arXiv:2603.09848v1 [physics.app-ph] 10 Mar 2026

具有邻居可编程能量景观的机械超材料中的转变波

E. Duval, [1,*] G. Risso, [2,*] A. Zhang, [2,3] V. Tournat, [1,2] 和 K. Bertoldi[2]

[1] *Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM), UMR 6613, Institut d'Acoustique - Graduate School (IA-GS), CNRS, Le Mans Université, France*

[2] *School of Engineering and Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138, USA*

[3] *Department of Mechanical & Industrial Engineering,University of Toronto, Toronto, ON M5S 3G8, Canada*

机械超材料中的转变波表现为由耦合的内禀双稳态元件阵列组成的晶格中不同稳定态之间传播的界面。在此，我们通过实验和数值模拟表明，由弹性单胞构成的阵列提供了一个丰富且在很大程度上尚未探索的平台：这些单胞各自呈单稳态，但其能量景观可通过与邻近单元的相互作用进行编程。我们通过设计一种由冯·米塞斯桁架和两根竖直弹性梁组成的晶胞来实现这一概念。在此类单元构成的一维阵列中，我们证明，每个单胞的能量景观都可根据其邻居的状态从单稳态转变为双稳态。这种邻居可编程能量景观使转变波能够受控地启动和传播，从而产生高度离散、无方向偏好的多米诺骨牌式波传播。实验和数值模拟表明，波的存在与速度由几何设计和质量分布决定。我们的研究确立了邻居效应作为转变波传播的一种独特机制，使机械超材料的设计空间得以拓展，超越了依赖内禀多稳态构筑单元的结构。

在由双稳态元件阵列构成的机械超材料中，一个单元从一种平衡构型切换到另一种构型，可以触发相邻单元发生相同的转变。这一连续过程会产生转变波——一种在晶格中传播、将处于不同状态的区域分隔开来的移动前沿。因此，机械超材料中的转变波传播传统上依赖两个关键要素：单元层级的双稳态，以及相邻元件之间足够强的耦合。

人们已探索多种双稳态结构来实现这种行为，包括梁 [1–7], 嵌有磁体的旋转方形单元 [8, 9] 以及壳体 [10]。同样关键的是连接相邻单元的机制。人们已采用多种相互作用策略，包括磁力 [1, 4, 11–13], 弹性弹簧 [3, 14], 或连续体梁 [15], ，这些策略都旨在将切换事件从一个单元传递到下一个单元，从而维持波传播。

在此，我们提出一种用于转变波传播的新平台：其能量景观可通过与相邻单元的相互作用进行编程 [16–20]。在这些系统中，每个单元的有效能量景观并非完全由其自身决定而是取决于相邻元件的变形状态。我们表明，这种由邻居介导的相互作用会自然引发转变波。我们聚焦于由柔性梁连接的冯·米塞斯桁架单元一维阵列，结合实验与数值模拟，展示转变波的传播，并考察波速如何取决于定义晶胞的几何参数。总之，这些发现确立了邻居诱导的相互作用是机械超材料中转变波传播的一种新机制。

我们的结构由一个面外厚度为 t_{out}的重复单胞一维阵列构成。每个单胞包含一个冯·米塞斯桁架，其底部与两根竖直弹性梁相连；梁长为 l_{beam} 、宽为w_{beam}，间距为 d （图 1a）。冯·米塞斯桁架由两根长度为 l_{strut} 、宽度为 w_{strut}的相同支杆组成，它们相对于水平方向以 θ_0 角对称排列。这些支杆通过宽度为 h的渐缩铰链与竖直梁和一个宽为 w_{tab}、高为 l_{tab}的矩形拉片相连，该拉片用于便于施加载荷。如图 1b 所示，冯·米塞斯桁架可能具有两种不同的稳定平衡态：自然无应力的向上状态 和倒置的向下状态。在本研究中，我们将几何参数固定为 $t_{\mathrm{out}} = 10$ mm、 $w_{\mathrm{strut}} = 3$ mm、 l_{strut} =11 mm、 $w_{\mathrm{tab}} = 6$ mm、 $d = 18.4$ mm 和 $l_{\mathrm{beam}} = 15$ mm，由此得到 $\theta_0 = \arccos[(d - w_{\mathrm{tab}})/(2l_{\mathrm{strut}})] = 55.7°$ 和

* E. Duval 和 G. Risso 对这项工作贡献相同。

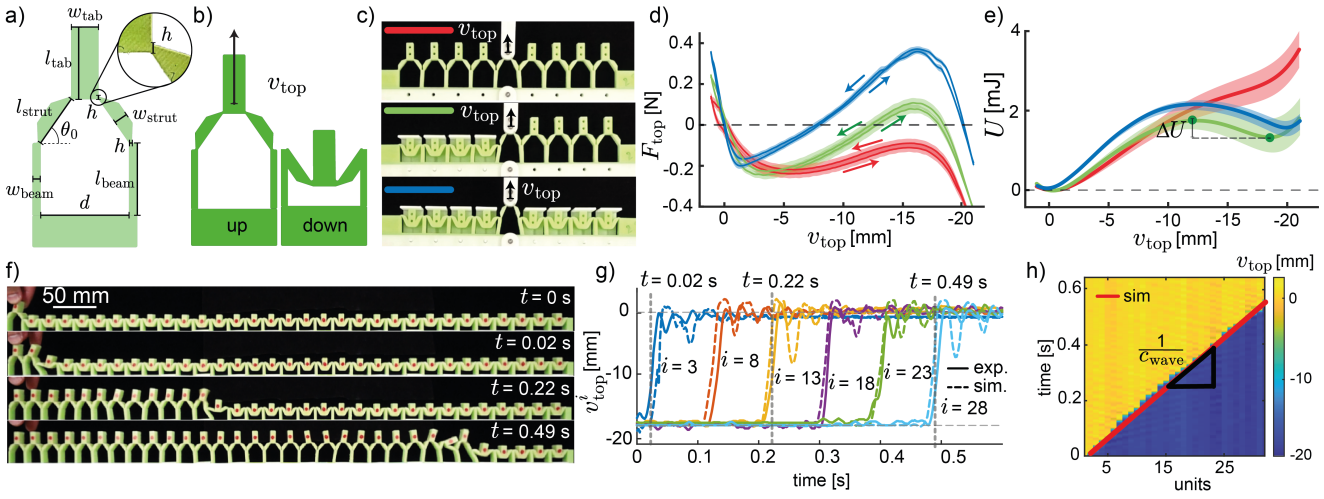

图 1. **邻居可编程能量景观机械超材料中的相变波。a)** 晶胞示意图。b)冯·米塞斯桁架具有两种不同的稳定平衡态：自然无应力状态 *up state* 和倒置 *down state* 状态。**c)** 力学表征测试的实验快照。对中心单元的拉片施加位移，同时 **(i)** 所有相邻单元均处于向上状态（红色），**(ii)** 左侧相邻单元处于向下状态，右侧相邻单元处于向上状态（绿色），以及 **(iii)** 所有相邻单元均处于向下状态（蓝色）。**d)** 实验测量的力–位移曲线。**e)** 对应的能量景观。**f)** 展示相变波沿由 32 个单元构成的超材料传播过程的连续快照，包含四个具有代表性的时间点。**g)** 所选单元 i垂直位移 v_{top}^{i} 时间演化的实验结果（实线）和数值结果（虚线）。**h)** 时空位移图。补充视频1提供了对应的实验和数值影像。

探究 h和 w_{beam}的影响。

结构采用低黏度硅酮弹性体（Zhermack Elite Double 32A，杨氏模量为 $E = 1.3$ MPa，泊松比为 $\nu = 0.5$，密度为 $\rho = 1200$ kg/m^3）通过模塑制成，这种材料可实现大幅且可逆的变形（详情见补充材料 B 节）。为表征其力学响应，我们对 9单元样品进行准静态测试。测试中，结构底部刚性固定在坚硬基底上，而中心单元的拉片则与平移台相连（图 1c）。平移台以恒定速度 2 mm/s 对中心单元施加竖直位移 v_{top}，起始状态为无应力的向上状态（详情见补充材料 C 节）。图 1c 和 1d 展示了$h = 0.7$ mm、 $w_{\mathrm{beam}} = 1.4$的样品，并分别报告测得的反作用力 F_{top} 及相应势能 U 随 v_{top}变化的情况。势能定义为 $\partial U/\partial v_{\mathrm{top}} = -F_{\mathrm{top}}$，并通过对测得的力–位移数据进行数值积分得到；参考值选取为使$U(v_{\mathrm{top}} = 0) = 0$。当所有单胞均处于无应力的向上状态时，向下推动中心单元的冯·米塞斯桁架，最终会使其突然跃迁至倒置状态，这一点可从记录到的非单调力–位移响应（图 1d 中的红色曲线）。 F_{top}始终为负值，而 U 在 $v_{top} = 0$处出现一个极小值，表明只有向上状态是稳定的。相比之下，当使用卡舌将所有未驱动的冯·米塞斯桁架保持在向下状态 时， F_{top} 穿过零点，且 U 在 v_{top}=0 mm 和 -18.2 mm 处出现两个极小值，两者之间由能垒隔开，这表明中心冯·米塞斯桁架变为双稳态（图 1d–e 中的蓝色曲线）。这是因为处于向下状态的冯·米塞斯桁架会迫使相连的竖直梁向外弯曲，限制相邻桁架的水平运动，从而促进其双稳态。最后，当使用卡舌将中心单元一侧的冯·米塞斯桁架保持在向下状态 时，中心冯·米塞斯桁架变为临界双稳态，因为相应的能垒大幅降低（图 1d–e 中的绿色曲线）。这些观察结果表明，对于所研究的结构，相邻单元的状态会显著影响中心单元的能量景观。

由于每个晶胞会根据相邻单元的状态，从单稳态转变为临界双稳态，再转变为完全双稳态，因此该结构为转变波的传播提供了一个天然平台。在图1f中，我们考察了一个由32个单元组成的超材料，其中 h =0.7 mm，且 $w_{\mathrm{beam}} = 1.4$ mm。我们将系统初始化为

所有冯·米塞斯桁架均处于向下状态，与相邻单元的相互作用确保了这一构型的稳定性。然而，当某个单元的冯·米塞斯桁架被抬起时，相邻单元的冯·米塞斯桁架便变为临界双稳态，而这一状态变化引入的扰动足以使其向下状态失稳，并触发其转变为上构型。反过来，这又使下一个单元变为临界双稳态，从而触发连续的级联响应（见图1f和补充视频1）。结果，多米诺式转变波在结构中传播，各单元依次弹起至向上状态。为量化这一行为，我们在每个单元的拉片上标记一个红点，使用高速摄像机记录实验（Sony RX100V，录制速度为480帧/秒），并通过自编MATLAB脚本提取标记点的竖直位移。在图1g中，我们报告了选定晶胞的跟踪位移 v_{top} 随时间的演变。我们发现，该波以离散的阶梯式方式传播，宽度为一个单元。此外，图1h中相应的时空图显示，该波以恒定速度传播，测得速度为$c_{\mathrm{wave}} = 54.1$ 个单元/秒。

