arXiv:2603.09920v1 [math.CV] 10 Mar 2026

具有受控几何的广义流形上的拟正则值

钟德广 应用数学研究所，深圳职业技术大学，中国广东深圳，518055

摘要

本文的主要目的是建立从具有适当受控几何的广义 n流形到欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$. 的拟正则值的 Reshetnyak 定理。这推广了 Kangasniemi 和 Onninen 关于欧几里得空间 [情形的先前结果。单点Reshetnyak定理，美国数学会汇刊，**378**（2025年）：3105-3128]。

目录

1 引言 2

2 预备知识 3

2.1 牛顿空间.3 2.2 具有受控几何的广义 n-流形.5 2.3 拟正则值与有限畸变值.8

3 广义有限畸变映射的 H¨older 正则性及其应用 10

3.1 广义有限畸变映射的 H¨older 正则性 . . . . . 10 3.2 推论 I：有限畸变值的 H¨older 正则性 . . . . . 13 3.3 推论 II：有限畸变值的 Lusin 条件（N） 14

4 有限畸变值的全不连通性及其推论 18

4.1 全不连通.18 4.2 推论 I：分支的选择.23 4.3 推论 II：有限畸变值的 Jacobian-度公式 . . 24

5 拟正则值的 Reshetnyak 定理证明 25

5.1 拟正则值的离散型结果.31 5.2 有限畸变值的局部正指标.32 5.3 拟正则值的局部开性.32

6 致谢 33

1 引言

20世纪60年代 [Res67], Yu. G. Reshetnyak 在欧几里得空间中提出了以下拟正则映射或有界畸变映射的概念。

定义 1.1. [Res67] 对于给定的常数 $K \geq 1$ 和 $n \geq 2.$ ，假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开连通集。那么，映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 若属于 $W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 并满足以下不等式，则称为拟正则映射或有界畸变映射

$$|Df(x)|^n \leq K J_f(x)$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$。

若将定义 1.1 中的常数 K 替换为测度函数$K : \Omega \to [1, \infty)$, ，便得到有限畸变映射的定义；参见 [HK14,IM01]。

在非线性弹性的框架下，研究 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内畸变为 K 的有限畸变映射 f 的拓扑特征至关重要。Reshetnyak [Res67] 的一条深刻定理指出，区域 $\mathbb{R}^n$ 中的每个（局部非常值）拟正则映射都是离散、开且保向的。这里，若对于每个 $y_0 \in \mathbb{R}^n$，集合 $f^{-1}\{y_0\}$ 由孤立点组成，我们就称映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是离散的。若对于 Ω 的任意开集 U，映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 的像 $f(U)$ 都是开集，则称该映射是开的。若连续映射满足：只要 D 是紧包含于 Ω 的区域，且 $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$，就有 $\deg(y, f, D) > 0$，则称该映射是保向的。J. M. Ball [Bal77, Bal81] 指出，对于某些非线性弹性问题而言，拟正则性要求过强。因此，自然需要考虑某些 $p > 0.$ 下的 $K \in L^p_{loc}$ 情形。关于欧几里得空间中的这一问题，现有结果可参见 [Bal81, IS93, HK93, VM98, Bj¨o, HM02, HR13, KOZ26]。关于非欧几里得情形，可参见 [HH97, Zap08, Kir16, BV23, MR25, Zho25]。特别是，最近 Kangasniemi 和 Onninen [KO22]将 Reshetnyak 定理推广到了欧几里得空间中的拟正则值情形。具体而言，他们证明了满足以下不等式的非常值映射 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$|Df(x)|^n \leq K J_f(x) + \Sigma(x)|f(x) - y_0|^n,$$

其中 $K \geq 1$ 是一个常数， $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 且 $\Sigma \in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ 对某个 $\varepsilon > 0$, 那么$f^{-1}\{y_0\}$是离散的，局部指标 $i(x, f)$ 在 $f^{-1}\{y_0\}$ 中为正，并且 $f^{-1}\{y_0\}$ 中每个点的每个邻域都被映射到 $y_0.$ 的一个邻域

本文的主要目标是将 Kangasniemi 和 Onninen [KO22] 关于拟正则值的上述结果，从具有适当受控几何的广义 n-流形推广到欧几里得空间 $\mathbb{R}^n.$ 。表述如下。

定理 1.1。设 $K \geq 1$ 为一个常数， $y_0 \in \mathbb{R}^n$、 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ 为广义 n-流形，其具有第 *2.2.7* 小节意义下的受控几何，且 $\Omega \subset \mathcal{S}$ 为一个区域。假设 $f \in N^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 是一个满足下列不等式的非恒定映射

$$\|apDf(x)\|^n \leq KJ_f(x) + \Sigma(x)|f - y_0|^n \tag{1}$$

对几乎所有的 $x \in \Omega$，如果 $\Sigma \in L^p_{loc}(\Omega)$ 对某个 $p > 1$ 成立，那么 $f^{-1}\{y_0\}$ 是离散的；对于每个 $x \in f^{-1}\{y_0\}$，局部指标 $i(x, f)$ 均为正；并且对于每个 $x \in f^{-1}\{y_0\}$ 的每个邻域 V，都有 $y_0 \in \mathrm{int} f(V)$。

本文其余部分安排如下：第 2 节回顾度量测度空间框架下牛顿空间的一些记号和众所周知的结果。我们还将说明对具有适当受控几何的广义 n-流形所作的一些假设，并讨论广义 n-流形上拟正则值或有限畸变值的定义。第 3 节将证明广义 n-流形上某些广义有限畸变映射子类的局部 H¨older 连续性，并给出该局部 H¨older 连续性的一些推论。第 4 节主要证明有限畸变值集合全不连通。本节还将讨论这一全不连通性的一些推论。第 5 节给出 Reshetnyak 定理的证明，该定理针对从具有适当受控几何的广义n-流形到欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$. 的拟正则值。

2 预备知识

本节将回顾本文所需的一些事实。需要指出的是， $C(k_1, k_2, ..., k_m) > 0$ 在本文中表示一个仅依赖于 $k_1, k_2, ..., k_m$ 但可能随行而变化的常数。对于任意度量空间 X，任意两点 $x, y \in X$ 之间的距离记作 $|x - y|$.此外，我们称 $A \lesssim B$ ，如果存在一个常数 $c > 0$，使得 $A \leq cB$. 符号 f_U 定义为 $f_U := \frac{1}{\mathcal{H}^n(U)} \int_U f d\mathcal{H}^n$.

2.1 牛顿空间

本文研究的对象是广义 n-流形，它通常不具备光滑结构。因此，光滑情形下的 Sobolev 空间理论不再适用。我们转而采用度量测度空间上的牛顿空间理论。牛顿空间由 N. Shanmugalingam 在 [Sha00], 中引入，为度量背景下的 Sobolev 空间提供了一种类似理论。这一理论依赖于上梯度的概念，

适用于足够丰富、包含充分多条可求长路径的度量空间。本小节的主要参考文献为 [Sha00、HKST01、HKST15]。

定义 2.1. 设 (X,μ) 为一个度量测度空间，其中 μ 为 Borel 正则测度。设 Γ 为 X 中路径的集合，且 $p \geq 1$. 则称 Borel 函数 $\rho: X \to [0,\infty]$ 对 Γ 是可容许的，如果下列不等式

$$\int_{\gamma} \rho ds \geq 1$$

对每个局部可求长的 $\gamma \in \Gamma$.成立。此时，我们记 $\rho \in \mathrm{Adm}\Gamma$.于是， Γ 的 p-模定义为

$$\mathrm{Mod}_p\Gamma := \inf \int_X \rho(x)^p d\mu,$$

其中下确界取遍所有可容许函数 $\rho \in \mathrm{Adm}\Gamma$.

定义 2.2. 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是从度量空间 X到 $\mathbb{R}$. 的映射。则称 Borel 函数 $g: X \to [0,\infty]$ 为f 的上梯度，如果下列不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{\gamma} g ds \tag{2}$$

对满足 $\gamma(0) = x$ 且$\gamma(1) = y$. 的每一条局部可求长路径 $\gamma: [0,1] \to X$ 成立。此外，若存在路径族 Γ_0, 使得 $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_0) = 0$ ，且不等式 (2) 对每个 $\gamma \notin \Gamma_0$.成立，则称 g 为 f 的弱上梯度。

定义 2.3.（牛顿空间）[Sha00] 设 (X,μ) 是一个度量空间，且 $p \geq 1$. 那么，如果实值映射 $f: X \to \mathbb{R}$ 属于$N^{1,p}(X)$，并且具有一个 p-可积的 p-弱上梯度，则称之为如此。若映射 $f: X \to \mathbb{R}^m$的每个分量函数都属于 $N^{1,p}(X)$，则称该映射属于 $N^{1,p}(X,\mathbb{R}^m)$。若对每个紧 $D \subset X.$，都有 $f \in N^{1,p}(D)$，则称实值映射 $f \in N^{1,p}_{loc}(X)$。进一步，若对每个紧 $D \subset X.$，都有 $f \in N^{1,p}(D,\mathbb{R}^m)$，则称 $N^{1,p}_{loc}(X,\mathbb{R}^m)$

定义 2.4.（弱 Sobolev-Poincar´e 不等式）[HKST01, HKST15]设$1 \leq p < q$ 和 (X,μ) 为一个度量测度空间。若存在常数 $C > 0$ 和 $\lambda \geq 1,$ ，使得下列不等式成立，则称空间 X 支持弱 Sobolev-Poincar´e 不等式:

$$\left(\fint_{B(x,r)} \left|u - u_{B(x,r)}\right|^q \, d\mathcal{H}^n \right)^{1/q} \leq C\mathrm{diam}(B) \left(\fint_{B(x,\lambda r)} g^p \, d\mathcal{H}^n \right)^{1/p} \tag{3}$$

对每个 $B(x,r) \subset X$，以及 $B(x,r)$ 中每个可积函数 u，和每个 p-弱上梯度 g of u.

不等式（3）中取 $q = 1$ 的情形称为弱 p-Poincar´e 不等式。

2.2 具有受控几何的广义 n-流形

本文对所研究的度量空间提出了一些关于受控几何的条件。我们首先回顾一些相关概念。

2.2.1 Ahlfors Q-正则

定义 2.5。 [HS02] 设 $Q > 0$. 那么， $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ 若赋予博雷尔测度 μ，则称其为 Ahlfors Q-正则的，若存在常数 $C \geq 1$，使得以下不等式

$$\frac{1}{C} r^Q \leq \mu(B(x,r)) \leq C r^Q \tag{4}$$

对每个 $B(x, r) \subset \mathcal{S}$，均成立，其中 $r \leq \text{diam}(\mathcal{S})$。

众所周知，满足 (4) 的测度 μ 可以替换为豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^n$；例如参见 [Sem96, Lemma C.3]。因此，本文中我们始终在 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ 上使用的测度是豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^n$.

2.2.2 可求 rectifiable 集

可求 rectifiable 集是几何测度论中最重要的集合类别之一。其定义如下。

定义 2.6。 [Fed69] 设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ 是 $\mathcal{H}^n$-可测的，其中 $m \geq n \geq 2$.若存在 Lipschitz 映射$\varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，使得

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{S} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\mathbb{R}^n)) = 0.$$

关于可求 rectifiable 集性质的一个著名结果如下。

命题 2.1。 [Mat95, Theorem15.19] 设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ 是 n-可求 ***rectifiable*** 的，且是 $\mathcal{H}^n$-可测的。那么，对于 $\mathcal{H}^n$-几乎所有 $x \in \mathcal{S}$，存在唯一的近似切 n-平面 $apTan(x, \mathcal{S})$，它对应于 x 在 $\mathcal{S}$.处

假设 U 是 $\mathcal{S}$. 的开子集。那么，根据命题 2.1，我们看到，对于几乎每个 $x \subset U$，都存在唯一的 n 维平面 $apTan(x, U)$。符号 TU 表示与 U. 中各点相关联的所有这些平面的集合

2.2.3 广义 n-流形

假设空间 X 是局部紧、可分、连通且局部连通的。那么，根据 [HS02, Definition 1.1], , 如果空间 X 的拓扑维数至多为 n ，且其局部上同调群满足 $H_c^n(V) = n$ 和 $H_c^{n-1}(V) = 0.$, 我们称空间 X 为 n-**上同调-流形**。这里, V 是每个 $x \in X$ 的开邻域，并且包含于 x 的每个邻域 U 中， H_c^* 表示具有紧支集的 Alexander-Spanier 上同调群。

定义 2.7。 [HS02，定义 1.6]（广义 n-流形）设$n \geq 2.$ 那么，空间 X 称为广义 n-流形，如果它是有限维上同调 n-流形。

2.2.4 可定向和度量可定向

关于定向广义 n-流形的以下概念见[HS02，第 2] 节。

定义 2.8。 [HS02]（定向广义 n-流形）设空间 X 是广义 n-流形。那么，若 $H_c^n(X) \approxeq \mathbb{Z},$ X 称为可定向的，且生成元 g_X 称为 $X.$ 的一个定向。对偶 (X, g_X) 称为定向广义 n-流形。

