arXiv:2603.10181v1 [math.AG] 10 Mar 2026

第三类某些 Koras-Russell 三维簇上的向量丛

Tariq Syed 数学研究所 海因里希·海涅杜塞尔多夫大学 Universit¨atsstraße 1 40225 杜塞尔多夫，德国 tariq.syed@gmx.de

2026年3月12日

摘要

设 k 是一个特征 0 的代数闭基域，并设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, d \geq 2$为整数，使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$两两互素，且 $gcd(\alpha_1, d-1) = 1$。考虑 Koras-Russell 三维簇 Y:=$\{x+x^d y^{\alpha_1}+z^{\alpha_2}+t^{\alpha_3}=0\} \subset \mathbb{A}^4_k$。我们证明，对于 $i = 1, 2, 3$，肖氏群 $CH^i(Y)$ 均为平凡群，因此Y 上的所有代数向量丛都是平凡的。若 α_1 为奇数，我们还证明，对于 $i = 1, 2, 3$ 以及 Y上的任意线丛 $\mathcal{L}$，Chow-Witt 群$\widetilde{CH}^i(Y, \mathcal{L})$ 均为平凡群。

2020年数学主题分类：13C10, 14C25, 14F42, 19E15。关键词：周群、Chow-Witt 群、Koras-Russell 三维簇。

目录

1 引言 1 2 预备知识 3 3 结果 5

1 引言

Koras-Russell 三维簇最初是在 $\mathbb{G}_m$在 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ 上的作用的线性化问题这一背景下被发现的（参见 [KR，定理4.1]）。这些三维簇是维数 3 的拓扑可缩光滑仿射 $\mathbb{C}$-簇，它们不同构于 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$，此后已在若干其他背景中得到研究，例如 Zariski 消去问题和动机同伦理论。它们大致可按其 Makar-Limanov 不变量分为三种类型（参见

[KML]），尤其是通过其上的 $\mathbb{G}_a$-作用：
首先，任何与 $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$ 中形如下式的子簇同构的簇

$$\{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = Spec(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

其中 $d, \alpha_2, \alpha_3 \geq 2$ 且 $gcd(\alpha_2, \alpha_3) = 1$，称为第一类 Koras-Russell 三维簇。其次，任何与 $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$中形如下式的子簇同构的簇

$$\{x + (x^d + z^{\alpha_2})^l y + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = Spec(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

其中 $l \geq 1$、 $d, \alpha_2, \alpha_3 \geq 2$ 且 $gcd(\alpha_2, d\alpha_3) = 1$，称为第二类 Koras-Russell 三维簇。

按照 [KR定理4.1], 中所述的步骤，还可以构造出与任何第一类或第二类 Koras-Russell 三维簇都不同构的 Koras-Russell 三维簇；我们将此类簇称为第三类 Koras-Russell 三维簇。与第一类或第二类 Koras-Russell 三维簇不同，第三类 Koras-Russell 三维簇不容许非平凡的 $\mathbb{G}_a$-作用。

在 [KR 中，问题 7.12], M. Koras 和 P. Russell 提出了以下问题：

问题 1. 如果 Y 是一个 Koras-Russell 三维簇，那么 Y 上的所有代数向量丛是否都是平凡的?

更一般地，我们可以问，拓扑可缩的光滑仿射 $\mathbb{C}$簇上的代数向量丛是否总是平凡的；文献中也称这一问题为广义 Serre 问题（参见 [AØ，问题 6]）。广义 Serre 问题在维数 ≤ 2 时有肯定答案，但在更高维数下仍完全悬而未决（参见 [AØ，第 5.5 节2]）。关于 Koras-Russell 三维簇上的向量丛，首个重要结果由 M. P. Murthy 证明：第一类 Koras-Russell 三维簇上的代数向量丛总是平凡的（参见 [M，推论 3.8]）。后来，人们在动机同伦理论的背景下重新研究了 Koras-Russell 三维簇。M. Hoyois、A. Krishna 和 P. A. Østvær 推广了 M. P. Murthy 的结果，证明第一类或第二类 Koras-Russell 三维簇上的代数向量丛总是平凡的（参见 [HKØ，推论 3.7]）。对于第三类 Koras-Russell 三维簇，尚未证明有类似结果。

