数的不同组合仅略微敏感。因此，除确认完整方法的稳健性外，此类研究对本文的贡献并不显著。

因此，图 13展示了本研究的最终悬臂梁 ˆ 结构，包括每个滤波半径 $r/\beta_{\max}$ 下未采用 DGI 投影的参考案例 r。由于主要关注区域为结构边缘，每个案例都补充了两个最具代表性区域的局部放大图。此外，还给出了归一化柔度值，以评估性能。对于每一行（即每个滤波半径 r），归一化因子均为该行参考案例的柔度。例如，对于 $r/\beta_{\max} = 1.5h_2/10$ 案例，归一化柔度通过将其总柔度除以采用 $r = 1.5h_2$ 的参考案例（未使用 DGI 投影）的总柔度计算得出 $c_n = 7.63657 \times 10^{-5}/7.62813 \times 10^{-5} \approx 1.0011$。这种归一化有助于更好地比较 DGI 投影对性能的影响。补充图 14 以三维形式展示了选定的结构，与图8类似，并包含一个代表性区域的局部放大图。用于三维视图的选定结构对应于图 $r = 1.5h_2$ 中的第 行。

从完整结构的视图来看，内部未观察到可见变化。只有检视局部放大视图时，才能看出DGI 投影对结构边缘的影响。对于所研究的全部滤波半径，$\beta_{\max} = 10$ 与ˆ$\beta_{\max} = 25$ 的锐度值均呈现出接近最优的边缘锐度，