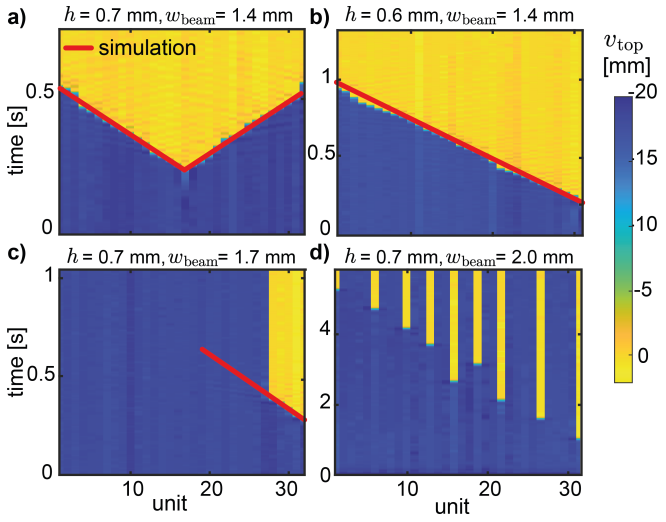

图2. **几何构型对波传播的影响**。所研究的四种几何构型的时空位移图，并叠加相应的数值预测结果（红线）。补充视频2展示了相关实验记录。

转变波能够沿两个方向稳健地穿过样品传播，这意味着波可以沿链朝任一空间方向传播（实验结果见补充视频 2）。向上拉动中心单元时，会产生两列转变波，以相同的速度 $c_{\mathrm{wave}} = 54.1$ units/s 从驱动位置向外传播（图 2a）。晶胞的几何形状会显著影响超材料的波传播行为。例如，当 h 减小至 0.6 mm，而梁宽 w_{beam} 保持在 1.4 mm 时，与图 1 所示结构类似，每个晶胞会根据相邻单元的状态，从单稳态转变为临界双稳态，再转变为完全双稳态（图 S6-S10）。在这些条件下，转变波仍会传播，但速度降至$c_{\mathrm{wave}} = 40.1$ units/s。相反，当 $h = 0.7$ mm 保持不变且 w_{beam} 逐渐增大时，波起初只以 $c_{\mathrm{wave}} = 37.2$ units/s 的速度传播经过少数几个单元（图2c和图 S10），最终则完全无法起始（图 2d）。这是因为 w_{beam} 增大会提高从向下状态切换到向上状态所需克服的能垒，使得即使中心单元一侧的冯·米塞斯桁架处于向下状态，晶胞仍呈双稳态（图 S7-S10）。随着这一能垒增大，无论相邻单元处于何种构型，晶胞最终都会呈双稳态（图 S8-S10），从而完全阻止波传播。

为系统研究几何如何影响系统的动态响应，我们引入一个弹簧-质量模型，以刻画实验中观察到的主要变形机制。如图3a所示，每个晶胞由两个集中质量表示，二者通过线性轴向弹簧与扭转弹簧网络相连。集中质量 m^i_{bot} 仅具有单一自由度（水平位移 u^i_{beam}），位于第 i个晶胞左侧竖向梁的顶部，代表该竖向梁的质量以及两根相邻倾斜支杆质量的一半。第二个集中质量 m^i_{top} 位于 i^{th} 垂直拉片的底部，具有两个自由度（水平位移 u^i_{top} 和竖向位移 v^i_{top}）。它代表位于每个晶胞顶部的垂直凸片的质量以及相邻倾斜支杆质量的一半。就弹簧而言，第 i个晶胞包括：（i）两根刚度为 k_{strut}的轴向弹簧，表示倾斜支杆在载荷作用下的伸长与压缩；（ii）一根刚度为k_{beam}的轴向弹簧，表示竖向梁在侧向加载下的横向变形；以及（iii）四根刚度为 k_θ的扭转弹簧，用于模拟支杆与拉杆或竖直基梁连接处薄连接筋的响应。 k_{strut} 和 k_{beam}确定为 $k_{\mathrm{beam}} = 3Et_{\mathrm{out}}(2w_{\mathrm{beam}})^3/(12l^3_{\mathrm{beam}})$和 $k_{\mathrm{strut}} = Et_{\mathrm{out}}w_{\mathrm{strut}}/l_{\mathrm{strut}}$，而 k_θ 则根据准静态实验数据进行拟合（见补充材料

D3节了解详情）。该弹簧-质量系统的运动方程可写为：

$$m^i_{\text{top}}\mathbf{a}_{\text{top}} = -\mathbf{F}^i_{\text{strut},l} - \mathbf{F}^i_{\text{strut},r} + \mathbf{F}^i_{\theta,\text{top}} + c_{\text{top}}\dot{u}^i_{\text{top}} \quad (1a)$$

$$m^i_{\text{bot}}\,\ddot{u}^i_{\text{beam}} = \left(\mathbf{F}^i_{\text{strut},l} + \mathbf{F}^i_{\text{strut},r} + \mathbf{F}^i_{\text{beam}}\right)\cdot\mathbf{e}_x + F^i_{\theta,\text{bottom}} + c_{\text{beam}}\dot{u}^i_{\text{beam}} \quad (1b)$$

其中$\mathbf{a}_{\text{top}} = [\ddot{u}^i_{\text{top}}\ \ddot{v}^i_{\text{top}}]$ 和$\mathbf{F}^i_{\text{strut},l}$ 以及$\mathbf{F}^i_{\text{strut},r}$ 分别表示冯·米塞斯桁架倾斜的左右支杆变形所产生的轴向恢复力。此外，$\mathbf{F}^i_{\text{beam}}$ 表示由 k_{beam} 作用于 m^i_{bot} 和$F^i_{\theta,\text{top}}$所产生的水平力，而$\mathbf{F}^i_{\theta,\text{bottom}}$ 分别表示铰链处转动弹簧作用于顶部和底部质量所产生的力矩诱导力。最后，尽管弹性体表现出复杂的耗散行为，我们仍采用线性黏性阻尼模型来近似这一行为，其线性粘性阻尼系数为 $c_{\text{beam}} = 0.022$ N·s/m和 $c_{\text{top}} = 0.016$ N·s/m，这些系数通过将我们的模型拟合到实验数据来确定（详见补充材料D1节）。

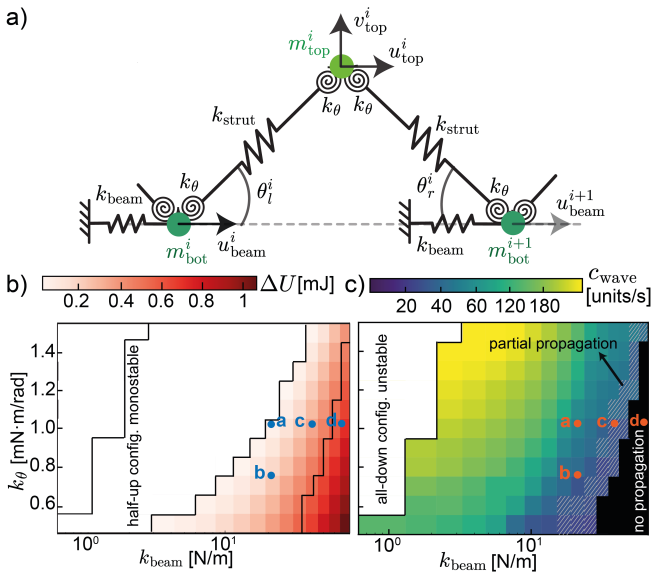

图3. **设计空间的系统探索。a)** 质量-弹簧模型示意图。**b)** 能垒 ΔU 随 k_θ 和 k_{beam}变化的数值预测演化。**c)** 波速 c_{wave} 随 k_θ 和 k_{beam}变化的数值预测演化。红色和蓝色标记表示图2中所考虑的四个实验结构，标签（a–d）对应于其中所示的各分图。

在我们的模拟中，我们考虑一条由 N 个单胞组成的链，并假设在时刻 $t = 0$ 所有单元均处于其向下构型。为触发波传播，我们在 $t = 0$ 处通过对第 i个单元施加 $v^i_{\text{top}}(0) = -1$ mm的扰动，并使用 JAX [21]中的odeint 求解器对方程(1b)进行数值积分，该求解器采用自适应步长龙格-库塔法。如图1和图2以及补充视频1所示，该模型准确再现了传播过程中各个单元的垂直位移以及不同几何构型下测得的传播速度，从而证实了我们方法的有效性。

接下来，我们利用该模型研究几何如何影响能量景观和相变波的传播，并模拟参数为 $k_\theta \in [0.5, 1.5]$ mN · m/rad和 $k_{\text{beam}} \in [1, 71]$ N/m的系统的响应。在图3b中，我们给出了与从向下状态到向上状态的转变相关的能垒 ΔU的数值预测演化；该转变对应于如下构型：中心单元一侧的冯·米塞斯桁架保持在向下状态，另一侧的桁架保持在向上状态（见图1e）。

在图3c中，我们给出了相应的数值预测波速 c_{wave}。我们发现，当 k_{beam}较小时，不存在能垒，即 $\Delta U \leq 0$，且与 k_θ无关。当 k_{beam}足够小时，即使所有其他单元均处于向下状态，该单元仍为单稳态；在此范围内，不可能发生相变波传播（图3c中的白色区域）。当 k_{beam} 略有增大时，在所有单元均处于向下状态的情况下，该单元变得稳定，但当一侧单元处于向下状态而另一侧单元处于向上状态时，它仍保持单稳态，因此ΔU 仍为 ≤ 0。在此范围内，波可以以极高速度传播，因为一旦某个相邻单元突跳至向上状态，相邻的向下单元便立即失去稳定性。

随着 k_{beam}进一步增大，无论所有单元均处于向下状态，还是一侧单元处于向下状态而另一侧单元处于向上状态，该单元都会变为双稳态。能垒的大小 ΔU随 k_{beam}单调增大，且仅受 k_θ的微弱影响。随着 ΔU增大，波速 c_{wave} 降低，最终波传播仅能在有限数量的单元上维持（图3c中的虚线区域）。图2c中所考虑的结构属于这一范围。当 k_{beam}足够大时，无论其相邻单元的构型如何，该单元都会变为双稳态，从而抑制相变波传播（图3c中的黑色区域）。

图3b中的结果表明，通过调整晶胞的几何形状，可以调节 c_{wave}。虽然这需要制造新的结构，但也可以通过改变冯·

米塞斯桁架的质量，按需调节波速。这种策略还可实现空间变化控制：通过有选择地改变各个单元的质量，可以对局部传播速度进行调整。为此，我们研究了图1所示的32单元结构（$h = 0.7$ mm和 $w_{\text{beam}} = 1.4$ mm），并通过实验和数值方法，考察垂直拉片质量变化时的跃迁波传播。

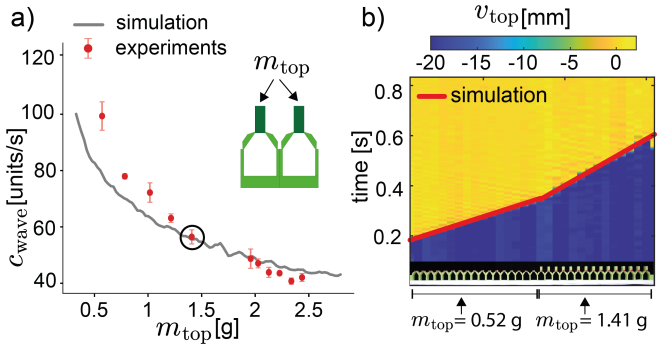

图 4. **按需调节波速**。所有结果均对应于具有 $h = 0.7$ 毫米和 $w = 1.4$ 毫米的结构。**a)** 波速随垂直拉片质量 m_{top}变化的数值预测与实验测量结果 c_{wave} 。参考实验数据点以圆圈突出显示。**b)**具有两种不同质量的结构的时空位移图：$\forall j \in [1, 17]$, m^j 顶部 $= 0.52$ 克，以及 $\forall j \in [18, 32]$, m^j 顶部 $= 1.41$ 克（见补充视频 3）。

在实验中，通过在拉片上附加小型 3D打印配重，或对拉片进行修剪以减小其质量来改变质量（见图 S16），从而实现 $m_{\text{top}} \in [0.57, 2.44]$ 克的范围。在模拟中，质量变化范围略大，为 $m_{\text{top}} \in [0.33, 2.8]$ 克。如图 4 所示，实验和模拟均表明，随着 m_{top}减小， c_{wave} 单调增加。在实验中，对于 $m_{\text{top}} = 0.57$ 克，波速范围为 92.9 单元/秒；对于 $m_{\text{top}} = 2.44$ 克，波速为 40.8 单元/秒。此外，仅减小 32单元链一半部分的 m_{top}，会导致结构中的波速发生显著变化：在具有 $m_{\text{top}} = 0.52$ 克的结构左半部分，波速为 $c_{\text{wave}} = 74.9$ 单元/秒；而在具有 $m_{\text{top}} = 1.41$ 克的结构右半部分，波速为 $c_{\text{wave}} = 53.7$ 单元/秒（图 4b 和补充视频 3）。这一结果表明，对质量分布进行局部调节，为空间控制波传播提供了一种实用手段。

