arXiv:2603.10235v1 [math.GT] 10 Mar 2026

AJ猜想与环面纽结的连通和

张兴儒

Abstract. 非平凡环面结 $T(p,\ q)$ 在 S^3 中的同痕类集合与满足条件 $|p|>q\geq 2$ 的互素整数对 $(p,\ q)$ 集合一一对应。当 p 和 a 符号相同时，我们验证了连通和 $T(p,\ q)\#T(a,\ b)$ 满足 AJ猜想。值得注意的是，在 $pq=ab$ 但 $p\neq a$ 的情况下， $T(p,\ q)\#T(a,\ b)$ 的递推多项式 $\alpha(t,\ \mathrm{M},\ \mathrm{L})$ 在 $t=-1$ 处取值后，出现了含变量 L 的重因子。这似乎是首次发现纽结具有这种现象。因此，AJ猜想需要稍作修改，以涵盖这种可能性。

1. Introduction

Garoufalidis 提出的 AJ猜想 [3, 猜想 2], 预言了 S^3 中的纽结的两个重要结不变量之间存在一种基本联系：A多项式和带色 Jones 多项式。

对于 S^3中的纽结 K，其（规范化的） A-多项式 $A_{\mathrm{K}}(\mathrm{M},\mathrm{L})$是$\mathbb{Z}[\mathrm{M},\mathrm{L}]$ 中的一个二元多项式，不含重因子，且整数系数互素；在相差一个符号的意义下，它与 K唯一相关联（见 [1]）。注意， $A_{\mathrm{K}}(\mathrm{M},\mathrm{L})$总是包含因子$\mathrm{L}-1$。
对于 S^3 中的纽结 K 以及每个正整数 n， n-着色琼斯多项式 $J_{\mathrm{K}}(n)$是 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 中具有零框架的一元劳朗多项式（见 [18]）。在本文中， $J_{\mathrm{K}}(n)$被规范化，使得对于平凡结 U,

$$J_{\mathrm{U}}(n)=[n]:=\frac{t^{2n}-t^{-2n}}{t^2-t^{-2}}. \tag{1.1}$$

通过定义 $J_{\mathrm{K}}(-n):=-J_{\mathrm{K}}(n)$以及 $J_{\mathrm{K}}(0):=0$，可以将 $J_{\mathrm{K}}(n)$视为离散函数 $J_{\mathrm{K}}(\cdot):\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$。量子环面 $\mathcal{T}$ 是一个具有如下表现的非交换环

$$\mathcal{T}=\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]\left\langle \mathrm{L}^{\pm 1},\mathrm{M}^{\pm 1}\right\rangle/(\mathrm{LM}-t^2\mathrm{ML}),$$

通过如下方式作用于离散函数集 $f:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$

$$(\mathrm{M}f)(n):=t^{2n}f(n),\quad (\mathrm{L}f)(n):=f(n+1). \tag{1.2}$$

$J_{\mathrm{K}}(n)$ 在 $\mathcal{T}$ 中的湮灭子集合，记作

$$\mathcal{A}_{\mathrm{K}}:=\{P\in\mathcal{T}\mid PJ_{\mathrm{K}}(n)=0\},$$

是 $\mathcal{T}$ 的一个左理想，称为 K 的递推理想（因为每个算子 $P\in\mathcal{A}_{\mathrm{K}}$ 都为 $J_{\mathrm{K}}(n)$ 定义一个递推关系，反之亦然）。 [5] 中证明的一个基本结果表明，对于 S^3 中的每个纽结 K， $J_{\mathrm{K}}(n)$ 都有非平凡的递推关系，或者等价地说， $\mathcal{A}_{\mathrm{K}}$ 不是零理想。

$\widetilde{\ }$通过添加 $t^{\widetilde{\ }}$ 和 M 中多项式的逆元，可以将环 $\mathcal{T}$ 扩展为主左理想整环 $\mathcal{T}$；也就是说， $\mathcal{T}$ 是 L 中系数属于 $\mathbb{Q}(t,\mathrm{M})$ 的劳朗多项式集合（即系数属于 $\mathbb{Q}$、变量为 t 和 M 的有理函数集合），其乘积定义为

$$f(t,\mathrm{M})\mathrm{L}^j\cdot g(t,\mathrm{M})\mathrm{L}^k=f(t,\mathrm{M})g(t,t^{2j}\mathrm{M})\mathrm{L}^{j+k}. \tag{1.3}$$

~ ~ ~扩展左理想 $\mathcal{A}_{\mathrm{K}} = \mathcal{T}\mathcal{A}_{\mathrm{K}}$ 由 $\mathcal{T}$ 中的一个非零元素生成。可以将这样的生成元规范化为属于 $\mathcal{A}_{\mathrm{K}}$ 的形式，并写作

$$\alpha_{\mathrm{K}}(t, \mathrm{M}, \mathrm{L}) = \sum_{i=0}^{d} D_i \mathrm{L}^i,$$

以 $d > 0$ 为最小（在 $J_{\mathrm{K}}(n)$ 的所有非零湮灭子中），且 $D_0, \ldots, D_d \in \mathbb{Z}[t, \mathrm{M}]$ 在 $\mathbb{Z}[t,\mathrm{M}]$中互素。该多项式 $\alpha_{\mathrm{K}}(t,\mathrm{M}, \mathrm{L})$ 在相差一个符号的意义下唯一确定，称为 K 的（归一化）递推多项式 。

原始AJ猜想指出，对于 K 中的每个纽结， S^3, $\alpha_{\mathrm{K}}(-1,\mathrm{M}, \mathrm{L})$ 与 $A_{\mathrm{K}}(\mathrm{M},\mathrm{L})$ 相差一个仅依赖于 M 的非零因子。根据本文中的例子，对于某些纽结 K,$\alpha_{\mathrm{K}}(-1,\mathrm{M}, \mathrm{L})$ 可能含有涉及变量 L 的重因子。因此， AJ猜想需要稍作修改:

AJ猜想: 对于 K 中的每个纽结， S^3, $\alpha_{\mathrm{K}}(-1,\mathrm{M}, \mathrm{L})$ 去除所有重因子后，与 $A_{\mathrm{K}}(\mathrm{M},\mathrm{L})$ 相差一个仅依赖于 M 的非零因子。

这个猜想仍大体上尚未解决，目前仅对一些简单类别的纽结证明成立，例如某些二桥结 [3, 13, 7, 4, 8, 9], 环面纽结 [6, 14], 某些椒盐结 [8], 以及某些特定纽结的缆结 [11, 10, 15, 16, 17, 2]。本文研究环面纽结的连通和的 AJ猜想。

回顾一下，非平凡环面纽结 $T(p, q)$ 在 S^3 中的同痕类集合，与满足条件 $|p| > q \geq 2$的互素整数对 (p, q) 的集合之间存在一一对应关系。我们证明:

定理1.1。 AJ猜想对连通和 $T(p, q)\#T(a, b)$ 成立，当 p和 a 同号时。

如我们将看到的，对于定理 1.1中给出的纽结 $K = T(p, q)\#T(a, b)$，其递推多项式$\alpha_{\mathrm{K}}(t,\mathrm{M}, \mathrm{L})$ 在 $t = -1$ 处取值后，当且仅当$pq = ab$ 而 $p \neq a$时，会出现含变量 L 的重因子。