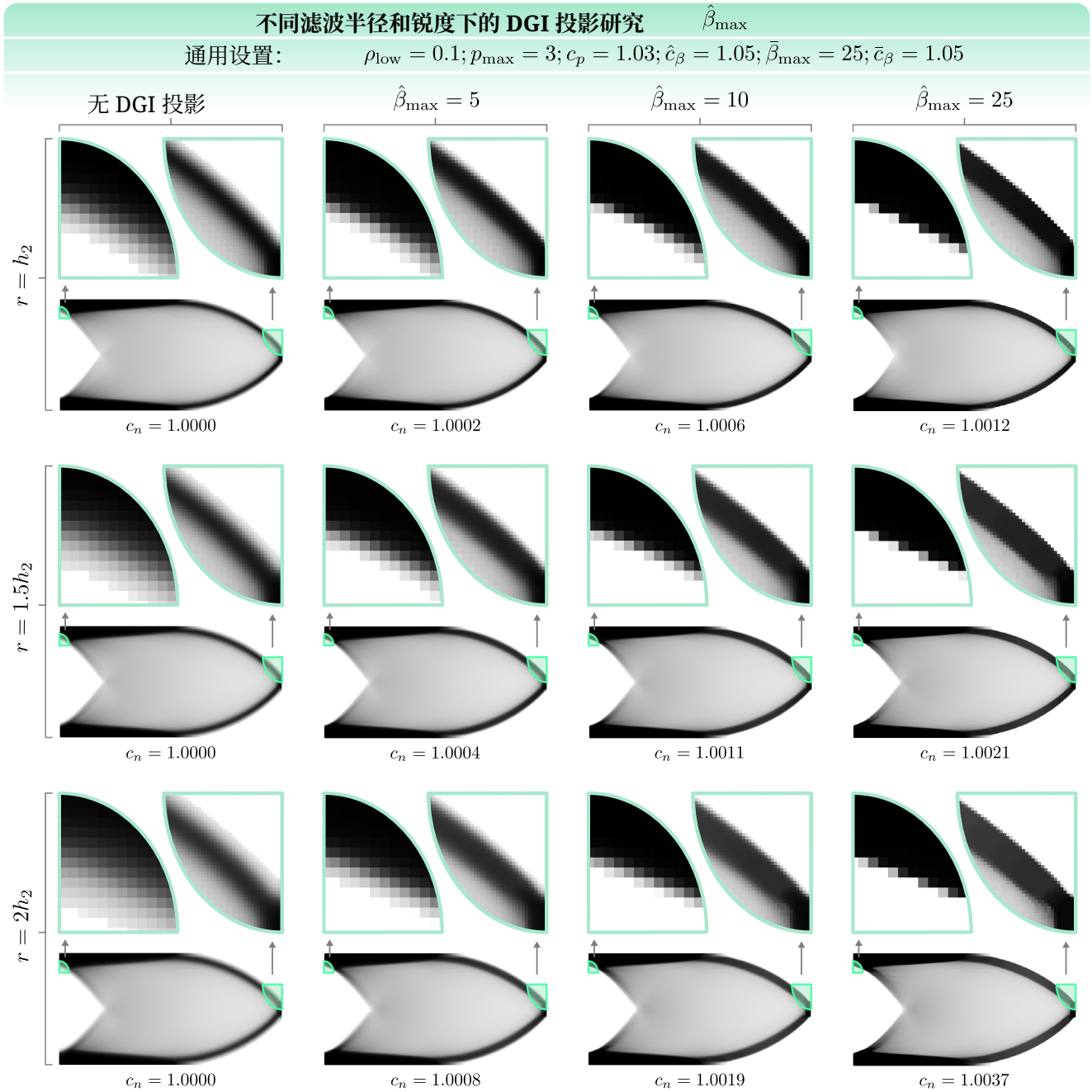


图 13：包含 DGI 投影的悬臂梁基准测试最终结构。该研究重点关注滤波半径与目标投影锐度 $\beta_{\max}$ 之间的关系。每种情况的下方均显示了归一化目标值。

考虑到第4.1节中的讨论，表明理想值应处于该范围内。因此，ˆ ˆ $\beta_{\max} = 10$ 与 $\beta_{\max} = 25$ 的取值是可ˆ接受的，而 $\beta_{\max} = 5$ 的取值未能提供足够的去模糊。此外，这一观察

这也表明，DGI 投影在很大程度上不受滤波半径影响，因为随着滤波半径增大，DGI 投影中的邻域 $N_r(e)$也会相应扩展，从而部分抵消模糊滤波器的影响。自然，

