arXiv:2603.09900v1 [math.LO] 10 Mar 2026

论算术后承的概念

ALEXANDER V. GHEORGHIU

摘要。 哥德尔第二不完备性定理通常被理解为表明：任何足够强且一致的算术理论都无法证明自身的一致性。这一结果通常是在模型论背景下加以解释的；在这一背景中，算术语言相对于一个独立给定的自然数结构进行评价。本文提出一种以证明论语义为基础的替代视角。我们区分可推导性与一种由支持所给出的语义后承概念；支持则根据理论所确定的推理角色，以组合方式加以定义。对于以有限签名表述的适当算术理论 A（例如罗宾逊算术 Q 和皮亚诺算术），这两个概念可以有原则地出现分歧：尽管 A 不能证明自身的一致性，却仍然支持其形式化的一致性陈述，而且更一般地说，还支持一些在其中不可推导的句子。这并不与哥德尔不完备性定理相冲突，而是将不完备性重新理解为与单个理论相关联的两种内部确定的后承概念之间的分歧，而非句法可证性与独立于心灵的结构中的真之间的鸿沟。这一结果阐明了反射、一致性与意义的推理主义进路之间的关系，并展示了算术本身的推理结构如何产生实质性的语义确定性。

§1. 引言。 G¨odel的不完备性定理 [11] 确立：任何足以表示初等数论的递归可枚举且一致的形式系统A，都必定使某些语句在其中既不可证也不可反驳。一致性陈述Con(A)是一个典范例子： $\nvdash_A$ Con(A)与 $\nvdash_A \neg$Con(A)。这些结果广为人知，尤其因其对希尔伯特纲领具有决定性影响：第二不完备性定理排除了在系统自身之内以有穷方法确立算术一致性的可能性。G¨odel本人的哲学评论 [12] 引出了进一步的推论：既然Con(A)为真却不可证，数学真理就不能等同于形式可证性，而我们的形式系统必须被理解为——以不同程度的完备性——回应一种独立的数学实在。

塔尔斯基给出了这一独立性的数学表述，后来成为标准表述。他在《论逻辑后承的概念》 [24]中指出，尽管——事实上，部分正是因为——哥德尔的结果，逻辑后承的直觉概念仍然没有精确定义，于是运用其形式语言真理论 [25] 填补这一空白。核心做法是区分两种算术后承概念：句法后承，即

Key words and phrases. G¨odel不完备性、形式主义、证明论语义学、反射原则、算术、推理主义、语义后承、一致性。2020 *Mathematics Subject Classification*。03B05, 03F03, 03A05

通过形式证明可由公理推导出的内容；以及语义后承，即在每个满足这些公理的模型中都成立的内容。

这里所说的语义就是如今所称的模型论语义学。在这一框架中，真是相对于某个结构——一个模型——来定义的，而该结构独立于任何证明系统加以规定。句法后承与语义后承之间的分歧由此成为一个精确的定理，而不再只是哲学观察。G¨odel 的不完备性定理表明，算术标准模型 $\mathbb{N}$ 不具有递归可枚举公理化。

这一正统解读在哲学界持续受到审视，尤其是邓梅特于 1963 年发表的文章《哥德尔定理的哲学意义》 [1]。他指出，标准解释预先假定了一个核心哲学问题：数学陈述的意义，是由我们有权断言这些陈述的条件——也就是它们的证明条件——所赋予，还是由可能超越证实的真值条件所赋予？断言 Con(A) 为真但不可证，预设了一种算术的实在论构想，例如 $\mathbb{N}$；然而，恰恰是这一预设本身正在受到质疑。

不过，还有什么别的解读呢？Dummett 提出了自己的反实在论解释，认为数学陈述的内容由其正确性能够得到确认的条件所决定。在这种观点下，没有任何自动的根据可以将超越可导性的真值赋予 Con(A)。依此解读，G¨odel 定理的真正意义不在于证实实在论，而在于揭示：断言某事对所有自然数都成立的根据这一概念是无限可扩展的：对于对此类根据的任何明确刻画——也就是任何递归公理化形式系统——G¨odel 式构造都会产生该系统的自然扩展。对 Dummett 而言，这种无限扩展性是自然数概念本身固有模糊性的一种形式，因此与以下论点完全相容：数学意义由使用构成，而非由一个确定的、独立于心灵的领域作为指称对象。

这一提议既赢得了赞赏，也招致了批评，并促使 Dummett 本人作出了重要澄清。Wright [27] 对其核心预设进行了持续的审视。Dummett 的论述要求我们总能给出 G¨odel 语句的非形式证明——即我们总能从系统外部认识到 Con(A) 的真。Wright 认为，这一预设面临一个两难。G¨odel 的构造严格给出的是一个条件命题：如果该系统是一致的，那么Con(A) 在该系统内不可证；要分离其后件，还需要一个单独的一致性证明。Wright 还指出，Dummett 这幅图景之所以具有直觉上的吸引力，其背后可能存在一种更简单的混淆风险：我们或许把对一项承诺的发现——即认识到一致性迫使我们接受 Con(A)——与对其真的独立证明混为一谈。

Moore [16], 大体上赞同 Dummett 的反实在论取向，但从另一个角度提出了反驳。哥德尔定理对「意义即使用」这一论题构成的威胁，并不像 Dummett 所认为的那样独特，因为无法通过递归公理化形式地刻画一个概念的外延，是自然语言的普遍特征，而非算术所特有。Raatikainen [19]从 Wright 的角度进一步强化了认识论压力，

他认为，我们可以直接看出哥德尔句为真这一主张，比反机械主义传统所承认的脆弱得多；而 Wright 所指出的混淆，则系统性地遮蔽了认识论处境。

这些批判性的交锋使达米特纲领处于一种在哲学上重要、但在技术上尚未充分发展的状态。他提出了正确的问题——算术正确性是否能够由推理实践构成性地决定，而非取决于与某种独立给定结构的符合——但缺少给出精确而严谨答案的形式框架。在发表那篇批判性论文后的几十年间，Dummett 发展了他的反实在论、正当化的意义理论。我们可以称之为推理主义（与指称主义相对）；它在数学上被表述为证明论语义学（与模型论语义学相对）。

在其论文《无二值性的经典逻辑》中，Sandqvist [20, 21] 为经典逻辑提出了一种证明论语义学。它采用一种称为支持 ($\Vdash$)的语义判断关系，该关系由一组原子推理承诺作为基底，以组合方式定义。本文旨在将这种语义学应用于算术语境，从而对 Dummett 对 G¨odel 的解读给出一种有技术基础的分析。

我们证明，对于满足某些基本性质的任意算术理论 A——罗宾逊算术 Q 和皮亚诺算术（PA）均满足这些性质——它都验证自身的一致性陈述 Con(A)；也就是说，

$$A \Vdash \mathsf{Con}(\mathsf{A}).$$

这似乎与 G¨odel 的第二不完备性定理相矛盾，该定理断言 $\nvdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Con}(\mathsf{A})$。解决这一矛盾的关键在于 Sandqvist 完备性定理的适用范围：只有当底层签名包含足够多尚未使用的常元时，该定理才成立，而算术的标准有限签名并不满足这一条件。缺少完备性时，可推导性与支持会以一种有原则的方式分离，而本文的结果恰恰立足于这道鸿沟。下文将给出完整细节与分析。

其哲学启示是：G¨odel 定理不必被解读为证明某个算术理论未能达到某个预先给定的模型。我们也可以将其理解为一种体现：有限推导所能确立的内容，与构成理论本身的推理承诺所决定的内容之间存在鸿沟。这样的重新阐释，在同一理论所关联的两种后承概念之间确立了有原则的区分：可推导性在证明系统内部以句法方式运作；语义支持则由该理论的公理赋予其非逻辑词汇的推理角色所决定。