在本文中，我们考虑这些簇

$$Y(d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \{x + x^d y^{\alpha_1} + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4_k = Spec(k[x, y, z, t]),$$

其中 k 是特征 0 的代数闭域，且 d、α_1、α_2、$\alpha_3 \geq 2$是整数，使得 α_1、α_2、α_3 两两互素，并且 $gcd(\alpha_1, d-1) = 1$。若 $k = \mathbb{C}$，则簇 $Y(d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是一个 Koras-Russell 三维簇，并且已经出现在 [KR, 例 7.6(2)] 中；若进一步有 α_1、α_2、$\alpha_3 \gg 0$，则$Y(d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 根据 [KR, 命题 6.5]具有非负的对数 Kodaira 维数，因此必定是第三类 Koras-Russell 三维簇（第一类和第二类 Koras-Russell 三维簇具有对数 Kodaira

维数 $-\infty$）。我们研究 $Y(d,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的周群，并证明如下结果（参见正文中的定理 3.1、3.2 以及推论 3.3）：

定理 2。有 $CH^i(Y(d,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3))\ =0$ 对 $i=1$，2、3 成立。特别地，$Y(d,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 上的所有代数向量丛都是平凡的。

定理 2 中关于向量丛的论断，由肖氏群的消失结论以及关于代数闭域上的光滑仿射三维簇上的代数向量丛的众所周知的分类结果推出（参见 [KM, 定理 2.1(iii)], [AF, 定理 1]），并且在 $k=\mathbb{C}$ 和 $Y=Y(d,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 的情形下回答了问题 1。

请注意，计算拓扑可缩光滑仿射 $\mathbb{C}$-簇的肖氏群或更一般的上同调群，本身就是一个困难的问题。M. Hoyois、A. Krishna 和 P. A. Østvær 在 [HKØ, 定理 4.2] 中证明，第一类或第二类 Koras-Russell 三维簇是稳定地$\mathbb{A}^1$-可缩的；A. Dubouloz 和 J. Fasel 甚至证明，第一类 Koras-Russell 三维簇是 $\mathbb{A}^1$-可缩的（参见 [DF, 定理 1]）。这特别意味着，任何第一类或第二类 Koras-Russell 三维簇都具有 $Spec(\mathbb{C})$的上同调，其中的上同调理论可由稳定动机同伦范畴 $\mathcal{SH}(\mathbb{C})$中的 $\mathbb{P}^1$-谱表示（例如，肖氏群或 Chow-Witt 群）。至今完全未知第三类 Koras-Russell 三维簇是否同样稳定地 $\mathbb{A}^1$-可缩。第三类 Koras-Russell 三维簇 Y 稳定地 $\mathbb{A}^1$- 可缩的一个必要条件是，对于 $i=1$、2、3，有 $CH^i(Y)\ =0$。因此，定理 2 对 $Y=Y(d,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 验证了这一必要条件。类似地，第三类 Koras-Russell 三维簇 Y 稳定地 $\mathbb{A}^1$-可缩的另一个必要条件是：对于 $i=1$、2、3 以及 Y 上的任意线丛，其 Chow-Witt 群 $\widetilde{CH}^i(Y,\mathcal{L})$ 都消失。因此，我们还研究了$Y(d,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的 Chow-Witt 群 $\widetilde{CH}^i(Y(d,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\ \mathcal{L})$，并证明如下结论（参见正文中的定理 3.4）：

定理 3. 假设 α_1 为奇数。对于$i=1$，2，3，以及 $Y(d,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$上的任意线丛 $\mathcal{L}$，有 $\widetilde{CH}^i(Y(d,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\ \mathcal{L})\ =0$。

2 预备知识

本节简要回顾 [Sy] 中关于循环覆盖的动机上同调的结果，这些结果是本文所需要的。我们首先说明这些结果的一般背景（参见 [Sy，定义 1.1 和一般假设 1.2]）：

定义 2.1. 设 k 为一个特征0的域，X 为一个仿射 k-簇，$f\in\mathcal{O}_X(X)\setminus\{0\}$ 为一个正则函数，且 $s>1$ 为一个整数。则