由于对于每个开邻域 V 以及每个 $x,$ 以下标准同态

$$H_c^n(W) \to H_c^n(V) \tag{5}$$

是一个满射。这里， $W \subset V$ 是 $x.$ 的一个开邻域。因此，若假设 $\mathcal{S}$ 是一个定向的广义 n-流形，且 U 是 $\mathcal{S}.$ 的一个开连通子集，那么式（5）中的映射诱导出 $U.$ 的一个固定定向。此外，根据 [Fed69，引理 3.2。25], , 我们看到，在 TU中的每个 $apTan(x, U)$上，都存在一个定向的可测选择 g_x，我们称之为切丛 $TU.$ 的一个定向。现在，根据 [Kir14，注 2。14] ，可知若 U 中 x的一个开连通邻域 D 足够小，则投影

$$\pi_x : \mathbb{R}^m \to apTan(x, U) \setminus \pi_x(\partial D)$$

满足 $x \notin \pi(\partial D)$。 因此，如果 Z是 $apTan(x, U) \setminus \pi_x(\partial D)$中的 -连通分支，那么我们有

$$H_c^n(apTan(x, U)) \leftarrow H_c^n(Z) \xrightarrow{\pi_x^*} H_c^n(\pi_x^{-1}(Z) \cap D) \to H_c^n(D) \to H_c^n(U). \tag{6}$$

这里，符号 π_x^* 表示由 π_x诱导的同态，未标注的箭头表示由嵌入诱导的典范同构。现在，我们可以给出以下概念。

定义 2.9。 [HK11, HR02, HS02]（度量可定向和局部度量可定向）设 U 是上文讨论的 $\mathcal{S}$ 的开子集。那么，如果存在TU 的一个定向，使得对于几乎处处的 $x \in U$ g_x，在上述映射下被映射到 g_U，则称U 是度量可定向的。如果选择了TU 的这样的一个定向，则称 U 是度量定向的。如果 $\mathcal{S}$ 中的每一点都有一个度量可定向的邻域 $\mathcal{S}$，则称 $\mathcal{S}$ 是局部度量可定向的。

2.2.5 线性局部可缩

以下关于线性局部可缩的概念也可见于[HK11、HR02、HS02]。

定义 2.10。 对于度量空间 $\mathcal{S}$， 如果存在一个常数 $C \geq 1$， 使得对于每个紧 $D \subset \mathcal{S}$， 都存在一个正数 r_D， 使得 $B(x,\ r)$ 在 $B(x,\ Cr)$ 中是可缩的，其中 $r \leq r_D$ 且 $x \in D.$，则称 $\mathcal{S}$ 是线性局部可缩的。

2.2.6 局部度与局部指标

定义 2.11. [HS02]（局部度）设 $f : X \to Y$ 是连续映射，其中 X 和 Y 是两个定向广义 n-流形。对于 X 中的每个相对紧域 D，以及 $Y \setminus f(\partial D)$, 的每个连通分支 V，以下两个映射的复合

$$H_c^n(V) \to H_c^n(f^{-1}(V) \cap D) \to H_c^n(D)$$

给出映射

$$g_V \mapsto m \cdot g_D.$$

这里，整数 m 称为 f 在点 $y \in V$ 处相对于 D, 的局部度，记作 $m = \deg(f, D, y)$.

定义 2.12. [KO222](局部指标) 设 Ω 是一个连通区域， $y_0 \in \mathbb{G}$且 $f : \Omega \to \mathbb{G}$ 连续。假设 $x_0 \in f^{-1}\{y_0\}$. 若 V_1 和 V_2 是 x_0 的两个邻域，且 $V_1 \cap f^{-1}\{y_0\} = V_2 \cap f^{-1}\{y_0\} = \{x_0\}$，则$y_0 \notin f(V_i)$ $i = 1,\ 2$。因此，定义 $\deg(f, V_i, y_0)$ $i = 1,\ 2$ 是有意义的。事实上，众所周知，$\deg(f, V_1, y_0) = \deg(f, V_2, y_0) = \deg(f, V_1 \cup V_2, y_0)$。因此，若存在 x_0的一个邻域 V，使得$V \cap f^{-1}\{y_0\} = \{x_0\}$,

那么 $\deg(f, V, y_0)$ 的值与 $V.$ 的选择无关。我们称此值为 f 在 x_0 处的局部指标，并记作 $i(x_0, f)$。

2.2.7 具有受控几何的广义 n流形

我们所说的具有受控几何的定向广义 n流形 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$，是指配备了一个度量的定向广义 n流形 $\mathcal{S}$，使得

（1） $\mathcal{S}$ 是 n-可求 rectifiable 的；（2） $\mathcal{S}$ 是阿尔福斯 n-正则的；（3） $\mathcal{S}$ 是线性局部可缩的。

这类空间符合 Heinonen–Koskela 所定义的受控几何框架 [HK98]。实际上，Semmes 的一个深刻定理 [Sem96]指出，如果一个度量测度空间 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ 是阿尔福斯 Q-正则的，具有余同调模且是线性局部可缩的，那么 $\mathcal{S}$ 满足弱 1-Poincar´e 不等式，从而对所有 $p \geq 1$.满足弱 p-Poincar´e 不等式。结合广义流形的局部同调性质，这些条件确保分析工具和拓扑工具——包括真映射、度以及索博列夫正则性——均有良好定义且保持稳定。

此外，应注意到，由于 $\mathcal{S}$ 对所有 $p \geq 1$，都满足弱 p-庞加莱 ´不等式，根据 [HKST15，第 8.3.2 定理和第 9.1.36] 推论可知，$\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ 满足如下 Sobolev-庞加莱 ´不等式

$$\left(\fint_{B(x,r)} \left| u - u_{B(x,r)} \right|^{\frac{np}{n-p}} \, d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n-p}{np}} \leq C \operatorname{diam}(B) \left(\fint_{B(x,\lambda r)} |g|^p \, d\mathcal{H}^n \right)^{1/p} \tag{7}$$

对每个 $B(x,\ r) \subset \mathcal{S}$（满足 $r \leq$ 直径 $\mathcal{S}$），以及每个 u上的可积函数 $B(x,\ r)$ 和 $u.$ 的所有上梯度 g。结合 $f = (f_1, \ \cdots, \ f_j, \ \ldots\ldots, \ f_n) \in N^1_{loc}{}^p(\mathcal{S},\ \mathbb{R}^n)$ 中 Lipschitz 映射的稠密性以及 [Kir16，引理 2.29], ，我们得到

$$\left(\fint_{B(x,r)} \left| f_j - (f_j)_{B(x,r)} \right|^{\frac{np}{n-p}} \, d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n-p}{np}} \leq C \operatorname{diam}(B) \left(\fint_{B(x,\lambda r)} |apDf|^p \, d\mathcal{H}^n \right)^{1/p} \tag{8}$$

对每个 $B(x,\ r) \subset \mathcal{S}$（满足 $r \leq$直径 $\mathcal{S}$），以及每个 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$

2.3 拟正则值与有限畸变值

如引言中所述，Yu. G. Reshetnyak [Res67] 于20世纪60年代在欧几里得空间中引入了拟正则映射（或有界畸变映射）的以下概念。

定义 2.13. [Res67]给定常数 $K \geq 1$和 $n \geq 2$.假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开连通集。那么，映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 称为拟正则映射（或有界畸变映射），如果它属于 $W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 并满足以下不等式

$$|Df(x)|^n \leq K J_f(x)$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$。

关于拟正则映射的更多性质与推广，参见[Ric93, HK14, IM01, Guo15, GGWX25, GW16]。给定一个常数 $K \geq 1$.假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, 是一个区域，且 $\Sigma : \Omega \to [0, \infty)$ 是一个测度函数。那么，映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 属于 Sobolev 空间$W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$，并满足以下不等式

$$|Df(x)|^n \leq K J_f(x) + \Sigma(x)|f(x)|^n \tag{9}$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$，由 Astala、Iwaniec 和 Martin [ATM09，第 8 节5]引入。不等式 (9) 在 [KO221]中被称为异质畸变不等式。关于满足不等式 (9) 的映射的性质和应用，读者可参阅 [Nir53, FS58, Har58, Sim77, AP06]。最近，Kangasniemi 和 Onninen [KO222]提出了拟正则值的以下概念。

定义 2.14. [KO222，定义 1.1] 对于给定的常数 $K \geq 1$. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域，$y_0 \in \mathbb{R}^n$ 并且 $\Sigma \in L^p_{loc}(\Omega)$ 对于某个 $p > 1$. 则映射 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 在 y_0 处具有 (K, Σ)-拟正则值，如果它属于 $W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 并满足以下不等式

$$|Df(x)|^n \leq K J_f(x) + \Sigma(x)|f(x) - y_0|^n \tag{10}$$

对于几乎每个 $x \in \Omega$。

我们请读者参阅 [KO222、KO241、KO242]，以了解由 Kangasniemi 和 Onninen 建立的拟正则值的性质，例如 H¨older 连续性、刘维尔定理、Reshetnyak 定理、Rickman 的 Picard 定理、线性畸变和重标度性质。最近，Dole˘zalov´a、Kangasniemi 和 Onninen [DKO24] 针对欧几里得空间中满足以下不等式的 Sobolev 映射 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 引入并建立了连续性

$$|Df(x)|^n \leq K(x) J_f(x) + \Sigma(x) \tag{11}$$

对于几乎处处 $x \in \Omega$. 这里 $K : \Omega \to [1, \infty)$ 与 $\Sigma : \Omega \to [0, \infty)$ 为可测函数。作者 [Zho252] 将这类映射加以推广

使之满足不等式 (11)，从而得到从欧几里得域到黎曼流形的广义有限畸变曲线。基于上文所讨论的拟正则映射及其推广方面的进展，自然可以给出从具有受控几何的广义 n-流形到欧几里得空间、且满足不等式 (11) 的类似映射这一概念；参见定义 2.16。

定义 2.15。设 $f \in N^{1,}{}_{loc}^{n}(\mathcal{S},\ \mathbb{R}^n)$。那么，根据 [Kir14，推论 2.17], 中的结果，我们看到 f 在 $\mathcal{H}^n$-几乎处处近似可微。其近似导数 ap$Df(x)$: $apTan(x,\ \mathcal{S})-x \to \mathbb{R}^n$ 是从平移近似切平面 $apTan(x,\ \mathcal{S})$到$-x \to \mathbb{R}^n$ 的线性映射；参见 [Fed69，定义 3.2.16]。其雅可比行列式定义为 J_f:= det ap$Df(x)$。

定义 2.16。若 $f \in N^{1,}{}_{loc}^{n}(\mathcal{S},\ \mathbb{R}^n)$ 是广义有限畸变映射，则称其满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \le K(x)J_f(x) + \Sigma(x) \tag{12}$$

对于 $x \in \Omega$中的几乎处处点。这里 $K : \Omega \to [1,\infty)$ 和 $\Sigma : \Omega \to [0,\infty)$ 是可测函数，而 $\|\mathrm{ap}Df(x)\|$ 定义为 $\|\mathrm{ap}Df(x)\| := \sup_{|y|=1} |apDf(x)y|$.

以下有限畸变值的概念，类似于 Kangasniemi 和 Onninen [KO25] 在欧几里得空间情形下给出的概念。

定义 2.17. 设 $f \in N^{1,}{}_{loc}^{n}(\mathcal{S},\mathbb{R}^n)$ 且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$.。若 f 在 y_0 处满足以下不等式，则称其具有一个 (K,Σ)-有限畸变值

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \le K(x)J_f(x) + \Sigma(x)|f(x)-y_0|^n \tag{13}$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$。这里 $K: \Omega \to [1,\infty)$ 和 $\Sigma: \Omega \to [0,\infty)$ 是可测函数。

注。值得注意的是，在定义 2.16 和 2.17 中，仍允许 Ω 存在 J_f 为负的区域。

3 广义有限畸变的 H¨older 正则性及其应用

3.1 广义有限畸变映射的 H¨older 正则性

本节将建立广义有限畸变的 H¨older 正则性。为此，我们首先需要以下由 Kirsil¨a [Kir16, 定理 3.1]所得的引理。

引理 3.1。 [Kir16, 定理 3。1] 设 $f \in N^{1,n}_{loc}(\mathcal{S},\mathbb{R}^n)$，$\Omega \subset \mathcal{S}$ 是一个相对紧开集，且 $\eta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个 *Lipschitz* 映射，并满足 $\mathrm{spt}\eta \subset \Omega$。则有以下等式

$$\int_\Omega \eta J_f d\mathcal{H}^n = -\int_\Omega f_j J(f_1,\cdots,f_{j-1},\eta,f_{j+1},\cdots,f_n)d\mathcal{H}^n \tag{14}$$

对每个 $1 \le j \le n.$ 成立

定理 3.2. 假设 f 属于 $N^{1,n}_{loc}(\mathcal{S},\mathbb{R}^n)$ 并且满足下列不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \le K(x)J_f(x) + \Sigma(x) \tag{15}$$

对几乎处处的 $x \in \mathcal{S}.$。若对某个 $p > n$ 有 $K \in L^p_{loc}(\mathcal{S})$，且对某个 $\varepsilon > 0$ 有 $\Sigma \in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\mathcal{S})$，则 f 是局部 *H¨older* 连续的。