组织结构。 第 2 节回顾证明论语义框架，并重述 Sandqvist 的支持概念，给出逻辑常项的组合性子句，并陈述相关的可靠性与完备性结果。第 3 节说明我们所采用的算术理论 A 所满足的假设，以及对可证性谓词的要求。第 4 节证明，对于适当的理论 A，支持关系能够验证一致性陈述，并证明主要的分离结果

A $\nvdash$Con(A)，但 A $\vdash$ Con(A)。第5节详细解释这为何不与 G¨odel 的第二不完备性定理相冲突，并阐明语义支持、可推导性与熟知的反射原则之间的确切关系。

§2. 证明论语义学。证明论语义学的指导思想是：表达式，尤其是逻辑常项的意义，应从它们在推理中的作用来解释，而非从独立给定结构中的真来解释；例如，参见 Dummett [4, 3], Prawitz [18, 17]，和 Schroeder-Heister [22, 23]。这一思想可以通过自然语言中一些熟悉的概念习得案例来说明。尚不了解什么是母狐狸 的人，仍可能通过这样的告知而理解这个词项：例如，某个个体是母狐狸，当且仅当它既是狐狸又是雌性。更准确地说，掌握这一概念，体现在理解这些推理联系上：它们许可人们从关于某物是狐狸且为雌性的断言，推导出它是母狐狸的断言，反之亦然：

$$\frac{\mathrm{Fox}(t) \quad \mathrm{Female}(t)}{\mathrm{Vixen}(t)} \qquad \frac{\mathrm{Vixen}(t)}{\mathrm{Fox}(t)} \qquad \frac{\mathrm{Vixen}(t)}{\mathrm{Female}(t)}$$

在这种情况下，所学到的并非一个独立的满足条件，而是一种正确推理使用的模式。从这个意义上说，意义与推理模式相关，而非取决于对对象域的先行把握。证明论语义学纲领将这一思想应用于逻辑词汇。例如，合取（$\wedge$）的意义并非由真值表给出，而是由支配其使用的推理原则规定：

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

从这一视角出发，我们会得到一个以证明论术语表述的语义后承概念。下文将回顾 Sandqvist [20, 21], 提出的框架，并确定本文将一以贯之使用的记号和基本结果。

2.1. 基底与原子可推导性。在模型论框架中，人们通常从一个数学结构 $\mathfrak{M}$ 出发，意在以此表征一个独立于心灵的对象域，并参照该结构中为真的内容来定义语义概念。与之相反，在当前的证明论框架中，我们的出发点不是一个对象域，而是一套推理承诺，并将其理解为主体使用非逻辑词汇的构成性要素。

这组承诺称为基底 $\mathfrak{B}$。为与该方法的构造性和句法特征保持一致，它由一组作用于原子公式的推理规则表示；也就是说，这些公式的形式为 $P(t_1, \ldots, t_n)$，其中 P是谓词符号，而 t_i 是项。特别是，在这一阶段不会出现逻辑常项：$\bot$ 不被视为原子公式，也不预设 $\to$、$\wedge$或 $\forall$。相反，逻辑常项的含义将在稍后由支配其推理角色的组合语义条款加以确定。

Definition 1 (原子规则). 原子规则 是一种形式如下的推理图式

$$\frac{P_1 \quad \dots \quad P_n}{C}$$

其中， C、P_1、.....、 P_n 是闭原子公式。

Definition 2 (基底)。 *A* 基底 $\mathfrak{B}$ 是一个原子规则集。

Example 3. 令 $H(t)$ 表示“t 是人类”， $M(t)$ 表示“t 是必死的”，并令s表示苏格拉底。假设某个主体承诺了“苏格拉底是人类”和“所有人类都是必死的”这两个主张。这可由以下推理规则表示

$$\frac{}{H(s)} \qquad and \qquad \frac{H(t)}{M(t).}$$

给定一个编码主体原子推理承诺的基底 $\mathfrak{B}$，便可由此引出一个概念，说明该主体凭借这些承诺还承诺 什么。直观而言，如果某个主张能够通过有限次、迭代地应用基底中的推理规则而得到，那么它就在原子层面得到支持。这自然引出了基底中的可推导性概念，其定义方式是将原子规则对其自身应用予以闭包。

Definition 4 (基底中的推导)。 令 $\mathfrak{B}$ 为一个基底。 $\mathfrak{B}$-推导的集合是满足以下定义的最小树集：

Ref 如果C 属于 $\mathfrak{B}$，那么以 C 为根的单节点树就是一个 $\mathfrak{B}$-推导。$P_1 \ \dots \ P_n$

App 如果C 属于 $\mathfrak{B}$，且 $\mathcal{D}_1$、.....、$\mathcal{D}_n$ 是 $\mathfrak{B}$-推导，分别以 P_1、.....、P_n 为根，那么以 C 为根、子树为 $\mathcal{D}_1$、.....、$\mathcal{D}_n$ 的树就是一个 $\mathfrak{B}$-推导。

如果存在一个以 C 为根的 $\mathfrak{B}$-推导，我们就写作 $\vdash_{\mathfrak{B}} C$ 。

Example 5 （例 3 续）。 由例 *3* 中的基底可得如下推导：

$$\frac{H(s)}{M(s)}$$

由此可知 $\vdash_{\mathfrak{B}} M(s)$ 。

可推导性 $\vdash_{\mathfrak{B}}$ 这一概念完全在原子层面运作：它只涉及原子公式以及基底中编码的推理承诺。我们可以把基底 $\mathfrak{B}$ 看作一个非常简单的公理系统，由形如 P_1，.....， $P_n \to C$ 的推理规则构成，并在单一的组合方式——即分离规则——下封闭。在这一阶段，不涉及任何逻辑常项，除原子规则本身所编码的内容外，也不作任何结构假设。接下来，我们将把这一原子的可推导性概念扩展为完全组合式的证明论语义学，从而引入复杂公式和逻辑词汇的处理。

2.2. 支持关系。现在我们定义该框架的核心语义概念：公式何时得到基底支持。在当前的证明论框架中，这一关系所起的作用，相当于模型论语义学中的满足关系。

$\Vdash_{\mathfrak{B}} A$	iff	$\Vdash_{\mathfrak{B}} A$	(At)
$\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi \wedge \psi$	iff	$\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi$ 且 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \psi$	($\wedge$)
$\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi \to \psi$ 当且仅当		$\varphi \Vdash_{\mathfrak{B}} \psi$	($\to$)
$\Vdash_{\mathfrak{B}} \forall x \varphi$	iff	$\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi[x \mapsto t]$ 对于所有闭项 t	($\forall$)
$\Vdash_{\mathfrak{B}} \bot$	iff	$\Vdash_{\mathfrak{B}} A$ 对于每个闭原子 A	($\bot$)
$\Delta \Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi$	iff	对于所有 $C \supseteq B$，如果 $\Vdash_{\mathfrak{C}} \psi$ 对于所有 $\psi \in \Delta$，那么 $\Vdash_{\mathfrak{C}} \varphi$ (Inf)	

FIGURE 1. 基底中的支持

我们分别用 $\mathcal{V}$、$\mathcal{T}$、$\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{F}$ 表示变量、项、原子公式和公式的集合。我们用 $\mathrm{CL}(\mathcal{T})$、$\mathrm{CL}(\mathbb{A})$ 和 $\mathrm{CL}(\mathbb{F})$ 表示相应的闭表达式集合。逻辑常项 $\to$、$\wedge$、$\forall$ 和 $\bot$是原始的；其他联结词和量词则作为标准缩写引入：

$$\neg\varphi := \varphi \to \bot, \qquad \varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \qquad \text{and} \qquad \exists x\, \varphi := \neg\forall x\, \neg\varphi$$