- 我们用 F_0 表示由 f定义的 X 的闭子概形；
- 我们令 Y_s 为由 $f=u^s$定义的 $X\times_k\mathbb{A}^1_k$ 的闭子概形，其中 u是 $\mathbb{A}^1_k$的变量；

- 我们将由 $u = 0$定义的 Y_s 的闭子概形记为 F 。

我们称投影 φ_s ： $Y_s \to X$ 为 X 沿 F_0按 s阶分支的循环覆盖。

本节中我们将始终使用定义 2.1 中的记号。对 [Sy]作出以下一般假设:

一般假设 2.2。此外，我们假设

- k 是代数闭的;
- $u^s - f$ 在多项式环 $\mathcal{O}_X(X)[u]$ 和 $k(X)[u]$中是素元，其中$k(X)$ 是整环 $\mathcal{O}_X(X)$的分式域;
- X 和 F_0 （因此，根据 *[Z，定义 5.1]*中的注记， Y_s ）在 k上是光滑的。

注意，循环覆盖 φ_s 将子概形 $F \subset Y_s$ 同构地映射到子概形 $F_0 \subset X$ （参见 [Sy，第 3.1] 节）。采用定义 2.1 中的记号，并在上述一般假设 2.2 下，我们现在列出下节证明本文主要结果所需的 [Sy] 中的结果。令 Sm_k 表示光滑 k-概形的范畴。在下述陈述中，我们将用 $H^{i,j}(V, R)$ 表示光滑 k-概形$V \in Sm_k$ 在双次数 $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ 下、以固定交换环 R为系数的动机上同调群。

定理 2.3 ([Sy，定理 3.17])。 设 $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$。假设

(a) $s \in R^\times$*(b)* 存在一个 $\mathbb{G}_{m,k}$-作用 γ 于 X上，使得 f 相对于 γ 和 $\langle d$是权为$d \in \mathbb{Z}$ 的拟不变量， $s\rangle = \mathbb{Z}$*(c)* $H^{p-1,q-1}(Y_s \setminus F, R) = 0$

则态射 φ_s ： $Y_s \to X$ 诱导一个同构 $H^{p,q}(X, R) \cong H^{p,q}(Y_s, R)$。

下一个定理是定理 2.3 的推论，它借助于等同$CH^i(V) \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong H^{2i,i}(V, R)$（对 $V \in Sm_k$ 与 [) 以及 MVW 的消失定理 19.3] 得到。

定理 2.4 ([Sy，定理 3.19]). 假设

(a) $s \in R^\times$*(b)* 存在一个 $\mathbb{G}_{m,k}$-作用 γ 于 X，它使 f 成为权$d \in \mathbb{Z}$ 的拟不变量（相对于 γ 与 $\langle d\rangle$ ， $s\rangle = \mathbb{Z}$

则 φ_s 诱导同构 $CH^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong CH^i(Y_s) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ ，对 $i \geq 0$。

最后， [Sy] 中的下一个结果也是定理 2.3 和[MVW，《消灭定理》19.3]的推论:

推论 2.5 （[Sy，推论 3。24]）。假设

(a) $s \in R^{\times}$

(b) 存在一个 $\mathbb{G}_{m,k}$-作用 γ 在 X上，它使 f 成为关于 γ 和 $\langle d$的权为$d \in \mathbb{Z}$ 的拟不变量 $s\rangle = \mathbb{Z}$

(c) $H^{2i,\ i}(X, R) = 0$ 对于 $i \geq 1$

于是，态射 $\varphi_s : Y_s \to X$ 诱导出一个同构 $H^{2i+1,i+1}(X, R) \cong H^{2i+1,i+1}(Y_s, R)$ 对于 $i \geq 1$。

对于任意整数 $j \geq 0$ 和 $V \in Sm_k$，令$\mathbf{I}^j$ 表示小 Nisnevich 位点上与 V的基本理想在 Witt 环中的 j次幂相关联的层，并令 $\mathbf{I}^j = \mathbf{I}^j/\mathbf{I}^{j+1}$；关于这些层的更多背景，请参阅 [F, §2.1]。本节最后给出来自 [T] 的一个长正合列，其中涉及取 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$系数的动机上同调群，以及以层 $\mathbf{I}^j$为系数的层上同调群。