总之，我们提出了一种机械超材料，其中转变波并非源自本征双稳态单元，而是源自能量景观通过与其邻近单元的相互作用加以编程的构件。我们采用由柔性梁连接的冯·米塞斯桁架单元阵列，通过实验和数值分析证明，每个晶胞都能根据相邻单元的状态从单稳态转变为双稳态，从而实现速度可调、受控的多米诺式波传播。弹簧-质量模型能够准确捕捉其动力学，并阐明几何和质量分布如何决定波是否存在及其速度，由此确立了在机械超材料中实现转变波的一种新机制。我们进一步探讨了按需调节波速的策略。虽然图4显示可以通过改变冯·米塞斯桁架的质量来实现这一点，但也存在其他可行方法。例如，引入基底曲率会改变相邻单元间的有效耦合，从而提供另一种控制传播速度的方式（见《补充材料》B节）。

更广泛地说，我们的研究结果确立了邻居诱导的可重编程稳定性，作为机械超材料中实现全局重构的一种通用机制。由于这一概念仅依赖于弹性耦合和几何相容性，因此很容易扩展到高维架构 [22], ，为平面和三维超材料系统中的可编程波功能开辟途径。重要的是，与此前研究的平台不同[1–5], ，在我们的系统中，与状态切换相关的位移方向与波的传播方向正交。这一独特特性赋予系统额外的功能。例如，该链可缓解来自上方的冲击所产生的脉冲 [23–25], ，其中受冲击影响的单元数量由冲击几何形态决定，而能量吸收和冲击后的构型则由单元的势能景观和冲击特性共同决定。这些相互耦合的依赖关系可用于表征冲击、识别物体以及定位冲击事件。

数据可用性声明

本研究实验结果所依据的数据可在合理请求后向通讯作者获取。支持数值结果的代码，包括动力学模拟、准静态力-位移模拟，以及用于追踪超材料波传播的实验视频后处理代码，均已公开提供 [26]。

致谢

G.R.感谢瑞士国家科学基金会的资助，资助号为P500PT-217901。E.D. 感谢勒芒大学声学研究所研究生院（Institut d’Acoustique - Graduate School）提供经费支持（IA-GS，编号：17-EURE-0014）。K.B. 感谢西蒙斯对称性极端波现象合作项目的支持

[1] N. Nadkarni、C. Daraio和D. M. Kochmann，《物理评论E》**90**，10.1103/PhysRevE.90.023204（2014年）。[2] N. Nadkarni、A. F. Arrieta、C. Chong、D. M. Kochmann和C. Daraio，《物理评论快报》**116**，10 1103 116 244501 2016年 . /PhysRevLett. . ( )。[3] J. R. Raney、N. Nadkarni、C. Daraio、D. M. Kochmann、J. A. Lewis和K. Bertoldi，《美国国家科学院院刊》**113**，9722（2016年）。[4] M. Hwang和A. F. Arrieta，《科学报告》**8**，10 1038 41598 018 22003 7 2018年 . /s - - - ( )。[5] L. Jin、R. Khajehtourian、J. Mueller、A. Rafsanjani、V. Tournat、K. Bertoldi和D. M. Kochmann，《美国国家科学院院刊》**117**，2319（2020年）。[6] M. Bonthron和E. Tubaldi，多稳态机械超材料中的过渡波干涉（2025年）。[7] E. Bronstein、D. Ilssar、V. Kannan和D. M. Kochmann，《实验力学》10.1007/s11340- 025-01258-y（2025年）。[8] H. Yasuda、L. M. Korpas和J. R. Raney，《物理评论应用》**13**，10.1103/PhysRevApplied.13.054067（2020年）。[9] H. Yasuda、H. Shu、W. Jiao、V. Tournat和J. R. Raney，《应用物理快报》**123**，051701（2023年），。[10] N. Vasios、B. Deng、B. Gorissen和K. Bertoldi，《自然·通讯》**12**，10.1038/s41467-020-20698-9（2021年）。[11] O. R. Bilal、A. Foehr和C. Daraio，《美国国家科学院院刊》**114**，4603（2017年）。[12] A. Ray、S. Anand、V. Dabade和R. Chaunsali，《物理评论材料》10.1103/PhysRevMaterials.9.014405（2024年）。[13] A. Pal和M. Sitti，《美国国家科学院院刊》**120**，10 1073 2212489120 2023年 . /pnas. ( )。[14] M. J. Frazier和D. M. Kochmann，《先进材料》**29**，1605800（2017年）。[15] D. Jin、S. Ferracin、V. Tournat、S. Patel、P. K. Purohit和J. R. Raney，《物理评论应用》**25**，014064（2026年）。[16] L. Wu和D. Pasini，《先进材料》（佛罗里达州迪尔菲尔德海滩）**35**，e2301109（2023年）。[17] G. Risso、L. Pesaresi、A. Meeussen和K. Bertoldi，《极端力学快报》**79**，102393（2025年）。[18] L. Wu和D. Pasini，《固体力学与物理学杂志》**210**，106544（2026年）。[19] L. Wu、S. Chen、A. E. Acha和D. Pasini，《先进材料》**38**，e09940（2026年）。[20] M. N. Hasan, T. E. Greenwood, S. Paul, B. Deng, Q. Liu, Y. L. Kong 和 P. Wang，《物理评论应用》**25**, 014029（2026年）。[21] J. Bradbury, R. Frostig, P. Hawkins, M. J. Johnson, C. Leary, D. Maclaurin, G. Necula, A. Paszke, J. Vander-Plas, S. Wanderman-Milne 和 Q. Zhang，JAX：Python+NumPy 程序的可组合变换，谷歌（2018年）。[22] W. Jiao, H. Shu, V. Tournat, H. Yasuda 和 J. R. Raney，《自然·通讯》**15**, 10.1038/s41467-023-44293-w（2024年）。[23] R. S. Lakes, T. Lee, A. Bersie 和 Y. C. Wang，《自然》**410**, 565（2001年）。[24] S. Shan, S. H. Kang, J. R. Raney, P. Wang, L. Fang, F. Candido, J. A. Lewis 和 K. Bertoldi，《先进材料》**27**, 4296（2015年）。[25] C. Morris, L. Bekker, C. Spadaccini, M. Haberman 和 C. See persad，《先进工程材料》**21**, 1900163（2019年）。[26] E. Duval，跟踪与仿真代码，
h
t
t
p
s://
git
hub.com/distinctement/neighbor-programmable-transition-waves
（2026年）。[27] R. D. Blevins，*Formulas for natural frequency and mode shape* 1979 （Van Nostrand Reinhold Co.）。[28] S. P. Timoshenko, J. M. Gere 和 W. Prager，《应用力学杂志》**29**, 220（1962年）。[29] A. Zareei, B. Deng 和 K. Bertoldi，《美国国家科学院院刊》**117**, 4015（2020年），https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.1917887117。

补充信息

具有邻居可编程能量景观的机械超材料中的转变波

E. Duval、G. Risso、A. Zhang、V. Tournat 和 K. Bertoldi

A. 几何

本研究中制造的所有结构均由一维（1D）单胞阵列构成，这些单胞具有图 S1 所示的相同几何形状。整个研究过程中，以下几何参数保持不变： $t_{\mathrm{out}} = 10$ mm、$w_{\mathrm{strut}} = 3$ mm、 $l_{\mathrm{strut}} = 11$ mm、 $w_{\mathrm{tab}} = 6$ mm、 $d = 18.4$ mm 和 $l_{\mathrm{beam}} = 15$ mm。我们探索了不同的竖梁宽度（w_{beam}）和铰链厚度（h）组合，汇总见表 I。

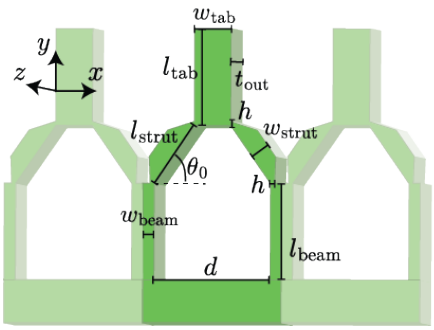

图 S1. 所研究结构的几何。

结构	h [mm]	w_{beam} [mm]
结构 #a	0.7	1.4
结构 #b	0.6	1.4
结构 #c	0.7	1.7
结构 #d	0.7	2.0

表 I. 本研究所考察的四种结构的参数。

B. 制造

本研究中的所有样品均采用浇注法，以近似不可压缩的聚乙烯基硅氧烷（PVS）弹性体（Elite Double 32, Zhermack，绿色）制成。模具使用商用 CAD 软件 *Onshape* 设计，并采用 PLA 耗材通过 3D 打印制造（0.4 mm 喷嘴，Bambu Lab X1 Carbon，X1C）。本研究制造了两组样品：1）用于准静态测试的 9 单元样品；2）用于研究波传播的 32 单元样品。

B.1. 9-unit samples

为制造这些结构，我们制作了专用的 9 单元模具（图 S2）。选择 9 单元构型，既能提供足够数量的晶胞以捕捉具有代表性的行为，又能将样品整体尺寸控制在足够小的范围内，使其适配测试设备。模具中精确定位了直径为 2.6 mm 的销钉，用于在样品上形成小孔。这些孔有两种用途：（i）将样品连接到移动和平移台上；（ii）安装夹扣式压紧元件，以便在测试期间限制选定晶胞的高度。

9 单元样品的制造步骤如下：

1. 在模具表面涂覆一层薄薄的 Mann Release Mold 200。
2. 将未固化的 PVS 弹性体（混合比例为 1A:1B）注入模具，并在室温（25°C）下固化 30 分钟。
3. 小心地将固化后的部件从模具中取出。
4. 样品在室温下固化 15 天后进行测试。

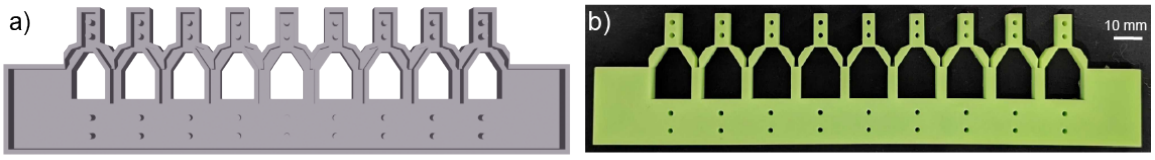

图 S2. **9 单元样品 a)** 用于浇注样品的模具。**b)** 固化样品示例。

B.2. 32-unit samples

32单元样品由不同部件制造而成，随后将这些部件粘合在一起。这种模块化设计确保了制造过程兼具灵活性和可扩展性。每个部件均由以下三种定制模具之一制成：

- 左端模具包含 2.5 个单胞，左侧带有一个侧块（图 S3a），
- 中间模具包含 8 个完整单胞，且两端各有一个半单胞（图 S3b） ，
- 右端模具包含 2.5 个单胞，右侧带有一个侧块（图 S3c）。

一个 32 单元样品由一个左侧部分、三个中间部件和一个右侧部分组成，示例见图 S3。

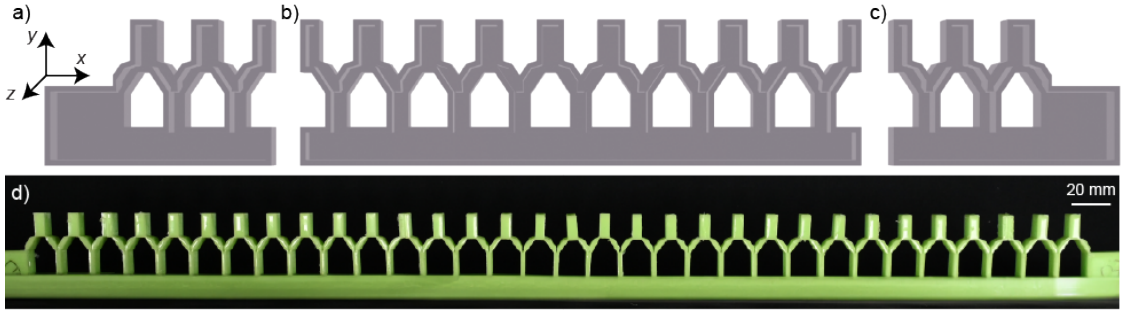

图 S3. **32单元样品 a)** 左端模具。**b)** 中间模具。**c)** 右端模具。**d)** 铸造的32单元超材料示例。

每个结构都包括一体化的弹性体基底和侧向块，这些部件通过同一套模具浇铸成型。基底层向下延伸至桁架下方约 10 mm，且每侧的侧向块厚度均为 25 mm。

32 单元样品的制造步骤如下：

1. 在模具表面涂上一层薄薄的 Mann Release Mold 200。 2. 将未固化的 PVS 弹性体（混合比例 1A:1B）注入模具中，并在室温（25℃）下静置固化 30 分钟。 3. 小心地将固化后的部件从模具中取出。 4. 组装 32 单元样品时，在接合面涂上一层薄薄的未固化 PVS 弹性体，并将部件压合以确保粘接，从而将一个左侧部分、三个中间部件和一个右侧部分粘在一起。 5. 组装好的样品在室温下固化 15 天后进行测试。

