arXiv:2603.10066v1 [math.GT] 10 Mar 2026

斯坦菲尔德证明 Sachs 线性无环嵌入猜想中的漏洞

RAMIN NAIMI

这篇短文旨在说明，我认为斯坦菲尔德对 Sachs 猜想的 [1]证明存在一个严重漏洞。该猜想指出，每个可无环嵌入的图都有一个线性无环嵌入 $\mathbb{R}^3$。在 [1],第 4594 页第 5—6 行中写道:

> $(*)$ 由于 x 的位置非常接近 v， Γ' 也与所有关联于 x的边不相交，因为它与 v的边不相交。

下面，我将举一个反例来反驳上述陈述（$*$）。在此之前，我会简要介绍 [1] 中的论证，以及（$*$）所指的内容。

设 G 是一个可无环嵌入的图。设 ϕ是 G在 $\mathbb{R}^3$ 中的盘状嵌入（这意味着 ϕ 中的每个圈都围成一个圆盘，其内部与ϕ不相交）。我们希望通过对 G 的大小进行归纳，证明 ϕ 与一个线性嵌入环境同痕。设 xy 是 ϕ的一条边。于是，根据归纳假设，存在一个环境同痕 $F\colon\ \mathbb{R}^3\times I\to\mathbb{R}^3$，使得 F_0 在$\mathbb{R}^3$ 上是恒等映射，并且 F_1（ϕ/xy）是一个线性嵌入。

令 B_{xy}为 $xy\subset\phi$的闭 ϵ-邻域球。令 v 为 xy内部的一点。令 D_{xy}为 B_{xy}中的一个圆盘，使得 $D_{xy}\cap\phi=D_{xy}\cap xy=\{v\}$和 $D_{xy}\cap\partial B_{xy}=\partial D_{xy}$。我们将 xy 收缩到 v，同时逐点固定 $\mathbb{R}^3\setminus B_{xy}$。令 $D_F:=F_1(D_{xy})$。（在 [1] 中，这个圆盘仅记作 D_{xy}。）

现在我们尝试修改 $F_1(\phi/xy)$，以构造G的无环线性嵌入 Ψ。我们将顶点 x 和 y 放在非常靠近 D_F的位置，并分别位于其两侧。对于 G/xy中 v 的每个邻点 w，将 $F_1(\phi/xy)$ 中的直线边 vw 替换为直线边 xw 或 yw，或二者兼有，具体取决于 G中 w 是否与 x、 y相邻，或二者均相邻。

为证明线性嵌入 Ψ是面板化的， [1] 中的部分论证如下。假设 C 是 Ψ 中的一个圈，它包含 x 但不包含 y。由于 F_1（ϕ/xy）是面板化的，圈 $C':=C/xy$ 围成一个圆盘 Γ'，其内部与F_1（ϕ/xy）不相交。 [1] 中还证明了 Γ' 的内部与 D_F 不相交；因此$\Gamma'\cap D_F=\{v\}\subset\partial\Gamma'$。

现在出现了缺口。上述陈述（$*$）声称 Γ' 的内部与关联于 x的边不相交。但以下对图G以及圆盘 Γ' 和 D_F 的构造与嵌入与（$*$）相矛盾。

令 G 为图 1 所示的图，其中 n 将在后文定义。（该图是平面的，因此具有线性无环嵌入。我们使用 G 仅用于说明为什么 $(*)$ 不是一个有效的陈述，而非作为“ ψ 是无环的”这一主张的反例；一般而言，该主张可能成立，也可能不成立。）在图 2 中， S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中以 v 为中心的一个球面；令 $\alpha\subset S^2$ 为图中所示的简单曲线。令 Δ 为通过用线段将 v 锥化到 α 上而得到的圆盘（将 v 这个中心点

Date: 2026年3月12日。

锥化到 S^2 中任意一条简单曲线上，始终会得到一个圆盘）。我们按照图 2 所示，将 x 在 S^2 中的邻点 a_1, b_1, c 嵌入。

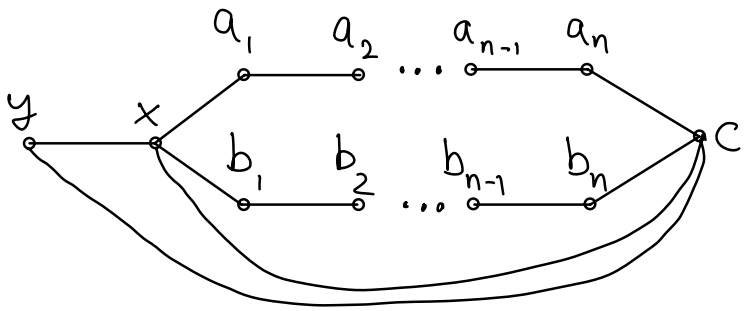

FIGURE 1.

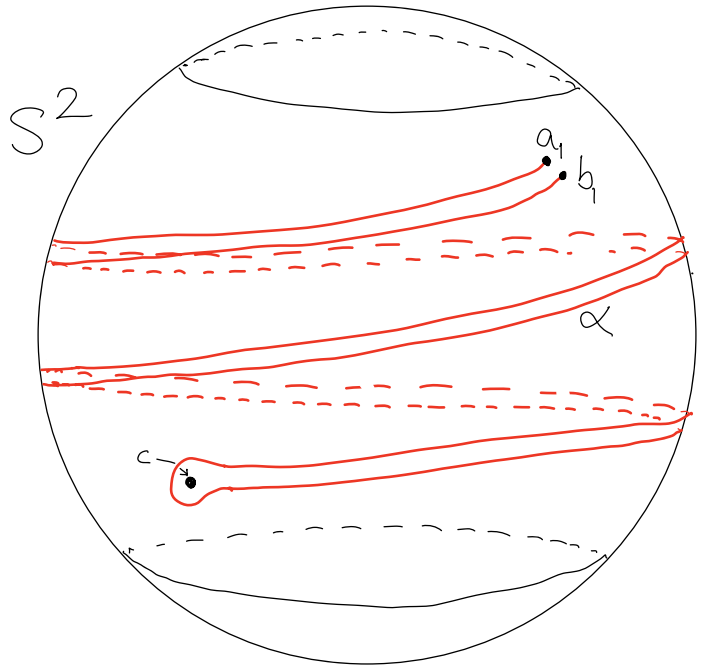

FIGURE 2.