定理 2.6 ([T，定理 1。3])。 对于任意光滑的 k-概形 V以及任意整数$i, j \geq 0$，存在一个长正合列

$$\ldots \to H^{i+j,j-1}(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{i+j,j}(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{i}_{Nis}(V, \overline{\boldsymbol{I}}^j) \to H^{i+j+1,j-1}(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \ldots.$$

3 结果

本节将证明本文的主要结果。为简洁起见，我们假定读者熟悉肖氏群和 Chow-Witt 群。令 k 为一个特征 0 的代数闭基域，并固定整数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $d \geq 2$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两互素，且 $gcd(\alpha_1, d-1) = 1$。然后我们考虑簇

$$Y := \{x + x^d y^{\alpha_1} + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4_k.$$

若 $k = \mathbb{C}$，则根据 [KR，例 7.6(2)]， Y是一个 Koras-Russell 三维簇。

定理 3.1。 $CH^i(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ 对于 $i = 1,2,3$ 和 $CH^3(Y) = 0$。

证明。首先，簇 Y 可以解释为第一类 Koras-Russell 三维簇的循环覆盖

$$X := \{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4_k$$

关于阶为 α_1 的正则函数 $y \in \mathcal{O}_X(X)$。此外，$\mathbb{G}_{m,k}$-作用在 X 上由

$$(\lambda, x, y, z, t) \mapsto (\lambda^{\alpha_2\alpha_3} x, \lambda^{-(d-1)\alpha_2\alpha_3} y, \lambda^{\alpha_3} z, \lambda^{\alpha_2} t)$$

使 y 成为权为 $-(d-1)\alpha_2\alpha_3$ 的拟不变量。由于 $\alpha_1 \in \mathbb{Q}^\times$，定理 2.4 蕴含，对于 $i \geq 1$，$CH^i(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong CH^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。[DF] 中的主要结果表明，$X$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的；特别地，对于 $i = 1, 2, 3$，$CH^i(X) = 0$，因此对于 $i = 1, 2, 3$，$CH^i(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$。

现在回忆一下，根据 [Sr]，$CH^3(Y)$ 是一个唯一可除的阿贝尔群，因此是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间。特别地，存在一个形如 $CH^3(X) \cong \mathbb{Q}^I$ 的 $\mathbb{Q}$-线性同构，其中 I 是某个指标集。上一段表明 $CH^3(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$。由典范同构 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$，现在可得 $0 = CH^3(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^I \cong CH^3(Y)$。证毕。 □

定理 3.2。$CH^i(Y) = 0$ 对于 $i = 1, 2$。

证明。首先，簇 Y 可以解释为相对于正则函数的 $\mathbb{A}^3_k$ 的循环覆盖（坐标为 x, y, z）

$$f_1 = -(x + x^d y^{\alpha_1} + z^{\alpha_2})$$

阶为 α_3。由下式给出的 $\mathbb{G}_{m,\ k}$-作用在 $\mathbb{A}^3_k$ 上

$$(\lambda, x, y, z) \mapsto (\lambda^{\alpha_1\alpha_2} x, \lambda^{-(d-1)\alpha_2} y, \lambda^{\alpha_1} z)$$

使 f_1 成为权为 $\alpha_1\alpha_2$的拟不变量。因此，定理 2.4 表明，对于任意满足 $\langle n, \alpha_3 \rangle = \mathbb{Z}$ (只需取$R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)的整数 n，$CH^i(Y)$，$i \geq 1$ 均可被其整除。

类似地，簇 Y 也可以解释为相对于正则函数 $\mathbb{A}^3_k$的循环覆盖（坐标为 x, y, t）

$$f_2 = -(x + x^d y^{\alpha_1} + t^{\alpha_3})$$

阶为 α_2。由下式给出的 $\mathbb{G}_{m,k}$-作用于 $\mathbb{A}^3_k$：

$$(\lambda, x, y, t) \mapsto (\lambda^{\alpha_1\alpha_3} x, \lambda^{-(d-1)\alpha_3} y, \lambda^{\alpha_1} t)$$