在第 2 节中，我们列出要用到的公式。随后在第 3 至第 9 节中证明定理1.1，这些章节分别对应七种情形。

为方便起见，本文常将 A-多项式 $A_{\mathrm{K}}(\mathrm{M}, \mathrm{L})$ 表示为 $\mathbb{Z}[\mathrm{M}^{\pm 1},\mathrm{L}]$中的一个元素，它与归一化的 A-多项式仅相差一个 M 的整数次幂因子。类似地，对于我们考虑的每一种 $K = T(p, q)\#T(a, b)$ 情形，我们将得到一个递推多项式 $\alpha_{\mathrm{K}}(t, \mathrm{M}, \mathrm{L})$，但只确定到归一化为止；也就是说，只确定到乘以一个关于 t 和 M 的非零有理函数为止。

我们的证明过程包含以下三个步骤:

(1) 在 $\mathcal{A}_{\mathrm{K}}$ 中构造一个候选的最小 L 次数非零湮灭子 $\alpha_{\mathrm{K}}(t, \mathrm{M}, \mathrm{L})$，其形式为$d\alpha_{\mathrm{K}}(t, \mathrm{M}, \mathrm{L}) = \sum_{i=0} D_i \mathrm{L}^i$，其中 $D_i \in \mathbb{Q}(t, \mathrm{M})$ 满足： $\alpha_{\mathrm{K}}(-1, \mathrm{M}, \mathrm{L})$ 有定义，且其 L 次数与$\alpha_{\mathrm{K}}(t, \mathrm{M}, \mathrm{L})$ 相同; (2) 验证 $\alpha_{\mathrm{K}}(-1, \mathrm{M}, \mathrm{L})$ 去除所有重因子后，等于 A-多项式$A_{\mathrm{K}}(\mathrm{M}, \mathrm{L})$ 乘以一个关于 M 的非零有理函数; (3) 证明候选湮灭子 $\alpha_{\mathrm{K}}(t, \mathrm{M}, \mathrm{L})$ 的 L 次数 d 确实是 $\mathcal{A}_{\mathrm{K}}$中 $J_{\mathrm{K}}(n)$ 的所有非零湮灭子中的最小值。

这一过程足以验证给定纽结的 AJ猜想。

2. Some formulas

A-多项式 $T(p,\ q)$ 由下式给出（例如参见 [19, 例 4。1]）

$$A_{\mathrm{T(p,q)}}(\mathrm{M},\mathrm{L})=\begin{cases}(\mathrm{L}-1)(\mathrm{M}^{2pq}\mathrm{L}^2-1) & \text{if } |p|>q>2,\\ (\mathrm{L}-1)(\mathrm{M}^{2p}\mathrm{L}+1) & \text{if } |p|>q=2.\end{cases} \tag{2.1}$$

对于 S^3中的纽结 K_1 和 K_2，若 $A_{\mathrm{K_1}}(\mathrm{M,L})=\prod_{i\in I}(\mathrm{LM}^{r_i}-\delta_i)$且 $A_{\mathrm{K_2}}(\mathrm{M,L})=\prod_{j\in J}(\mathrm{LM}^{s_i}-\delta_j)$，其中 I和 J 是一些有限指标集，r_i 和 s_j 是整数，且 $\delta_i,\delta_j\in\{1,-1\}$，那么连通和 $K_1\#K_2$ 的 A-多项式为（见 [12, 定理1.1]）

$$A_{\mathrm{K_1\#K_2}}(\mathrm{M,L})=\mathrm{Red}\Big[\prod_{(i,j)\in I\times J}(\mathrm{LM}^{r_i+s_j}-\delta_i\delta_j)\Big] \tag{2.2}$$

其中 Red[·] 表示去除所有重因子。将（2.1）代入（2.2），得到以下引理:

引理2.1。 $T(p,q)\#T(a,b)$ 的 A-多项式为:

(i) 若 $|p|>q>2$、 $|a|>b>2$、 $pq\neq ab$和 $pq\neq -ab$，则

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L-1)(M^{2pq}L^2-1)(M^{2ab}L^2-1)(M^{2(pq+ab)}L^2-1).$$

(ii) 如果 $|p|>q>2$、 $|a|>b>2$ 和 $pq=ab$，那么

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L-1)(M^{2ab}L^2-1)(M^{4ab}L^2-1).$$

(iii) 如果 $|p|>q>2$、 $|a|>b>2$ 和 $pq=-ab$，那么

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L^2-1)(M^{-2ab}L^2-1)(M^{2ab}L^2-1).$$

(iv) 如果 $|p|>q>2$、 $|a|>b=2$、 $pq\neq 2a$ 和 $pq\neq -2a$，那么

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L-1)(M^{2pq}L^2-1)(M^{2a}L+1)(M^{2(pq+2a)}L^2-1).$$

(v) 如果 $|p|>q>2$、 $|a|>b=2$ 和 $pq=2a$，那么

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L-1)(M^{4a}L^2-1)(M^{8a}L^2-1).$$

(vi) 如果 $|p|>q>2$、 $|a|>b=2$ 和 $pq=-2a$，那么

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L^2-1)(M^{-4a}L^2-1)(M^{2a}L+1).$$

(vii) 如果 $|p|>q=2$、 $|a|>b=2$、 $p\neq a$ 和 $p\neq -a$，那么

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L-1)(M^{2p}L+1)(M^{2a}L+1)(M^{2p+2a}L-1).$$

(viii) 如果 $|p|>q=2$、 $|a|>b=2$、 $p=a$，则

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L-1)(M^{2p}L+1)(M^{4p}L-1).$$

(ix) 如果 $|p|>q=2$、 $|a|>b=2$、 $p=-a$，则

$$A_{T(p,q)\#T(a,b)}(M,L)=(L-1)(M^{2p}L+1)(M^{-2p}L+1).$$

在归一化（1.1）下，着色琼斯多项式的连通和公式为

$$[n]J_{\mathrm{K_1\#K_2}}(n)=J_{\mathrm{K_1}}(n)J_{\mathrm{K_2}}(n). \tag{2.3}$$

对于劳朗多项式 $f(t)\in\mathbb{Q}[t^{\pm1}]$，令 $\ell(f)$ 和 $\hbar(f)$ 分别表示f在 t中的最低次数和最高次数。显然，对于 $\mathbb{Q}[t^{\pm1}]$中任意两个非零的 $f(t)$ 和 $g(t)$，有 $\ell fg=\ell(f)+\ell(g)$ 且$\hbar(fg)=\hbar(f)+\hbar(g)$。

引理 2.2. (1) 若 $p > q$，则

$$\ell(J_{T(p,q)}(n)) = -pqn^2 + pq + \frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(p-2)(q-2),$$
$$\hbar(J_{T(p,q)}(n)) = 2(p+q-pq)|n| + 2(pq-p-q).$$

(2) 若 $p < -q$，则

$$\ell(J_{T(p,q)}(n)) = 2(p-q-pq)|n| + 2(pq-p+q),$$
$$\hbar(J_{T(p,q)}(n)) = -pqn^2 + pq + \frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(p+2)(q-2).$$

公式 $\ell(J_{\mathrm{T(p,q)}}(n))$ 是引理 2.2 第 (1) 部分中的公式，出自 [14, 引理 2.4]，；引理2.2的其余部分出自 [11, 引理 2.1]。

结合引理2.2 和公式 (2.3)，我们得到以下引理。

引理 2.3. (1) 若 $p > q$ 且 $a > b$，则

$$\begin{aligned}\ell([n]J_{T(p,q)\#T(a,b)}(n)) &= -pqn^2 + pq + \frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(p-2)(q-2)\\ &\quad - abn^2 + ab + \frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(a-2)(b-2),\\ \hbar([n]J_{T(p,q)\#T(a,b)}(n)) &= 2(p+q-pq)|n| + 2(pq-p-q)\\ &\quad + 2(a+b-ab)|n| + 2(ab-a-b).\end{aligned}$$