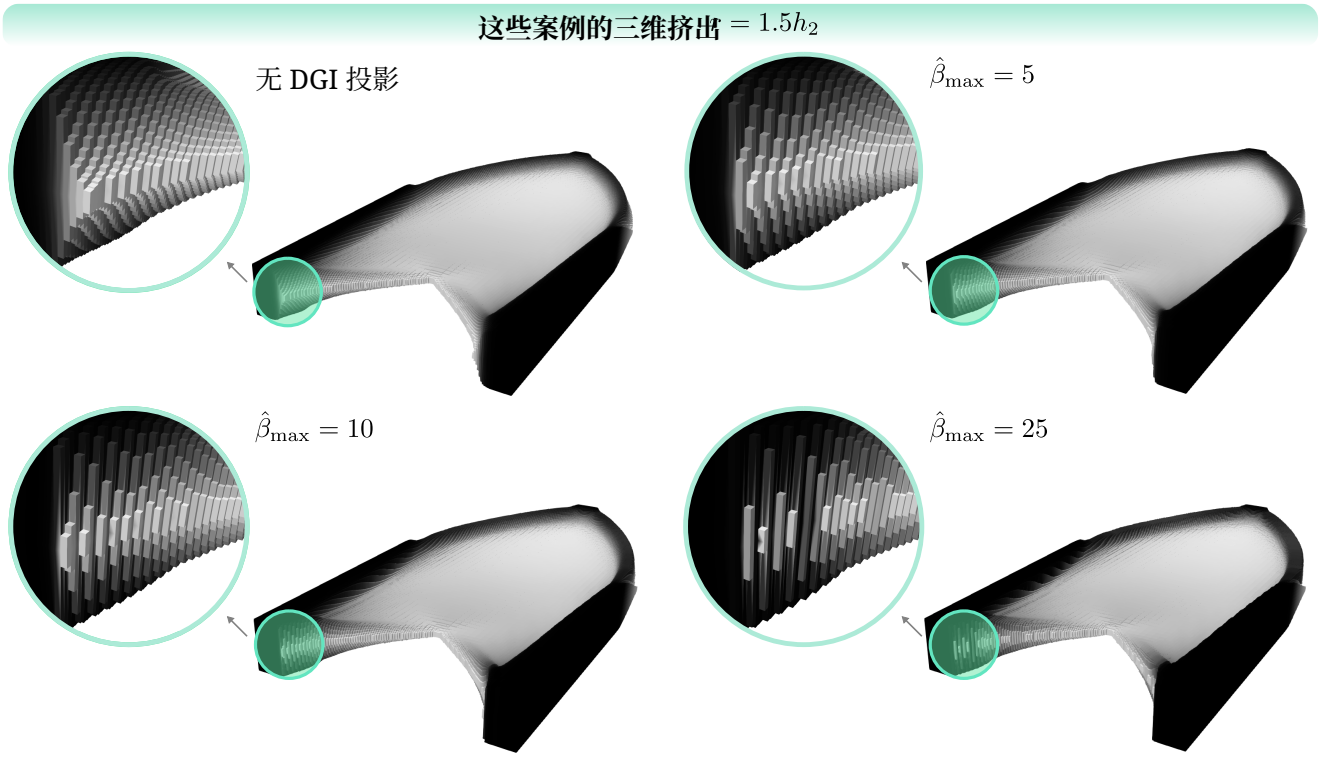


图 14：第 $r = 1.5h_2$ 行案例的三维解读，见图 13，其中包含代表性区域的局部放大图。三维解读通过将有限元单元按 $\bar{\rho}$ 值进行比例拉伸而生成。这种简单的三维渲染仅用于可视化。

边缘锐度的差异仍然可见，直至 $\beta_{\max} = 10$；严格来说，滤波器半径独立性并不能得到完全保证。

DGI 投影对结构内部的平坦区域几乎没有影响。然而，正如第二个局部放大图所示，密度变化相当陡峭（密度梯度较高）的区域会受到 DGI 投影的影响。另一方面，模糊滤波器也会显著平滑这些相同区域，这说明 DGI 投影在局部具有更强影响是合理的。重要的是，DGI 投影对目标值没有显著影响；在最激进的案例 $\hat{r}/\beta_{\max} = 2h_2/25$ 中，目标值的相对增幅最大，为 0.37%。这表明 DGI 投影是一种非侵入式正则化工具，不会显著影响设计空间。

$\hat{}$ 接下来，我们选取案例 $r/\beta_{\max} = 1.5h_2/10$，并绘制目标函数与延续参数的变化过程，见图15。我们可以区分出三个主要

$\hat{}^{-}$阶段： p延续、 β和 β联合延续（持续时间各不相同），以及微调阶段，在此阶段所有参数保持$\hat{}^{-}$不变，也就是说，该阶段在 β 和 β都停止更新后开始。采用我们的更新参数 c_p、$\hat{}c_\beta$ 和 $\bar{c}_\beta$时， p延续约需 40 次迭代。在此阶段，会形成粗略设计，且目标函数达到接近最终值。经过 β 和 β延续后，结构边缘清晰形成，任何低厚度密度都会被消除。微调阶段仅发生细微变化，直接比较时几乎难以察觉。

5 结论与展望

本研究解决了 VTTO 中的两项重大挑战：不理想低厚度区域的形成，以及必要的正则化滤波器导致的结构边缘模糊。

首先，我们提出了一种稳健的组合方法，用于消除低厚度区域。

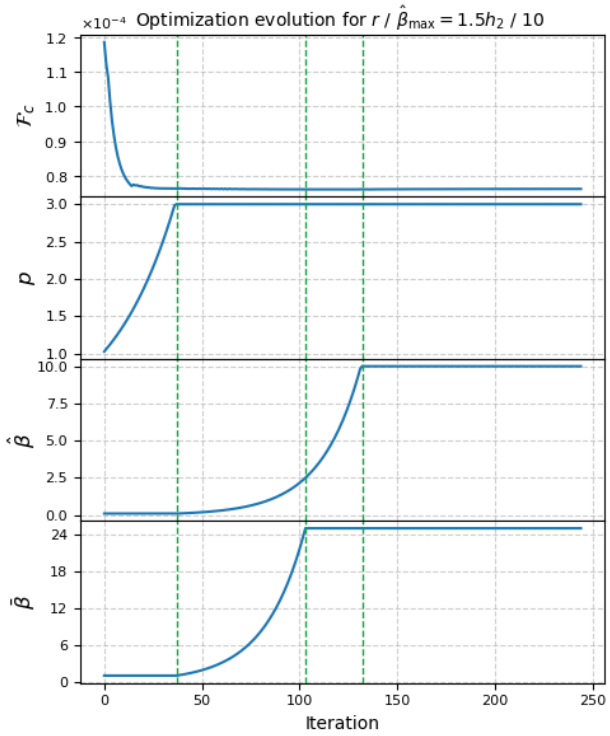


图 15：目标函数与延拓参数的演变——惩罚项 p、DGI 投影锐度 β 以及低厚度投影⁻ 锐度 β ——针对情形 $r/\beta_{\max} = 1.5h_2/10$。垂直条纹线标示延拓阶段之间的转换。请注意， $\beta_{\text{init}} = 0.1$ 和_$\beta_{\text{init}} = 1$。