DEFINITION 6（支持）。支持关系通过图*1*中的各条款以归纳方式定义，其中 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}$是基底，所有公式均假定为闭公式，而 Δ 遍历闭公式的非空集合。

这些条款的一般动机和详细论证在此不再重复；详情请参阅 Sandqvist [20, 21] 。这里只提出几点导向性的说明。$\bot$ 的条款可追溯至 Dummett [3] ，表达了这样一种思想：一个承诺状态不一致，当且仅当它支持一切。

(Inf)条款具有克里普克式语义用于直觉主义逻辑时所熟悉的持久性或单调性形式：要求支持在基础的所有可容许扩展下保持稳定。这一点与该框架的证明论动机和构造性动机完全一致。然而，正如下文回顾的可靠性与完备性定理所示，由此得到的支持概念刻画了经典逻辑。

现在我们希望转而定义有效性($\Vdash$)。“基底”对理想化理性主体的推理承诺进行模型化，因此至少有两种自然的候选方案。我们可以对任意的推理承诺集合进行量化，不赋予任何基底以特权地位：

$$\Gamma \Vdash \varphi \qquad \text{iff} \qquad \Gamma \Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi \quad \text{for any base } \mathfrak{B};$$

——这让人联想到塔尔斯基对模型论后承的定义。或者，我们也可以简单地要求，在不存在任何先行承诺的情况下，φ 得到支持：

$$\Gamma \Vdash \varphi \qquad \text{iff} \qquad \Gamma \Vdash_{\varnothing} \varphi.$$

正如 Sandqvist [21]所证明的，这两种表述是等价的。我们选择后者，因为它的表述更为简单。

DEFINITION 7 （有效性）. 对于任意集合 $\Gamma \subseteq \mathrm{CL}(\mathbb{F})$，

$$\Gamma \Vdash \varphi \quad \textit{iff} \Gamma \Vdash_{\varnothing} \varphi.$$

为了恢复经典逻辑，我们需要对 Γ 施加限制——必须有无穷储备的原子公式。在数学上，这是由语义的非紧致性所导致的。例如，假设 Ω 包含所有原子；不难看出

$$\Omega \Vdash \bot$$

为排除这类病态情形，我们对句法施加了一些限制。

Sandqvist [20, 21] 和 Gheorghiu [8] 通过只考虑有限语境解决了这个问题。这实质上只确立了弱完备性：

$$\Vdash \varphi \quad \text{iff} \quad \vdash_\Gamma \varphi$$

然而，Gheorghiu [8] 采用的技巧可以推广。要求有限性，仅仅是为了确保语言中有足够多的常元。将这一点明确作为条件后，就不再需要有限性条件本身。

THEOREM 8. 假设语言中有足够多的常元，

$$\Gamma \Vdash \varphi \quad \textit{iff} \quad \vdash_\Gamma \varphi$$

可靠性方向通过标准的归纳论证很容易看出。事实上，它在局部成立：

PROPOSITION 9. *Let* $\Vdash_{\mathfrak{B}} \gamma$ *for* $\gamma \in \Gamma$. *If* $\vdash_\Gamma \varphi$, *then* $\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi$

完备性方向需要满足“有足够多的常元”这一条件。也就是说，语言中包含无限多个未在该理论中使用的原子表达式 Γ。这反映了数学的通常做法：按需引入新符号或参数。从形式上说，这意味着要区分一种背景语言签名 σ，其中包含无限量的常元，以及一种更为精简的对象语言子签名 τ，理论 Γ在其中表述，其证明也在其中进行。

例如，可以令背景语言具有签名 $\sigma := \langle (c_i)_{i\in\mathbb{N}},\ S,\ +,\ \times\rangle$——也就是说，其中有可数多个常元 c_i。与此同时，我们所关注的算术理论 A 则由子签名 $\tau = \langle c_0,\ S,\ +,\ \times\rangle$ 指定，其中只有一个常元 $c_0 = 0$。额外的常元仅仅作为一组可随时取用的新名称，在语义和元理论论证中发挥参数或特征变量的作用。

在这种扩充后的设定中，可靠性与完备性定理可以毫无困难地应用，尤其可以重新得到这一等价关系

$$\mathsf{PA} \Vdash \varphi \quad \text{iff} \quad \vdash_{\mathsf{PA}} \varphi.$$

其中 PA 指皮亚诺算术。这种做法并未改变通常算术的任何本质内容。然而，这显然不是建立算术形式理论的传统做法。

如果坚持严格采用算术原有的简约签名，并拒绝使用任何此类符号储备，那么情况就会变得更微妙，而且从本文的角度来看，也更有趣。在这种情形下，无限储备条件不再成立，这就带来了这样一种可能：可推导性与语义支持会以一种有原则的方式彼此分离。哥德尔不完备定理正是出现在这一间隙之中。

§3. 算术理论。 本节将固定算术背景，并建立本文余下部分将用到的一些标准证明论基础设施。我们在一阶语言符号 $\langle 0, S, +, \times\rangle$下研究一个固定理论 A，并假定它足够强，能够支持对句法和证明进行通常的算术化。这里的内容完全遵循正统论述；目的只是明确相关机制，并为之确定记号，以便后文在语义论证中加以运用。

我们从一些基本的记号约定开始。我们用 $t < s$ 来缩写 $\exists x(t+x = s)$。相应地，我们用 $\forall x < t\,\varphi$ 来缩写 $\forall x(\exists y(x+y = t) \to \varphi)$。我们还用 $\bar{n}$ 表示第 n 个数码——也就是说，

$$\begin{cases} \bar{0} = 0 \\ \bar{n} = S(\overline{n-1}). \end{cases}$$

现在我们转向算术内部的语法形式化与证明。正是在这一意义上，假定 A 足够强 才值得关注：对于不完备性论证以及随后的语义构造，我们需要一个完全显式的内部证明概念。

特别地，A 必须足够强，以便定义一个可证性谓词

$$\mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p, x),$$

用以表示自然数 p 编码了一条 A-推导，其最终公式的 G¨odel 数为 x。为此，我们假定存在一种 G¨odel 编号

$$\ulcorner\cdot\urcorner : \{\text{finite strings of symbols}\} \to \mathbb{N}$$

满足通常的有效性要求。

既然可证性谓词的构造想必大家都很熟悉，我们就不再赘述，只列出预期的性质。例如，我们假设编码函数具有以下意义上的单射性：

Comp:（哥德尔编号的完备性。）对于所有公式 φ, ψ，

$$\vdash_{\mathsf{A}} \ulcorner\varphi\urcorner = \ulcorner\psi\urcorner \qquad \text{iff} \qquad \varphi = \psi.$$

我们认为，可以用 A 通过有界（Δ_0）公式定义以下内容：

- $\mathsf{Form}(x)$：x 是一个良构公式的哥德尔数；
- $\mathsf{Seq}(p, n)$：p 编码了一个长度为 n 的有限序列；
- $\mathsf{Elt}(p, i, y)$：y 是由 p 编码的序列中的第 i 个元素；
- 公理$_{\mathsf{A}}(x)$：x 是 A 中某条公理的 G¨odel 数；
- 肯定前件式$(a,\ b,\ c)$：c 通过对 A 和 b 应用分离规则得到；
- $\mathsf{Gen}(a,\ c)$：c 通过对 A 进行全称概括得到。