(2) 若 $p > q$ 且 $a < -b$，则

$$\begin{aligned}\ell([n]J_{T(p,q)\#T(a,b)}(n)) &= -pqn^2 + pq + \frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(p-2)(q-2)\\ &\quad + 2(a-b-ab)|n| + 2(ab-a+b),\\ \hbar([n]J_{T(p,q)\#T(a,b)}(n)) &= 2(p+q-pq)|n| + 2(pq-p-q)\\ &\quad - abn^2 + ab + \frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(a+2)(b-2).\end{aligned}$$

(3) 如果 $p < -q$ 和 $a < -b$，那么

$$\begin{aligned}\ell([n]J_{T(p,q)\#T(a,b)}(n)) &= 2(p-q-pq)|n| + 2(pq-p+q)\\ &\quad + 2(a-b-ab)|n| + 2(ab-a+b),\\ \hbar([n]J_{T(p,q)\#T(a,b)}(n)) &= -pqn^2 + pq + \frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(p+2)(q-2)\\ &\quad - abn^2 + ab + \frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(a+2)(b-2).\end{aligned}$$

由 [14, 引理 2.5],可得

$$J_{T(p,2)}(n+1) = -t^{-4pn-2p}J_{T(p,2)}(n) + t^{-2pn}[2n+1]. \tag{2.4}$$

注意，尽管在 [14], (2.4) 中只考虑了 $p > 2$，但它对 $p < -2$ 也成立。由于 $J_{T(p,2)}(n+1) = \mathrm{L}J_{T(p,2)}(n)$ 且 $\mathrm{M} = t^{2n}$，因此

$$(\mathrm{L} + \mathrm{M}^{-2p}t^{-2p})J_{T(p,2)}(n) = \mathrm{M}^{-p}[2n+1]. \tag{2.5}$$

应用（2.4）两次，我们得到

$$\begin{aligned}J_{T(p,2)}(n+2) &= -t^{-4pn-6p}J_{T(p,2)}(n+1) + t^{-2pn-2p}[2n+3]\\ &= -t^{-4pn-6p}\left(-t^{-4pn-2p}J_{T(p,2)}(n) + t^{-2pn}[2n+1]\right) + t^{-2pn-2p}[2n+3]\\ &= t^{-8p(n+1)}J_{T(p,2)}(n) - t^{-6p(n+1)}[2n+1] + t^{-2p(n+1)}[2n+3].\end{aligned} \tag{2.6}$$

由 [14, 引理2.1], 当 $|p|>q>2$时，我们有

$$J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2)=t^{-4pq(n+1)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n), \tag{2.7}$$

其中

$$\begin{aligned}\delta(p,q,n)&:=\frac{t^{2(p+q)(n+1)+2}+t^{-2(p+q)(n+1)+2}-t^{2(q-p)(n+1)-2}-t^{-2(q-p)(n+1)-2}}{t^2-t^{-2}}\\&=\frac{\mathrm{M}^{p+q}t^{2(p+q+1)}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-2(p+q-1)}-\mathrm{M}^{q-p}t^{2(q-p-1)}-\mathrm{M}^{p-q}t^{-2(q-p+1)}}{t^2-t^{-2}}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

再次，尽管仅考虑了 $p>q$，但 [14], (2.7) 和 (2.8) 对于 $p<-q$ 同样成立。

由于 $J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2)=\mathrm{L}^2J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)$ 且 $\mathrm{M}=t^{2n}$，由 (2.7) 可得

$$(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq})J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)=\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n). \tag{2.9}$$

3. Case $|p|>q>2$, $|a|>b>2$, $pq\neq ab$, p and a have the same sign

如引言中所述，以下各节证明过程的第一步——这些小节分别对应纽结的七种情形 $K=T(p,q)\#T(a,b)$——是构造一个候选湮灭子$\sim\alpha_{\mathrm{K}}(t,\mathrm{M},\mathrm{L})$于 $\mathcal{A}_{\mathrm{K}}$中。应用 (2.3) 和 (2.7)，可得

$$\begin{aligned}&[n+2]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+2)=J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+2)\\&=\left(t^{-4pq(n+1)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\right)\\&\quad\left(t^{-4ab(n+1)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+t^{-2ab(n+1)}\delta(a,b,n)\right)\\&=t^{-4(pq+ab)(n+1)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+t^{-(4pq+2ab)(n+1)}\delta(a,b,n)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\&\quad+t^{-(2pq+4ab)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+t^{-2(pq+ab)(n+1)}\delta(p,q,n)\delta(a,b,n)\\&=t^{-4(pq+ab)(n+1)}[n]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)+t^{-(4pq+2ab)(n+1)}\delta(a,b,n)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\&\quad+t^{-(2pq+4ab)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+t^{-2(pq+ab)(n+1)}\delta(p,q,n)\delta(a,b,n).\end{aligned} \tag{3.1}$$

由于 $J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+2)=\mathrm{L}^2J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)$，且 $t^{2n}=\mathrm{M}$，我们可以将 (3.1) 变形为

$$\begin{aligned}&\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq-2ab}t^{-4pq-4ab}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\\&=\mathrm{M}^{-2pq-ab}t^{-4pq-2ab}\delta(a,b,n)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+\mathrm{M}^{-pq-2ab}t^{-2pq-4ab}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)\\&\quad+\mathrm{M}^{-pq-ab}t^{-2pq-2ab}\delta(p,q,n)\delta(a,b,n).\end{aligned}$$

将左侧除以非零函数 $\mathrm{M}^{-2pq-ab}t^{-4pq-2ab}\delta(a,b,n)$，它是$J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)$ 的系数，该等式变为

$$\begin{aligned}&\tfrac{\mathrm{M}^{2pq+ab}t^{4pq+2ab}}{\delta(a,b,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq-2ab}t^{-4pq-4ab}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\\&=J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+\tfrac{\mathrm{M}^{pq-ab}t^{2pq-2ab}\delta(p,q,n)}{\delta(a,b,n)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+\mathrm{M}^{pq}t^{2pq}\delta(p,q,n).\end{aligned}$$

从左侧对等式两边应用算子 $(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq})$，然后应用 (2.9)、(1.2)（将$\mathrm{M}$ 视为 t^{2n}）和 (2.7)，得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)\frac{\mathrm{M}^{2pq+ab}t^{4pq+2ab}}{\delta(a,b,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq-2ab}t^{-4pq-4ab}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\\
&=\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)+\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)\left(\frac{\mathrm{M}^{pq-ab}t^{2pq-2ab}\delta(p,q,n)}{\delta(a,b,n)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+\mathrm{M}^{pq}t^{2pq}\delta(p,q,n)\right)\\
&=\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)+\frac{\mathrm{M}^{pq-ab}t^{6pq-6ab}\delta(p,q,n+2)}{\delta(a,b,n+2)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+2)+\mathrm{M}^{pq}t^{6pq}\delta(p,q,n+2)\\
&\quad-\frac{\mathrm{M}^{-pq-ab}t^{-2pq-2ab}\delta(p,q,n)}{\delta(a,b,n)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)-\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)\\
&=\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)+\frac{\mathrm{M}^{pq-ab}t^{6pq-6ab}\delta(p,q,n+2)}{\delta(a,b,n+2)}\left(t^{-4ab(n+1)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+t^{-2ab(n+1)}\delta(a,b,n)\right)\\
&\quad+\mathrm{M}^{pq}t^{6pq}\delta(p,q,n+2)-\frac{\mathrm{M}^{-pq-ab}t^{-2pq-2ab}\delta(p,q,n)}{\delta(a,b,n)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)-\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)\\
&=\left(\frac{\mathrm{M}^{pq-3ab}t^{6pq-10ab}\delta(p,q,n+2)}{\delta(a,b,n+2)}-\frac{\mathrm{M}^{-pq-ab}t^{-2pq-2ab}\delta(p,q,n)}{\delta(a,b,n)}\right)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)\\
&\quad+\frac{\mathrm{M}^{pq-2ab}t^{6pq-8ab}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n)}{\delta(a,b,n+2)}+\mathrm{M}^{pq}t^{6pq}\delta(p,q,n+2).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