那么，无论 x 与 v有多接近，至少有一条线段 a_1x、b_1x、cx会与 Δ 的内部相交（因为如果将 x 放置在 S^2中心以外的任意位置，使得 cx 与 Δ不相交，那么对于赤道上方的每个点 $p \in S^2$，线段 px 都会与 Δ的内部相交）。

令 η，$\eta' \subset S^2$ 为图 3 所示的弧。设 $\alpha' := (\alpha \setminus \eta) \cup \eta'$，且$\Delta' := \Delta \cup \delta$，其中 $\delta \subset S^2$ 是如图所示由 $\eta \cup \eta'$ 围成的圆盘。于是

Δ' 的内部至少与线段 a_1x，b_1x，cx 之一相交（ Δ也如此）。现在，如图 3 所示，我们沿弧 $a_1c \subset \alpha'$嵌入顶点 a_2，$\cdots$，a_n，并沿弧 $b_1c \subset \alpha'$嵌入顶点 b_2，$\cdots$，b_n。只要令 n 足够大，就能使线段 a_ia_{i+1}、b_ib_{i+1}、a_nc和 b_nc 足够短，从而使线性路径 $a_1 \cdots a_ncb_n \cdots b_1$ 任意接近 α'。令 $\Gamma' \subset \Delta'$ 为由线性圈 $va_1 \cdots a_ncb_n \cdots b_1v$围成的圆盘。那么，无论 x 位于何处，Γ' 都至少与 a_1x，b_1x，cx之一相交。

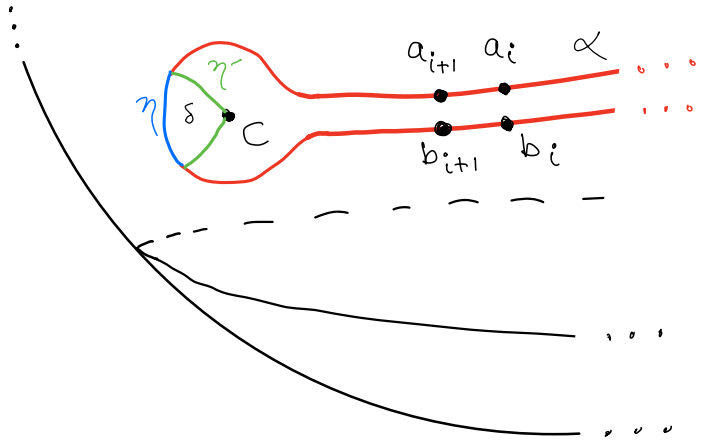

FIGURE 3.

最后，我们证明圆盘 D_F 可以按照与 [1] 中论证相兼容的方式嵌入。令 $\beta \subset S^2$ 为图 4 中所示的简单闭曲线。令 D_F 为通过将 v 锥化到 β 上所得到的圆盘。由于 β 与 α' 不相交，因此 $D_F \cap \Gamma' = \{v\}$ 和 D_F 与 Γ' 的内部不相交。所以，这一构造与陈述（$*$）相矛盾。

请注意，虽然我们可以假设 D_{xy} 是一个“平坦”的圆盘，但不能假设它在环境同痕 F 后仍然平坦。或许正是这种假设导致了（$*$）。

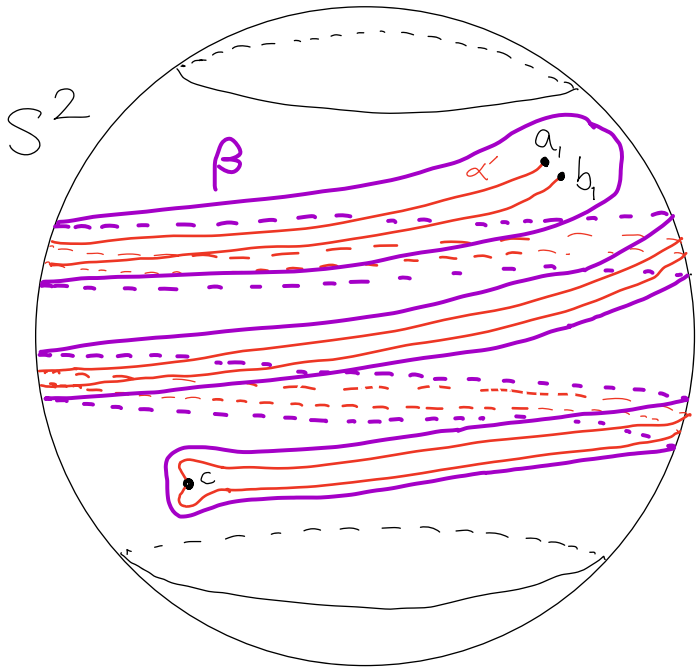

FIGURE 4.

REFERENCES

[1] L. Stanfield, 《线性无链嵌入：Sachs 猜想的证明》。《代数与几何拓扑》，第 25 卷（2025 年）。

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OCCIDENTAL COLLEGE, LOS ANGELES, CA 90041, USA.