C. 测试

C.1. Quasi-static tests

使用两个电动平移台（Thorlabs LTS300 和 LTS150）以及一个量程为 50 lb 的负荷传感器（Futek LSB200），对 9单元样品进行准静态力学测试。如图 S4a 所示，结构底部刚性固定在负荷传感器上，而中心单元的拉片通过两颗螺钉连接到平移台。以恒定速度 2 mm/s 施加垂直位移 v_{top}。在本研究中，我们假设 $v_{\text{top}} = 0$ mm 对应于向上且无应力的构型，而 v_{top} 的负值对应于结构闭合（图 S4b）。为确保响应处于准静态状态，我们以 0.5 mm/s、1 mm/s 和 5 mm/s 的加载速率进行了实验。图 S4c 显示，对于结构 #a，在所有单元均朝下的构型中，响应差异可以忽略不计。

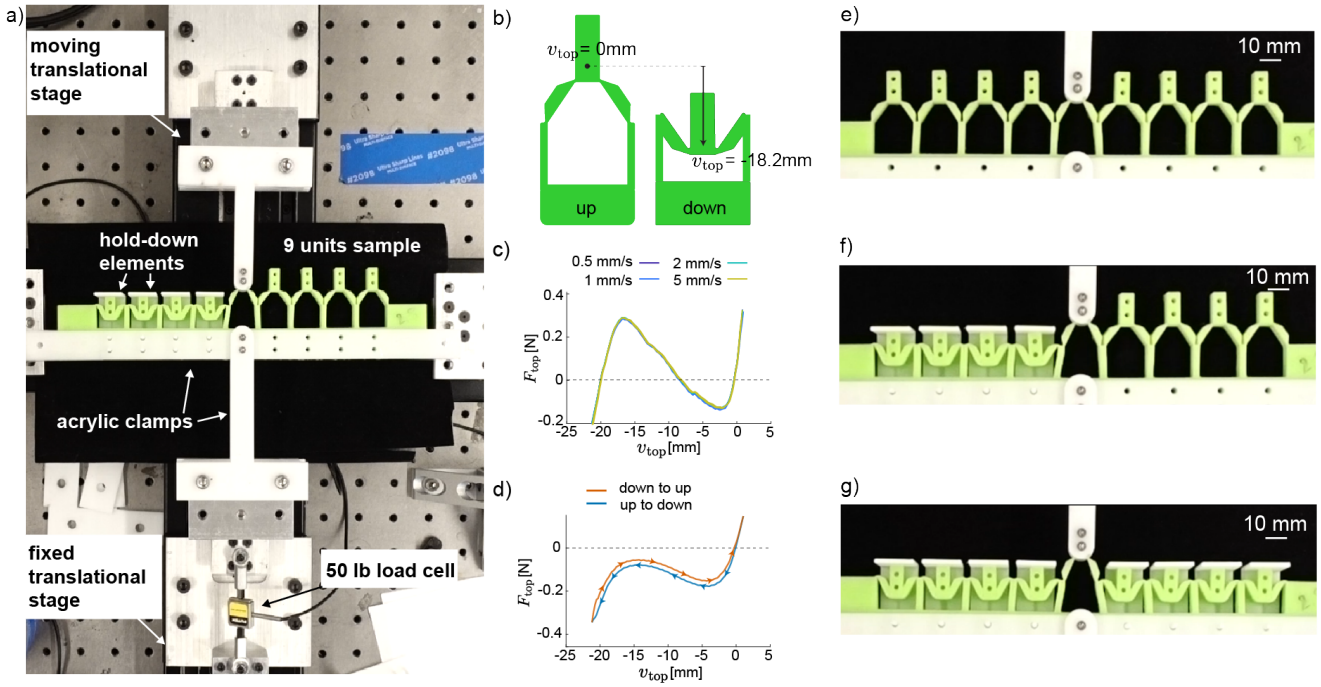

图 S4. **准静态测试装置。a)** 样品实验装置，其中右侧朝上，左侧朝下。压紧元件用于固定边界条件，并抑制驱动过程中的非预期运动。**b)** v_{top}的符号约定示意图。**c)** 所有单元均处于向下构型时，加载速率的影响。**d)** 所有单元均处于向上构型时的完整加载和卸载循环。**e)** 中央单元周围的所有单元均处于上构型的情况。**f)** 中央单元左侧的单元保持向下构型，而右侧的单元保持向上构型的情况。**g)** 中央单元周围的所有单元均处于向下构型的情况。

本研究聚焦于弹起行为。因此，尽管受测单元先被压下再抬起，我们的分析仅考虑卸载阶段。此外，每个样品均在三种不同构型下进行测试：

- 所有中央单元周围的单元均处于上构型的一项测试（图 S4e 和图 S5b）；
- 一项测试中，中央单元左侧的单元保持向下构型，而中央单元 he

右侧的单元保持向上（图 S4f 和图 S5c）；

- 一项测试，其中所有单 元都处于向下构型，且围绕中心单元分布（图 S4g 和图 S5a） .

为使单元保持在向下状态，我们使用 3D打印限位元件（见图 S4a 和图 S5a-c）。安装这些元件后，相应的单元无法向上移动越过限位元件，但仍可向下移动更大的位移至其下方（即 $v_{\mathrm{top}} < -18.2$ mm）。

最后，为完整起见，我们在图 S4d 中展示了结构 #a 所有单元均向上的完整加载循环，包括下降和上升阶段。此处，测试从 $v_{\mathrm{top}} = 1$ mm 的预加载位置开始，随后向下平移至 $v_{\mathrm{top}} = -21$ mm，即超过桁架完全闭合位置数毫米处。记录的力–位移曲线几乎重合，表明系统的滞后极小。

为确保可重复性，我们为结构 #a 和 #b 制作并测试了三个相同的 9单元样品。对每个样品，我们进行两次加载-卸载循环，并重复两遍，因此每个样品得到四条曲线，每种几何共得到十二条曲线。结构 #a 的结果力-位移曲线见图 S5（$h = 0.7$ mm 和 $w_{\mathrm{beam}} = 1.4$ mm），结构 #b 的结果见图 S6（ $h = 0.6$ mm、 $w_{\mathrm{beam}} = 1.4$ mm）。结果显示可重复性很高，不同循环和铸件之间的差异极小。

此外，我们还为结构 #c 和 #d 各制作并测试了一个 9 单元样品，相应结果分别见图 S7 和图 S8。

根据实验准静态力–位移曲线 F_{top}–v_{top}，我们计算了 9单胞超材料中中心单元的势能 U 随 v_{top} 的变化关系（图 S9）。具体而言，势能通过对测得的力进行数值积分得到：

$$U(v_{\mathrm{top}}) = \int F_{\mathrm{top}}(v)\,\mathrm{d}v, \tag{2}$$

其中，参考结构的选取满足 $U(v_{\mathrm{top}} = 0) = 0$。

随后，我们将 ΔU 定义为能垒：当中心单元一侧的冯·米塞斯桁架保持在向下状态，而另一侧的桁架保持在向上状态时，从向下状态转变到向上状态所对应的能垒（见图 S9 右栏）。图 S9 展示了结构 #a–d 在单侧向上、单侧向下构型下的实验力–位移曲线及相应的能量景观，而表 II 报告了对应的 ΔU 值。

结构	**实验 c_{wave} [单元/秒]**	ΔU **[毫焦]**
结构 #a	54.1 ± 3.2	0.31
结构 #b	40.1 ± 3.9	0.34
结构 #c	37.2 ± 4.1	0.37
结构 #d	无传播	0.42

表 II. 速度 c_{wave} 及相应的 U_{down} 和 ΔU汇总。

C.2. Dynamic tests

在 32 单元结构上进行动态实验。每个单元的顶部拉片均标有红点，以便在测试过程中进行位置跟踪。结构底部夹固在 3D 打印 PLA 支架中，以确保整个动态实验过程中的机械稳定性。实验装置置于黑色背景前，并由两块 NEEWER NL-192AI LED 面板照明（见图 S10）。所有拉片最初均手动设置为向下状态，对应于 $v^{j}{}_{\text{顶部}} = -18.2$ mm（ $j = 1, \ldots\ldots, 32$）。随后，手动抬起第 i 个单元，使其处于无应力的上构型（$v^{i}_{\mathrm{top}} = 0$ mm），然后释放。根据结构的不同，这一局部扰动可能

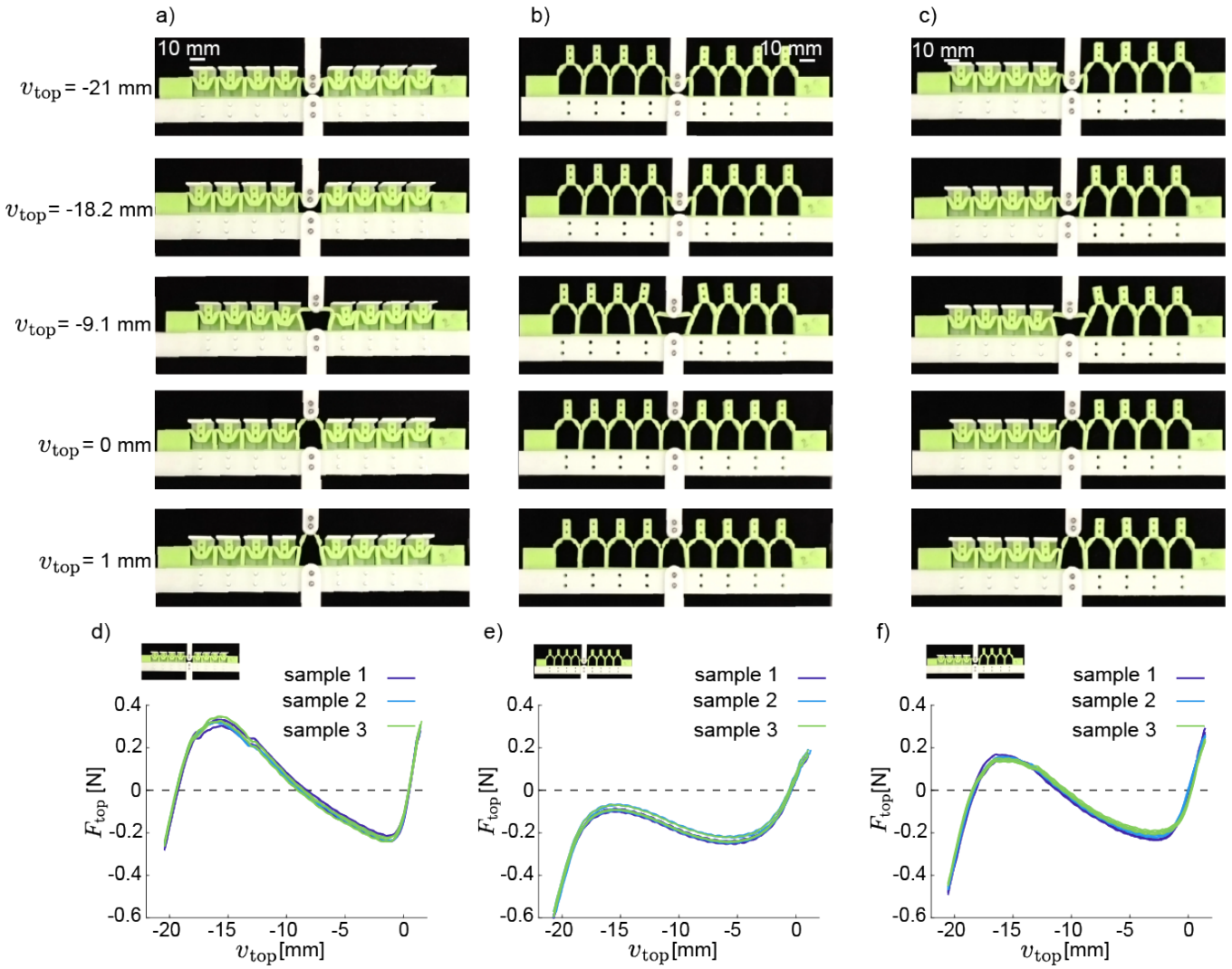

图 S5. **a-c)** 在连续施加位移 v_{top} 步下准静态变形的快照。所有单元均向下 (a)，所有单元均向上 (a)，左侧向下、右侧向上 (c)。**d-f)** 结构 #a（$h = 0.7$ mm、$w_{\text{beam}} = 1.4$ mm）的实验力-位移曲线：所有单元均向下 (d)，所有单元均向上 (e)，一侧向上、另一侧向下 (f)。