令 $f(t,\mathrm{M})=\mathrm{M}^{pq-3ab}t^{6pq-10ab}\delta(p,q,n+2)\,\delta(a,b,n+2)-\mathrm{M}^{-pq-ab}t^{-2pq-2ab}\delta(p,q,n)\,\delta(a,b,n)$，它是最后一个等式右侧的$J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)$的系数。于是 $f(t,\mathrm{M})\neq 0$。通过将函数特化于 $t=-1$（使用 (2.8)），很容易验证这一点：

$$
f(-1,\mathrm{M})=\frac{(\mathrm{M}^{pq-3ab}-\mathrm{M}^{-pq-ab})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})}{\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}}
\tag{3.3}
$$

它非零，因为 $pq\neq ab$。

将算子 $(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab})f^{-1}(t,\mathrm{M})$ 从左侧作用于 (3.2)，然后使用 (2.9) 和 (1.2)，得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)\frac{\mathrm{M}^{2pq+ab}t^{4pq+2ab}}{\delta(a,b,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq-2ab}t^{-4pq-4ab}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\\
&=\mathrm{M}^{-ab}t^{-2ab}\delta(a,b,n)+\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\frac{\mathrm{M}^{pq-2ab}t^{6pq-8ab}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n)}{\delta(a,b,n+2)}+\mathrm{M}^{pq}t^{6pq}\delta(p,q,n+2)\right)\\
&=\mathrm{M}^{-ab}t^{-2ab}\delta(a,b,n)+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\frac{\mathrm{M}^{pq-2ab}t^{10pq-16ab}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+2)}{\delta(a,b,n+4)}+\mathrm{M}^{pq}t^{10pq}\delta(p,q,n+4)\right)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\frac{\mathrm{M}^{pq-2ab}t^{6pq-8ab}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n)}{\delta(a,b,n+2)}+\mathrm{M}^{pq}t^{6pq}\delta(p,q,n+2)\right).
\end{aligned}
$$

令 $g(t,\mathrm{M})$ 为上一个等式右端的函数。则 $g(t,\mathrm{M})\neq 0$。事实上，应用 (2.8) 和 (3.3)，我们有（注意，对于任意固定的正整数 j，$\lim_{t\to-1}(t^2-t^{-2})\delta(p,q,n+j)=\lim_{t\to-1}(t^2-t^{-2})\delta(p,q,n)$）

$$
\lim_{t\to-1}(t^2-t^{-2})g(t,\mathrm{M})=\frac{\left(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}\right)(\mathrm{M}^{pq}-\mathrm{M}^{-pq-2ab})}{\mathrm{M}^{pq-3ab}-\mathrm{M}^{-pq-ab}}\neq 0
\tag{3.4}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\alpha(t,\mathrm{M},\mathrm{L})=&(\mathrm{L}-1)\frac{1}{(t^2-t^{-2})g(t,\mathrm{M})}\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)\\
&\frac{\mathrm{M}^{2pq+ab}t^{4pq+2ab}}{\delta(a,b,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq-2ab}t^{-4pq-4ab}[n]\right)
\end{aligned}
$$

是$J_{\mathrm{T(p,q)}}$#T(a,b)(n)的湮灭子。此外，利用(3.4)、(3.3)、(2.8)、(1.1)和引理2.1 (i)，我们有$\alpha(-1, \mathrm{M}, \mathrm{L})$ $= a(\mathrm{M})(\mathrm{L}-1)(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab})(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq})(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq-2ab}) = a(\mathrm{M})\mathrm{M}^{-4pq-4ab}A_{\mathrm{T(p,q)}}$#T(a,b)(M, L)，其中

$$a(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M}-\mathrm{M}^{-1}}{\left(\mathrm{M}^{-pq-ab}-\mathrm{M}^{-3pq-3ab}\right)\left(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}\right)\left(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}\right)}$$

是关于M的一个定义良好且非零的有理函数。

现在我们着手证明， $\alpha(t, \mathrm{M}, \mathrm{L})$ 在经过归一化后是 $J_{\mathrm{T(p,q)}}$#T(a,b)(n) 的递推多项式。由于 $\alpha(t, \mathrm{M},\mathrm{L})$ 的 L 次数为 7，我们只需证明 7 是 $J_{\mathrm{T(p,q)}}$#T(a,b)(n) 的所有非零湮灭子中的最小 L 次数。只需证明：若 $P = D_6\mathrm{L}^6 + D_5\mathrm{L}^5 + D_4\mathrm{L}^4 + D_3\mathrm{L}^3 + D_2\mathrm{L}^2 + D_1\mathrm{L} + D_0$，其中 $D_0, ..., D_6 \in \mathbb{Q}(t, \mathrm{M})$ 是 $J_{\mathrm{T(p,q)}}$#T(a,b)(n) 的一个湮灭子，那么 $P = 0$。假设 $PJ_{\mathrm{T(p,q)}}$#T(a,b)(n) $= 0$，也就是说，

$$\begin{aligned}&D_6J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+6) + D_5J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+5) + D_4J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+4) + D_3J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+3)\\ &+ D_2J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+2) + D_1J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+1) + D_0J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n) = 0.\end{aligned}$$