使 f_2 成为权为 $\alpha_1\alpha_3$的拟不变量。同样，定理 2.4 表明，对于任意满足 $\langle n, \alpha_2 \rangle = \mathbb{Z}$的整数 n，$CH^i(Y)$，$i \geq 1$ 也均可被其整除。由于α_2 和 α_3 互素，群 $CH^i(Y)$，$i \geq 1$ 可被任意素数整除，因此是可除阿贝尔群。因此，只需证明存在整数 $m, n \neq 0$，使得 $CH^1(Y)$ 是 m-挠元，且$CH^2(Y)$ 是 n-挠元。

为此，我们令

$$F_1 := \{t = 0\} \subset Y.$$

注意，第一段中的循环覆盖 $Y \to \mathbb{A}^3_k$ 将簇F_1 同构地映射到子簇

$$F_2 := \{-(x + x^d y^{\alpha_1} + z^{\alpha_2}) = 0\} \subset \mathbb{A}^3_k.$$

由 [Sy，注 3.21] 可知，$CH^i(Y \setminus F_1)$ 是一个 α_3-挠群，其中$i \geq 1$。现在考虑肖氏群的局部化序列

$$CH^0(F_1) \to CH^1(Y) \to CH^1(Y \setminus F_1) \to 0.$$

群 $CH^0(F_1) \cong CH^0(F_2) \cong \mathbb{Z}$ 无法单射到 $CH^1(Y)$ 中，因为将局部化序列与 $\mathbb{Q}$ 张量积后，会自动得到$CH^1(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$，这与定理 3.1 矛盾。因此可得到如下形式的短正合列

$$0 \to \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \to CH^1(Y) \to CH^1(Y \setminus F_1) \to 0$$

对于某个整数 $l \neq 0$。这意味着 $CH^1(Y)$ 是 m-挠元，其中 $m = l\alpha_3$。这证明了 $CH^1(Y) = 0$。

剩下要证明的是 $CH^2(Y) = 0$。注意， F_2 是$\mathbb{A}^2_k$的一个阶为 α_2的循环覆盖，其对应于正则函数 $-(x + x^d y^{\alpha_1})$。接下来令

$$F_3 := \{z = 0\} \subset F_2,$$

[Sy，注记 3.21] 因此意味着 $CH^1(F_2 \setminus F_3)$ 是 α_2-挠元。接着考虑肖氏群的正合局部化序列

$$CH^0(F_3) \to CH^1(F_2) \to CH^1(F_2 \setminus F_3) \to 0.$$

注意，将定理 2.4 应用于由到坐标 x 和 y 的投影所诱导的阶为 α_2的循环覆盖 $F_2 \to \mathbb{A}^2_k$ ，可得

$$CH^1(F_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0.$$

注意， $CH^0(F_3)$ 是由 $\mathbb{Z}$ 的若干个副本组成的有限直和 $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}$ ，并且两个诱导映射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} \to CH^1(F_1)$ 都不可能是单射，因为若它们是单射，那么与 $\mathbb{Q}$ 张量后便会得到 $CH^1(F_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$。因此我们得到如下形式的正合序列

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/l_i\mathbb{Z} \to CH^1(F_2) \to CH^1(F_2 \setminus F_3) \to 0$$

对于某些整数 $l_i \neq 0$、 $1 \leq i \leq r$。这意味着，对于 $l = \prod_i^r l_i$， $CH^1(F_2)$ 是 $l\alpha_2$-挠元。特别地， $CH^1(F_1)$ 是 $l\alpha_2$-挠元（因为 $F_1 \cong F_2$）。

总之，前面的段落和正合局部化序列

$$CH^1(F_1) \to CH^2(Y) \to CH^2(Y \setminus F_1) \to 0$$

表明，对于 $n = l\alpha_2\alpha_3$， $CH^2(Y)$ 是 n-挠元。证明完毕。 □

推论 3.3。 Y 上的所有代数向量丛都是平凡的。

证明。 由 [KM，定理 2.1(iii)] 和 [AF，定理 1] 可知， Y 上的代数向量丛完全由其秩以及它们在 $CH^1(Y)$ $CH^2(Y)$ 和 $CH^3(Y)$ 中的陈类分类。关于这些分类结果的详细信息，请参阅 [Sy，第 2 节。4]因此， Y 的肖氏群消失直接意味着 Y 上的所有代数向量丛都是平凡的。