可证性谓词由这些函数构建而成。为此，首先定义一个谓词，用来表达编码推导中的某一给定行在局部上是正确的：

$$\begin{aligned} \mathsf{Line}(p, i) \;:=\; \exists y \Big(& \mathsf{Elt}(p, i, y) \;\wedge\; \mathsf{Form}(y) \;\wedge \\ & \Big(\mathsf{Ax}_{\mathsf{A}}(y) \;\vee \\ & \quad \exists j, k < i\; \exists y_1, y_2 \left(\mathsf{Elt}(p, j, y_1) \;\wedge\; \mathsf{Elt}(p, k, y_2) \;\wedge\; \mathsf{MP}(y_1, y_2, y) \right) \;\vee \\ & \quad \exists j < i\; \exists y_1 \left(\mathsf{Elt}(p, j, y_1) \;\wedge\; \mathsf{Gen}(y_1, y) \right) \Big) \Big). \end{aligned}$$

$\mathsf{Line}(p,i)$ 中的所有量词都是有界的，因此 $\mathsf{Line}(p,i)$ 是一个 Δ_0-公式。其次，我们定义证明谓词本身。设：

$$\mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p,x) \;:=\; \mathsf{Form}(x) \;\wedge\; \exists n \,\Big(\mathsf{Seq}(p,n) \;\wedge\; n>0 \;\wedge\; \mathsf{Elt}(p,n-1,x) \;\wedge\; \forall i<n\; \mathsf{Line}(p,i)\Big).$$

现在所有量词都是有界的，因此 $\mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p,x)$ 是一个 Δ_0-公式。注意，$\mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p,x)$ 表示 p 编码了一个有限公式序列，该序列的最后一项的 G¨odel 数为 x，并且序列中的每一行都根据 A 的公理和推理规则在局部上得到正当化。

最后，我们定义相应的可证性谓词

$$\mathsf{Prov}_{\mathsf{A}}(x) \;:=\; \exists p\, \mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p,x),$$

这是一个 Σ_1 公式。

我们假设所选的 G¨odel 编码满足以下标准正确性性质；这些性质都是原始递归的，其算术对应式都可在 A 中证明。明确陈述这些性质只是为了固定记号，并使后续的内部推理完全清晰。

Seq:（序列编码的函数性。）谓词 $\mathsf{Elt}(p,i,y)$ 可以在以下意义上视为一个函数关系：

- 对于固定的 p 和 i，至多存在一个 y 使得 $\mathsf{Elt}(p,\ i,\ y)$ 成立；
- 如果 $\mathsf{Seq}(p,\ n)$ 成立，那么对每个 $i<n$，恰好存在一个 y 使得 $\mathsf{Elt}(p,\ i,\ y)$ 成立。

推理规则：（句法谓词的正确性。）从外部看，关系 Ax_{A}、MP 和 Gen 表示 A 的预期公理与推理规则。从内部看，

A 证明了相应的可表示性条件，特别是：

- $\mathsf{Ax}_{\mathsf{A}}(\overline{n})$ 成立，当且仅当 n 是 A 中某个公理的 G¨odel 数；
- $\mathsf{MP}(a,\overline{b},\overline{c})$ 成立，当且仅当 $a=\ulcorner\varphi\urcorner$、$b=\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner$ 和 $c=\ulcorner\psi\urcorner$ 对于某些公式 $\varphi,\ \psi$；
- $\mathsf{Gen}(a,\overline{c})$ 当且仅当 $a=\ulcorner\varphi\urcorner$ 且 $c=\ulcorner\forall x\,\varphi\urcorner$，其中某个公式为 φ，某个变元为 x。

我们使用的证明系统中，全称概括没有边条件；或者，这些条件已内置于 Gen 中。

最后，我们记录证明在取初始段时的基本封闭性质。每当我们在 A 内部推理其自身的推导时，都会反复用到这一点。

为了在内部讨论证明，我们需要能够操作编码推导的前缀。令 $\mathsf{Pref}(p,\ k)$ 为一个原始递归函数，它对序列 p 的长度为 k 的初始段进行编码。我们假设以下标准性质均可在 A 中证明：

Len:（前缀长度。）

$$\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Seq}(\mathsf{Pref}(p,k),k).$$

前缀：（证明的前缀封闭。）

$$\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p,\ulcorner\varphi\urcorner) \;\wedge\; \mathsf{Elt}(p,n,\ulcorner\psi\urcorner) \;\to\; \mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(\mathsf{Pref}(p,n+1),\ulcorner\psi\urcorner).$$

这些假设确保，从算术的内部视角来看，$\mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p, x)$ 和 $\mathsf{Prov}_{\mathsf{A}}(x)$ 的行为恰如预期，分别表示“p 是一个编码为 x 的公式的 A 的证明的代码”和“编码为 x 的公式可在 A 中证明”。接下来的章节将利用这一基础设施来表述相关的一致性陈述，并将句法上的可推导性与证明论语义的支持概念联系起来。

§4. 一致性陈述。 定义了可证明性谓词后，我们现在可以定义一致性陈述：

$$\mathsf{Con}(\mathsf{A}) \;:=\; \neg \mathsf{Prov}_{\mathsf{A}}(\ulcorner \bot \urcorner).$$

这是一个用 A 表达的句子，断言不存在 $\bot$ 的 A 证明的编码。我们将在本节证明，

$$\mathsf{A} \Vdash \mathsf{Con}(\mathsf{A}).$$

首先必须强调，这并非关于可推导性的主张。G¨odel 的第二不完备性定理依然完全成立：A 并不证明自身的一致性，

$$\nvdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Con}(\mathsf{A})$$

这是因为我们利用了完备性条件（定理 8），以确保有足够多的常元储备。

在下面展开数学论述之前，我们可以先解释一下为何这正如预期。如第 1 节所述，Dummett 声称，G¨odel 的不完备性定理表明，「为对所有自然数作出断言提供依据」这一概念是无限可扩展的 [1]。当存在某个原则，使得对于任何由符合该概念的事物构成的确定总体，该原则都能生成一个严格更广泛的、由符合该概念的事物构成的确定总体时，这一概念便是「无限可扩展的」。在此情形下，任何对关于自然数的断言依据所作的确定刻画，都可以通过 G¨odel 式构造扩展为一个严格更广泛的刻画。

Dummett 论证的问题在于，这种扩展本应是我们总能识别为正确的——这就要求证明 G¨odel 句子的真，而这反过来又要求提供一致性证明。Wright 的核心反驳围绕着这项一致性证明所涉及的两难展开 [27]。如果它必须具有说服力——真正提供信息，并为我们相信系统具有可靠性提供正面依据——那么一般而言，这样的证明并不存在，Dummett 的论证也就无法成立。另一方面，如果只需要一个没有说服力的证明（它只是揭示出，将系统的公理视为真这一做法中已隐含的内容），那么 G¨odel 句子的可证明性就无法在确立算术真理超越任何系统刻画这件事上发挥作用。无论如何，Dummett 的问题所依赖的预设都没有得到稳固确立。

Dummett 承认，Wright 对原始表述的反对意见具有根本的分量 [5]。他澄清说，与无限可扩展概念相关的扩展原则本身未必无法得到精确刻画——恰恰相反，正是因为 G¨odel 扩展程序可以得到一般性的刻画，意义即使用论题才得以保全。

无法做到的是通过任何固定的递归公理化来把握该概念的扩展。他还澄清了确定总体这一概念：对于这样的总体，量化总会得出一个确定为真或为假的陈述，而且我们能够清楚地把握它——同时承认这一标准有程度之分；自然数是否算作无限可扩展，取决于这些标准设定得有多严格；但他坚持认为，在任何非平凡的设定下，序数都是无限可扩展的，否则就会陷入矛盾。