我们希望证明，对于所有 $i = 0$，1，.....，6， $D_i = 0$

反复应用（3.1）和（2.7），可得

$$\begin{aligned}&D_6J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+6) + D_5J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+5) + D_4J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+4) + D_3J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+3)\\ &+ D_2J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+2) + D_1J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+1) + D_0J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n)\\ &= \frac{D_6}{[n+6]}\Big(t^{-4(pq+ab)(n+5)}[n+4]J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+4) + t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+4)\\ &\quad+t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+4) + t^{-2(pq+ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+4)\Big)\\ &\quad+ \frac{D_5}{[n+5]}\Big(t^{-4(pq+ab)(n+4)}[n+3]J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+3) + t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+3)\\ &\quad+t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+3) + t^{-2(pq+ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+3)\Big)\\ &\quad+ D_4J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+4) + D_3J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+3) + D_2J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+2)\\ &\quad+ D_1J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+1) + D_0J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n)\\ &= \left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}[n+4] + D_4\right)J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+4)\\ &\quad+ \left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}[n+3] + D_3\right)J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+3)\\ &\quad+ \frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+4) + \frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+4)\\ &\quad+ \frac{D_6}{[n+6]}t^{-2(pq+ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+4) + \frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+3)\\ &\quad+ \frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+3) + \frac{D_5}{[n+5]}t^{-2(pq+ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+3)\\ &\quad+ D_2J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+2) + D_1J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+1) + D_0J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n)\\ &= \left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)} + \frac{D_4}{[n+4]}\right)\Big(t^{-4(pq+ab)(n+3)}[n+2]J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n+2)\\ &\quad+ t^{-(4pq+2ab)(n+3)}\delta(a,b,n+2)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2) + t^{-(2pq+4ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+2)\\ &\quad+t^{-2(pq+ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n+2)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\Big(t^{-4(pq+ab)(n+2)}[n+1]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)\\
&+t^{-(4pq+2ab)(n+2)}\delta(a,b,n+1)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+t^{-(2pq+4ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1)\\
&+t^{-2(pq+ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\delta(a,b,n+1)\Big)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)\left(t^{-4pq(n+3)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2)+t^{-2pq(n+3)}\delta(p,q,n+2)\right)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)\left(t^{-4ab(n+3)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+2)+t^{-2ab(n+3)}\delta(a,b,n+2)\right)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-2(pq+ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+4)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)\left(t^{-4pq(n+2)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)\right)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\left(t^{-4ab(n+2)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1)+t^{-2ab(n+2)}\delta(a,b,n+1)\right)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-2(pq+ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+3)\\
&+D_2J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+2)+D_1J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\\
=&\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}[n+2]+D_2\right]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+2)\\
&+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+3)}\delta(a,b,n+2)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-4pq(n+3)}\right]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2)\\
&+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-4ab(n+3)}\right]J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+2)\\
&+\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-2(pq+ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n+2)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+2)}[n+1]+D_1\right]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+2)}\delta(a,b,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-4pq(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-4ab(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1)\\
&+\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-2(pq+ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\delta(a,b,n+1)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-2pq(n+3)}\delta(p,q,n+2)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-2ab(n+3)}\delta(a,b,n+2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-2(pq+ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+4)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-2ab(n+2)}\delta(a,b,n+1)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-2(pq+ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+3)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\\
=&\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]\\
&\Big(t^{-4(pq+ab)(n+1)}[n]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)+t^{-(4pq+2ab)(n+1)}\delta(a,b,n)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&\quad+t^{-(2pq+4ab)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+t^{-2(pq+ab)(n+1)}\delta(p,q,n)\delta(a,b,n)\Big)\\
&+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+3)}\delta(a,b,n+2)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-4pq(n+3)}\right]\left(t^{-4pq(n+1)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\right)\\
&+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-4ab(n+3)}\right]\left(t^{-4ab(n+1)}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+t^{-2ab(n+1)}\delta(a,b,n)\right)\\
&+\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-2(pq+ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n+2)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+2)}[n+1]+D_1\right]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+2)}\delta(a,b,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-4pq(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-4ab(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1)\\
&+\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-2(pq+ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\delta(a,b,n+1)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-2pq(n+3)}\delta(p,q,n+2)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-2ab(n+3)}\delta(a,b,n+2)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-2(pq+ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+4)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-2ab(n+2)}\delta(a,b,n+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-2(pq+ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+3)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\\
&=\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+2)}[n+1]+D_1\right]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)\\
&+\left\{\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]t^{-4(pq+ab)(n+1)}[n]+D_0\right\}\\
&J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+2)}\delta(a,b,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-4pq(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)\\
&+\left\{\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]\right.\\
&t^{-(4pq+2ab)(n+1)}\delta(a,b,n)+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+3)}\delta(a,b,n+2)\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-4pq(n+3)}\right]t^{-4pq(n+1)}\right\}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-4ab(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1)\\
&+\left\{\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]\right.\\
&t^{-(2pq+4ab)(n+1)}\delta(p,q,n)+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-4ab(n+3)}\right]t^{-4ab(n+1)}\right\}J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)\\
&+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]t^{-2(pq+ab)(n+1)}\delta(p,q,n)\delta(a,b,n)\\
&+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+3)}\delta(a,b,n+2)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-4pq(n+3)}\right]t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\\
&+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-4ab(n+3)}\right]t^{-2ab(n+1)}\delta(a,b,n)\\
&+\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-2(pq+ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n+2)\\
&+\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-2(pq+ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\delta(a,b,n+1)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-2pq(n+3)}\delta(p,q,n+2)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-2ab(n+3)}\delta(a,b,n+2)\\
&+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-2(pq+ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+4)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)$$
$$+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-2ab(n+2)}\delta(a,b,n+1)$$
$$+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-2(pq+ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+3)$$
$$=E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)+E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)+E_4J_{T(p,q)}(n+1)+E_3J_{T(p,q)}(n)$$
$$+E_2J_{T(a,b)}(n+1)+E_1J_{T(a,b)}(n)+E_0.$$

引理 3.1. 对于任意 $E_i\in\mathbb{Q}(t,M)$，$i=0$、1、…、6，方程

$$E_6J_{T(p,q)\#T(a,b)}(n+1)+E_5J_{T(p,q)\#T(a,b)}(n)+E_4J_{T(p,q)}(n+1)+E_3J_{T(p,q)}(n)$$
$$+E_2J_{T(a,b)}(n+1)+E_1J_{T(a,b)}(n)+E_0=0 \tag{3.5}$$

推出 $E_i=0$，对所有 $i=0$、1、…、6均成立。

证明。将方程（3.5）乘以一个关于 $\mathbb{Q}(t,\mathrm{M})$ 的非零有理函数（它可以消去所有 E_i 的分母），不妨且将假设每个 E_i 都属于 $\mathbb{Z}[t,\mathrm{M}]$。

我们首先考虑 p 和 a 都为正的子情形。由方程（3.5）可知，至少有两个加项在 t 中的最低次数相同（此处将 M 视为 t^{2n}）。也就是说，以下等式至少有一个成立：

$$\ell(E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n))\quad \ell(E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_4J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1))$$
$$,\ell(E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_3J_{\mathrm{T(p,q)}}(n))\quad \ell(E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_2J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1)),\ell($$
$$E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_1J_{\mathrm{T(a,b)}}(n))\quad \ell(E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_0),\ell(E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n))$$
$$=\ell(E_4J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1))\quad \ell(E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n))=\ell(E_3J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)),\ell(E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n))=\ell(E_2J_{\mathrm{T(a,b)}}$$
$$(n+1))\quad \ell(E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n))=\ell(E_1J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)),\ell(E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n))=\ell(E_0)\quad \ell(E_4J_{\mathrm{T(p,q)}}($$
$$n+1))=\ell(E_3J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)),\ell(E_4J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1))=\ell(E_2J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1))\quad \ell(E_4J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1))=\ell($$
$$E_1J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)),\ell(E_4J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1))=\ell(E_0)\quad \ell(E_3J_{\mathrm{T(p,q)}}(n))=\ell(E_2J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1)),\ell(E_3J_{\mathrm{T(p,q)}}(n))=\ell($$
$$E_1J_{\mathrm{T(a,b)}}(n))\quad \ell(E_3J_{\mathrm{T(p,q)}}(n))=\ell(E_0)\quad \ell(E_2J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_1J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)),\ell(E_2J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1))$$
$$=\ell(E_0)\quad \ell(E_1J_{\mathrm{T(a,b)}}(n))=\ell(E_0)。$$

若 $\ell(E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n))$，则 E_6 和 E_5 要么都为零，要么都非零。后一种情况下，我们有 $\ell(E_6)+\ell(J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1))=\ell(E_5)+\ell(J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n))$。应用引理 2.3 (1)，可知

$$\begin{aligned}\ell(E_6)-\ell(E_5)&=\ell\left(J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\right)-\ell\left(J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)\right)\\&=\Big(-pqn^2+pq+\frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(p-2)(q-2)-abn^2+ab\\&\quad+\frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})(a-2)(b-2)-2n-2\Big)\\&\quad-\Big(-pq(n+1)^2+pq+\frac{1}{2}(1-(-1)^{n})(p-2)(q-2)-ab(n+1)^2+ab\\&\quad+\frac{1}{2}(1-(-1)^{n})(a-2)(b-2)-2(n+1)-2\Big)\\&=2pqn+(-1)^n[(p-2)(q-2)+(a-2)(b-2)]+pq+2abn+ab+2.\end{aligned}$$