证明。 考虑映射 $g := (f_1 - (f_1)_{2B},\ f_2,\ \cdots,\ f_n)$，根据引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{2B}\eta J_f d\mathcal{H}^n\right| \le \frac{c(n)}{r}\int_{2B}|f_1-(f_1)_{2B}|\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{n-1}{n}} K^{\frac{n-1}{n}}d\mathcal{H}^n\\
\le&\frac{c(n)}{r}\left(\int_{2B}|f_1-(f_1)_{2B}|^{n^2}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1}{n^2}}\left(\int_{2B}K^p d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{n-1}{np}}\\
&\qquad\times\left(\int_{2B}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{np}{(p-1)n+p}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{(n-1)[(p-1)n+p]}{n^2p}}\\
\le&\frac{c(n)}{r}\left(\int_{2\lambda B}\|\mathrm{ap}Df(x)\|^{\frac{n^2}{n+1}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{n+1}{n^2}}\left(\int_{2B}K^p d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{n-1}{np}}\\
&\qquad\times\left(\int_{2B}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{np}{(p-1)n+p}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{(n-1)[(p-1)n+p]}{n^2p}}\\
\le&\frac{c(n)}{r}\left(\int_{2\lambda B}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{np}{(p-1)n+p}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{(p-1)n+p}{n^2p}}\left(\int_{2B}K^p d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1}{np}}\\
\times&\left(\int_{2B}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{np}{(p-1)n+p}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{(n-1)[(p-1)n+p]}{n^2p}}\left(\int_{2B}K^p d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{n-1}{np}}\\
\le&\frac{c(n)}{r}\left(\int_{2\lambda B}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{np}{(p-1)n+p}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{(p-1)n+p}{np}}\left(\int_{2\lambda B}K^p d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}\tag{16}$$

因此，我们得到

$$\int_B \frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}d\mathcal{H}^n \le \int_{2B}\eta\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}d\mathcal{H}^n \le \int_{2B}\eta J_f d\mathcal{H}^n + \int_{2B}\eta\frac{\Sigma}{K}d\mathcal{H}^n$$
$$\le \frac{c(n)}{r}\left(\int_{2\lambda B}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{np}{(p-1)n+p}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{(p-1)n+p}{np}}\left(\int_{2\lambda B}K^p d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1}{p}} + \int_{2B}\eta\Sigma d\mathcal{H}^n$$
$$\le c(n)\left(\int_{2\lambda B}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{np}{(p-1)n+p}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{(p-1)n+p}{np}}\left(\int_{2\lambda B}K^p d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1}{p}} + \int_{2B}\eta\Sigma d\mathcal{H}^n, \tag{17}$$

这意味着

$$\fint_B \frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}d\mathcal{H}^n \le C(n,\lambda,\mathcal{K})\cdot\left(\fint_{2\lambda B}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n}{K}\right)^{\frac{np}{(p-1)n+p}}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{(p-1)n+p}{np}} + C(n,\lambda)\cdot\fint_{2\lambda B}\Sigma\, d\mathcal{H}^n. \tag{18}$$

如果我们取 $q=[(p-1)n+p]/np$， $r_0=(1+\varepsilon)q>q$， $g=(\|\mathrm{ap}Df\|^n/K)^{1/q}$， $f=\Sigma^{1/q}$， 那么不等式 (18) 给出

$$\fint_B g^q \le C(n,\lambda,\mathcal{K})\cdot\left[\left(\fint_{2\lambda B}g\right)^q + \fint_{2\lambda B}f^q\right].$$

由于 $p>n$， 我们看到 $q>1$. 由于 $f^{r_0}=\Sigma^{1+\varepsilon}\in L^1_{loc}(\Omega)$， 根据度量测度空间上的 Gehring 引理 [Gol05，定理 3.3], 我们看到存在$\beta_1>1$， 使得 $\|\mathrm{ap}Df\|^n/K\in L^{\beta_1}_{loc}(\Omega)$。不妨设 $\|\mathrm{ap}Df\|^n/K\in L^{\beta_1}(\Omega)$ p_1 $p=\frac{\beta_1 p_1}{q_1}>n-1$ $1<q_1<\beta_1$ $1/p_1+1/q_1=1.$ 我们选取常数， $q_1>0$ 使得， 并且这些常数确实存在。容易看出，它们满足不等式

$$p_1>\max\{\frac{\beta_1+n-1}{\beta_1},\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\}\ \text{and}\ 1<q_1<\beta_1.$$

然后，对于每个紧集 $\Omega_1\subset\Omega$，利用 H¨older 不等式可得

$$\int_{\Omega_1}(\|\mathrm{ap}Df\|^n)^{\frac{\beta_1}{q_1}}d\mathcal{H}^n \le \left(\int_{\Omega_1}\left(\frac{\|\mathrm{ap}Df\|^n}{K}\right)^{\beta_1}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\int_{\Omega_1}K^p d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1}{p_1}}<\infty.$$

这表明 $f\in N^{1,\gamma}_{loc}(\mathcal{S},\mathbb{R}^n)$。根据 $\gamma=n\beta_1/q_1>n$. [HK00 定理 5.1], ，我们推得 f 局部 H¨older 连续。至此证明完毕。 □

3.2 推论 I：有限畸变值的 H¨older 正则性

根据定理 3.2，我们得到以下关于有限畸变值 H¨older 正则性的推论。

命题 3.3。 假设 $f \in N^{1,n}_{loc}(\mathcal{S},\mathbb{R}^n)$ 满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \le K(x)J_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x)-y_0|^n \tag{19}$$

几乎处处成立 $x \in \mathcal{S}$ 且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$. 若 $K \in L^p_{loc}(\mathcal{S})$ 对某个 $p > n$ 成立，且 $\Sigma \in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\mathcal{S})$ 对某个 $\varepsilon > 0$成立，则 f 是局部 $H^{\cdot}older$ 连续的。

证明。 我们只需证明存在一个常数 $Q \in (1,\infty)$, 使得 $\Sigma(x)\,|f(x)-y_0|^n \in L^Q_{loc}(\mathcal{S})$. 不失一般性，可假设 $\mathrm{diam}\mathcal{S} < \infty$, $f \in N^{1,n}(\mathcal{S},\mathbb{R}^n)$ $K \in L^p(\mathcal{S})$ 且 $\Sigma \in L^{1+\varepsilon}(\mathcal{S})$ 对某个$\varepsilon > 0$. 成立。然后，取一个满足 $1 < Q < 1+\varepsilon$. 的常数 Q。因此，对每个紧子集 $M \subset \mathcal{S}$, 由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_M (\Sigma\,|f-y_0|^n)^Q\,d\mathcal{H}^n &= \int_M (\Sigma^{1+\varepsilon})^{\frac{Q}{1+\varepsilon}}\,|f-y_0|^{nQ}\,d\mathcal{H}^n \\ &\lesssim \left(\int_M \Sigma^{1+\varepsilon}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{Q}{1+\varepsilon}} \left(\int_M |f-y_0|^m\,d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1+\varepsilon-Q}{1+\varepsilon}} \\ &\lesssim \|\Sigma\|^Q_{L^{1+\varepsilon}(\mathcal{S})} \left(\int_M |f-y_0|^m\,d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1+\varepsilon-Q}{1+\varepsilon}},\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $m = nQ(1+\varepsilon)/(1+\varepsilon-Q) > n.$若令 $f = (f_1,\ f_2,\ \ldots\ldots,\ f_n)$，则有 $f_j \in N^{1,n}(\mathcal{S})$，对所有 $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. 均成立。因此，利用牛顿-索博列夫映射的 Truinger 不等式 [HK00，第 6.1] 定理可得 $f_j \in L^l_{loc}(\mathcal{S})$，对所有 $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ 以及所有 $l \ge 1$. 均成立。此外，由于

$$|f-y_0|^m \lesssim |f|^m + |y_0|^m \lesssim |y_0|^m + \sum_{i=1}^n f_i^m,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\left(\int_M |f-y_0|^m\,d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1+\varepsilon-Q}{1+\varepsilon}} &\lesssim \left(|y_0|^m\,\mathcal{H}^n(M) + \sum_{i=1}^n \int_M f_i^m d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{1+\varepsilon-Q}{1+\varepsilon}} \\ &\lesssim C(y_0,\mathrm{diam}\mathcal{S},\varepsilon,Q,\|f\|_{L^m(\mathcal{S})}) < \infty.\end{aligned} \tag{21}$$

因此，根据定理 3.2，我们可知 f 是局部 H¨older 连续的。命题 3.3 的证明至此完成。 □

3.3 推论 II：有限畸变值的 Lusin 条件（N）

3.3.1 有限畸变值的 Lusin 条件（N）

若连续映射 $f\colon (X,\mu_1)\to(Y,\mu_2)$ 对每个满足 $\mu_1(E)=0$ 的 $E\subset X$，都有 $\mu_2(f(E))=0.$，则称其满足 Lusin 条件（N）。假设$f\in N^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap C(\Omega,\mathbb{R}^n)$，其中 $\Omega\subset\mathcal{S}$是一个区域。若 $p>n$，则根据 [HKST01, Theorem 6.1] 和 [Zap14, Theorem 1],，我们可知 f 满足 Lusin 条件（N）。若 $p<n$，则映射 f 不满足 Lusin 条件（N）；例如参见 [Pon71]。若 $p=n$，则有许多针对 f 的条件可确保其满足 Lusin 条件（N）。例如，Zapadinskaya [Zap14, Theorem 1] 证明了，若 f 是 H¨older 连续的，则其满足 Lusin 条件（N）。因此，结合定理 3.2 和命题 3.3，可得以下关于 Lusin 条件（N）的结果。

命题 3.4。设 f 属于 $N^{1,n}_{loc}(\mathcal{S},\mathbb{R}^n)$ 并满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n\le K(x)J_f(x)+\Sigma(x) \tag{22}$$

对几乎处处的 $x\in\mathcal{S}.$，若对于某个 $p>n$ 有 $K\in L^p_{loc}(\mathcal{S})$，并且对于某个 $\varepsilon>0$有 $\Sigma\in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\mathcal{S})$，则 f 局部满足 ***Lusin*** 条件（***N***）。

命题 3.5。设 $f\in N^{1,n}_{loc}(\mathcal{S},\mathbb{R}^n)$ 满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n\le K(x)J_f(x)+\Sigma(x)\,|f(x)-y_0|^n \tag{23}$$

对几乎处处的 $x\in\mathcal{S}$，且 $y_0\in\mathbb{R}^n.$，若对于某个 $p>n$ 有 $K\in L^p_{loc}(\mathcal{S})$，并且对于某个 $\varepsilon>0$有 $\Sigma\in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\mathcal{S})$，则 f 局部满足 ***Lusin*** 条件（***N***）。

这里我们给出命题 3.4 或 3.5 的另一种证明，它可能具有独立的意义。我们将在第 3.3.2 小节中讨论这一点。

3.3.2 伪单调映射

我们首先回顾映射在欧几里得空间中为 K-伪单调的定义。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个区域。在 [MM95], Mal´y 与 Martio[MM95] 中，称映射 $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是 K- 伪单调的，$K\ge1$, 如果

$$\mathrm{diam}(fB(x,r))\le K\mathrm{diam}(f\partial B(x,r)) \tag{24}$$

每当 $B(x,r)$ 在 Ω. 上紧包含。然后，他们证明，连续映射 $f\in W^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 若是 K-伪单调的，则满足 Lusin 条件（N）。该结果被推广到度量测度

空间的情形，由 Heinonen 等人 [HKST01，定理 7.2] 给出。此外，根据 Zapadinskaya [Zap14 在度量空间设定下的定理 1]，可见 H¨older 映射 $f: X \to \mathbb{R}^n$ 也满足 Lusin 条件（N）。事实上，H¨older 连续性条件使我们得到

$$\operatorname{diam}(fB(x,r)) \leq Kr^{\alpha}, 0 < \alpha < 1, \tag{25}$$

每当 $B(x, r)$ 在 Ω 上紧包含。如果将欧几里得空间情形下的条件 (24) 与 (25) 结合起来，也可以推出 $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$. 满足 Lusin 条件（N）。事实上，这是 Putten [Put03, Theorem 3.1], 的一项结果，该结果断言，若 $f \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 满足以下不等式

$$\operatorname{diam}(fB(x,r)) \leq K\operatorname{diam}(f\partial B(x,r)) + K'r^{\alpha} \tag{26}$$

对每个 $B(x, r) \subset\subset \Omega$。这里，$K$，$K'$ 是仅依赖于 n、Ω 和 $0 < \alpha \leq 1.$ 的正常数。于是 f 满足 Lusin 条件（N）。

接下来，我们给出这一结果在度量测度空间情形下的一个版本。回顾一下，若一个函数 $P: [0, \infty] \to [0, \infty]$ 是杨函数，则它在 $(0, \infty)$ 上是凸的、非常数，且 $P(0) = 0.$。然后，与 (26) 相比，我们引入以下概念。