我们沿着 Dummett 的思路，尝试运用经典逻辑的证明论语义学对其进行数学表述。为此，我们需要一些技术细节。

算术理论的定义性。 按照推理主义解读，数的领域并不是一个独立给定的总体，而是由理论本身的签名和推理规则所确定的。一旦 0、S、 $+$和 $\times$ 的含义由 A 的规则确定，除了这些规则已经确定的内容之外，“数”便不再有任何额外的含义。重要的是，可能确实存在一些事实，超出了我们在有限主义证明系统中导出它们的能力。

从这一观点来看，通过断言存在一个编码了 A 的证明的数来扩展 A，并不只是针对一个已经确定的领域增加一个新的假设。毋宁说，这是将“数”这一概念扩展为这样一种概念，即在其中此类断言为真。然而，这事实上使该概念变得不一致，因为它声称自身是矛盾的；因此，

$$\mathsf{A}, \mathsf{Con}(\mathsf{A}) \Vdash \bot$$

这一思路指向一种更普遍的现象，即一种反思形式：

$$\mathsf{A}, \mathsf{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Vdash \varphi$$

设 φ 为任意句子。如果可证性谓词是正确的，那么每当我们在 A 中加入“存在一个数，它编码了 φ 的 A 的证明”这一主张时， φ 本身就必定成立。根据 $\rightarrow$的子句，我们可以将其等同于以下主张：

$$\mathsf{A} \Vdash \mathsf{Prov}_{\mathsf{A}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi.$$

一致性陈述只是 φ 为 $\bot$时的特殊情形。

由此，Dummett 的无穷可扩展性概念与此处的联系变得明确。反思原则并非只是体现了这一概念——它就是Dummett 坚持必须具备的扩展原则的一般刻画，唯有如此，意义即使用论题才能得到保障。Dummett 针对 Wright 澄清，对于一个无穷可扩展概念，其扩展原则本身可以得到精确刻画 [5]；难以把握的并非该原则，而是它所生成的整体。

反思图式正是这样一种原则。前提 $\mathsf{Prov}_{\mathsf{A}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ 并未描述一个已经存在于固定论域中的数；断言它本身就是扩展的行为。该图式的每次应用都会扩充数的总体，而哥德尔式迭代——即这一过程总能再次应用于由此得到的系统这一事实——正是使这一概念

按照 Dummett 的意义成为无限可扩展的数概念，并确保任何固定的递归公理化都无法将其完全刻画。

为使这一论证在数学上成立，我们利用 A 足以进行基本算术这一事实。一个充分条件是，A 能判定原子命题——对于任意闭项 t_1 和 t_2，要么

$$\mathsf{A} \vdash t_1 = t_2 \qquad \text{or} \qquad \mathsf{A} \vdash t_1 \neq t_2$$

——并且能够使用原始递归进行计算。罗宾逊算术 Q 和皮亚诺算术 PA 都满足这一条件——参见 Kaye [13]。

Definition 10 （足够强的算术理论）。算术理论 A 若满足以下两个条件，则称为足够强：

- 对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$： $\vdash_{\mathsf{T}} \bar{m} = \bar{n}$ 当且仅当 $m = n$，
- 对于每个 Δ_0-句子 φ，要么 $\vdash_A \varphi$，要么 $\vdash_A \neg\varphi$。

重要的是，如果 A 是充分的且可递归公理化的——也就是说，存在一个枚举 A 的公理的原始递归函数——那么 A 就能定义一个可证性谓词，如第 3 节所述。

极大一致基。 直观地说，基底 $\mathfrak{B}$ 代表理想化推理者的一种信息状态：它记录了当前有哪些推理承诺，但通常不必是完备的。当 $\mathfrak{B}$ 支持 A 的全部公理时，我们认为这意味着某个主体已接受算术定律，将其视为论题的构成性内容。尽管如此，只要不会导致不一致，信息状态 $\mathfrak{B}$ 就可以通过添加更多承诺而扩展。基底通常是不完备且可扩展的。当无法在不陷入平凡性的情况下进一步扩展时，就达到了极限情形。

这促使我们提出 Makinson 所说的极大一致基这一概念 [15], ；他认为，极大一致基在当前语境中发挥的作用，类似于模型在经典模型论中的作用。

Definition 11 （极大一致基）。基底 $\mathfrak{B}$ 是极大相容的，当且仅当它是一致的（即 $\nVdash_{\mathfrak{B}} \bot$），并且在所有一致基中是极大的（即对于每个$\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}$， $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ 或 $\mathfrak{C}$ 必有一个是不一致的）。

Makinson 观察到，就所定义的联结词而言，它们表现得如同经典逻辑中的联结词：

Proposition 12. 如果 $\mathfrak{B}^*$ 是极大一致的，那么：

- $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\varphi$ 当且仅当 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi$；
- $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} (\varphi \vee \psi)$ 当且仅当 $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi$ 或 $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \psi$；
- $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \exists x\, \varphi$ 当且仅当对于某个 $t \in \mathrm{CL}(\mathcal{T})$。

Proof. 我们首先确立辅助等价

$$\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi \quad \text{iff} \quad \nVdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\varphi. \tag{$*$}$$

对于从左到右的方向， φ 的支持与 $\mathfrak{B}^*$的一致性立即排除了对 $\neg\varphi$的支持。反之，若 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\varphi$，则根据蕴涵的子句，存在一个一致基 $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}^*$，满足 $\Vdash_{\mathfrak{C}} \varphi$；于是 $\mathfrak{B}^*$ 的极大性推出 $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi$。现在我们逐一验证各个子句。

否定。 由于 $\mathfrak{B}^*$ 是一致的， $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi$ 和 $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\varphi$不能同时成立，因此 $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\varphi$ 蕴涵 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi$。反向结论可由（$*$）立即推出。

析取。 根据定义，$\Vdash_{\mathfrak{B}^*} (\varphi \vee \psi)$是$\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$的缩写。根据刚刚证明的否定子句，这等价于 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} (\neg\varphi\wedge\neg\psi)$。合取的支持子句随后给出 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\varphi$或 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\psi$，根据（$*$），这又等价于 $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi$ 或 $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \psi$。

存在量化。 根据定义，$\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \exists x\, \varphi$ 是$\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\forall x\, \neg\varphi$的缩写。根据否定子句，这等价于 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} \forall x\, \neg\varphi$。全称量化的支持子句随后给出，对于某个 $t \in \mathrm{CL}(\mathcal{T})$，有 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} \neg\varphi[x \mapsto t]$ ，而（$*$）给出 $\Vdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi[x \mapsto t]$，如所需。⊣

Makinson 还指出，可以将基扩展为极大一致基，同时保留原基不 支持的内容。

Proposition 13. 若 $\nVdash_{\mathfrak{B}} \varphi$，则存在一个极大一致基 $\mathfrak{B}^* \supseteq \mathfrak{B}$，使得 $\nVdash_{\mathfrak{B}^*} \varphi$。

这可通过与 Makinson [15] （引理 3.4）类似的论证得出，只需在归纳过程中额外处理一种情况，以应对全称量词。

这些结果为本文提供了所需的技术背景。

反射及其推论。 现在我们证明，算术理论 A 支持反射，$\mathrm{Prov}_{\mathsf{A}}(\varphi) \rightarrow \varphi$。论证遵循一种¨朴素的内部可靠性证明的结构：对推导进行归纳，指出公理本身即得到支持，而推理规则保留支持性，因此，A 中每个可推导的公式本身都得到支持。

这种论证是朴素的¨，因为无法在 A 内部完成。它依赖于在元层面和对象层面的观察之间顺畅转换。局部可靠性（命题 9）使得一个方向上的转换成为可能；对于另一个方向，我们使用以下结果：