该方法将针对低于阈值 ρ_{low} 的密度的基于SIMP的惩罚，与更新后的稳定的基于投影的抑制方法相结合。数值研究表明，采用顺序延续的这一组合策略能够有效去除几乎所有低厚度密度，证明其比单独使用惩罚或投影方法更加稳健。

其次，本研究的主要贡献是提出了一种新的密度梯度信息引导（DGI）投影，旨在解决结构边缘模糊的问题。该投影作用于模糊滤波器之后。其关键特点是利用密度梯度的局部信息（具体而言，即局部密度变化 d_r）来ˆ调整投影锐度 β。因此，DGI 投影会有选择地针对并锐化密度梯度较高的结构边缘。结构内部的密度梯度较低，因此受到的影响很小。

数值算例表明，DGI 投影成功消除了边缘模糊，恢复了从实体到空洞自然、锐利且“抗锯齿”的过渡。这避免了边缘固定在低厚度阈值 ρ_{low}处的伪影。一项关键发现是，边缘定义的显著改善对最终柔顺度目标的影响微乎其微。该方法具有非侵入性，可作为一种有价值的正则化工具。

未来的工作中，应将所提出的完整正则化流程应用于更复杂的问题，尤其是锐利结构边缘至关重要的情形。一个很有前景的方向是，在应力约束优化问题或具有奇异特征的问题（如 L 形梁）中研究该方法，因为模糊或低厚度边缘可能导致应力放大计算不准确。

致谢。 本项目由欧盟资助。本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行机构的观点和意见。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。本研究由欧洲研究委员会（ERC）通过地平线欧洲计划资助（资助编号：101052785，项目：SoftFrac）。



声明

作者贡献。概念构思：Gabriel Stankiewicz；方法论：Gabriel Stankiewicz；实现：Gabriel Stankiewicz 和 Chaitanya Dev；方法论的讨论与改进：全体作者；撰写——

初稿：Gabriel Stankiewicz；撰写——审阅与编辑：全体作者；经费获取：Paul Steinmann；资源：Paul Steinmann；监督：Paul Steinmann。

经费支持。 本研究得到欧洲研究理事会（ERC）地平线欧洲计划资助（资助编号：101052785，项目：SoftFrac）。

数据可用性。 代码版本、可执行文件、参数设置和结果文件可向通讯作者索取。

利益冲突。 通讯作者代表所有作者声明不存在利益冲突。

伦理审批。 本研究不涉及人类参与者、动物受试对象，也不存在需要机构审批的伦理问题。

结果复现。 本文所述的全部方法论均使用 C 实现 ++，并采用有限元库 deal.II（Bangerth 等, 2007；Arndt 等，2021）。代码版本、可执行文件、参数设置和结果文件可向通讯作者索取。

参考文献

Arndt, D., Bangerth, W., Davydov, D., Heister, T., Heltai, L., Kronbichler, M., Maier, M., Pelteret, J.-P., Turcksin, B., Wells, D.：deal. ii 有限元库：设计、特性与见解。《计算机与应用数学》**81**,407–422 (2021)

Bendsøe, M.P.：将形状优化视为材料分布问题。结构优化**1**, 193–202 (1989)

Bangerth, W., Hartmann, R., Kanschat, G.：deal. ii——通用面向对象有限元库。《ACM 数学软件汇刊（TOMS）》**33**(4), 24 (2007)

Bendsøe, M.P., Kikuchi, N.：采用均匀化方法生成结构设计中的最优拓扑。《计算力学与工程中的计算方法》**71**(2)，197–224（1988）

Banh, T.T., Lee, D.：多种材料多方向变厚度薄板的拓扑优化。《结构与多学科优化》**59**，1503–1520（2019）

Endress, F., Zimmermann, M.：利用灰度密度拓扑优化设计用于增材制造的可变厚度薄片。载于：增材制造在产品与应用中的国际会议，pp. 63–76 (2023). 施普林格

Geoffroy-Donders, P., Allaire, G., Michailidis, G., Pantz, O.：宏观结构与晶格填充的耦合优化。《国际工程数值方法期刊》**123**(13), 2963–2985 (2022)

Giele, R., Groen, J., Aage, N., Andreasen, C.S., Sigmund, O.：关于避免变厚度板材和基于均匀化的拓扑优化中低刚度区域的方法。《结构与多学科优化》**64**(1),39–52 (2021)