然而，这些连接方程最左端是 n 的线性函数，而最右端不是 n 的线性函数（因为 $(p-2)(q-2)+(a-2)(b-2)>0$），这就产生了矛盾。若 $\ell\left(E_6 J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)\right)=\ell\left(E_4 J_{T(p,q)}(n+1)\right)$，则 E_6 和 E_4 要么都为零，要么都非零。后一种情况下，应用引理 2.2 (1) 和 2.3 (1)，可得

$$\begin{aligned}\ell(E_6)-\ell(E_4)&=\ell\left(J_{T(p,q)}(n+1)\right)-\ell\left(J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)\right)\\&=\left(-pq(n+1)^2+pq+\frac{1}{2}(1-(-1)^n)(p-2)(q-2)\right)\\&\quad-\left(-pq(n+1)^2+pq+\frac{1}{2}(1-(-1)^n)(p-2)(q-2)-ab(n+1)^2+ab\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}(1-(-1)^n)(a-2)(b-2)-2(n+1)-2\right)\\&=ab(n+1)^2-ab-\frac{1}{2}(1-(-1)^n)(a-2)(b-2)+2(n+1)+2.\end{aligned}$$

同样，这些连接方程的最左端是关于 n 的线性函数，而最右端不是，因此导出矛盾。

类似地，只要(3.5)中的两个加项在 t中的最低次数相同，我们就可以利用第 2节给出的次数公式导出矛盾，除非所涉及的 E_i 和 E_j 都为零。

由此可得，对于所有 $i=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 6$，都有 $E_i=0$。

当 p 和 a都为负时，可以用类似的方法处理这一子情形，但要使用 t中的最高次数，而不是最低次数。□

由引理3.1 及其前面的计算，我们得到一个由七个齐次线性方程组成的方程组，$E_i=0$，其中 $i\in\{0,1,\ldots,6\}$，未知数为 $D_0,\ \ldots\ldots,\ D_6$，系数属于 $\mathbb{Q}(t,\ \mathrm{M})$。现在我们证明该方程组只有平凡解：对于所有 i，都有 $D_i=0$。

我们的方法是将所有系数表示为 t 和 M 的函数，并在 $t=-1$处对其求值，随后进行一些化简，例如将方程两边除以 M的非零函数。值得注意的是，在这种约化下，$[n+i]$和 $[n+j]$两项相同，$\delta(p,\ q,\ n+i)$ 与 $\delta(p,\ q,\ n+j)$ 也相同。接着，我们验证所得的简化线性方程组只有平凡解。下文用 $\longrightarrow$ 表示方程 $E_i=0$的约化。

$$\begin{aligned}&E_6=\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+2)}[n+1]+D_1=0\\&\longrightarrow\ \mathrm{M}^{-4(pq+ab)}D_5+\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}D_3+D_1=0,\\&E_5=\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]t^{-4(pq+ab)(n+1)}[n]+D_0=0\\&\longrightarrow\ \mathrm{M}^{-6(pq+ab)}D_6+\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}D_4+\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}D_2+D_0=0,\\&E_4=\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+2)}\delta(a,b,n+1)\\&\qquad+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-4pq(n+2)}=0\\&\longrightarrow\ (\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq})D_5+D_3=0,\\&E_3=\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]t^{-(4pq+2ab)(n+1)}\delta(a,b,n)\\&\qquad+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+3)}\delta(a,b,n+2)\right.\end{aligned}$$

$$+\ \frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-4pq(n+3)}\Big]\,t^{-4pq(n+1)}=0$$

$$\longrightarrow\ (\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-4pq-2ab}+\mathrm{M}^{-4pq})D_6+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq})D_4+D_2=0,$$

$$E_2=\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)$$
$$+\ \frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-4ab(n+2)}=0$$

$$\longrightarrow\ (\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2ab})D_5+D_3=0,$$

$$E_1=\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]t^{-(2pq+4ab)(n+1)}\delta(p,q,n)$$
$$+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\right.$$
$$\left.+\ \frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-4ab(n+3)}\right]t^{-4ab(n+1)}=0$$

$$\longrightarrow\ (\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq-4ab}+\mathrm{M}^{-4ab})D_6+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2ab})D_4+D_2=0,$$

$$E_0=\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-4(pq+ab)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]t^{-2(pq+ab)(n+1)}\delta(p,q,n)\delta(a,b,n)$$
$$+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(4pq+2ab)(n+3)}\delta(a,b,n+2)\right.$$
$$\left.+\ \frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-4pq(n+3)}\right]t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)$$
$$+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-(2pq+4ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\right.$$
$$\left.+\ \frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-4ab(n+3)}\right]t^{-2ab(n+1)}\delta(a,b,n)$$
$$+\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-4(pq+ab)(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-2(pq+ab)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n+2)$$
$$+\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-4(pq+ab)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-2(pq+ab)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\delta(a,b,n+1)$$
$$+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(4pq+2ab)(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-2pq(n+3)}\delta(p,q,n+2)$$
$$+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-(2pq+4ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)t^{-2ab(n+3)}\delta(a,b,n+2)$$
$$+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-2(pq+ab)(n+5)}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+4)$$
$$+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+2ab)(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)$$
$$+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+4ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-2ab(n+2)}\delta(a,b,n+1)$$
$$+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-2(pq+ab)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+3)=0$$

$$\longrightarrow\ (\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-4pq-2ab}+\mathrm{M}^{-4pq}+\mathrm{M}^{-2pq-4ab}+\mathrm{M}^{-4ab}+\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq}+\mathrm{M}^{-2ab}+1)D_6$$
$$+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq}+\mathrm{M}^{-2ab}+1)D_5+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq}+\mathrm{M}^{-2ab}+1)D_4+D_3+D_2=0.$$

也就是说，给定的方程组已化简为以下方程组（系数取自 $\mathbb{Z}[\mathrm{M}^{\pm1}]$ ）：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}D_5+\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}D_3+D_1=0,\\
&\mathrm{M}^{-6(pq+ab)}D_6+\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}D_4+\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}D_2+D_0=0,\\
&(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq})D_5+D_3=0,\\
&(\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-4pq-2ab}+\mathrm{M}^{-4pq})D_6+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq})D_4+D_2=0,\\
&(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2ab})D_5+D_3=0,\\
&(\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq-4ab}+\mathrm{M}^{-4ab})D_6+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2ab})D_4+D_2=0,\\
&(\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-4pq-2ab}+\mathrm{M}^{-4pq}+\mathrm{M}^{-2pq-4ab}+\mathrm{M}^{-4ab}+\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq}+\mathrm{M}^{-2ab}+1)D_6\\
&+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq}+\mathrm{M}^{-2ab}+1)D_5+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq}+\mathrm{M}^{-2ab}+1)D_4+D_3+D_2=0.
\end{aligned}$$

第三个和第五个方程推出 $D_5=D_3=0$，因为 $pq\neq ab$。然后，第一个方程推出 $D_1=0$。其余四个方程变为：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}^{-6(pq+ab)}D_6+\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}D_4+\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}D_2+D_0=0,\\
&(\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-4pq-2ab}+\mathrm{M}^{-4pq})D_6+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq})D_4+D_2=0,\\
&(\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq-4ab}+\mathrm{M}^{-4ab})D_6+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2ab})D_4+D_2=0,\\
&(\mathrm{M}^{-4(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-4pq-2ab}+\mathrm{M}^{-4pq}+\mathrm{M}^{-2pq-4ab}+\mathrm{M}^{-4ab}+\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq}+\mathrm{M}^{-2ab}+1)D_6,\\
&+(\mathrm{M}^{-2(pq+ab)}+\mathrm{M}^{-2pq}+\mathrm{M}^{-2ab}+1)D_4+D_2=0.
\end{aligned}$$