□

定理 3.1、定理 3.2 和推论 3.3 证明了定理 2。下一个结果证明了定理 3：

定理 3.4。 假设 α_1 为奇数，且令 $\mathcal{L}$ 为 Y上的一个线丛。那么$\widetilde{CH}^i(Y, \mathcal{L}) = 0$ 对于 $i = 1$、2、3成立。

证明。 对于 $i=1$、2、3，我们考虑以下短正合列

$$0 \to \mathbf{I}^{i+1}(\mathcal{L}) \to \mathbf{K}_i^{MW}(\mathcal{L}) \to \mathbf{K}_i^M \to 0$$

Y 上小 Nisnevich 位点上的层（例如，参见 [F，§2.1]）。我们有等同 $\widetilde{CH}^i(Y,\mathcal{L}) \cong H^i_{Nis}(Y,\mathbf{K}_i^{MW}(\mathcal{L}))$。定理 3.1 和 3.2 以及 $H^i(Y,\mathbf{K}_i^M) \cong CH^i(Y)$ 这一事实，随后通过层上同调群的长正合列表明，只需证明

1) $H^3(Y,\mathbf{I}^4(\mathcal{L}))=0$,

2) $H^2(Y,\mathbf{I}^3(\mathcal{L}))=0$,

3) $H^1(Y,\mathbf{I}^2(\mathcal{L}))=0$.

第一个消失性陈述由 [AF，命题 5.1] 得出，第二个则由 [AF，命题 5.2] 得出，因为 Y 的维数为 3。因此尚待证明 $H^1(Y,\mathbf{I}^2(\mathcal{L}))=0$。

为此，我们考虑短正合列

$$0 \to \mathbf{I}^3(\mathcal{L}) \to \mathbf{I}^2(\mathcal{L}) \to \bar{\mathbf{I}}^2 \to 0$$

Y 上小 Nisnevich 位点上的层（例如，参见 [F，§2.1]）。其相伴的层上同调群的长正合列表明，只需证明

1) $H^1(Y,\bar{\mathbf{I}}^2)=0$,

2) $H^1(Y,\mathbf{I}^3(\mathcal{L}))=0$.

我们先证明第一个结论：若 $i=1$ and $j=2$，则定理 2.6 给出如下形式的长正合列

$$\ldots \to H^{3,1}(Y,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{3,2}(Y,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1_{Nis}(Y,\bar{\mathbf{I}}^2) \to H^{4,1}(Y,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \ldots.$$

根据 MVW 的消失定理 19.3]，有 $H^{4,1}(Y,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=0$。若将$Y$ 解释为相对于正则函数 ()、阶为 H^4 的第一类 Koras-Russell 三维簇的循环覆盖

$$X := \{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4_k$$

那么推论 2.5 蕴含 $H^{3,2}(Y,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=0$，因为根据 DF 的定理1]，$X$ 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的。因此 $H^1(Y,\mathbf{I}^2)=0$，证毕。

因此，要证明定理 3.4，只需验证上述第二个消失结论，即 $H^1(Y,\mathbf{I}^3(\mathcal{L}))=0$。注意，短正合列

$$0 \to \mathbf{I}^4(\mathcal{L}) \to \mathbf{I}^3(\mathcal{L}) \to \bar{\mathbf{I}}^3 \to 0$$

小 Nisnevich 位点上关于 Y 的层（参见 [F，第 2.1] 节）以及 [AF，命题 5.1] 表明 $H^1(Y,\mathbf{I}^3(\mathcal{L})) \cong H^1(Y,\mathbf{I}^3)$。若 $i=1$ 且 $j=3$，定理 2.6 给出如下形式的长正合列

$$... \to H^{4,2}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{4,3}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1_{Nis}(Y, \bar{\mathbf{I}}^3) \to H^{5,2}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to ....$$