定义 3.1。设 Ω 是 $\mathcal{S}$ 的一个区域，且 P 是一个杨函数。若映射 $\phi: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是 Ω 上的（K，P）-伪单调的，则对每个 $x \in \Omega$，都有以下不等式

$$\operatorname{diam}(fB(x,r)) \leq K\operatorname{diam}(f\partial B(x,r)) + K'\sqrt[n]{P(r)} \tag{27}$$

只要 $B(x, r)$ 紧包含于 Ω。这里，K 和 K' 是仅依赖于 n 和 Ω的两个正常数。

本小节的主要结果如下定理所示。

定理 3.6。设连续映射 $f \in N^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 在区域 $\Omega \subset \mathcal{S}$ 上是（K, P）-伪单调的，其中 P 满足 $P(2t) \lesssim P(t)$ 当$t \to 0^+$. 时，则 f 满足 *Lusin* 条件（*N*）。

注。注意，在（27）中取 $P(r) = r^{\alpha}$，$0 < \alpha \leq n,$ 可得到条件（26）。我们还注意到，即使在欧几里得空间中，定理 3.6 也是新的。事实上，存在一个杨函数 P，其满足 $r^{\beta} \lesssim P(r)$ 和 $P(2t) \lesssim P(t)$，对足够小的 $r > 0$ 及任意 $\beta > 0.$ 均成立。此外，[Put03，定理 3.1] 的证明依赖于欧几里得空间中 Sobolev 映射的迹定理。在

相比之下，下面定理 3.6 的证明不需要这一结果。这里还需要注意，我们使用由以下方式定义的 E 的 P-豪斯多夫测度:

$$\mathcal{H}^P(E) := \sup_{\delta>0} \inf \sum_i P(r_i),$$

其中下确界取遍集合 E 的所有由半径 r_i 不超过 δ.的球 B_i 构成的覆盖

证明。 该结果的证明类似于 [HKST01，定理7.2]。我们必须证明，对每一个满足 $\mathcal{H}^P(U) = 0$.的 $U \subset\subset \Omega$，有 $\mathcal{H}^n(f(U)) = 0$。不失一般性，我们可以假设 $U \subset B(x_1, R_1)$，并且 g 是f 在 U. 的某个邻域中的上梯度。对每一个固定的 $\varepsilon > 0$， 我们还假设$\Omega \supset U$ 是一个满足以下条件的固定开域

$$\int_\Omega g^n d\mathcal{H}^n < \varepsilon.$$

我们考虑集合

$$U_1 = \left\{ x \in U : \int_{B(x,10\lambda r)} g^n d\mathcal{H}^n < 2L \int_{B(x,r/5)} g^n d\mathcal{H}^n \right\}$$

并记为 $U_2 = U \backslash U_1$.。于是，我们必须证明 $\mathcal{H}^n(f(U_1)) = \mathcal{H}^n(f(U_2)) = 0$.

我们首先证明 $\mathcal{H}^n(f(U_1)) = 0$.。对每一个 $x \in U_1$， 我们选取一个 $r_x > 0$，使得 $B(x, 10\lambda r_x) \subset \Omega$，并且

$$\int_{B(x,10\lambda r_x)} g^n d\mathcal{H}^n < 2L \int_{B(x,r_x/5)} g^n d\mathcal{H}^n.$$

然后，根据 [HK00 定理 7.1] ，我们可知存在一个半径 $r \in (r_x, 2r_x)$，使得

$$|f(x_0) - f(y_0)| \le c \left(\int_{B(x,10\lambda r_x)} g^n \, d\mathcal{H}^n \right)^{1/n} \tag{28}$$

对于每个满足 $d(x_0, x) = d(y_0, x)$ 的 $x_0, y_0 \in \Omega$，现利用 f, 的 (K, P)-伪单调性，我们得到

$$\begin{aligned} (\mathrm{diam} f(B(x, r_x)))^n \le & M_1 (\mathrm{diam} f(\partial B(x, r)))^n + M_2 P(r) \\ \le & M_1 \int_{B(x,10\lambda r_x)} g^n \, d\mathcal{H}^n + M_2 P(2r_x) \\ \le & M_1 \int_{B(x,10\lambda r_x)} g^n \, d\mathcal{H}^n + M_2 P(r_x). \end{aligned} \tag{29}$$

因此，我们得到满足不等式 (29) 的 $U_1 \subset \cup_{x\in U_1} B(x, r_x)$，其中 $B(x, r_x)$。根据覆盖定理 [Hei01，第 1]，章，我们可以选取一个可数集合 $\{B(x_i, r_i)\}$，其覆盖 U_1，且 $\{B(x_i, r_i/5)\}$ 两两不相交。利用这一覆盖和不等式 (29)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_i (\mathrm{diam} f(B(x_i, r_i)))^n \\
\leq & M_1 \sum_i \int_{B(x_i, 10\lambda r_i)} g^n \, d\mathcal{H}^n + M_2 \sum_i P(r_i) \\
< & M_1 \sum_i \int_{B(x_i, r_i/5)} g^n \, d\mathcal{H}^n + M_2 \sum_i P(r_i) \\
\leq & M_1 \int_\Omega g^n \, d\mathcal{H}^n + M_2 \sum_i P(r_i) < (M_1 + M_2)\varepsilon,
\end{aligned} \tag{30}$$

这意味着，只需令 $\varepsilon \to 0^+$.，即可得到 $\mathcal{H}^n(f(U_1)) = 0$

接下来，我们证明 $\mathcal{H}^n(f(U_2)) = 0.$。根据 [GO18 的推论 3.4 和命题 4.1，]，只需证明对每个 $a \in U_2$，都存在

$$\mathrm{Lip}(a) := \limsup_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} < \infty.$$

由于 $a \in U_2$，我们可知存在一个整数 $m > 1$，使得对每个$0 < r < 1/m$，下式成立

$$2L \int_{B(a, r/5)} g^n d\mathcal{H}^n \leq \int_{B(a, 10\lambda r)} g^n d\mathcal{H}^n. \tag{31}$$

若令 $\omega(r) = \int_{B(a,\ r/5)} g^n d\mathcal{H}^n$，则由不等式 (31) 可得

$$\omega(r) \leq \omega(50\lambda r)/(2L). \tag{32}$$

对每个固定的 $0 < t < 1/m$，我们取 $k \in \mathbb{N}$，使得 $(50\lambda)^{-k-1} \leq mr < (50\lambda)^{-k}$。于是，由不等式 (3.3.2)，对每个 $0 < r < 1/m$，我们得到

$$\omega(r) \leq Cr^n.$$

现在，根据 HKST01 引理 4，取每个满足 $x \in U_2$ with $x \in B(a, 1/10m)$，的对象，我们可以推得

$$\limsup_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq C \limsup_{x\to a} (M_{1/m,n} g(x) + M_{1/m,n} g(a)) \leq C.$$

证明至此完成。 □

4 有限畸变值的全不连通性及其推论

4.1 全不连通性

本节将研究从具有受控几何的广义 n-流形到欧几里得空间的有限畸变映射的值集的全不连通性。首先，我们需要以下由引理 3.1 推导出的 Caccioppoli 型估计。在欧几里得空间中，这类估计已由 Kangasniemi 和 Onninen [KO221，引理 6.2] 以及 Onninen 和 Zhong [OZ08，引理 2.1]建立。

引理 4.1. 设 $f \in N^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$，$\Omega \subset \mathcal{S}$是一个相对紧开集，且 $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个 *Lipschitz* 映射，其$\mathrm{spt}\eta \subset\Omega$。若$\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是分段 C^1-光滑函数，且 φ' 局部有界，则有

$$\left|\int_{\Omega} \eta[n\varphi(|f|^2) + 2\varphi'(|f|^2)\,|f|^2]J_f\right| \lesssim \int_{\Omega} \varphi(|f|^2)\,|f|\,|\nabla\eta|\,\|\mathrm{ap}Df\|^{n-1}. \tag{33}$$

证明. 不失一般性，可设 Ω 是一个开有界区域，使得 $f \in N^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$，且 φ和 φ'有界。若令 $F_i = (f_1, f_2, \ldots, \varphi(|f|^2)f_i, \ldots, f_n)$，则有 $F_i \in N^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$。为证明这一点，必须验证 $\varphi(|f|^2)f_i \in N^{1,n}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$。由于对所有 $1 \le j \le n$， $f_j \in N^{1,n}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$，且 φ和φ'有界，我们只需验证 $|D(\varphi(|f|^2)f_j)| \in L^n_{loc}(\Omega)$。这一结论由以下事实得到

$$|D(\varphi(|f|^2)f_i)| \le 2|\varphi'(|f|^2)||f_i|\sum_{j=1}^{n}|f_i||Df_j| + |\varphi(|f|^2)||Df_i| < \infty.$$

现在，根据引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\Omega} \eta[\varphi(|f|^2) + 2\varphi'(|f|^2)|f|^2]J_f d\mathcal{H}^n\right| \\ \lesssim &\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} \varphi(|f|^2)|f_j||J(f_1, \cdots, f_{j-1}, \eta, f_{j+1}, \cdots, f_n)|d\mathcal{H}^n \\ \lesssim &\int_{\Omega} \varphi(|f|^2)|f|\,|\nabla\eta|\,\|\mathrm{ap}Df\|^{n-1}d\mathcal{H}^n. \end{aligned} \tag{34}$$

证明至此完成。 □

我们还需要以下基本事实。

引理 4.2。设 $x \geq 0$、$n \geq 2$ 和 M、N 是与 $x.$ 无关的两个正常数。若 $x \leq Mx^{\frac{n-1}{n}} + N$，则存在一个常数 $c = c(M、N、n) > 0$，使得 $x \leq c$（M、N、n）。

证明。若 $x = 0$，则我们可以选取任意正常数 c，使得 $x \leq c$。现在，假设 $x > 0$，并考虑函数

$$\mathcal{G}(x) = x^{1/n} - \frac{N}{x^{1-\frac{1}{n}}}, x > 0.$$

显然，$\lim_{x\to 0^+} \mathcal{G}(x) = -\infty$，且 $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{G}(x) = +\infty$，并且当 $x > 0.$ 时，$\mathcal{G}$ 严格单调递增。因此，对于任意 $t > 0,$ 存在唯一的 $c = c(n, N, t) > 0$，使得 $\mathcal{G}(x) = t.$。因此，令 $t = M$ 且 $c(M, N, n) = \mathcal{G}^{-1}(M)$。 □

由引理 4.1 和 4.2，可得以下结果。为简洁起见，我们引入以下符号

$$A(p,q,n) := \left\{(p,q,n) : p > n-1, n > 2, q > 1 \text{ and } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1\right\}.$$

定理 4.3. 设$\Omega \subset \mathcal{S}$ 是一个有界域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 f属于 $N^{1,n}_{loc}(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$，并满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq K(x)J_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{35}$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$成立。若 $K \in L^p_{loc}(\Omega)$ 且 $\Sigma/K \in L^q_{loc}(\Omega)$ 满足$(p, q) \in A(p, q, n)$，则 $g \in L^{q_1}_{loc}(\Omega)$，其中

$$g(x) := \begin{cases} g_u & \text{if } x \in \Omega \setminus f^{-1}\{y_0\}, \\ 0 & \text{if } x \in f^{-1}\{y_0\} \end{cases} \tag{36}$$

且 $u(x) = \log^+\log^+ 1/|f(x) - y_0|$ 且 $q_1 = pn/(1 + p) \in (n - 1, n)$。

证明。不失一般性，我们可以假设 $y_0 = 0.$。由于 f 在 Ω 上连续，集合

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega : |f(x)| < 1/e^2\}$$

是一个开域，且 $\log^+\log^+(1/|f(x)|) = 0$ 位于 $\Omega_1.$ 之外。因此，不失一般性，我们可以考虑 $\Omega_1 = \Omega$。我们还假设 $f \in N^{1,n}(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ $K \in L^p(\Omega)$ 且 $\Sigma/K \in L^q(\Omega)$。如果我们记

$$u(x) = \log\log\frac{1}{|f(x)|}, x \in \Omega,$$

那么根据 [BB11，命题 2.17],可知 $u \in N^{1,\ n}(\Omega\ \mathbb{R}^n)\cap\mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$。现在，我们固定 $\varepsilon > 0$ 并考虑以下映射

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{2t^{\frac{n}{2}}}\int_0^t \frac{\phi_\varepsilon(s)}{s\log^n(\frac{1}{s})}ds,$$

其中

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+\varepsilon 2^{\frac{1}{s}}}.$$