触发沿链传播的转变波。实验使用 Sony RX100V 相机以 480 帧/秒的速度记录。通过使用自定义 MATLAB 脚本对红色标记进行逐帧追踪，提取顶部质量的垂直位移。

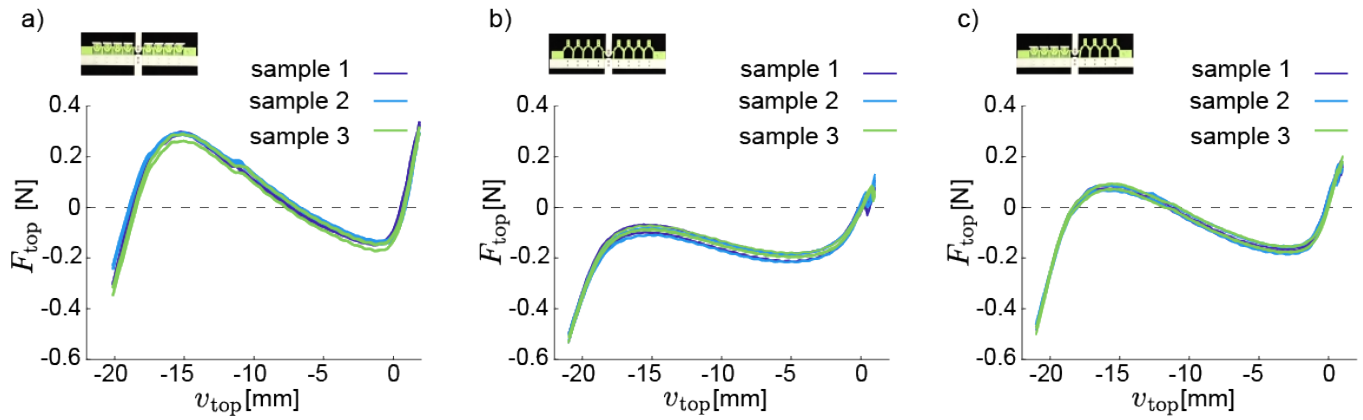

图 S6. 结构 #b（$h = 0.6$ mm, $w_{\text{beam}} = 1.4$ mm）的实验力-位移曲线 **a)** 所有单元朝下 **b)** 所有单元朝上 **c)**一侧朝上，另一侧朝下。

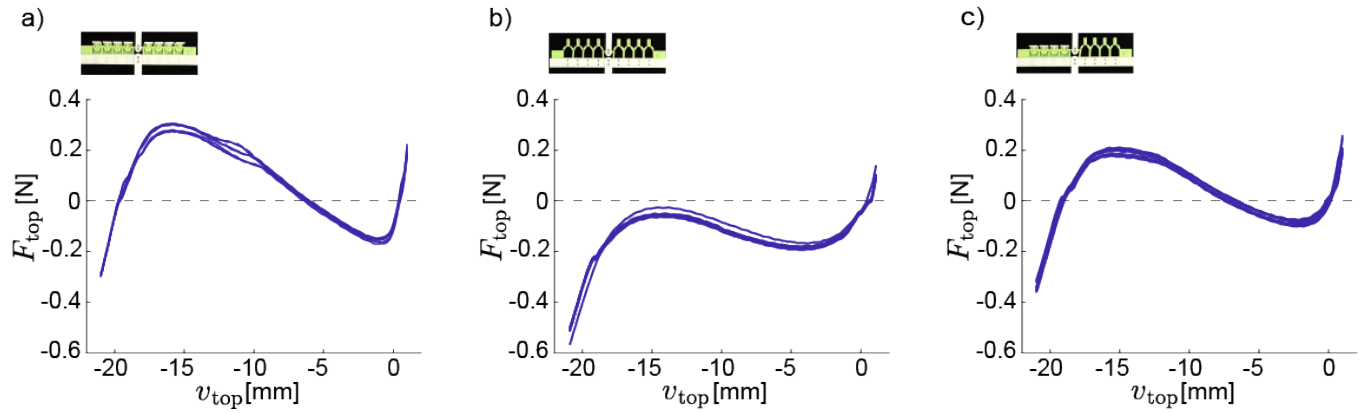

图 S7. 结构 #c（$h = 0.7$ mm, $w_{\text{beam}} = 1.7$ mm）的实验力-位移曲线 **a)** 所有单元朝下 **b)** 所有单元朝上 **c)**一侧朝上，另一侧朝下。

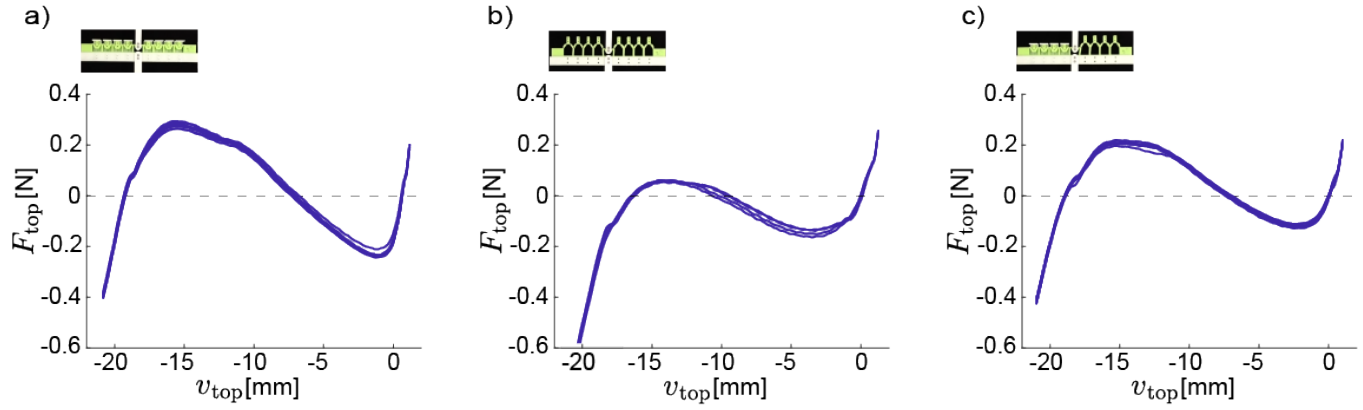

图 S8. 结构 #d（$h = 0.7$ mm, $w_{\text{beam}} = 2.0$ mm）的实验力-位移曲线 **a)** 所有单元朝下 **b)** 所有单元朝上 **c)**一侧朝上，另一侧朝下。

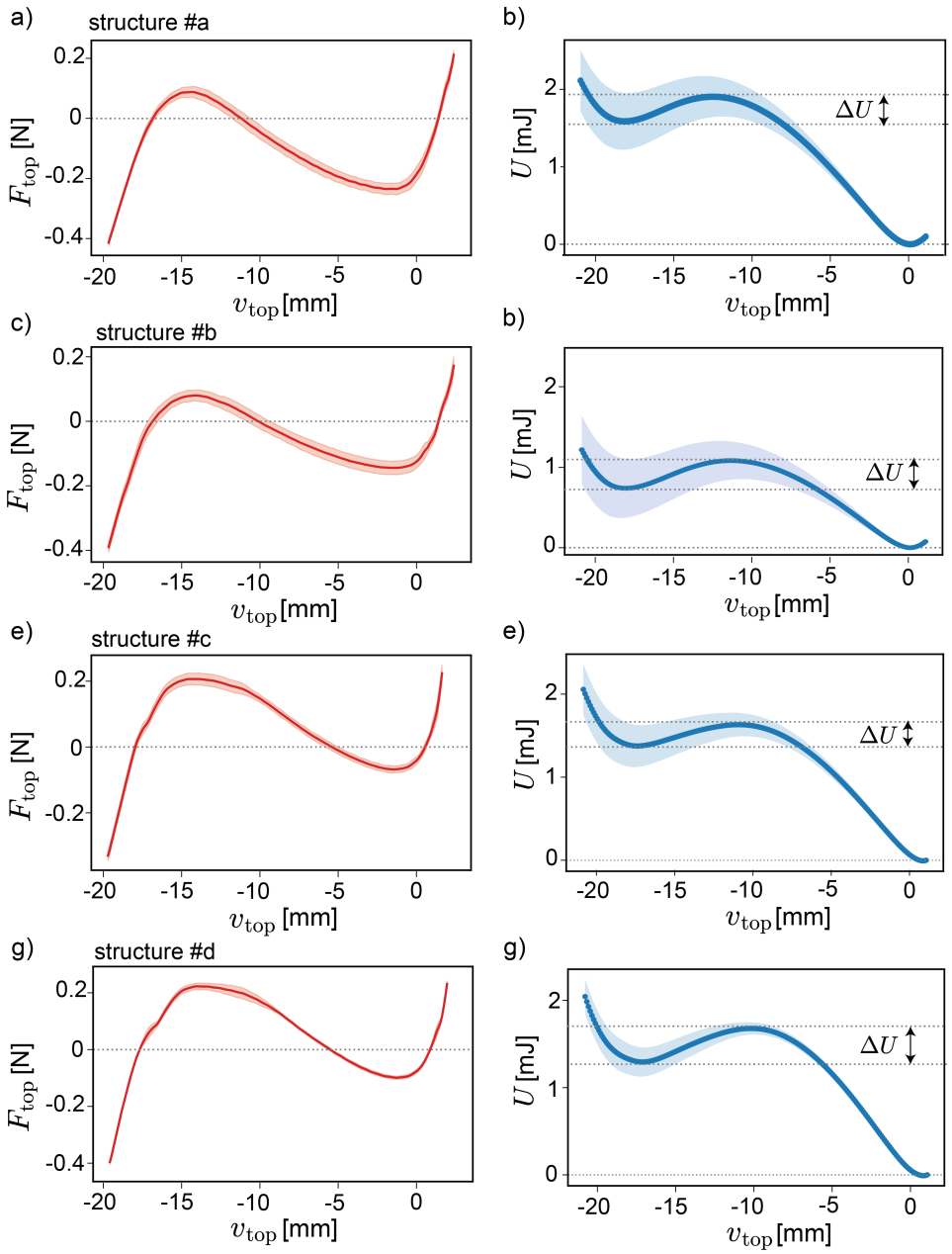

图 S9. 实验力–位移响应（左列）及相应的重构能量景观（右列）。从上到下，各行**(a–b)**、**(c–d)**、**(e–f)**和**(g–h)** 分别对应结构 #a、#b、#c 和 #d。阴影区域表示实验不确定性。

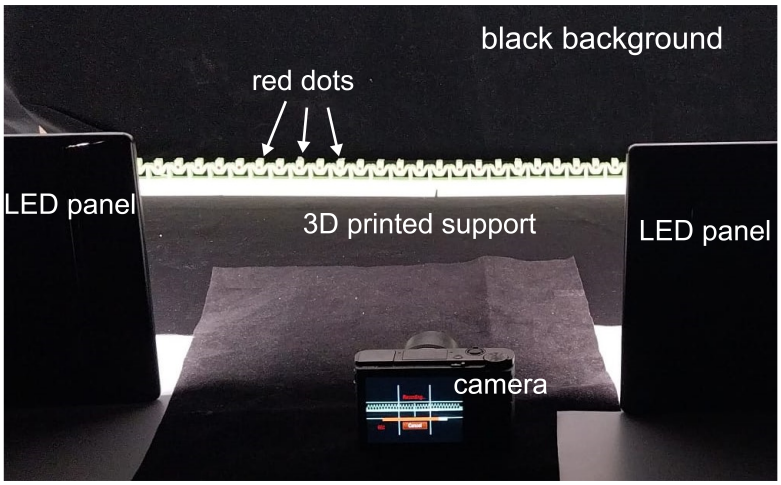

图 S10. 零曲率结构的动力学测试装置概览。

D. 数值模型

为了刻画所考虑结构的力学行为，我们建立了一个最小质量-弹簧模型，以反映实验中观察到的主要变形机制。

D.1. Unit cell description

如图 S11 所示，每个晶胞被建模为由线性和扭转弹簧网络连接的两个集中质量，该网络再现了结构的几何。具体而言，第 i 个晶胞由两个集中质量（m^i_{bot} 具有一个自由度，m^i_{top} 具有两个自由度）、三个轴向线性弹簧和四个扭转线性弹簧组成。若 m^i_{bot} 在初始构型中位于 $(x_i, 0)$，则m^{i+1} 底 位于 $(x_i + d_0, 0)$，m^i_{top} 位于 $(x_i + d_0/2, h_0)$，其中 $d_0 = d - w_{\text{tab}}$ 和 $h_0 = \sqrt{l^2_{\text{strut}} - (d_0/2)^2}$。