Proposition 14. 设 A 足够强， $\mathfrak{B}$ 是支持 A 的所有公理的一致基。对于任意 Δ_0公式 δ，若

$$\Vdash_{\mathfrak{B}} \delta,$$

then

$$\vdash_{A} \delta.$$

Proof. 我们证明其逆否命题：若 $\nvdash_{\mathsf{A}} \delta$，则 $\nVdash_{\mathfrak{B}} \delta$。

假设 $\mathsf{A} \nvdash \delta$。由于 A 足够强，且 δ 是一个 Δ_0句子，因此 $\vdash_{\mathsf{A}} \delta$。根据局部可靠性（命题 9），我们有 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \neg\delta$。但这样一来， $\Vdash_{\mathfrak{B}} \delta$ 就会使$\mathfrak{B}$ 变得不一致，这与假设矛盾。因此，$\nVdash_{\mathfrak{B}} \delta$。⊣

这使我们能够将可证明性关系的理想性质提升到语义层面，从而加以运用。

Theorem 15. 对于任意 φ，A $\Vdash \mathit{Prov}_{A}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi$。

Proof. 该陈述等价于 A，$\mathrm{Prov}_{\mathsf{A}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Vdash \varphi$。反设此结论不成立：$\mathsf{A}$，$\mathrm{Prov}_{\mathsf{A}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \nVdash \varphi$。那么存在一个基 $\mathfrak{B}$，使得：

- $\Vdash_{\mathfrak{B}} \alpha \in \mathsf{A}$,

- $\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Prov}_{\mathsf{A}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$，但是
- $\nVdash_{\mathfrak{B}} \varphi$。

不失一般性，根据命题 13，$\mathfrak{B}$ 是极大相容的。我们证明由前两项可得 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi$，这与第三项矛盾。

根据命题 12，存在一个项 p 使得

$$\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p, \ulcorner\varphi\urcorner)$$

展开证明谓词 Prf 的定义，这可缩写为 ates

$$\Vdash_{\mathfrak{B}} \exists n \Big(\mathsf{Seq}(p,n) \wedge n > 0 \wedge \mathsf{Elt}(p, n-1, \ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \forall i < n \, \mathsf{Line}(p,i) \Big).$$

再次根据命题 12 以及 $\wedge$的子句，存在某个 n 使得 $\mathfrak{B}$支持每个合取项：

1. $\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Seq}(p, \bar{n})$，2. $\Vdash_{\mathfrak{B}} \bar{n} > 0$，3. $\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Elt}(p, n-1, \ulcorner\varphi\urcorner)$，4. $\Vdash_{\mathfrak{B}} \forall i < \bar{n}$ 行(p, i)。

我们对 n 进行归纳——也就是说，对编码证明 p的长度进行归纳，以证明 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi$ 。**基础情形：** $n = 1$。由（3）可得，φ 的第 0 行是 $\ulcorner\varphi\urcorner$，

$$\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Elt}(p, 0, \ulcorner\varphi\urcorner) \quad \text{and} \quad \Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Line}(p, 0)$$

根据关于行$(p, 0)$的命题 12，我们得到

$$\mathsf{Elt}(p, 0, t) \quad \text{and} \quad \Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Ax}(t)$$

对于某个项 t成立。由于公理 Ax 是 Δ_0，根据命题 14，我们有 $\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Ax}(t)$。

由于 $\mathsf{Elt}(p, 0, \ulcorner\varphi\urcorner)$ 也是 Δ_0，根据命题 14，我们还得到 $\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Elt}(p, 0, \ulcorner\varphi\urcorner)$。根据序列编码（**Seq**）的函数性，我们有 $t = \ulcorner\varphi\urcorner$。根据推理规则（**Rule**）的正确性，我们得到 $\varphi = \alpha$，其中 $\alpha \in$为 A。因此，由于 $\mathfrak{B}$ 支持 A 的公理，我们有 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi$。

归纳步骤：假设 $n > 1$，并且作为归纳假设（IH），该命题对所有长度为 $k < n$ 的证明都成立；也就是说，如果

$$\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Prf}_{\mathsf{A}}(p', \ulcorner\varphi'\urcorner) \quad \text{and} \quad \Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Seq}(p', \bar{k}) \text{ with } k < n,$$

then

$$\Vdash_{\mathfrak{B}} \psi$$

由（4）可得 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Line}(p, n-1)$。展开定义并利用命题 12，可知存在项 i，j 和 y_1，y_2，y，使得

$$\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Elt}(p, \overline{n-1}, y)$$

并且以下情况之一成立：

- $\Vdash_{\mathfrak{B}}$公理(y)；或者
- $\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Elt}(p, i, y_1) \wedge \mathsf{Elt}(p, j, y_2) \wedge$肯定前件式$(y_1, y_2, y)$；或者
- $\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Elt}(p, j, y_1) \wedge \mathsf{Gen}(y_1, y)$。

由于这些都是 Δ_0-公式，根据命题 14，我们可得

$$\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Elt}(p, \overline{n-1}, y)$$

并且以下条件之一成立：

- $\vdash_{\mathsf{A}}$公理(y)；或
- $\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Elt}(p, i, y_1) \wedge \mathsf{Elt}(p, j, y_2) \wedge$ 肯定前件式(y_1, y_2, y); 或
- $\vdash_{\mathsf{A}}$一个 $\mathsf{Elt}(p,\ j,\ y_1) \wedge \mathsf{Gen}(y_1,\ y)$。

由 $\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Elt}(p, n - \overline{1, y})$ 和 (3)，根据（**Seq**）可推出 $y = \ulcorner\varphi\urcorner$。现在我们依次考察每个析取支，并证明 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi$ 成立：

- 我们的推理与基础情形完全相同。
- 由合取可逆性可知

  $$\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Elt}(p, i, y_1), \qquad \vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Elt}(p, j, y_2), \qquad \vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{MP}(y_1, y_2, \ulcorner\varphi\urcorner).$$

  根据编码正确性（**Rule**），存在一个公式 ψ，使得$y_1 = \ulcorner\psi\urcorner$ 且 $y_2 = \ulcorner\psi \to \varphi\urcorner$。设 $p_1 := \mathsf{Pref}(p,\ i+\bar{1})$ 且 $p_2 := \mathsf{Pref}(p,\ j+\bar{1})$; 根据证明的前缀封闭性（**Pref**），

  $$\vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Prf}(p_1, \ulcorner\psi\urcorner) \quad \text{and} \quad \vdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Prf}(p_2, \ulcorner\psi \to \varphi\urcorner)$$

  根据局部可靠性（命题 9），

  $$\Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Prf}(p_1, \ulcorner\psi\urcorner) \quad \text{and} \quad \Vdash_{\mathfrak{B}} \mathsf{Prf}(p_2, \ulcorner\psi \to \varphi\urcorner)$$

  根据前缀长度（**Len**），p_1 和 p_2 的长度都小于 p的长度。分别对它们应用归纳假设，得到 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \psi$ 和 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \psi \to \varphi$。通过分离规则即可得到所需结果。

- 这与前一种情况类似。根据 **Rule**，存在某个 ψ，满足$y_1 = \ulcorner\psi\urcorner$，且有 $\varphi = \forall x\psi$。由 **Pref** 和 **Len**，我们得到 ψ的一个证明。利用命题 9，我们回到 $\mathfrak{B}$。归纳假设得出$\Vdash_{\mathfrak{B}} \psi$；全称概括得出 $\Vdash_{\mathfrak{B}} \varphi$。

归纳至此完成。 ⊣

Corollary 16. $A \Vdash$ 一致性(A)