对于每个固定的紧子集 $\Omega_1 \subset \Omega$，我们取映射 $\varphi = \varphi_\varepsilon$ 和 $\eta = \eta_1^n$。这里 η_1 是一个 Lipschitz 映射，且 spt$\eta_1 \in \Omega$，满足 $\eta_1 = 1$ 在 Ω_1，$|\nabla\eta_1| \le 1/r$在 Ω 上，以及 $\eta_1 = 0$ 在 $\Omega\ \backslash\Omega_1$. 上。于是，根据引理 4.1，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \eta_1^n \frac{J_f}{|f|^n\log^n(\frac{1}{|f|})}\varphi_\varepsilon(|f|)d\mathcal{H}^n\\
\lesssim&\int_\Omega \eta_1^{n-1}|\nabla\eta_1|\frac{\|\ apDf\ \|^{n-1}}{|f|^{n-1}\log^{n-1}(\frac{1}{|f|})}\left(\varphi_\varepsilon(|f|)\right)^{\frac{n-1}{n}}d\mathcal{H}^n\\
\lesssim&\left[\int_\Omega \eta_1^n\frac{\|\ apDf\ \|^n}{K|f|^n\log^n(\frac{1}{|f|})}\varphi_\varepsilon(|f|)d\mathcal{H}^n\right]^{\frac{n-1}{n}}\cdot\left[\int_\Omega K^{n-1}|\nabla\eta_1|^n d\mathcal{H}^n\right]^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}\tag{37}$$

因此，结合 $\frac{\|apDf\|^n}{K} - \frac{\Sigma|f|^n}{K} \le J_f$ 和不等式 (37)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \eta_1^n\frac{\|\ apDf\ \|^n}{K|f|^n\log^n(\frac{1}{|f|})}\varphi_\varepsilon(|f|)d\mathcal{H}^n\\
\lesssim&\left[\int_\Omega \eta_1^n\frac{\|\ apDf\ \|^n}{K|f|^n\log^n(\frac{1}{|f|})}\varphi_\varepsilon(|f|)d\mathcal{H}^n\right]^{\frac{n-1}{n}}\cdot\left[\int_\Omega K^{n-1}|\nabla\eta_1|^n d\mathcal{H}^n\right]^{\frac{1}{n}}\\
&\qquad+\int_\Omega \eta_1^n\frac{\varphi_\varepsilon(|f|)}{\log^n(\frac{1}{|f|})}\frac{\Sigma}{K}d\mathcal{H}^n\\
\le&C(n,\|\ K^{n-1}|\nabla\eta_1|^n\ \|_{L_1(\Omega)})\left[\int_\Omega \eta_1^n\frac{\|\ apDf\ \|^n}{K|f|^n\log^n(\frac{1}{|f|})}\varphi_\varepsilon(|f|)d\mathcal{H}^n\right]^{\frac{n-1}{n}}\\
&\qquad+\int_\Omega \eta_1^n\frac{\varphi_\varepsilon(|f|)}{\log^n(\frac{1}{|f|})}\frac{\Sigma}{K}d\mathcal{H}^n.
\end{aligned}\tag{38}$$

由于

$$\int_\Omega \eta_1^n\frac{\varphi_\varepsilon(|f|)}{\log^n(\frac{1}{|f|})}\frac{\Sigma}{K}d\mathcal{H}^n \lesssim \int_\Omega\frac{\Sigma}{K}d\mathcal{H}^n \lesssim \left\|\frac{\Sigma}{K}\right\|_{L^q(\Omega)}\left(\mathcal{H}^n(\Omega)\right)^{\frac{q-1}{q}} < \infty,$$

利用引理 4.2 和不等式 (38)，我们得出存在一个常数 $C = C(n, \| K^{n-1}|\nabla\eta_1|^n \|_{L^1(\Omega)} \|\Sigma/K\|_{L^q(\Omega)}, \Omega)$，使得

$$\int_\Omega \eta_1^n \frac{\|apDf\|^n}{K|f|^n \log^n(\frac{1}{|f|})}\varphi_\varepsilon(|f|)d\mathcal{H}^n \le C(n, \|K^{n-1}|\nabla\eta_1|^n\|_{L^1(\Omega)}, \|\Sigma/K\|_{L^q(\Omega)}, \Omega). \tag{39}$$

由控制收敛定理可得

$$\int_\Omega \eta_1^n \frac{\|apDf\|^n}{K|f|^n \log^n(\frac{1}{|f|})}d\mathcal{H}^n \le C(n, \|K^{n-1}|\nabla\eta_1|^n\|_{L^1(\Omega)}, \|\Sigma/K\|_{L^q(\Omega)}, \Omega). \tag{40}$$

设 $q_1 = pn/(1+p)$，则可推出

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \frac{\|apDf\|^{q_1}}{|f|^{q_1} \log^{q_1}(\frac{1}{|f|})}d\mathcal{H}^n \\
=&\int_{\Omega_1} \left[\frac{\|apDf\|^n}{K|f|^n \log^n(\frac{1}{|f|})}\right]^{\frac{q_1}{n}} \cdot K^{\frac{q_1}{n}} d\mathcal{H}^n \\
\le&\left[\int_{\Omega_1} \frac{\|apDf\|^n}{K|f|^n \log^n(\frac{1}{|f|})}\right]^{\frac{q_1}{n}} \cdot \left[\int_{\Omega_1} K^p(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
\le&\left[\int_{\Omega} \frac{\|apDf\|^n}{K|f|^n \log^n(\frac{1}{|f|})}\right]^{\frac{q_1}{n}} \cdot \left[\int_{\Omega} K^p(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned} \tag{41}$$

因此，利用 [BB11、命题 2.17] 和 H¨older 不等式，对于几乎处处的 $x \in \Omega \setminus f^{-1}\{0\}$，可得

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus f^{-1}(0)} g_u^{q_1} d\mathcal{H}^n &= \int_{\Omega\setminus f^{-1}(0)} \frac{\|apDf\|^{q_1}}{|f|^{q_1} \log^{q_1}(\frac{1}{|f|})}d\mathcal{H}^n \\
&\le \left[\int_\Omega \frac{\|apDf\|^n}{K|f|^n \log^n(\frac{1}{|f|})}\right]^{\frac{q_1}{Q}} \cdot \left[\int_\Omega K^p(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned} \tag{42}$$

这表明 $g \in L^{q_1}_{loc}(\Omega)$。 定理 4.3 的证明至此完成。 □

为了说明 $f^{-1}\{y_0\}$ 是全不连通的，可以证明$\mathcal{H}^1(f^{-1}\{y_0\}) = 0.$。下面的引理给出了得出这一结论的方法。

引理 4.4。 [Kir14, 引理 7。1] 假设 $\mathcal{S}$ 支持弱 $(n-1)$-庞加莱不等式，并且 $1 < n-1 < p < n.$设 $E \subset \mathcal{S}$为一个闭集，且存在一列连续函数 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$，其对应的弱上梯度为 $n\{g_i\}_{i=1}^\infty$，满足以下条件。

(1) $u_i = 1$ 对每个 $i \in \mathbb{N}$ 以及每个 $x \in E$.
(2) $\int_\Omega (g_i(x))^p d\mathcal{H}^n \to 0$ 对每个紧集 $\Omega \subset \mathcal{S}$.均成立

(3)存在 $y \in \mathcal{S}$ 和 $R > 0$，使得 $u_i(x) \leq 1/2$ 对每个 $x \in \mathcal{S} \cap B(y, R)$ 以及每个 $i \in \mathbb{N}$.均成立

于是 $\mathcal{H}^1_\infty(E) = 0$，因此 $\mathcal{H}^1(E) = 0$.也成立

现在，根据定理 4.3 和引理 4.4，我们得到如下结果。

定理 4.5. 设 $\Omega \subset \mathcal{S}$ 是一个区域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设非恒定映射 f 属于 $N^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 并满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq K(x) J_f(x) + \Sigma(x) |f(x) - y_0|^n \tag{43}$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$。若 $K \in L^p_{loc}(\Omega)$ 和 $\Sigma / K \in L^q_{loc}(\Omega)$ 满足 $(p, q) \in A(p, q, n)$，则 $f^{-1}\{y_0\}$ 是全不连通的。

证明。 我们也只假设 $y_0 = 0$ 的情形。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们考虑连续映射序列

$$g_i(x) = \frac{\min\{g(x), i\}}{i},$$

其中 g 由（44）定义。然后， g 满足以下性质：

（1）对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 以及每个 $x \in f^{-1}\{0\}$.， $g_i \equiv 1$

由于 f 是非常值连续映射，我们得到：

（2）存在 $y \in \mathcal{S}$ 和 $R > 0$，使得对于每个 $x \in \mathcal{S} \cap B(y, R)$，当 i 充分大时， $g_i(x) \leq 1/2$。

然后，根据引理 4.4，如果我们找到一个 n-弱上梯度 g_i，使得 g_i 满足以下断言，则可推出 $\mathcal{H}^1(f^{-1}(0)) = 0$：

(3) $\int_\Omega (g_i(x))^p d\mathcal{H}^n \to 0$ 对于每个紧集 $\Omega \subset \mathcal{S}$.，如同 $i \to \infty$

为此，我们考虑 $g_i(x) = \frac{1}{i} g(x)$，其中

$$g(x) = \begin{cases} g_u & \text{if } x \in \mathcal{S} \setminus f^{-1}(0), \\ 0 & \text{if } x \in f^{-1}(0). \end{cases} \tag{44}$$

由于根据定理 4.3，我们有 $g \in L^{q_1}_{loc}(\Omega)$，其中

$$g(x) := \begin{cases} g_u & \text{if } x \in \Omega \setminus f^{-1}(0), \\ 0 & \text{if } x \in f^{-1}(0) \end{cases} \tag{45}$$

且 $u(x) = \log^+ \log^+ 1/|f(x)|$ 且 $q_1 = pn/(1+p) \in (n-1,\ n)$。因此，我们得到

$$\int_\Omega |g_i(x)|^{q_1} d\mathcal{H}^n \le \frac{1}{i} \left[\int_\Omega \frac{\|apDf(x)\|^n}{K(x)|f(x)|^n \log^n(\frac{1}{|f(x)|})} d\mathcal{H}^n \right]^{\frac{q_1}{n}} \cdot \left[\int_\Omega K^p(x) d\mathcal{H}^n \right]^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

如 $i \to \infty$. 至此，证明完成。 □

4.2 推论 I：分支的选择

这里列出关于 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0,\ \varepsilon))$。的连通分支选择的一些推论。Kangasniemi 和 Onninen [KO222] 在欧几里得空间的情形下得到了这些结果。由于这些结果本质上是拓扑性的，得益于引理4.5所确立的全不连通性，我们可以直接得到广义 n-流形（具有受控几何）上的相应结论。读者可以参照 [KO222、引理 4.1、4.2 和 4.3]，直接证明推论4.6、4.7 和 4.8。

推论4.6。 设 $\Omega \subset \mathcal{S}$ 为一个区域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设非常值映射 f 属于 $N^{1,n}_{loc}(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 并满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \le K(x) J_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{46}$$

对于几乎处处 $x \in \Omega$，其中 $K \in L^p_{loc}(\Omega)$ 对某个 $p > n-1$，且$\Sigma \in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ 对某个 $\varepsilon > 0$. 。于是，存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得若U_{ε_1} 是 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_1))$的$x$-连通分支，则 U_{ε_1} 紧包含于Ω。

推论4.7. 设$\Omega \subset \mathcal{S}$ 为一个区域且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设一个非常值映射 f 属于 $N^{1,n}_{loc}(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 并满足如下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \le K(x) J_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{47}$$

几乎处处于 $x \in \Omega$，其中 $K \in L^p_{loc}(\Omega)$ 对某个 $p > n-1$ 成立，且 $\Sigma \in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ 对某个 $\varepsilon > 0$. 成立。于是，对任意两个不同的点 $x_1, x_2 \in f^{-1}\{y_0\}$，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得 x_1 和 x_2 属于 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_0))$的不同连通分支。

推论 4.8。 设 $\Omega \subset \mathcal{S}$ 是一个区域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设一个非常值映射 f 属于 $N^1_{,loc}{}^n(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 并满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq K(x)J_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{48}$$

几乎处处满足 $x \in \Omega$，其中 $K \in L^p_{loc}(\Omega)$ 对某个 $p > n-1$ 成立，且 $\Sigma \in L^{1+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ 对某个 $\varepsilon > 0.$ 成立。设 $x_0 \in f^{-1}\{y_0\}$，并且对所有 $\varepsilon > 0$， U_ε 为 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_0))$ 的 x_0- 连通分支。则，$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{H}^n(U_\varepsilon) = 0.$

4.3 推论 II：有限畸变值的雅可比行列式—度公式

以下关于 Newtonian-Sobolev 映射的雅可比行列式—度公式与 Kangasniemi 和 Onninen [KO222]在欧几里得空间上得到的公式类似。

引理 4.9。 设 $\Omega \subset \mathcal{S}$ 是一个区域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设非常值映射 f 属于 $N^1_{,loc}{}^n(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$，并满足 *Lusin* 条件（*N*）。若 $f^{-1}\{y_0\}$ 全不连通，则存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得 $U_{\varepsilon_1} \subset\subset \Omega$是 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_1))$ 的一个连通分支，并满足以下雅可比行列式—度公式

$$\deg(f, U_{\varepsilon_1}) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon_1^n} \int_{U_{\varepsilon_1}} J_f d\mathcal{H}^n. \tag{49}$$

证明。 根据推论4.6，我们可以选取一个 $\varepsilon_1 > 0$，使得 $U_{\varepsilon_1} \subset\subset \Omega$ 是 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_1))$ 的一个连通分支，并满足 $f \in N^{1,n}(U_{\varepsilon_1}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(U_{\varepsilon_1}, \mathbb{R}^n)$，且在 U_{ε_1}. 上满足 Lusin 条件（N）