Groen, J.P., Sigmund, O.：用于高分辨率、可制造微结构的基于均匀化的拓扑优化。《国际工程数值方法期刊》**113**(8), 1148–1163 (2018)

Kim, N.H., Dong, T., Weinberg, D., Dalidd, J.：用于拓扑优化的广义最优性准则法。《应用科学》**11**(7), 3175 (2021)

Kandemir, V., Dogan, O., Yaman, U.：采用变厚度方法和 SIMP 方法对 2.5D 零件进行拓扑优化。ProcediaManufacturing **17**, 29–36 (2018)

Kashanian, K., Kim, I.Y.：一种对非层合结构进行厚度与材料同步优化的新方法。Structural and Multidisciplinary Optimization **64**(3), 1421–1437 (2021)

Li, H., Luo, Z., Gao,L., Qin, Q.：基于水平集的多分块微结构结构并发设计拓扑优化。《应用力学中的计算方法》

《工程》 **331**, 536–561 (2018)

Lazarov, B.S., Sigmund, O.：基于 Helmholtz 型微分方程的拓扑优化滤波器。《工程数值方法国际期刊》**86**(6), 765–781（2011年）

Larsen, S., Sigmund, O., Groen, J.：基于投影均匀化的拓扑优化进行桁架与框架的优化设计。《结构与多学科优化》**57**，1461–1474（2018） Michell, A.G.M.：第 58 篇：框架结构中材料节约的极限。《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》**8**(47)，589–597（1904） Meng, X., Xiong, Y., Xie, Y.M., Sun, Y., Zhao, Z.-L.：自由曲面壳体的形状–厚度–拓扑耦合优化。《建筑自动化》**142**，104476（2022） Nguyen, M.N., Bui, T.Q.：变厚度板材的多材料无梯度比例拓扑优化分析。《结构与多学科优化》**65**(3), 75（2022） Pozo, S., Golecki, T., Gomez, F., Carrion, J., Spencer Jr, B.F.：应用于结构设计的 2.5D 拓扑优化最小厚度法。《工程结构》 **286**, 116065（2023） Rossow, M., Taylor, J.：变厚度板材优化设计的有限元法。《美国航空航天学会期刊》**11**(11)，1566–1569（1973） Sigmund, O., Aage, N., Andreassen, E.：论Michell结构的（非）最优性。《结构与多学科优化》**54**，361–373（2016） Stankiewicz, G., Dev, C., Steinmann, P.：柔顺机构的几何非线性设计：结合应力与曲率约束的拓扑和形状优化。《应用力学中的计算方法与工程》**397**, 115161（2022）

Stankiewicz, G., Dev, C., Steinmann, P.：拓扑优化中的构形力驱动自适应细化与粗化。《结构与多学科优化》**68**(8)，1–15（2025） Stankiewicz, G., Dev, C., Steinmann, P.：一种平衡结构性能与可制造性的新型多厚度拓扑优化方法。arXiv预印本 arXiv:2507.19388（2025） Stegmann, J., Lund, E.：常规复合材料壳结构的离散材料优化。《国际工程数值方法期刊》**62**(14)，2009–2027（2005） Sjølund, J., Peeters, D., Lund, E.：一种用于离散材料与厚度优化的新型厚度参数化方法。《结构与多学科优化》**58**，1885–1897（2018） Sørensen, S.N., Sørensen, R., Lund, E.：DMTO——一种用于层合复合材料结构离散材料与厚度优化的方法。《结构与多学科优化》**50**(1)，25–47（2014） Wang, F., Lazarov, B.S., Sigmund, O.：论拓扑优化中的投影方法、收敛性与稳健公式。《结构与多学科优化》**43**(6)，767–784（2011） Wang, M.Y., Wang, X., Guo, D.：一种用于结构拓扑优化的水平集方法。《应用力学中的计算方法与工程》**192**(1-2)，227–246（2003） Yarlagadda, T., Zhang, Z., Jiang, L., Bhargava,P., Usmani, A.：带厚度惩罚的固体各向同性材料——一种用于结构拓扑优化的 2.5D 方法。《计算机与结构》**270**，106857（2022） Zhao, H., Xu, W., Zhou, K., Yang, Y., Jin, X., Wu, H.：用于壳体构件制造的应力约束厚度优化。载于：《计算机图形论坛》，第 36 卷，第 368–380 页（2017）。Wiley在线图书馆