需要强调的是，前述结果并不与哥德尔不完备定理相冲突。由于对象语言签名

$$\sigma = \langle 0, S, +, \cdot \rangle$$

是有限的，关于支持的可靠性与完备性结果（定理 8）并不适用。尤其是，失效的是完备性方向。因此，目前可推导性与支持之间的分离，并不等同于推导出 $\mathsf{Con}(A)$，也不会削弱哥德尔定理；相反，它反映的是理论内部证明与语义之间的分歧。从这个意义上说，这里展现的现象是语义—证明鸿沟，而不是熟悉的模型论意义上的真理—理论鸿沟。

我们可以问，如果改为在无穷签名中进行分析，情况会如何

$$\tau = \langle (c_i)_{i \in \mathbb{N}}, S, +, \cdot \rangle$$

含有无穷多个常元。在这种情形下，等式完备性的条件会严格得多。尤其是，像 Q 或 PA 这样重要的标准算术理论，不再能判定等式。特别是，命题 14 不再成立，因为可以构造一个一致基$\mathfrak{B}$，它支持该理论的所有公理以及

$$\overline{c_i = 0}$$

针对每个常元 c_i 的推理规则；参见 Gheorghiu [9]。这个基在保持一致的同时，还支持基础理论无法推导出的等式，这表明等式完备性不成立。因此，上文的《分析》不再适用于这种情形。

一种自然的修补尝试，是规定所有新增常元都表示零，从而强制实现等式完备性。具体而言，可以为每个新常元 c_i添加公理 $c_i = c_0$ ，以此扩展 Q 或 PA，得到扩展理论 Q*和 PA*。这些扩展后的理论恢复了等式完备性。然而，支持语义的可靠性与完备性定理又会因另一原因而失效：外围语义签名不再包含足够多未使用的常元，无法支撑完备性论证。实际上，一旦所有常元都由理论本身固定下来，可靠性与完备性结果所要求的开放性便不复存在。

这些观察有助于准确界定本文分析的适用范围。可推导性与支持之间的分离，出现在通常用于表述算术的简约的有限生成签名中。当扩展签名以恢复支持语义的完备性时，反射论证所要求的等式完备性条件便不再成立，反之亦然。因此，此处描述的现象本质上取决于固定的有限签名与其项的推理性确定之间的相互作用。

§5. 讨论。 本文的核心结果表明，对于一个足够强的原始递归算术理论 A，有

$$\nvdash_{\mathsf{A}} \mathsf{Con}(\mathsf{A}) \quad \text{but} \quad \mathsf{A} \Vdash \mathsf{Con}(\mathsf{A}).$$

这确立了与 A 相关的两种后承概念之间具有原则性的区分：可推导性在证明系统内部进行演绎，而语义支持则由该理论的公理赋予其非逻辑词汇的推理角色所确定。本节旨在评估这一区分的概念意义，将其置于相关文献中加以考察，并指出其更广泛的影响与局限。

我们遵循达米特纲领，通过建立意义理论来处理形而上学问题。我们将 Sandqvist 针对经典逻辑提出的证明论语义视为此类理论的形式化发展。在这一框架中，A 通过签名中的这些符号在推理中所发挥的角色，确定了非逻辑词汇 0、 S、 $+$和 $\times$ 的意义。正如逻辑的语义不同于该逻辑中的可推导性，A 赋予这些符号的意义也不同于从它们推导出的内容。

按照这种解读，可推导性与支持之间的区分并非人为规定的产物，而是对算术实践中早已隐含的一条界限的澄清——语义与可推导性之间的界限。例如，哥德巴赫猜想断言，任何偶数都可以表示为两个素数之和（$\forall x\, G(x)$）：对于任意自然数 n，都存在素数p_1 和 p_2，使得 $2n = p_1 + p_2$。它的含义由所有实例$G(n)$构成，涵盖所有 n。如果我们的数学资源受到适当限制，

那么可能不存在一个证明能够给出全称概括；相反，可能需要可数多个证明，分别处理 $G(n)$ 的各个情形。

结果 A $\Vdash$ Con(A) 与 $\nvdash_{\mathsf{A}}$ Con(A) 并存，是这种分离的另一种体现。它断言，按照由 A 所确定的非逻辑词汇的推理意义，Con(A) 是“真”的，尽管它无法在其中推导出来。在语义判断中，A 扮演的角色与 $\mathbb{N}$ 在模型论后承中扮演的角色相同：$\mathbb{N} \models$ Con(A) 断言，按照由 $\mathbb{N}$所确定的非逻辑词汇的指称意义，Con(A) 是“真”的。当前方法的意义在于，将 A 本身视为意义的决定者，可以避免形而上学膨胀；这种膨胀源于要求 $\mathbb{N}$ 作为一种独立给定的结构而存在，并要求我们能够通过认知途径获取其中包含的真理。

推论所依据的更一般结果——反思原则 $\mathsf{A} \Vdash \mathsf{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$ ——是本文的主要贡献。正如我们所论证的，这种反射的成立，是 Dummett 关于算术无限可扩展这一观念的形式表达 [1]。因此，它使我们能够更精确地回应针对 Dummett 立场的认识论挑战，尤其是 Wright 所提出的反对意见 [27]。

Wright 认为，任何关于 Con(A) 的非形式证明，都依赖于先行的、非循环的一致性根据；如果缺少这样的根据，那么至多只能得到一个条件命题——如果 A 是一致的，那么 Con(A)——而不是一个独立成立的论证。本结果并未直接回应这一挑战，但它使我们能够比以往更精确地确定这一挑战的所在。

Wright 的两难预设，任何一致性论证都必须是有说服力的 ——真正具有信息性，从理论之外为我们对 A 的可靠性的信心提供新的根据——或者是无说服力的，仅仅阐明接受 A 的公理时已经蕴含的内容，因而在认识论上不起作用。然而，这种表述是为意义的模型论观量身定制的；在这种观点下，一致性是理论相对于某种外部事物进行评估后所具有的性质。一旦我们认为意义是由推理角色而非由与某个独立给定结构的符合所构成的，这一两难便失去了约束力：不存在可据以衡量说服力的外部标准，而展开公理与确定语义后承之间的区别也就不再成立。

结果 A $\Vdash$Con(A) 并不直截了当地占据两难中的任何一角。根据支持语义中关于蕴涵的条款，评估由 A 所固定之意义的一个后承，需要考虑它的扩展。因此，我们将 A $\Vdash$ Con(A) 等同于用“存在一个荒谬的证明”这一主张来扩展 A 时所产生的不一致——也就是说，

$$\mathsf{A} \Vdash \mathsf{Con}(\mathsf{A}) \quad \text{iff} \quad \mathsf{A}, \mathsf{Prov}(\ulcorner\bot\urcorner) \Vdash \bot.$$

这并非从理论之外引入的主张，也不是对公理的琐碎释义。相反，它是 A 中数的含义所产生的语义后承：鉴于推理角色从一开始就确定了数的概念，断言存在一个编码矛盾证明的数便是不连贯的。这究竟构成了一个摆脱 Wright 两难的真正第三种立场，还是仔细考察后会归结为缺乏说服力的那一端，

则有待赖特阵营裁定。当前结果所确立的是，在证明论框架中，不能简单地假定这两难已穷尽所有可能。

我们了解到，只有当 Prov(⌜⊥⌝) 与 A 不一致时，Con(A) 才根据 A 被视为“真”。因此，要回应 Wright 的挑战，至少需要解释这种不一致是如何确立的，无论是以说服性的方式还是非说服性的方式。这取决于对定理15证明中所用数学资源的分析。我们不受限于 A 本身的资源；这种限制会造成循环论证，等于试图证明 $\vdash_A$ Con(A)。Dummett 的纲领源于这样一种论点：语言和逻辑先于形而上学 [3]；因此，我们的资源不应受算术理论限制，而应由意义理论来界定。