我们首先考虑 f 是 Lipschitz 映射的情形。然后，根据 [Kir16，引理 3.5], ，我们得到

$$\deg(y, f, U_{\varepsilon_1}) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U_{\varepsilon_1}} \mathrm{sgn} J_f(x)$$

对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U_{\varepsilon_1})$。 将此与余面积公式结合起来，依据 [Kir16，定理 3.3], ，我们得到

$$\int_{U_{\varepsilon_1}} J_f(x) d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \deg(y, f, U_{\varepsilon_1}) d\mathcal{H}^n(y). \tag{50}$$

接下来，根据 [Kir14，引理 4.3], ，我们可以选取一个局部 Lipschitz 映射序列$\{f_j\}_{j=1}^\infty$, 使得 $f_j \to f$ 在紧集上一致收敛。因此，对于充分大的指标 j，存在 f_j 与 f之间的同伦，使得 deg(y, f_j, U_{ε_1}) =deg(y, f, U_{ε_1})。此外，根据 [Kir14，推论 2.31], 可知

$$\int_{U_{\varepsilon_1}} J_{f_j} d\mathcal{H}^n \to \int_{U_{\varepsilon_1}} J_f d\mathcal{H}^n \ \text{ as } \ j \to \infty.$$

因此我们得到

$$\int_{U_{\varepsilon_1}} J_f(x)d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \deg(y, f, U_{\varepsilon_1})d\mathcal{H}^n(y) \tag{51}$$

当 $f \in N^{1,n}(U_{\varepsilon_1}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(U_{\varepsilon_1}, \mathbb{R}^n)$。现在，由 [Kir16, 引理 2.7]，我们可推得

$$\int_{U_{\varepsilon_1}} J_f(x)d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{B}(y_0,\varepsilon_1)} \deg(y, f, U_{\varepsilon_1})d\mathcal{H}^n(y) = \omega_n\varepsilon_1^n \deg(f, U_{\varepsilon_1}).$$

这就完成了引理 4.9 的证明。 □

根据命题 3.4 和引理 4.9，我们可以直接推出以下关于有限畸变值的 Jacobian-度公式。

引理 4.10。设 $\Omega \subset \mathcal{S}$ 是一个区域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 f 属于 $N^{1,n}_{loc}(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n)$，并满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq K(x)J_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{52}$$

对于几乎处处的 $x \in \mathcal{S}$ $K \in L^p_{loc}\,\mathcal{S}$ $p > n$ $\Sigma \in$，其中 $L^{1+\varepsilon}_{loc}\,\mathcal{S}$ $\varepsilon > 0$. U_{ε_1} () 对某个成立，且 () 对某个成立。另假设 是 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_1))$ 的一个连通分支，且 U_{ε_1} 紧包含于 Ω，则有

$$\deg(f, U_{\varepsilon_1}) = \frac{1}{\omega_n\varepsilon_1^n}\int_{U_{\varepsilon_1}} J_f d\mathcal{H}^n. \tag{53}$$

5 拟正则值的 Reshetnyak 定理的证明

本节的主要目的是给出从具有受控几何的广义 n-流形到欧几里得空间的拟正则值的 Reshetnyak 定理的证明，我们的证明遵循与 Kangasniemi 和 Onninen [KO222]所给出的类似思路。正如 Kangasniemi 和 Onninen 在 [KO222，引理 5.2], 中所做的那样，我们首先给出关于 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_1))$. 的连通分支上非负度的如下结果。证明引理 5.1 的关键工具是引理 4.10 中的 Jacobian-度公式。其证明类似于 [KO222，引理 5.2],的证明，因此在此省略。

引理 5.1。 设 $\Omega \subset \mathcal{S}$ 是一个有界连通域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。设非常值连续映射 $f \in N^{1,n}_{loc}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ </style>满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq K(x)J_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{54}$$

对于几乎处处的 $x \in$, $K \in L^p_{loc}$ $\mathcal{S}$ $p > n$ $\Sigma \in$ $L^{1+\varepsilon}_{loc}$ $\mathcal{S}$ $\varepsilon > 0.$ U_{ε_1} Ω，其中 () 对某个成立，且 () 对某个成立。进一步设 是 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_1))$的一个连通分支，$U_{\varepsilon_1}$ 紧包含于 Ω中。则存在$C = C(n, K, \Sigma,$ Ω$) > 0$，使得 $\deg(f, U_{\varepsilon_1}) \geq 0$，如果 $\mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1}) \leq C.$

在 [16, 5 3], ¨ $f \in$ $N^{1\,n}_{loc}$ $\mathbb{R}^n$ J_f x ≥ 0 $x \in$, f Kir 定理中，Kirsila 证明了，如果连续映射 ,(Ω) 几乎处处在 Ω 上满足 ( )，那么它保持定向；也就是说，对每个 $D \subset\subset$ Ω 和 $y \in f(D) \setminus f(\partial D).$ ，都有 deg$(y, f, D) > 0$。然而， [Kir16, 定理 5.3] 中的这一结果并不适用于我们的情形。这是因为该结果允许有限畸变映射 f 的雅可比行列式 J_f 在其区域 y_0 上取负值。不过，我们仍然可以证明，存在一个足够小的 $\varepsilon_1 > 0,$ ，使得 f 在U_{ε_1} 上的度始终为正。这里， U_{ε_1}是 f^{-1}(B(y0, ε1)). 的一个连通分支。由此可知， J_f 在 U_{ε_1} 上的积分平均值严格为正。下面的结果正是这一结论，它在证明拟正则值的离散性和局部正指标时起着关键作用。证明思路基于[KO222, Zho251]。

引理 5.2。 对于常数 $K \geq 1$，设 Ω $\subset$ $\mathcal{S}$ 是有界连通域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。设非常值连续映射$f \in N^{1,\ n}_{loc}$ (Ω $\mathbb{R}^n$) 满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq KJ_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{55}$$

对几乎处处的 $x \in$ Ω，其中 $\Sigma \in L^p_{loc}(\mathcal{S})$ 对某个 $p > 1.$ 成立。此外，设U_{ε_1} 是 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0,\ \varepsilon_1))$ 的一个连通分支，且U_{ε_1} 紧包含于 Ω 中。那么，我们有 $\deg(\overline{f,}$ $U_{\varepsilon_1}) > 0.$

证明。 根据引理 5.1，存在 $\varepsilon_1 > 0$ ，使得$U_{\varepsilon_1} \subset\subset$Ω 是 f^{-1}(B(y0, ε1)) 的一个连通分支，满足 $\mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1}) \leq C$，因此 deg$(f,\ U_{\varepsilon_1}) \geq 0.$。接下来，我们将证明 deg$(f,\ U_{\varepsilon_1}) = 0$ 不可能成立，从而完成引理 5.2 的证明。我们用反证法验证这一点。我们将本引理的证明分为三部分。

第一部分：证明如果 deg$(f, U_{\varepsilon_1}) = 0$，那么我们有

$$\int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{\|apDf\|^n}{|f - y_0|^n} d\mathcal{H}^n < \infty \quad \text{and} \quad \int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{J_f}{|f - y_0|^n} d\mathcal{H}^n = 0.$$

我们首先证明，若 deg$(f, U_{\varepsilon_1}) = 0,$ 则有

$$\int_{U_{\varepsilon_1} \cap f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, r))} J_f d\mathcal{H}^n = 0 \tag{56}$$

对几乎每一个 $r \in (0, \varepsilon_1)$。不失一般性，我们假设 $f \in_{N^{1,n}}(U_{\varepsilon_1}, \mathbb{R}^n)$ 且 $\Sigma \in L^p(\varepsilon_1)$。设 $J_f = J_f^+ - J_f^-$ 与 $U_r = U_{\varepsilon_1} \cap f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, r))$。于是，根据引理 4.10，我们看到若 $\deg(f, U_{\varepsilon_1}) = 0$，则有 $\int_{U_{\varepsilon_1}} J_f d\mathcal{H}^n = 0$. 由于 $U_{\varepsilon_1} \cap f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, r))$ 是 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, r))$ 的连通分支的不交并，且 $\mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1} \cap f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, r))) \leq \mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1}) \leq C$，我们由引理 5.1 推得 $0 \leq \deg(f, U_{\varepsilon_1} \cap f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, r))) \leq \deg(f, U_{\varepsilon_1}) = 0$. 因此，利用公式 (53)，我们推出方程 (56) 的所需结论。现在，凭借引理 4.10，我们得到

$$\int_{U_r} J_f^+ d\mathcal{H}^n = \int_{U_r} J_f^- d\mathcal{H}^n. \tag{57}$$

由（55），我们有

$$\int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{J_f^-}{|f - y_0|^n} d\mathcal{H}^n \leq \int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{\Sigma}{K} \lesssim \|\Sigma\|_{L^p(U_{\varepsilon_1})} \cdot (\mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1}))^{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

因此，将（57）中的 nr^n 相乘并积分，通过Fubini-Tonelli定理可得

$$\int_{U_{\varepsilon_1}} \left(\frac{J_f^+}{|f - y_0|^n} - \frac{J_f^+}{\varepsilon_1} \right) d\mathcal{H}^n = \int_{U_{\varepsilon_1}} \left(\frac{J_f^-}{|f - y_0|^n} - \frac{J_f^-}{\varepsilon_1} \right) d\mathcal{H}^n,$$

由此得到

$$\int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{J_f}{|f - y_0|^n} d\mathcal{H}^n = 0.$$

现在，根据拟正则值的定义，我们推得

$$\begin{aligned} \int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{\|apDf\|^n}{|f - y_0|^n} d\mathcal{H}^n \leq & K \int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{J_f}{|f - y_0|^n} d\mathcal{H}^n + K \int_{U_{\varepsilon_1}} \Sigma \\ = & K \int_{U_{\varepsilon_1}} \Sigma \lesssim \|\Sigma\|_{L^p(U_{\varepsilon_1})} \cdot (\mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1}))^{\frac{p-1}{p}} < \infty. \end{aligned} \tag{58}$$

这就完成了**第一部分。**

第二部分。 令 $u = \log |f - y_0|$，则我们证明存在 $Q > n$，使得 $u \in N^{1,Q}_{loc}(U_{\varepsilon_1})$，从而 $u \in L^\infty_{loc}(U_{\varepsilon_1})$。

不失一般性，我们假设 $y_0 = 0$. 我们首先证明 $g_u \in L^n_{loc}(U_{\varepsilon_1})$。对于任意 $\lambda > 0$，记 $|f|_\lambda = \max\{|f|, \lambda\}$. 于是有 $|f|_\lambda \in N^{1,n}_{loc}(\Omega)$ 如 $f \in N^{1,n}_{loc}(\Omega)$。因此，由于其局部Lipschitz连续性

log(·)，我们推得 $u_\lambda := \log |f|_\lambda \in N^{1,n}_{loc}(\Omega)$。因此，当 $|f| \geq \lambda > 0$，由 [BB11, 命题 2.17]可知

$$g_{u_\lambda} = \frac{g_{|f|_\lambda}}{|f|_\lambda} \leq \frac{\|apDf\|}{|f|} < \infty$$

是 u_λ. 的最小 n-弱梯度。因此，当 $|f| \geq \lambda > 0$时，我们得到

$$\int_{\Omega_1} g^n_{u_\lambda} d\mathcal{H}^n \leq \int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{\|apDf\|^n}{|f|^n} d\mathcal{H}^n \lesssim \|\Sigma\|_{L^p(U_{\varepsilon_1})} \cdot \left(\mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1})\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

现在，由控制收敛定理可得

$$\int_{\Omega_1} g^n_u d\mathcal{H}^n \leq \int_{U_{\varepsilon_1}} \frac{\|apDf\|^n}{|f|^n} d\mathcal{H}^n \lesssim \|\Sigma\|_{L^p(U_{\varepsilon_1})} \cdot \left(\mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1})\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty,$$

其中 $\Omega_1 \subset\subset U_{\varepsilon_1}$. 。因此，我们有 $g_u \in L^n_{loc}(U_{\varepsilon_1})$。

接下来，我们证明存在 $\beta > 1$，使得 $g^n_u \in L^\beta_{loc}(U_{\varepsilon_1})$。为此，我们首先证明 $u \in L^1_{loc}(\Omega)$。

接下来，我们证明 $g^n_u \in L^\beta_{loc}(U_{\varepsilon_1})$，其中 $\beta > 1$。我们利用引理 4.1 中的 Caccioppoli 型估计来证明这一点。对每个固定的 $x \in U_{\varepsilon_1}$，我们假设 $0 < r < 2r < \operatorname{dist}(x, \partial U_{\varepsilon_1})$，并假设 Lipschitz 映射 $\eta|_{B(x,r)} = 1$ 和 $(|\nabla \eta|)|_{B(x,2r)} \leq C/r$. 。此外，我们假设

$$\psi_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{\log \sqrt{t+\varepsilon} - c}{t^{\frac{n}{2}}}, & \text{if } t \geq a^2, \\ \dfrac{\log \sqrt{a^2+\varepsilon} - c}{a^n}, & \text{if } t \leq a^2. \end{cases} \tag{59}$$