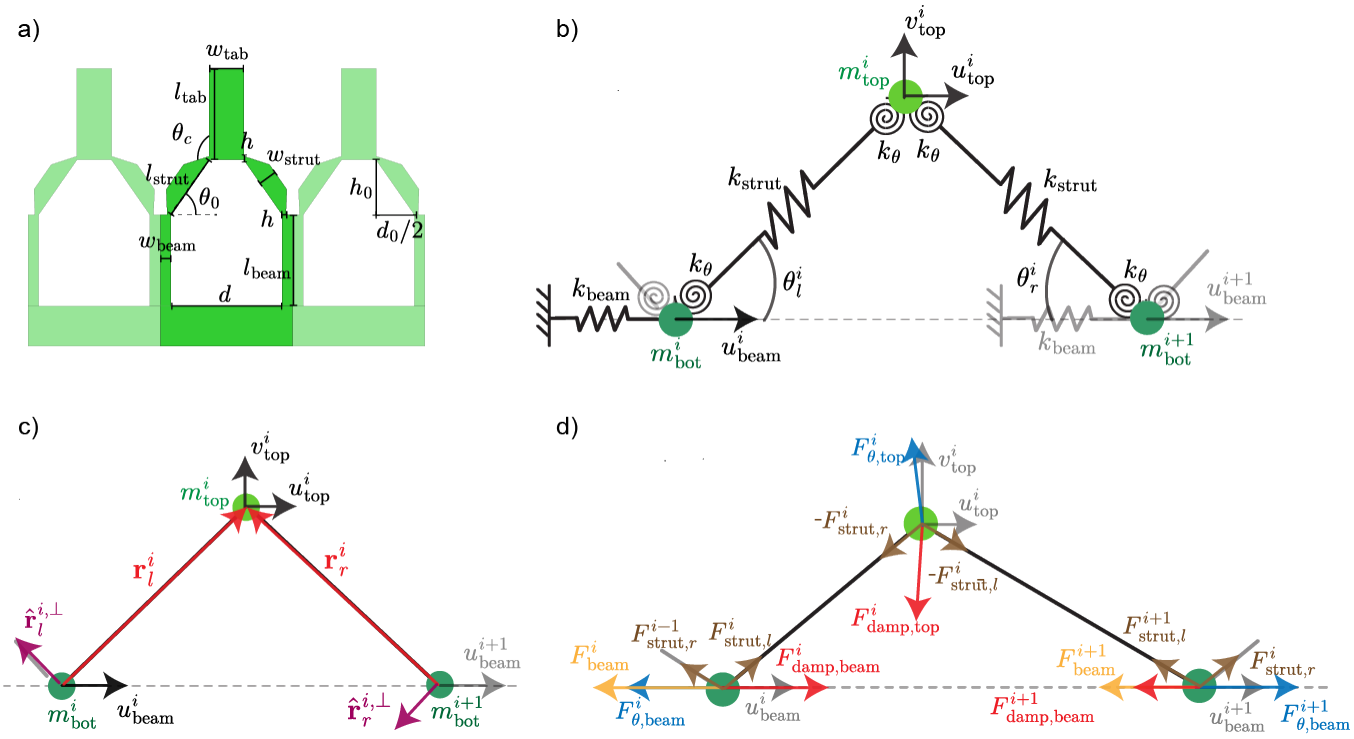

图 S11. 单胞的几何与建模。**a)** 晶胞的几何布局。**b)** 用于描述晶胞行为的力学模型示意图。**c)** 晶胞行为解析描述中所用向量的表示。**d)** 作用于质量上的力：轴向支柱力（棕色）、侧向（地面）弹簧力（橙色）、粘性阻尼（红色）以及铰链诱导（扭转）力（蓝色）。

集中质量。第 i 个晶胞包含两个集中质量，m^i_{top} 和 m^i_{bot} .

- m^i顶部 有两个自由度：水平位移 u^i顶部 和垂直位移 v^i顶部。它代表位于每个晶胞顶部的垂直凸片（长度为 l凸片，宽度为w凸片）的质量，以及两根相邻倾斜支杆各自一半的质量，因此

$$m^i_{\text{top}} = w_{\text{tab}}\, l_{\text{tab}}\; t_{\text{out}}\, \rho + m_{\text{strut}}, \tag{3}$$

其中，ρ 是材料的密度，m_{strut} 是倾斜支杆的质量。

• m^i底部具有一个自由度（水平位移 u^i梁），代表竖向梁的质量以及相邻倾斜支杆剩余一半的质量。竖向梁被建模为悬臂梁，其惯性由等效集中质量 0.236 $\rho\, 2w$梁 l梁 t出 [27]表示。加上相邻倾斜支杆的一半质量后，总有效质量为

$$m^i_{beam} = 0.236 * 2w_{\text{beam}}\, l_{\text{beam}}\, t_{\text{out}} + m_{\text{strut}}. \tag{4}$$

为简化系统的运动方程的推导，我们为第 i 个晶胞定义两个向量$\mathbf{r}^i_l$ 和$\mathbf{r}^i_r$，它们分别连接 m^i_{bot} 和 $m^{i+1}{}_{\text{bot}}$ 至 m^i_{top}（见图 S11b）

$$\mathbf{r}^i_l = \begin{pmatrix} u^i_{\text{top}} - u^i_{\text{beam}} + d_0/2 \\ h_0 + v^i_{\text{top}} \end{pmatrix}, \tag{5a}$$

$$\mathbf{r}^i_r = \begin{pmatrix} u^i_{\text{top}} - u^{i+1}_{\text{beam}} - d_0/2 \\ h_0 + v^i_{\text{top}} \end{pmatrix}. \tag{5b}$$

弹簧。 第 i 个晶胞包含两个刚度为 k_{strut} 的轴向线性弹簧、一个刚度为k_{beam}的轴向线性弹簧，以及四个刚度为 k_θ 的线性转动弹簧。

• 刚度为 k 的轴向弹簧strut 表示倾斜支杆在载荷作用下潜在的拉伸与压缩。刚度 $k$strut 定义为

$$k_{\text{strut}} = \frac{E t_{\text{out}} w_{\text{strut}}}{l_{\text{strut}}} = 3.5\ \frac{kN}{m}. \tag{6}$$

这些弹簧产生的力为

$$\mathbf{F}^i_{\text{strut},l} = k_{\text{strut}} \left(l^i_l - l\right) \frac{\mathbf{r}^i_l}{l^i_l} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{F}^i_{\text{strut},r} = k_{\text{strut}} \left(l^i_r - l\right) \frac{\mathbf{r}^i_r}{l^i_r}, \tag{7}$$

其中

$$l^i_l = \|\mathbf{r}^i_l\| \qquad \text{and} \qquad l^i_r = \|\mathbf{r}^i_r\|. \tag{8}$$

• 刚度为 k的轴向弹簧beam 表示竖直梁在侧向加载下的横向变形。刚度 $k$beam 定义为 [28]:

$$k_{\text{beam}} = \frac{3EI}{l^3_{\text{beam}}}, \quad \text{with} \quad I = \frac{(2w_{\text{beam}})^3 t_{\text{out}}}{12}. \tag{9}$$

对于结构 #a 和 #b， $k_{\text{beam}} = 21.1$ N/m；对于结构 #c， $k_{\text{beam}} = 37.8$ N/m；对于结构 #d，$k_{\text{beam}} = 61.7$ N/m。
这些弹簧产生作用于 m^i_{bot} 的水平力，其大小为

$$\mathbf{F}^i_{\text{beam}} = -k_{\text{beam}} u_{\text{beam}} \mathbf{e}_x. \tag{10}$$

其中 $\mathbf{e}_x$ 是沿 x 方向的单位向量

• 刚度为 k_θ 的扭转弹簧用于模拟支杆与拉杆或竖直基梁连接处薄连接筋的响应。连接倾斜支杆与竖直梁以及拉片的弹簧，其无应力构型角度分别为 θ_0 和 $\pi/2 - \theta_0$，其中 $\theta_0 = 55.7°$表示未变形构型下倾斜支杆与水平方向的夹角。

通过将模型与准静态实验数据进行校准，确定刚度 k_θ。对于本研究所考虑的几何构型，当 $h = 0.6$ mm 时，结构 #b 的刚度为 $k_\theta = 0.77$ mN·m/rad；当 $h = 0.7$ mm 时，所有结构（即结构 #a、#c 和 #d）的刚度为 $k_\theta = 1.02$ mN·m/rad。校准流程的详细信息见 D.3 节。

每个扭转弹簧产生的回复扭矩与其偏离无应力构型的角偏差成正比。因此，在左侧顶部铰链处 τ^i_{lt}、左侧底部铰链处 τ^i_{lb}、右侧顶部铰链处 τ^i_{rt}以及右侧底部铰链处 τ^i_{rb}产生的扭矩分别为

$$\tau^i_{lb} = -k_\theta \left(\theta^i_l - \theta_0\right), \tag{11a}$$

$$\tau^i_{lt} = -k_\theta \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta^i_l\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)\right] = -k_\theta \left(\theta^i_l - \theta_0\right) = \tau^i_{lb}, \tag{11b}$$

$$\tau^i_{rb} = -k_\theta \left(\theta^i_r - \theta_0\right), \tag{11c}$$

$$\tau^i_{rt} = -k_\theta \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta^i_r\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)\right] = -k_\theta \left(\theta^i_r - \theta_0\right) = \tau^i_{rb}, \tag{11d}$$

其中

$$\theta^i_l = \arctan\left(\frac{\mathbf{r}^i_l \cdot \mathbf{e}_y}{\mathbf{r}^i_l \cdot \mathbf{e}_x}\right), \qquad \theta^i_r = \pi - \arctan\left(\frac{\mathbf{r}^i_r \cdot \mathbf{e}_y}{\mathbf{r}^i_r \cdot \mathbf{e}_x}\right). \tag{12}$$

为考虑大旋转时倾斜支杆与垂直凸片之间可能发生的接触，对顶部铰链 ˜赋予有效非线性转动刚度 k_θ；该刚度可能因偏差角不同而异于 k_θ。更具体地说，由于在实验中，当顶部铰链的角偏差超过临界值 $\theta_c = 108^\circ$ 时，倾斜支杆的上端会与垂直凸片发生接触（见图 S11a），因此顶部铰链的有效非线性转动刚度定义为 [29]:

$$\tilde{k}_\theta = \begin{cases} k_\theta & \text{if} \quad \theta^i - \theta_0 < \theta_c \\ 1000 k_\theta \left(\theta^i - \theta_0 - \theta_c\right)^2 & \text{if} \quad \theta^i - \theta_0 > \theta_c \end{cases} \tag{13}$$

由公式（13）可知，当发生接触时（即对于 $\theta^i - \theta_0 > \theta_c$），$\tilde{k}_\theta \gg k_\theta$。

耗散。尽管弹性体具有复杂的耗散行为，本研究中的所有模拟均采用线性黏性阻尼模型，因此:

$$\mathbf{F}^i_{\text{damp,top}} = -c_{\text{top}} \begin{pmatrix} \dot{u}^i_{\text{top}} \\ \dot{v}^i_{\text{top}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

and

$$F^i_{\text{damp,beam}} = -c_{\text{beam}} \dot{u}^i_{\text{beam}} \tag{15}$$

其中 c_{beam} 和 c_{top} 分别是与顶部质量和梁质量相关的阻尼系数。这些系数的值通过匹配结构 #a中的计算与实验波传播速度确定，并随后在本研究分析的全部四个结构中保持不变：$c_{\text{top}} = 0.016\,\text{N}\cdot\text{s/m}$和 $c_{\text{beam}} = 0.022\,\text{N}\cdot\text{s/m}$。