这四个方程的系数矩阵的行列式为 $(\mathrm{M}^{-2pq}-\mathrm{M}^{-2ab})(\mathrm{M}^{-2pq-2ab}-1)$，由于 $pq\neq ab$ 和 $pq\neq -ab$，该行列式非零。因此 $D_0=D_2=D_4=D_6=0$。

4. Case $|p|>q>2$, $(a,b)=(p,q)$

也就是说，在本节中，我们验证 *AJ*-猜想对 $T(p,q)\#T(p,q)$ 在 $|p|>q>2$ 时成立，这可由第 3 节中的结果直接推出。第 3.2 节中的方程（3）在 $(p,q)=(a,b)$ 时仍然成立。因此，将 $a=p$ 和 $b=q$ 代入方程，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)\frac{\mathrm{M}^{3pq}t^{6pq}}{\delta(p,q,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4pq}t^{-8pq}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&=\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)+\mathrm{M}^{pq}t^{6pq}\delta(p,q,n+2).
\end{aligned}$$

函数 $f(t,\mathrm{M})=\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)+\mathrm{M}^{pq}t^{6pq}\delta(p,q,n+2)$ 非零，因为

$$\lim_{t\to-1}(t^2-t^{-2})f(t,\mathrm{M})=(\mathrm{M}^{-pq}+\mathrm{M}^{pq})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})\neq 0.$$

因此，

$$\alpha(t,\mathrm{M},\mathrm{L})=(\mathrm{L}-1)\frac{1}{(t^2-t^{-2})f(t,\mathrm{M})}(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq})\frac{\mathrm{M}^{3pq}t^{6pq}}{\delta(p,q,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4pq}t^{-8pq}[n]\right)$$

是 $J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n)$ 的湮灭子，其 L-次数为 5。此外，

$$\alpha(-1,\mathrm{M},\mathrm{L})=a(\mathrm{M})(\mathrm{L}-1)(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq})(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4pq})=a(\mathrm{M})\mathrm{M}^{-6pq}A_{T(p,q)\#T(p,q)}(\mathrm{M},\mathrm{L})$$

其中

$$a(\mathrm{M})=\frac{\mathrm{M}^{3pq}(\mathrm{M}-\mathrm{M}^{-1})}{(\mathrm{M}^{-pq}+\mathrm{M}^{pq})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})^2}$$

是关于 M 的一个定义良好且非零的有理函数。

现在我们证明，5 是 $J_{\mathrm{T(p,q)}}$L-次数中所有非零湮灭子里最小的一个，它们对应于 $J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n)$。因此，设 $D_4\mathrm{L}^4+D_3\mathrm{L}^3+D_2\mathrm{L}^2+D_1\mathrm{L}+D_0$，其中 $D_0,\dots,D_4\in\mathbb{Q}(t,\mathrm{M})$ 是 $J_{T(p,q)\#T(p,q)}(n)$ 的一个湮灭子，

也就是说,

$$D_4J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+4)+D_3J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+3)+D_2J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+2)$$
$$+D_1J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n)=0,$$

我们想要证明 $D_i=0$ 对所有 i成立。将 $D_6=D_5=0$、 $a=p$、 $b=q$ 代入第3节中所进行的相应计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&D_4J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+4)+D_3J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+3)+D_2J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+2)\\
&\quad+D_1J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&=\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8pq(n+2)}[n+1]+D_1\right)J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-8pq(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-8pq(n+1)}[n]+D_0\right]J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&+\frac{D_3}{[n+3]}2t^{-6pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-8pq(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)2t^{-6pq(n+1)}\delta(p,q,n)+\frac{D_4}{[n+4]}2t^{-6pq(n+3)}\delta(p,q,n+2)t^{-4pq(n+1)}\right]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&+\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-8pq(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-4pq(n+1)}\delta^2(p,q,n)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}2t^{-6pq(n+3)}\delta(p,q,n+2)t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-4pq(n+3)}\delta^2(p,q,n+2)+\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4pq(n+2)}\delta^2(p,q,n+1)\\
&=E_4J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+E_3J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(p,q)}}(n)+E_2J_{T(p,q)}(n+1)+E_1J_{T(p,q)}(n)+E_0
\end{aligned}$$

引理 4.1. $E_4J_{T(p,q)\#T(p,q)}(n+1)+E_3J_{T(p,q)\#T(p,q)}(n)+E_2J_{T(p,q)}(n+1)+E_1J_{T(p,q)}(n)+E_0=0$蕴含 $E_i=0$对所有 $i=0,\ 1,\ \ldots,\ 4$。

本引理可视为引理3.1的一个子情形。

现在我们证明，由五个齐次线性方程 $E_i=0$、 $i=0,\ 1\ldots,$ 4组成的、含五个变量$D_0,\ \ldots,\ D_4$的方程组仅有平凡解： $D_i=0$对所有 $i=0,\ 1,\ \ldots,\ 4$。再次将 $D_6=D_5=0$、$a=p$、 $b=q$ 代入第3节中已完成的工作，我们得到如下简化线性方程组:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}^{-4pq}D_3+D_1=0,\\
&\mathrm{M}^{-8pq}D_4+\mathrm{M}^{-4pq}D_2+D_0=0,\\
&D_3=0,\\
&(\mathrm{M}^{-4pq}+\mathrm{M}^{-2pq})D_4+D_2=0,\\
&(\mathrm{M}^{-4pq}+2\mathrm{M}^{-2pq}+1)D_4+D_3+D_2=0.
\end{aligned}$$

现在很容易看出，对于所有 i，该系统只有平凡解 $D_i=0$ 。

5. Case $|p|>q>2,\ |a|>b>2,\ pq=ab,\ p\neq a$

第3 节中进行的计算在很大程度上适用于本节，但有几处我们不能再通过将(t,M)所涉及的函数在 $t=-1$ 处特化来简化，因为这将得到零函数。此外，我们将看到，对于本情形中的任意纽结 $K=T(p,q)\#T(a,b)$，其递推多项式 $\alpha_{\mathrm{K}}(t,\mathrm{M},\mathrm{L})$在 $t=-1$处求值后含有涉及变量L 的重因子。

公式（3.2）在第3 节中当 $pq = ab$时仍然成立；也就是说，我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{L}^2 - \mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)\frac{\mathrm{M}^{3ab}t^{6ab}}{\delta(a,b,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2 - \mathrm{M}^{-4ab}t^{-8ab}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)\\
&= \left(\frac{\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\delta(p,q,n+2)}{\delta(a,b,n+2)} - \frac{\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\delta(p,q,n)}{\delta(a,b,n)}\right)J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)\\
&\quad + \frac{\mathrm{M}^{-ab}t^{-2ab}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n)}{\delta(a,b,n+2)} + \mathrm{M}^{ab}t^{6ab}\delta(p,q,n+2).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

我们想要证明该函数

$$\begin{aligned}
f(t,\mathrm{M}) &= \frac{\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\delta(p,q,n+2)}{\delta(a,b,n+2)} - \frac{\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\delta(p,q,n)}{\delta(a,b,n)}\\
&= \frac{(\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n) - \delta(p,q,n)\delta(a,b,n+2))}{\mathrm{M}^{2ab}t^{4ab}\delta(a,b,n+2)\delta(a,b,n)}
\end{aligned}$$