因此，利用引理 4.1，我们得到

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B(x,2r)\cap\{|f|>a\}} \frac{\eta J_f}{|f|^{n-2}(\varepsilon + |f|^2)} d\mathcal{H}^n \right| \\ \leq &\left| \log \sqrt{a^2+\varepsilon} - c \right| \int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}} \frac{|J_f|}{a^n} d\mathcal{H}^n \\ + &\frac{C}{r} \int_{B(x,2r)\cap\{|f|>a\}} \frac{|\log \sqrt{\varepsilon + |f|^2} - c| \cdot \|apDf\|^{n-1}}{|f|^{n-1}} d\mathcal{H}^n \\ + &\frac{C}{r} \left| \log \sqrt{a^2+\varepsilon} - c \right| \int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}} \frac{|f| \cdot \|apDf\|^{n-1}}{a^n} d\mathcal{H}^n. \end{aligned} \tag{60}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{|J_f|}{a^n}d\mathcal{H}^n &\le \int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{|J_f|}{|f|^n}d\mathcal{H}^n\\ &\le \int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{|apDf|^n}{|f|^n}d\mathcal{H}^n,\end{aligned}\tag{61}$$

$|apDf|^n/|f|^n \in L^1_{loc}(U_{\varepsilon_1})$ 与 $\mathcal{H}^n(f^{-1}(0)) = 0$，我们推出

$$\left|\log\sqrt{a^2+\varepsilon}-c\right|\int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{|J_f|}{a^n}d\mathcal{H}^n \to 0 \ \text{ as } \ a\to 0.$$

同样，由于 $|apDf|^n/|f|^n \in L^1_{loc}(U_{\varepsilon_1})$ $\mathcal{H}^n(f^{-1}(0)) = 0$ 以及

$$\begin{aligned}&\int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{|f|\cdot\|apDf\|^{n-1}}{a^n}d\mathcal{H}^n \le \int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{\|apDf\|^{n-1}}{|f|^{n-1}}d\mathcal{H}^n\\ &\le\left(\int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{|apDf|^n}{|f|^n}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\le\left(\int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{|apDf|^n}{|f|^n}d\mathcal{H}^n\right)^{\frac{n-1}{n}}(\mathcal{H}^n(U_{\varepsilon_1}))^{\frac{1}{n}},\end{aligned}\tag{62}$$

我们得到

$$\frac{C}{r}\left|\log\sqrt{a^2+\varepsilon}-c\right|\int_{B(x,2r)\cap\{|f|<a\}}\frac{|f|\cdot\|apDf\|^{n-1}}{a^n}d\mathcal{H}^n\to 0 \ \text{ as } \ a\to 0.$$

由于

$$\frac{|\log\sqrt{\varepsilon+|f|^2}-c|\cdot\|apDf\|^{n-1}}{|f|^{n-1}} \lesssim \frac{(|\log|f||+C)\cdot\|apDf\|^{n-1}}{|f|^{n-1}}$$

对某个 $C>0$，$|apDf|^{n-1}/|f|^{n-1}\in L^{n/(n-1)}_{loc}(U_{\varepsilon_1})$ 以及 $\log|f|\in L^n_{loc}(U_{\varepsilon_1})$，当 $a\to 0^+$ 时，我们由控制收敛定理如 (60) 中那样得到

$$\left|\int_{B(x,2r)}\frac{\eta J_f}{|f|^{n-2}(\varepsilon+|f|^2)}d\mathcal{H}^n\right| \le \frac{C}{r}\int_{B(x,2r)}\frac{|\log\sqrt{\varepsilon+|f|^2}-c|\cdot\|apDf\|^{n-1}}{|f|^{n-1}}d\mathcal{H}^n.\tag{63}$$

我们在（63）中再次使用控制收敛定理 $\varepsilon\to 0^+$，于是得到

$$\left|\int_{B(x,2r)}\frac{\eta J_f}{|f|^n}d\mathcal{H}^n\right| \le \frac{C}{r}\int_{B(x,2r)}\frac{|\log|f|-c|\cdot\|apDf\|^{n-1}}{|f|^{n-1}}d\mathcal{H}^n.\tag{64}$$

现在，利用 H¨older 不等式和 Sobolev-Poincar´e 不等式（8），我们推得

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,2r)} \frac{\|apDf\|^{n-1}}{|f|^{n-1}} \cdot |\log|f| - c| d\mathcal{H}^n \\
\leq &\left(\int_{B(x,2r)} \left(\frac{|apDf|^n}{|f|^n} \right)^{\frac{n}{n+1}} d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n^2-1}{n^2}} \left(\int_{B(x,2r)} |\log|f| - c|^{n^2} \right)^{\frac{1}{n^2}} \\
\lesssim &\left(\int_{B(x,2r)} \left(\frac{|apDf|^n}{|f|^n} \right)^{\frac{n}{n+1}} d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n^2-1}{n^2}} \left(\int_{B(x,2\lambda r)} \left(\frac{|apDf|^n}{|f|^n} \right)^{\frac{n}{n+1}} d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n+1}{n^2}} \\
\lesssim &\left(\int_{B(x,2\lambda r)} \left(\frac{|apDf|^n}{|f|^n} \right)^{\frac{n}{n+1}} d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n+1}{n}}.
\end{aligned} \tag{65}$$

合并不等式 (64) 和 (65)，可得

$$\left| \int_{B(x,2r)} \frac{\eta J_f}{|f|^n} d\mathcal{H}^n \right| \lesssim \frac{1}{r} \left(\int_{B(x,2\lambda r)} \left(\frac{|apDf|^n}{|f|^n} \right)^{\frac{n}{n+1}} d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n+1}{n}}, \tag{66}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,r)} \frac{\|apDf\|^n}{|f|^n} d\mathcal{H}^n \leq \int_{B(x,2r)} \eta \frac{\|apDf\|^n}{|f|^n} d\mathcal{H}^n \\
\leq &K \left| \int_{B(x,2r)} \frac{\eta J_f}{|f|^n} d\mathcal{H}^n \right| + \int_{B(x,2r)} \Sigma d\mathcal{H}^n \\
\lesssim &\frac{1}{r} \left(\int_{B(x,2\lambda r)} \left(\frac{|apDf|^n}{|f|^n} \right)^{\frac{n}{n+1}} d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n+1}{n}} + \int_{B(x,2\lambda r)} \Sigma d\mathcal{H}^n.
\end{aligned} \tag{67}$$

也就是说,

$$\begin{aligned}
⨍_{B(x,r)} \frac{\|apDf\|^n}{|f|^n} d\mathcal{H}^n \lesssim &\left(⨍_{B(x,2\lambda r)} \left(\frac{|apDf|^n}{|f|^n} \right)^{\frac{n}{n+1}} d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{n+1}{n}} \\
&+ ⨍_{B(x,2\lambda r)} \Sigma d\mathcal{H}^n.
\end{aligned} \tag{68}$$

若记 $q_1 = (n+1)/n$， $r_0 = pq_1 > q_1$， $g = (\|apDf\|^n/|f|^n)^{n/(n+1)}$ 以及 $f = \Sigma^{n/(n+1)}$， 则有 $f \in L^{r_0}_{loc}(U_{\varepsilon_1})$，并且

$$⨍_{B(x,r)} g^{q_1} \lesssim \left[\left(⨍_{B(x,2r)} g \right)^{q_1} + ⨍_{B(x,2r)} f^{q_1} \right]. \tag{69}$$

因此，根据度量测度空间 [Gol05, Theorem 3.3],上的 Gehring 引理，我们可知存在 $\beta > 1$，使得 $\|apDf\|^n/|f|^n \in L^{\beta}_{loc}(U_{\varepsilon_1})$。所以我们有$g_u^n \in L^{\beta}_{loc}(U_{\varepsilon_1})$，从而 $u \in N^{1,\beta n}_{loc}(U_{\varepsilon_1})$。现在，利用 [HK00, Theorem 5.1], ，我们得到 u 在 U_{ε_1}，上局部 Hölder 连续，这意味着 $u \in L^{\infty}_{loc}(U_{\varepsilon_1})$。证明至此完成。

第三部分. 通过证明 $u = \log |f - y_0|$ 在 $x \in f^{-1}\{y_0\}$. 附近无界。这是因为 u 是连续的，从而我们得到

$$\lim_{x \to f^{-1}\{y_0\}} u(x) = \lim_{x \to f^{-1}\{y_0\}} \log|x - y_0| = \lim_{f(x) \to y_0} \log|f(x) - y_0| = \infty.$$

现在，我们完成引理 5.2 的证明。我们假设 $\deg(f, U_{\varepsilon_1}) = 0$,则由**第二部分**, 可知 $u \in L^{\infty}_{loc}(U_{\varepsilon_1})$. 这与**第三部分**. 的结论相矛盾。至此完成引理 5.2 的证明。

□

5.1 拟正则值的离散型结果

在本节中，我们给出下述结果的证明。该证明的思想基于 [TS62、Kir14]

引理 5.3. 设 $K \geq 1$ 为一常数，$\Omega \subset \mathcal{S}$ 为一区域且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 f 属于 $N^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 并满足下述不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq K J_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{70}$$

对于几乎处处的 $x \in \Omega$。若对于某个 $p > 1$, $\Sigma \in L^p_{loc}(\Omega)$，则 $f^{-1}\{y_0\}$ 是离散的。

证明. 不失一般性，假设 Ω 是一个有界区域，$f \in N^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 和 $\Sigma \in L^p(\Omega)$。反设 $f^{-1}\{y_0\}$不是离散的。那么，存在 x_0，使得对于 x_0 的任意邻域 U_0，总存在一个 $x \in f^{-1}\{y_0\} \setminus \{x_0\}$. 现在，利用引理 5.2，我们选取 $\varepsilon_1 > 0$，使得若 U_{ε_1} 是 x_0-连通分支 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon_1))$，且 U_{ε_1}紧包含于 Ω，则有$\deg(f, U_{\varepsilon_1}) > 0$. 若记 $N =$为 $\deg(f, U_{\varepsilon_1})$，那么根据公式 (53) 和 $J_f \in L^1(\Omega)$，我们还可知 $\deg(f, U_{\varepsilon_1})$ 是有限的。现在，由于 $f^{-1}\{y_0\}$ 不是离散的，我们可以找到 $x_1, x_2, \ldots, x_{N+1} \in U_{\varepsilon_1} \cap f^{-1}\{y_0\}$ 以及半径 r_i，使得对于任意不同的$i, j \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$，都有 $B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset$，且 $y_0 \notin \bigcup_{i=1}^{N+1} f(\partial B(x_i, r_i))$。记 B_j为这些球的x_j-连通分支，则 $y_0 \notin \bigcup_{i=1}^{N+1} f(\partial Bi)$。现在，由于$U_{\varepsilon_1} \cap f^{-1}\{y_0\} \setminus \bigcup_{i=1}^{N+1} Bi$ 是紧的，我们选取一个有限子覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^{M}$，使得 $N = \deg(f, U_{\varepsilon_1}) = \sum_{i=1}^{N+1} \deg(f, y_0, B_i) + \sum_{i=1}^{M} \deg(f, y_0, U_i) \geq N+1$. 这就得到了矛盾，因此.....引理引理 5.3 的证明到此结束。 □

5.2 有限畸变值的局部正指标

本节旨在证明以下结论。

引理 5.4。 令 $K \geq 1$为常数，$\Omega \subset \mathcal{S}$ 为一个区域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 f 属于 $N^{1,\, n}_{loc}(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$，并满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq KJ_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{71}$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$成立。若对于某个 $p > 1$，有 $\Sigma \in L^p_{loc}(\Omega)$，则对每个 $x \in f^{-1}\{y_0\}.$，局部指标 $i(x, f)$均为正

证明。 不失一般性，假设 Ω 是一个有界域，$f \in N^{1,\, n}(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 且 $\Sigma \in L^p(\Omega)$。 于是，根据引理 5.2 可知，对于每个 $x \in f^{-1}\{y_0\}$，存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得U_{ε_1} 是 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0,\ \varepsilon_1))$的一个连通-连通分支，它紧包含于 Ω，且满足 $\deg(f,\ U_{\varepsilon_1}) > 0.$。根据引理 5.3，我们可以对 ε_1进行适当调整，使得 $i(x,\ f) = \deg(f,\ U_{\varepsilon_1})$，因而为正。至此，引理 5.4 得证。

□

5.3 拟正则值的局部开性

以下引理的证明基于 [KO222，引理 6.3]

引理 5.5。 设 $K \geq 1$为常数，$\Omega \subset \mathcal{S}$ 为区域，且 $y_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 f属于 $N^{1,\, n}_{loc}(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 并满足以下不等式

$$\|\mathrm{ap}Df(x)\|^n \leq KJ_f(x) + \Sigma(x)\,|f(x) - y_0|^n \tag{72}$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$成立。若 $\Sigma \in L^p_{loc}(\Omega)$ 对某个 $p > 1$成立，则对每个 $x \in f^{-1}\{y_0\}$，其任意邻域 V中，都有 $y_0 \in \mathrm{int} f(V)$成立。