D.2. Equations of motion

我们现在考虑一条由 N 个单胞组成的链。最左侧和最右侧的梁质量（m^0_{bot} 和m^{N+1} 底部）被固定（即 $u^0_{\text{beam}} = 0$ 和 u^{N+1} 梁$= 0$）。我们确定该系统的运动方程为:

$$m_{\text{top}}\ddot{u}^i_{\text{top}} = -\mathbf{F}^i_{\text{strut},l}\cdot\mathbf{e}_x - \mathbf{F}^i_{\text{strut},r}\cdot\mathbf{e}_x + \mathbf{F}^i_{\theta,\text{top}}\cdot\mathbf{e}_x + \mathbf{F}^i_{\text{damp,top}}\cdot\mathbf{e}_x \tag{16a}$$

$$m_{\text{top}}\ddot{v}^i_{\text{top}} = -\mathbf{F}^i_{\text{strut},l}\cdot\mathbf{e}_y - \mathbf{F}^i_{\text{strut},r}\cdot\mathbf{e}_y + \mathbf{F}^i_{\theta,\text{top}}\cdot\mathbf{e}_y + \mathbf{F}^i_{\text{damp,top}}\cdot\mathbf{e}_y \tag{16b}$$

$$m_{\text{bot}}\ddot{u}^i_{\text{beam}} = \mathbf{F}^i_{\text{strut},l}\cdot\mathbf{e}_x + \mathbf{F}^{i-1}_{\text{strut},r}\cdot\mathbf{e}_x + \mathbf{F}^i_{\text{beam}}\cdot\mathbf{e}_x + F^i_{\theta,\text{beam}} + F^i_{\text{damp,beam}} \tag{16c}$$

其中，$\mathbf{F}^i_{\theta,\text{top}}$ 和 $F^i_{\theta,\text{beam}}$ 表示由扭矩在两个质量块上产生的力。根据力矩-力臂关系可得

$$\mathbf{F}^i_{\theta,\text{top}} = \tau^i_{lb}\frac{\hat{\mathbf{r}}^{i,\perp}_l}{l^i_l} + \tau^i_{rb}\frac{\hat{\mathbf{r}}^{i,\perp}_r}{l^i_r} = -k_\theta\left[\left(\theta^i_l-\theta_0\right)\frac{\hat{\mathbf{r}}^{i,\perp}_l}{l^i_l} + \left(\theta^i_r-\theta_0\right)\frac{\hat{\mathbf{r}}^{i,\perp}_r}{l^i_r}\right] \tag{17a}$$

$$F^i_{\theta,\text{beam}} = \left(-\tau^i_{lt}\frac{\hat{\mathbf{r}}^{i,\perp}_l}{l^i_l} - \tau^{i-1}_{rt}\frac{\hat{\mathbf{r}}^{i-1,\perp}_r}{l^{i-1}_r}\right)\cdot\mathbf{e}_x = \tilde{k}_\theta\left[\left(\theta^i_l-\theta_0\right)\frac{\mathbf{r}^i_l\cdot\mathbf{e}_y}{(l^i_l)^2} + \left(\theta^{i-1}_r-\theta_0\right)\frac{\mathbf{r}^{i-1}_r\cdot\mathbf{e}_y}{(l^{i-1}_r)^2}\right] \tag{17b}$$

其中，$\hat{\mathbf{r}}^{i\,\perp}_l = (-\mathbf{r}^i_l\cdot\mathbf{e}_y, \mathbf{r}^i_l\cdot\mathbf{e}_x)/l^i_l$, $\hat{\mathbf{r}}^{i\,\perp}_r = (-\mathbf{r}^i_r\cdot\mathbf{e}_y, \mathbf{r}^i_r\cdot\mathbf{e}_x)/l^i_r$ 分别表示垂直于$\mathbf{r}^i_l$和$\mathbf{r}^i_r$的单位向量，各自通过 $+90°$（逆时针）旋转得到。

将式（7）、（10）、（17）、（14）和（15）代入式（16），可得

$$m_{\text{top}}\ddot{u}^i_{\text{top}} = -k_{\text{strut}}(l^i_l-l)\frac{r^i_l\cdot\mathbf{e}_x}{l^i_l} - k_{\text{strut}}(l^i_r-l)\frac{\mathbf{r}^i_r\cdot\mathbf{e}_x}{l^i_r} + k_\theta\left[(\theta^i_l-\theta_{l,0})\frac{\mathbf{r}^i_l\cdot\mathbf{e}_y}{(l^i_l)^2} + (\theta^i_r-\theta_{r,0})\frac{\mathbf{r}^i_r\cdot\mathbf{e}_y}{(l^i_r)^2}\right] - c_{\text{top}}\dot{u}^i_{\text{top}}, \tag{18a}$$

$$m_{\text{top}}\ddot{v}^i_{\text{top}} = -k_{\text{strut}}(l^i_l-l)\frac{\mathbf{r}^i_l\cdot\mathbf{e}_y}{l^i_l} - k_{\text{strut}}(l^i_r-l)\frac{\mathbf{r}^i_r\cdot\mathbf{e}_y}{l^i_r} - k_\theta\left[(\theta^i_l-\theta_{l,0})\frac{\mathbf{r}^i_l\cdot\mathbf{e}_x}{(l^i_l)^2} + (\theta^i_r-\theta_{r,0})\frac{\mathbf{r}^i_r\cdot\mathbf{e}_x}{(l^i_r)^2}\right] - c_{\text{top}}\dot{v}^i_{\text{top}}, \tag{18b}$$

$$\begin{aligned} m_{\text{bot}}\ddot{u}^i_{\text{beam}} = &-k_{\text{beam}}\,u^i_{\text{beam}} - c_{\text{beam}}\dot{u}^i_{\text{beam}} + k_{\text{strut}}(l^i_l-l)\frac{\mathbf{r}^i_l\cdot\mathbf{e}_x}{l^i_l} + k_{\text{strut}}(l^{i-1}_r-l)\frac{\mathbf{r}^{i-1}_r\cdot\mathbf{e}_x}{l^{i-1}_r} \\ &+ \tilde{k}_\theta\left[\left(\theta^i_l-\theta_0\right)\frac{\mathbf{r}^i_l\cdot\mathbf{e}_y}{(l^i_l)^2} + \left(\theta^{i-1}_r-\theta_0\right)\frac{\mathbf{r}^{i-1}_r\cdot\mathbf{e}_y}{(l^{i-1}_r)^2}\right]. \end{aligned} \tag{18c}$$

这些方程使用 odeint 求解器从JAX进行数值积分，积分时长为 $t\in[0,1]$ s，标称时间步长为 $\Delta t = 1/480$ s（该求解器采用自适应步长龙格-库塔法）。

D.3. Quasi-static simulations

准静态数值力-位移模拟既用于标定模型的扭转刚度 k_θ，也用于表征支配波传播的有效能垒。尽管完整的运动方程采用二阶动力学求解器进行积分，但施加位移变化得足够缓慢，使得惯性效应可以忽略。因此，所得响应对应于增量加载下的一系列静力平衡。

与第 C.1 节所述实验相同，我们考虑由 9 个单元组成的结构，并对中心单元施加位移（$i = 4$）。所规定的垂直位移 v_{target} 在总时长 $T_{\mathrm{total}} = 10$ s内强制实现从下方平衡位置到上方平衡位置的平滑转变：

$$v_{\mathrm{target}}(t) = 2h_0 \left(\frac{t}{T_{\mathrm{total}}} - 1 \right), \quad t \in [0, T_{\mathrm{total}}] \,. \tag{19}$$

该位移控制通过刚度为 k_{control} 的虚拟控制力来实现，其刚度远大于系统的固有刚度：

$$F_{\mathrm{control}} = -k_{\mathrm{control}} \left(v^i_{\mathrm{top}}(t) - v_{\mathrm{target}}(t) \right). \tag{20}$$

控制力沿垂直方向作用于所选顶部质量，并作为外力项代入运动方程 (16)。

通过有选择地约束运动并指定侧边单元的初始状态，可得到不同的准静态构型。未受约束的单元按照完整的运动方程演化，其垂直和水平方向的自由度均处于激活状态；除非另有说明，这些单元均初始化为向上状态。受约束而保持向下状态的单元，其垂直位移在整个模拟过程中固定，

$$v^i_{\mathrm{top}}(t) = -2h_0,$$

而其水平运动不受约束，以保持几何相容性并避免对结构施加过度约束。受约束的单元初始化为向下构型，而不受约束的单元初始化为向上构型，$v^i_{\mathrm{top}}(0) = 0$。

我们首先利用这些模拟来校准 k_θ。在相同的位移控制加载方案下测试一系列候选 k_θ 值，并将得到的力–位移曲线与实验测量结果进行比较。实验对象为一条九单元链，其中除中央单元外，其余单元初始均处于向上状态；中央单元则由向下状态转变为向上状态。通过最小化模拟与实验之间的均方误差 (MSE)，选出 k_θ 的最优值。分析表 I 中的结构 #a（$h = 0.7$ mm）和结构 #b（$h = 0.6$ mm），以涵盖不同的扭转刚度。利用方程 (6) 和 (9)，得到 $k_{\mathrm{beam}} = 21.1$ N/m 和 $k_{\mathrm{strut}} = 3.5$ kN/m。采用 $k_{\mathrm{control}} = 1$ MN/m 的控制刚度。最佳拟合值为：

$$k_\theta(h = 0.6 \text{ mm}) = 0.77 \text{ mN·m/rad}, \quad k_\theta(h = 0.7 \text{ mm}) = 1.02 \text{ mN·m/rad}.$$

完成校准后，我们使用相同的数值框架和相应的 k_θ 值，对第 C.1 节中考虑的所有构型进行准静态力–位移模拟。实验数据和数值预测见图 S12，其中包括所有相邻单元均处于向上状态、均处于向下状态，以及一半处于向上状态、另一半处于向下状态的混合构型。

最后，我们使用该框架系统地探究 k_{beam} 和 k_θ 对能垒 ΔU 的影响。如第 C.1 节所述，我们进行准静态模拟，其中超材料的一侧被约束在向下状态，而另一侧在整个加载过程中保持向上状态。通过记录中心单元受位移控制驱动时对应的反作用力，得到准静态力–位移响应（见图 S12a）。随后通过数值积分重构有效能量景观，

$$U(v_{\mathrm{top}}) = \int F(v_{\mathrm{top}}) \, \mathrm{d}v, \tag{21}$$

其中参考值的选取满足 $U(0) = 0$。

由此得到的能量剖面可直接识别支配转变的驻点。若存在，向下构型对应 U 的局部极小值，不稳定中间构型对应极大值，而向上构型对应第二个极小值。我们将 ΔU 定义为以下转变相关的能垒：中心单元一侧的冯·米塞斯桁架保持向下状态，而另一侧的桁架保持向上状态时，从向下状态转变到向上状态（见图 S12b）。结构 #a-d 的预测 ΔU 列于表 III。

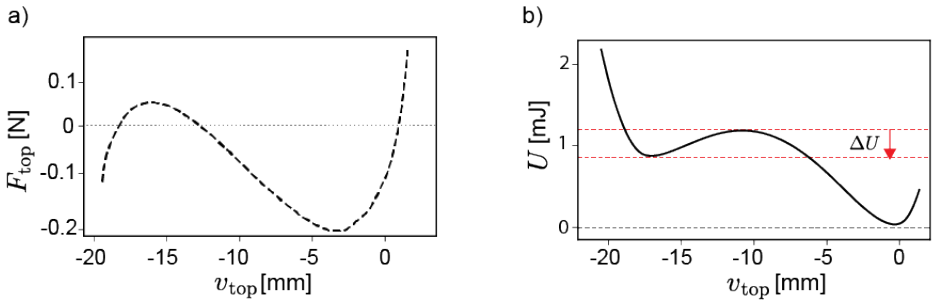

图 S12. 结构 #b 的波状构型的准静态力–位移响应和重构能量景观。**a)** 左侧部分超材料受约束而处于向下状态时，中心单元在非对称边界条件下的准静态力–位移响应。**b)** 通过对力–位移曲线进行数值积分重构的有效能量景观 $U(v_{\text{top}})$。能垒 ΔU 以高亮显示。