由 [MVW 的消失定理 19.3] 可知，$H^{5,2}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$，且 $H^{4,2}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong CH^2(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$ 根据定理 3.2。特别地，

$$H^1(Y, \mathbf{I}^3(\mathcal{L})) \cong H^1(Y, \bar{\mathbf{I}}^3) \cong H^{4,3}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

只需证明 $H^{4,3}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$。
为此，我们再次将 Y 解释为第一类 Koras-Russell 三维簇的循环覆盖

$$X := \{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4_k$$

其阶为 α_1，对应于正则函数 $y \in \mathcal{O}_X(X)$。于是闭子概形

$$F := \{y = 0\} \subset Y$$

同构于 $\mathbb{A}^2_k$。我们首先注意到，根据定理 3.2，$H^{2,1}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong CH^1(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$；因此 $H^{2,1}(Y \setminus F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong CH^1(Y \setminus F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$。由于 α_1 为奇数且 X 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，根据定理 2.3，我们得到 $H^{3,2}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$。由于 F 同构于 $\mathbb{A}^2_k$，因此有 $H^{2,1}(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^{2,1}(\mathbb{A}^2_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$，从而得到动机上同调群的长正合局部化序列

$$... \to H^{1,1}(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{3,2}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{3,2}(Y \setminus F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{2,1}(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to ...$$

这意味着 $H^{3,2}(Y \setminus F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$。因此，我们可以再次应用定理 2.3，并推得 $H^{4,3}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$。这表明

$$H^1(Y, \mathbf{I}^3(\mathcal{L})) \cong H^1(Y, \bar{\mathbf{I}}^3) \cong H^{4,3}(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$$

从而完成定理 3.4 的证明。 □

参考文献

[AF] A. Asok, J. Fasel, 《光滑仿射三维簇上向量丛的上同调分类》，Duke 数学杂志 163 (2014)，第 14 期，2561-2601[AØ] A. Asok, P. A. Østvær, 《$\mathbb{A}^1$-同伦理论与可缩簇：综述》，载于：Neumann, F., P´al, A.（编），《同伦理论与算术几何——动机与丢番图方面》。数学讲义，第 2292 卷。施普林格，Cham。https: //doi.org/10.1007/978-3-030-78977-0_5[DF] A. Dubouloz, J. Fasel, 《$\mathbb{A}^1$-可缩仿射三维簇族》，代数几何 5 (2018)，第 1 期，1-14

[F] J. Fasel, 《 I^j-上同调的射影丛定理》, J. K- Theory 11(2) (2013), 413-464[HKØ] M. Hoyois, A. Krishna, P. A. Østvær, 《Koras-Russell 三维簇的 $\mathbb{A}^1$-可缩性》, 代数几何 3 (2016), 407-423[KM] N. M. Kumar 和 M. P. Murthy, 《仿射三维簇上的代数循环与向量丛》, Ann. of Math. 116 (1982), 第 3 期, 579–591[KML] S. Kaliman 和 L. Makar-Limanov, 《关于 Russell-Koras 可缩三维簇》, J. Algebraic Geom. 6 (1997), 第 2 期, 247–268[KR] M. Koras 和 P. Russell, 《可缩三维簇与 $\mathbb{C}^\times$-在$\mathbb{C}^3$上的作用》, J. Algebraic Geom. 6 (1997), 第 4 期, 671–695[M] M. P. Murthy。《某些仿射代数上射影模的消去问题》。载于《代数、算术与几何》, 第一、二部分（孟买, 2000）, Tata 基础研究所数学研究丛书第 16 卷, 第 493–507 页。Tata 基础研究所, 孟买, 2002[MVW] C. Mazza, V. Voevodsky 和 C. Weibel, 《动机上同调讲义》, 克莱数学专著, 第 2 卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 2006[Sr] V. Srinivas, 《特征 p 下仿射簇上的挠 0-循环》, J. Algebra 120 (1989), 428-432[Sy] T. Syed, 《循环覆盖的动机上同调》, Advances in Mathematics 487 (2026), 110767[T] B. Totaro, 《从簇的 Witt 群到其函数域 Witt 群的映射的非单射性》, J. Inst. Math. Jussieu 2(3) (2003), 483-493[Z] M. Zaidenberg, 《仿射空间上的奇异代数结构》, 《代数与分析》11 (1999), 3-73