证明。 假设存在某个 $x_0 \in f^{-1}\{y_0\},$，使得存在一个 x_0的开集U_0，满足对于所有充分小的 $\varepsilon > 0.$，$\mathbb{B}(y_0, \varepsilon) \setminus f(U_0) \neq \emptyset$

我们选取了一个 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $U_{\varepsilon_0} \subset\subset \Omega$ 且满足 $U_{\varepsilon_0} \cap \overline{f^{-1}}\{y_0\} = x_0$，并且 $\deg(f, U_{\varepsilon_0}) > 0.$。现在，对任意 $\varepsilon < \varepsilon_0$，我们看到，若记 U_ε 为 $f^{-1}(\mathbb{B}(y_0, \varepsilon))$ 的 x_0-连通分支，则有 $U_\varepsilon \cap f^{-1}\{y_0\} = x_0$，并且 $\deg(f, U_\varepsilon) > 0.$。因此，根据引理 5.4，对于所有 $y_0 \in \mathbb{B}(y_0, \varepsilon)$，我们有 $\deg(y_0, f, U_\varepsilon) > 0$。根据 [Kir16，引理 2.7],，我们有 $f \in f(U_\varepsilon)$。因此，我们有 $\mathbb{B}(y_0, \varepsilon) \subset f(U_\varepsilon)$。此外，显然 $f(U_\varepsilon) \subset \mathbb{B}(y_0, \varepsilon)$。因此，对于所有 $\varepsilon < \varepsilon_0.$，我们有 $f(U_\varepsilon) = \mathbb{B}(y_0, \varepsilon)$

由上可知，对所有 $\varepsilon < \varepsilon_0.$，$\mathbb{B}(y_0,\ \varepsilon) \setminus f(U_0) = f(U_\varepsilon) \setminus f(U_0) \neq \emptyset$。因此 $U_\varepsilon \setminus U_0 \neq \emptyset$，从而对所有 $\varepsilon < \varepsilon_0.$，$U_\varepsilon \setminus U_0 \neq \emptyset$。这是反证法，因为 $\bigcap_{\varepsilon<\varepsilon_0} U_\varepsilon \setminus U_0 = x_0 \setminus U_0 = \emptyset.$。引理 5.5 的证明至此完成。 □

6 致谢

本研究得到广东省基础与应用基础研究基金资助（项目编号：
2022A1515110967 和 2023年A1515011809）。

参考文献

[ATM09]K. Astala, T. Iwaniec 和 G. Martin, 《平面上的椭圆偏微分方程与拟共形映射》, 普林斯顿大学出版社, 2009年。[AP06] K. Astala 和 L. P¨aiv¨arinta, 《平面上的 Calder´on 逆电导率问题》, 《数学年刊》, **163**(2006): 265-299。[Bal77] J. M. Ball, 《非线性弹性中的凸性条件与存在性定理》, 《理性力学与分析档案》, **63**(1977年): 337–403。[Bal81] J. M. Ball, 《Sobolev 函数的全局可逆性与物质的相互穿透》, 《爱丁堡皇家学会会刊》, **88A**(1981): 315–328。[BB11] A. Bj¨orn 和 J. Bj¨orn, 《度量空间上的非线性势理论》。数学论丛, 17, 欧洲数学会, 苏黎世, 2011年。[Bj¨o]J. Bj¨orn, 《Orlicz 空间中具有膨胀率的映射》, 《汇集数学》, **53**(2002): 303–311。[BV23]S. G. Basalaev 和 S. K. Vodopyanov, 《卡诺群上有限畸变映射的开性与离散性》, 西伯利亚数学杂志, **64**(2023年): 1151-1159。[DKO24] A. Dole˘zalov´a、I. Kangasniemi 和 J. Onninen, 《广义有限畸变映射及其连续性》, 《伦敦数学会杂志》（第2辑）, 109(1): 论文编号 e12835, 共37页, 2024年。[Fed69] H. Federer, 《几何测度论》, 数学科学基础丛书, 第153卷。施普林格出版社纽约有限公司, 纽约, 1969年。[FS58] R. Finn 和 J. Serrin, 《拟共形映射与椭圆映射的 H¨older 连续性》, 美国数学会汇刊, **89**(1958): 1-15。

[FG95] I. Fonseca 和 W. Gangbo, 《分析及其应用中的度理论》, 牛津数学及其应用讲座丛书第2卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社, 纽约, 1995年。牛津科学出版物。[GO18] M. Garriga 和 P. Ochoa, 《度量测度空间中的 N-Lusin 性质：一个新的充分条件》, 《数学论坛》, **30**(2018)：1475-1486。[Gol05] A. Z. Goldstein, 《非线性次椭圆方程的非常弱解》, 《芬兰科学院数学辑刊》, **30**(2005)：407-436。[Guo15]C. Y. Guo, 《度量测度空间之间的有限畸变映射》, 《共形几何与动力系统》, **19**(2015)：95-121。[GGWX25] C. Y. Guo、S. N. Golo、M. Williams 和 Y. Xuan, 《等正则次黎曼流形之间的拟正则映射》, 《伦敦数学会杂志》, 2025年, 112(2)：e70254。[GW16] C. Y. Guo 和 M. Williams, 《几何函数论：拉回分解的艺术》, arXiv: 1611. 02478v1 [math.CV] 82016年11月。[HK00] P. Haj-lasz 和 P. Koskela, 《满足 Poincar´e 不等式的 Sobolev 空间》, 《美国数学学会回忆录》, **145**(2000年), 688, x+100。[Har58] P. Hartman, 《H¨older 连续性与非线性椭圆偏微分方程》, 《杜克数学杂志》, **25**(1958)：57-65。[Hei01] J. Heinonen, 《度量空间分析讲义》, 施普林格, 纽约州纽约, 2001年。[HH97] J. Heinonen 和 I. Holopainen, 《卡诺群上的拟正则映射》, 《几何分析杂志》, **7**(1997)：109–148。[HK93] J. Heinonen 和 P. Koskela, 《具有可积膨胀率的 Sobolev 映射》, 《理性力学与分析档案》, **125**(1993)：81–97。[HKST01]J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. T. Tyson, 《巴拿赫空间值函数的 Sobolev 类与拟共形映射》, 《数学分析杂志》, **85**(2001)：87-139。[HKST15]J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. T. Tyson, 《度量测度空间上的 Sobolev 空间：一种基于上梯度的方法》, 新数学专著丛书第27卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, (2015)。

[HK11] J. Heinonen 和 S. Keith，《平坦形式、双 Lipschitz 参数化》´以及流形的可光滑化性，《高等科学研究所数学出版物》，113（2011）：1–37。[HK98] J. Heinonen 和 P. Koskela，具有受控几何的度量空间中的拟共形映射，《数学学报》，181（1998）：1–61。[HR02] J. Heinonen 和 S. Rickman，广义流形之间的几何分支覆盖，《杜克数学杂志》，113（2002）：465–529。[HS02] J. Heinonen 和 D. Sullivan，关于局部分支欧几里得度量规范，《杜克数学杂志》，114（2002）：15–41。[HR13] S. Hencl 和 K. Rajala，关于离散性的最优假设，数学分析与力学档案，207（2013）：775–783。[HK14] S. Hencl 和 P. Koskela，《有限畸变映射讲义》，数学讲义，第2096卷。施普林格，查姆（2014）。[HM02] S. Hencl 和 J. Mal´y，有限畸变映射：零集的豪斯多夫测度，《数学年刊》，324（2002）：451–464。[IM01] T. Iwaniec 和 G. Martin，《几何函数论与非线性分析》，克拉伦登出版社，2001年。[IS93] T. Iwanec 和 V. ˇSver´ak，关于具有可积膨胀的映射，《美国数学会会刊》，118（1993年）：181–188。[KO221] I. Kangasniemi 和 J. Onninen，关于非齐次畸变不等式，《数学年刊》，384（2022）：1275–1308。[KO222] I. Kangasniemi 和 J. Onninen，单点 Reshetnyak 定理，《美国数学会汇刊》，378（2025年）：3105-3128。[KO241] I. Kangasniemi 和 J. Onninen，拟正则值的线性畸变与重新缩放，arxiv预印本 arxiv:2404.02073，2024年。[KO242] I. Kangasniemi 和 J. Onninen，拟正则值与 Rickman 的 Picard 定理，《几何与泛函分析》，34（2024）：1533–1579。[KO25] I. Kangasniemi 和 J. Onninen，具有零拉格朗日量界的 Sobolev 映射的连续性，arXiv：2509. 20326v2，2025年11月3日。[KOZ26] I. Kangasniemi、J. Onninen 和 Y. Z. Zhu，有限畸变值：Reshetnyak 定理与 Lusin (N) 性质，arXiv预印本 arXiv:2602.03254，2026年。

[Kir14] V. Kirsil¨a，来自广义流形的有限畸变映射，《共形几何与动力系统》，18（2014年）：229–262。[Kir16] V. Kirsil¨a，广义流形上的分部积分及其在拟正则映射中的应用，《芬兰科学院数学辑刊》，41（2016）：321–341。[MM95] J. Mal´y 和 O. Martio，W^1类映射的 Lusin 条件（N），^{n}《数学年刊》，458（1995）：19-36。[Mat95] P. Mattila，《欧几里得空间中集合与测度的几何：分形与可整流性》，剑桥高等数学研究，第44卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[MR25] D. Meier 和 K. Rajala，度量曲面上的有限畸变映射，《数学年刊》，391（2025年）：2479–2507。[Nir53] L. Nirenberg，关于非线性椭圆偏微分方程与 H¨older 连续性，《纯粹与应用数学通讯》，6：103–156；补编，395，1953年。[OR09] J. Onninen 和 K. Rajala，映射到广义流形的拟正则映射，《数学分析杂志》，109（2009）：33-79。[OR091] E. Outerelo 和 J. M. Ruiz，《映射度理论》，第108卷。《数学研究生教程》。美国数学学会，普罗维登斯，RI；西班牙皇家数学学会，马德里，2009年。˜ OZ[J. Onninen 和 X. Zhong，有限畸变映射：关于离散性与开性的一个新证明，《爱丁堡皇家学会学报A辑》，138（5）：2008。08] Pon[S. P. Ponomarev，一个在 Banach 意义下非绝对连续的71] 同胚的例子，《苏联科学院院刊》201（1971），1053-1054（俄文）；译文载于《苏联数学文摘》12（1971），1788-1790。 $ACTL^p$ Put[Roberto van der Putten，空间映射的 Lusin 条件（N）03]，在解析假设下，《分析数学》，29（2003）：75–85。W^1Re^n Y. G. Reshetnyak，某些映射的连续模界，《西伯利亚数学杂志》，7（1966）：1106–1114。[Res66] Y. G. Reshetnyak，《具有有界畸变的空间映射》，《西伯利亚数学杂志》，8（1967）：629–658。

[Res89] Y. G. Reshetnyak, 《有界畸变空间映射》，数学译丛，美国数学会，第73卷。1989年。[Ric93] S. Rickman, 《拟正则映射》，《数学及其边界领域成果》（第3辑）（《数学及相关领域成果》（第3辑）），第26卷。施普林格，柏林（1993年）。[Sem96] S. Semmes, 《通过定量拓扑在一般空间中寻找曲线：及其在Sobolev不等式和Poincaré不等式中的应用》，《数学精选》，（新系列）2（1996年）：155–295。[Sha00] N. Shanmugalingam, 《牛顿空间：Sobolev空间向度量测度空间的扩展》，《伊比利亚美洲数学评论》，16（2000年）：243–279。[Sim77] L. Simon, 《欧几里得空间中曲面之间拟共形映射的Hölder估计》，《数学学报》，139（1977年）：19–51。[TS62] C. J. Titus和G. S. Young, 《内在性的扩展及其若干应用》，《美国数学会汇刊》，103（1962年）：329-340。[VM98] E. Villamor和J. J. Manfredi, 《Reshetnyak型定理的扩展》，《印第安纳大学数学杂志》，47（1998年）：1131–1145。ˇVod[S. K. Vodopyanov, 《卡诺群上Sobolev类有限畸变映射的连续性》，《西伯利亚数学杂志》，64（2023年）：1091-1109。23] Vod[S. K. Vodoptyanov, 《卡诺群上的有界畸变映射与有限畸变映射》，《西伯利亚数学杂志》，40（1999年）：764–804。99] Vuo[M. Vuorinen, 《共形几何与拟正则映射》，《数学讲义》1319。施普林格出版社，柏林，1988年。88] Zap[A. E. Zapadinskaya, 《Orlicz空间中卡诺群上畸变映射的离散性与开性》，《西伯利亚数学进展》，18（2008年）：288–302。08]Zap HA. E. Zapadinskaya, 《Hölder连续的Sobolev映射与Lusin N性质》，《伊利诺伊数学杂志》，58（2014年）：585-591。[Zho14] D. G. Zhong, 《卡诺群上拟正则值的Reshetnyak型定理》，arXiv预印本，arXiv：2509.21025，2025年。¨Zho[D. G. Zhong, 《到黎曼流形的有限畸变曲线》，DOI：10.13140/RG.2.2.13447.46241。