	ΔU [毫焦]	
结构	**实验**	**数值模型**
结构 #a	0.31 ± 0.21	0.19
结构 #b	0.34 ± 0.2	0.30
结构 #c	0.37 ± 0.09	0.51
结构 #d	0.42 ± 0.05	0.62

表 III。实验 ΔU 与数值结果汇总。

D.4. Assessing multistability

在这些模拟中，我们假设在时间 $t = 0$，所有单元均处于其向下构型，该构型由首先

$$v^i_{\text{top}} = -2h_0, \quad u^i_{top} = u^i_{beam} = 0 \quad \text{for } i = 0, ..., N \tag{22}$$

为评估向下构型的稳定性，随后我们让系统在不施加任何外部载荷的情况下松弛，并监测顶部质量的位移。如果所有单元在松弛过程中都保持向下构型，则认为该构型是稳定的。

D.5. Simulations of wave propagation

在这些模拟中，我们假设在时间 $t = 0$ 所有单元均处于其向下构型，该构型首先由以下方式定义

$$v^i_{\text{top}} = -2h_0, \quad u^i_{top} = u^i_{beam} = 0 \quad \text{for } i = 0, ..., N \tag{23}$$

为模拟波传播，我们在时间 $t = 0$ 通过施加以下方式扰动第 i 个单元

$$v^i_{\text{top}}(t = 0) = -1 \text{ mm} \tag{24}$$

然后监测结构随时间的响应。结构 #a-d 的预测速度汇总见表 IV。

结构	c_{wave} [单元/s] 实验	数值模型
结构 #a	54.1 ± 3.2	53.7
结构 #b	40.1 ± 3.9	38.8
结构 #c	37.2 ± 4.1（部分传播，跨越 3-20 个单元）	38.6（部分传播，跨越 10 个单元）
结构 #d	无传播	无传播

表 IV. 速度 c_{wave} 汇总。

E. 基底曲率对 c_{wave} 的影响

正文图 4 展示了，通过改变冯·米塞斯桁架的质量，可以按需调节波速。这里，我们说明，通过改变基底曲率也能实现类似的调节效果。图 S13 展示了一个实验装置示例。在结构基底处施加曲率 κ，会改变竖直梁顶端之间的距离，记作 d^{top}（见图 S14a）。对于 $\kappa > 0$，梁会向外弯曲得更远（即 $d^{\mathrm{top}} > d$）；而对于 $\kappa < 0$，梁则会彼此靠近弯曲（$d^{\mathrm{top}} < d$）。重要的是，冯·米塞斯桁架的倾角 θ_0 取决于这一顶端间距。具体而言，正曲率（$\kappa > 0$）会减小 θ_0，并降低向下状态与向上状态之间的能垒，从而加快波传播。相反，负曲率会增大这一能垒，并减慢传播前沿。

我们通过将一条 32单元超材料链夹持在具有指定曲率$\kappa = 1/R \in [-1,\, -0.5,\, 1,\, 2,\, 3]$ m^{-1}的基座上，在实验中展示了这一效应。在这一范围内，测得的波速变化约为 40 %；随着曲率从负值变为正值，波速从约 50 units/s 增至 70 units/s（图 S14b）。我们还利用数值模型研究了这一效应，其中通过指定顶端间距 d^{top}的相应变化来体现曲率的影响，而该间距直接决定每个单元的指定倾角 θ_0。模拟结果再现了实验中观察到的 c_{wave} 随 κ增加而上升的趋势。实验结果和模型预测表明，当 $|\kappa|$过大或过小时，结构会分别变为完全单稳态（无法达到向下状态）或完全双稳态，从而抑制波传播。此外，在 32单元链的两半分别改变 κ，会使结构中的波速发生变化：左半部分的波速为 $c_{\mathrm{wave}} = 56.5$ units/s，其$\kappa = 2$ m^{-1}；右半部分的波速为 $c_{\mathrm{wave}} = 51.5$ units/s，其 $\kappa = -1$ m^{-1}（图 S14c 和补充视频 3）。这一结果表明，局部调节基底曲率分布可为空间控制波传播提供一种方法，尽管其效果弱于质量调制（见正文图 4）。



图 S13. 基底曲率变化时的动力学测试装置。该结构承受恒定的基底曲率 $\kappa = -1$ m^{-1}。

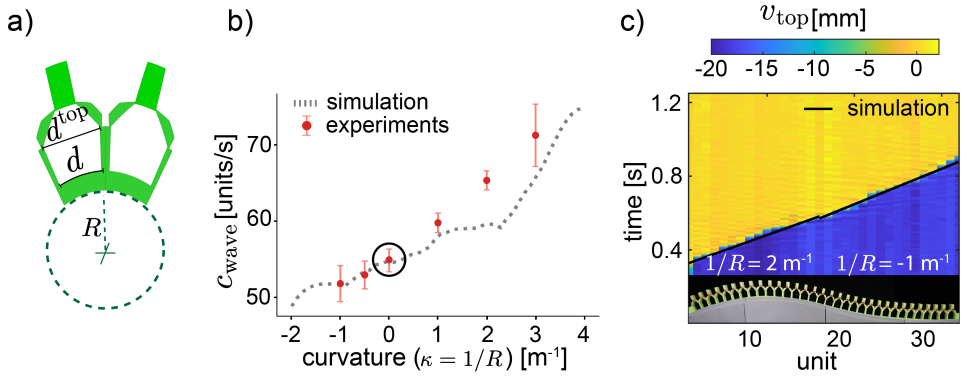

图 S14. **通过 κ 调节传播速度**。所有结构的几何参数均为 $\mathrm{h} = 0.7\,\mathrm{mm}$ 和 $\mathrm{w} = 1.4\,\mathrm{mm}$。参考实验点已圈出。**a)** 示意图说明基底曲率的定义 $\kappa = 1/R$ **b)** 传播速度随附加曲率的演化 κ（模拟数据和实验数据）**c)** 具有两个不同曲率半径的结构的时空位移图：$\forall j \in [1, 16],\ \kappa = 2\,\mathrm{m}^{-1}$（速度为 56.5 单元/s）和 $\forall j \in [17, 32],\ \kappa = -1\,\mathrm{m}^{-1}$（速度为 51.5 单元/s）（参见补充视频 3）。

F. 补充实验结果

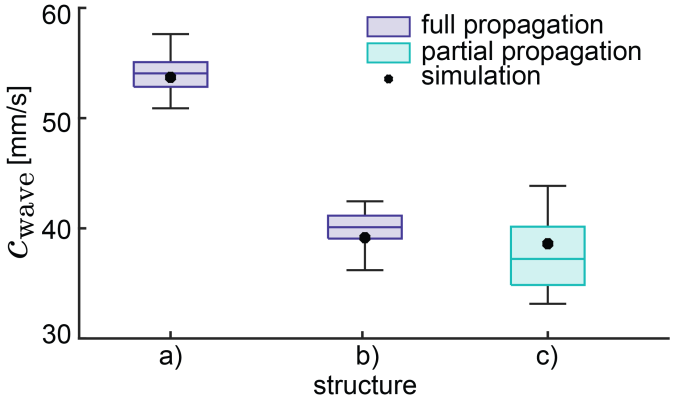

图 S15. 实验测量的传播速度与模拟传播速度的比较。参考结构（$h = 0.7$ mm，$w_{\mathrm{beam}} = 1.4$ mm）的模拟值为 53.7 单元/s，较小铰链情况（$h = 0.6$ mm）的模拟值为 38.8 单元/s，较宽梁情况（$w_{\mathrm{beam}} = 1.7$ mm）的模拟值为 38.6 单元/s。

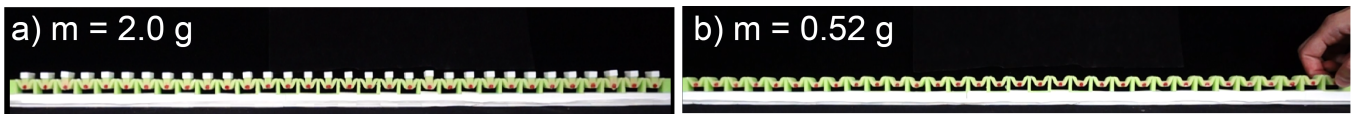

图 S16. 顶部质量变化时的动力学测试装置。**a)** 顶部质量为 2.0 g 的结构。通过将小型 3D 打印“帽子”放置在每个拉片顶部来增加质量。**b)** 顶部质量减至 0.52 g 的结构，其实现方式是从拉片上去除材料。

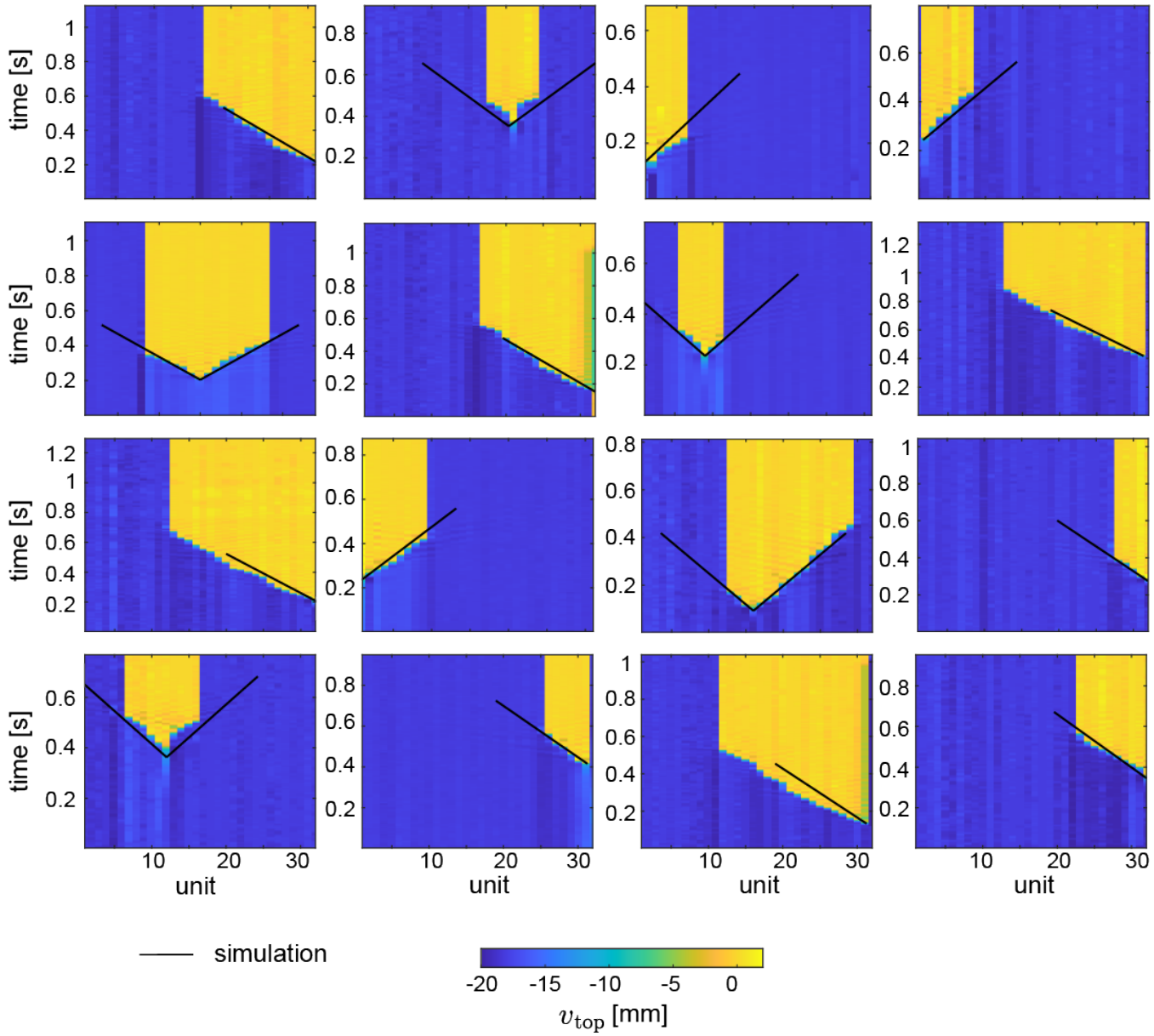

图 S17. 结构 #c 的时空位移图。每幅图代表一次不同的实验，展示了部分传播情况下的变化。模拟速度曲线以黑色显示。