Dummett 的立场很明确：中立立场是构造性的；也就是说，我们可以运用例如直觉主义逻辑所提供的构造性推理，来推理我们的意义理论。在《演绎的正当化》中，他将经典推理方式的正当化称为“整个哲学中最根本、最棘手的问题之一……” [2]。我们一直在探讨的桑德奎斯特证明论语义学，恰恰处理的就是这个问题。至关重要的是，Sandqvist [20] 特意以构造性的方式确立这一语义。既然我们有意识地采用了这种语义，我们确实有权运用它的全部资源（包括经典推理方式）。

这与 Gheorghiu 提出的 PA 一致性证明形成了颇有启发性的对比：该证明是达米特纲领所要求意义上的构造性存在证明。具体而言，它明确构造出一个支持 A 的公理的基底（即，对每个 PA），并通过归纳证明其具有一致性（即，）。这并不与 G¨odel 不完备定理相冲突：该论证假定支持关系已经定义，而支持关系的定义超出了 PA 本身所能表达或确立的范围。若逻辑先于理论，这恰恰是应有之义；语义框架属于先在的逻辑层，而非它所用于评估的算术理论。

本文的分析专门适用于以固定的有限签名形式化的算术理论。在这一限制下，相对于支持语义而言，经典可导性是不完备的，而 G¨odel 不完备定理则体现为语义—可导性不完备性，而非真理论不完备性。由此可以提出若干进一步研究的方向。

在技术层面，自然可以考察其他不可判定句——包括哥德尔句和统一反射的实例——是否在当前意义上得到支持，并探究支持与反射原则的序数分析之间的相互作用。由于 Kreisel 反射原则一直被视为对这样一种立场的阐述：当一种理论被认为正确时，人们会隐含地接受什么。Feferman 后来的工作通过迭代反射和自主递进发展了这些思想，表明通过迭代反射得到的 PA 扩张，其证明论强度与谓词分析相同。在这些进路中，反射通常以元理论或认识论考量为依据，并

对应于基础理论的实质性增强。当前框架提出了一个问题：此类增强能否被重新表述为基础理论中已隐含的语义内容的展开，而非真正引入新的承诺。

将分析扩展到二阶逻辑的片段也会很有意义；在这些片段中，V¨a¨an¨anen [26] 对完整二阶逻辑集合论预设的担忧会直接相关。

参考文献

[1] Michael Dummett, *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem*, Ratio, 第5卷（1963年），第140–155页，重印于 *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, 伦敦, 1978年, 第186–201页。[2] , *The Justification of Deduction*, 《真理与其他谜题》，哈佛大学出版社，1978年，第290–318页。[3] ,《形而上学的逻辑基础》，哈佛大学出版社，1991年。[4] , *What Is a Theory of Meaning? (I)*, 《语言之海》，牛津大学出版社，牛津，1993年。最初发表于 *Mind and Language*, 塞缪尔·古滕普兰编（牛津大学出版社，1975年），第1–33页。[5] , *Reply to Wright*, 《迈克尔·达米特的哲学》（B. McGuinness 和 G Oliveri 编），施普林格，1994年，第445–454页。[6] Solomon Feferman, *Transfinite recursive progressions of axiomatic theories*, 《符号逻辑杂志》第27卷（1962年），第3期，第259–316页。[7] , *A language and axioms for explicit mathematics*, 《代数与逻辑》（柏林、海德堡）（约翰·纽瑟姆·克罗斯利编），施普林格，1975年，第87–139页（英文）。[8] Alexander V. Gheorghiu, *Proof-theoretic semantics for first-order logic*, 《IGPL逻辑杂志》第33卷（2025年），第5期。[9] , *Classical Arithmetic without Bivalance*, 2026年，访问于2026年3月。[10] Alexander V. Gheorghiu 和 David J. Pym, *Proof-theoretic Semantics for Second-order Logic* 2025 , …

[11] Kurt Gödel *Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und ver-* , , *wandter Systeme I* ¨ 38 1931 173 198 《数学与物理月刊》第（ ）卷，第–页。[12] , *Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Im-plications*, 《文集：未发表论文与讲座》（所罗门·费弗曼、John W. Dawson Jr.、Warren Goldfarb、Charles Parsons 和 Robert N. Solovay 编），第III卷，牛津大学出版社，牛津，1995年，吉布斯讲座，1951年，第304–323页。[13] Richard Kaye, 《皮亚诺算术模型》，牛津大学出版社，1991年。[14] Georg Kreisel, *Mathematical Logic*, 《现代数学讲座》（Georg Kreisel 编），威利，1965年，第95–195页。[15] David C. Makinson, *On an Inferential Semantics for Classical Logic*, 《IGPL逻辑杂志》第22卷（2014年），第1期，第147–154页。[16] A. W. Moore, *More on "The Philosophical Significance of Gödel's Theorem"*, 《格拉茨哲学研究》第55卷（1998年），第103–126页。[17] Dag Prawitz, *Towards a Foundation of a General Proof Theory*, 《逻辑、方法论与科学哲学 IV》（Patrick Suppes、Leon Henkin、Athanase Joja 和 Grigore C. Moisil 编），North-Holland，阿姆斯特丹，1973年，第225–250页。[18] ,《自然演绎：证明论研究》，多佛出版社，纽约州米尼奥拉，2006年。作者博士论文的重印本，斯德哥尔摩大学，1965年。

[19] Panu Raatikainen *On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theo-* , *rems* 59 2005 234, 513 534 《国际哲学评论》第（ ）卷，第期，第–页。[20] Tor Sandqvist, *An Inferentialist Interpretation of Classical Logic*, 博士论文，乌普萨拉大学，2005年。[21] , *Classical logic without bivalence*, 《分析》第69卷（2009年），第2期，第211–218页（英文），牛津大学出版社。

[22] Peter Schroeder-Heister, *Proof-theoretic versus Model-theoretic Consequence*,《逻辑年鉴》***2007***年（布拉格）（Michal Peli˘s 编），Filosofia，哲学研究所，捷克共和国科学院，2008年，第187–200页（英文）。

[23] ~~, *Proof-*~~ *Theoretic Semantics*,《斯坦福哲学百科全书》（Edward N. Zalta与Uri Nodelman编），形而上学研究实验室，斯坦福大学，2024年夏季版，2024年。

[24] Alfred Tarski, *On the Concept of Logical Consequence*, 逻辑、语义、元数学（John Corcoran编），Hackett，1983年，最初以波兰语发表，题为“O poj˘eciu wynikania logicznego，” *Przegląd Filozoficzny* 39 （1936年），第58–68页；同年出版的修订德文版题为“¨Uber den Begriff der logischen Folgerung.”，第409–420页。

[25] ~~, *The*~~ *Concept of Truth in Formalized Languages*, 逻辑、语义、元数学（John Corcoran编），Hackett，1983年，最初以波兰语发表，题为“Poj˛ecie prawdy w j˛ezykach nauk dedukcyjnych，”华沙：华沙科学学会，1933年，第152–278页。

[26] Jouko Väänänen, *Second Order Logic or Set Theory?*,《符号逻辑通报》，第18卷（2012），第1期，第91–121页。

[27] Crispin Wright, *About “The Philosophical Significance of Gödel’s Theorem”: SomeIssues*,《迈克尔·达米特的哲学》（Brian McGuinness 和 Gianluigi Oliveri 编），Kluwer，多德雷赫特，1994，第167–202页。

ORCID： 0000-0002-7144-6910

南安普顿大学电子与计算机科学学院，大学路，南安普顿，SO171BJ，英国

伦敦大学学院计算机科学系，高尔街，伦敦 WC1E 6BT，英国*E-mail*:
a.v.gheorghiu@soton.ac.uk