不是零函数，尽管 $f(-1,\mathrm{M}) = 0$。我们可以将 $f(t,\mathrm{M})$表示为

$$f(t,\mathrm{M}) = \frac{\phi(t,\mathrm{M})}{\psi(t,\mathrm{M})} \tag{5.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
\phi(t,\mathrm{M}) &= (t^2 - t^{-2})^2\left(\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n) - \delta(p,q,n)\delta(a,b,n+2)\right),\\
\psi(t,\mathrm{M}) &= (t^2 - t^{-2})^2\mathrm{M}^{2ab}t^{4ab}\delta(a,b,n+2)\delta(a,b,n).
\end{aligned}$$

注意，$\lim_{t\to -1}\phi(t,\mathrm{M}) = 0$ 且$\lim_{t\to -1}\psi(t,\mathrm{M}) \neq 0$。为了证明 $f(t,\mathrm{M})$非零，只需证明：**引理5.1.** $\phi(t,\mathrm{M})$ 不是零函数。

证明。由(2.8)，我们有

$$\begin{aligned}
\phi(t,\mathrm{M}) &= (t^2 - t^{-2})^2\left(\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n) - \delta(p,q,n)\delta(a,b,n+2)\right)\\
&= (\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+2} + \mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+2} - \mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-2} - \mathrm{M}^{p-q}t^{6(p-q)-2})\\
&\quad (\mathrm{M}^{a+b}t^{2(a+b)+2} + \mathrm{M}^{-a-b}t^{-2(a+b)+2} - \mathrm{M}^{b-a}t^{2(b-a)-2} - \mathrm{M}^{a-b}t^{2(a-b)-2})\\
&\quad - (\mathrm{M}^{p+q}t^{2(p+q)+2} + \mathrm{M}^{-p-q}t^{-2(p+q)+2} - \mathrm{M}^{q-p}t^{2(q-p)-2} - \mathrm{M}^{p-q}t^{2(p-q)-2})\\
&\quad (\mathrm{M}^{a+b}t^{6(a+b)+2} + \mathrm{M}^{-a-b}t^{-6(a+b)+2} - \mathrm{M}^{b-a}t^{6(b-a)-2} - \mathrm{M}^{a-b}t^{6(a-b)-2})
\end{aligned}$$

我们只需证明这个劳朗多项式

$$\begin{aligned}
\phi(t,t^{2n}) &= (t^{2(p+q)(n+3)+2} + t^{-2(p+q)(n+3)+2} - t^{2(q-p)(n+3)-2} - t^{-2(q-p)(n+3)-2})\\
&\quad (t^{2(a+b)(n+1)+2} + t^{-2(a+b)(n+1)+2} - t^{2(a-b)(n+1)-2} - t^{-2(a-b)(n+1)-2})\\
&\quad - (t^{2(p+q)(n+1)+2} + t^{-2(p+q)(n+1)+2} - t^{2(q-p)(n+1)-2} - t^{-2(q-p)(n+1)-2})\\
&\quad (t^{2(a+b)(n+3)+2} + t^{-2(a+b)(n+3)+2} - t^{2(a-b)(n+3)-2} - t^{-2(a-b)(n+3)-2})
\end{aligned}$$

i不是零函数。考察该多项式的次数即可看出这一点。

事实上，先假设 p 为正，因此 a也为正，并且我们可以假设 $p > a$。在上述 $\phi(t,\ t^{2n})$ 的表达式中，第一个乘积的最低次数为 $-2(p+q)(n+3) + 2 - 2(a+b)(n+1) + 2$，第二个乘积的最低次数为 $-2(p+q)(n+1) + 2 - 2(a+b)(n+3) + 2$。它们的差为

$$4(a+b) - 4(p+q) = 4(a+b-p-\frac{ab}{p}) = \frac{4(pa+pb-p^2-ab)}{p} = \frac{4(p-a)(b-p)}{p} < 0 \tag{5.3}$$

因为 $p > a > b > 0$。因此，$\phi(t,\ t^{2n})$ 的最低次数为 $-2(p+q)(n+3) + 2 - 2(a+b)(n+1) + 2 < 0$。现在假设 $p < 0$，因此 a 也成立，并且我们可以假设 $p < a$。那么，第一个乘积的最高次数为 $2(q-p)(n+3) - 2 + 2(b-a)(n+1) - 2$，而第二个乘积的最高次数为

$2(q-p)(n+1)\ -2+4(b-a)(n+3)\ -2$。两者之差为

$$4(q-p)-4(b-a)=4(\frac{ab}{p}-p-b+a)=\frac{4(ab-p^2-pb+pa)}{p}=\frac{4(b+p)(a-p)}{p}>0 \tag{5.4}$$

因为 $p<a<-b<0$。因此， $\phi(t,t^{2n})$ 的最高次数为 $2(q-p)(n+3)\ -2+2(b-a)(n+1)\ -2>0$.□

既然 $f(t,\mathrm{M})\neq 0$，我们可以将算子 $(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab})f^{-1}(t,\mathrm{M})$ 从左侧作用于 (5.1)，得到

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab})f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)\frac{\mathrm{M}^{3ab}t^{6ab}}{\delta(a,b,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4ab}t^{-8ab}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n)\\
&=(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab})J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab})f^{-1}(t,\mathrm{M})\frac{\mathrm{M}^{-ab}t^{-2ab}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n)}{\delta(a,b,n+2)}+\mathrm{M}^{ab}t^{6ab}\delta(p,q,n+2)\\
&=\mathrm{M}^{ab}t^{-2ab}\delta(a,b,n)+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\frac{\mathrm{M}^{-ab}t^{-6ab}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+2)}{\delta(a,b,n+4)}+\mathrm{M}^{ab}t^{10ab}\delta(p,q,n+4)\right)\\
&\ -\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\frac{\mathrm{M}^{-ab}t^{-2ab}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n)}{\delta(a,b,n+2)}+\mathrm{M}^{ab}t^{6ab}\delta(p,q,n+2)\right).
\end{aligned}$$

令 $g(t,\mathrm{M})$ 为上一个等式右侧的函数。由于 $\lim_{t\to-1}(t^2-t^{-2})g(t,\mathrm{M})=\infty$ (见 (3.4))，因此 (t,M) 非零。因此，

$\alpha(t,\ \mathrm{M},\ \mathrm{L})$

$$\begin{aligned}
&=(\mathrm{L}-1)\frac{1}{(t^2-t^{-2})\,g(t,\mathrm{M})}\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)\frac{\mathrm{M}^{3ab}t^{6ab}}{\delta(a,b,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4ab}t^{-8ab}[n]\right)\\
&=(\mathrm{L}-1)\frac{f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})}{(t^2-t^{-2})\,g(t,\mathrm{M})}\left(\mathrm{L}^2-\frac{f^{-1}(t,\mathrm{M})}{f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})}\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\right)\frac{\mathrm{M}^{3ab}t^{6ab}}{\delta(a,b,n)}\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4ab}t^{-8ab}[n]\right)
\end{aligned}$$

是 $J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,b)}}(n)$ 的湮灭子，其中第二个等式由乘积公式 (1.3) 得出。计算 $\alpha(t$
$,\mathrm{M},\mathrm{L})$ 在 $t=-1$，我们需要以下引理:

引理 5.2. 极限 $\lim_{t\to-1}\frac{f^{-1}(t,\mathrm{M})}{((t,\mathrm{M})\,f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})}$
$=1$.

证明。由（5.2）及其后的注释可得

$$\lim_{t\to-1}\frac{f^{-1}(t,\mathrm{M})}{f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})}=\lim_{t\to-1}\frac{f(t,t^4\mathrm{M})}{f(t,\mathrm{M})}=\lim_{t\to-1}\frac{\phi(t,t^4\mathrm{M})\psi(t,\mathrm{M})}{\psi(t,t^4\mathrm{M})\phi(t,\mathrm{M})}=\lim_{t\to-1}\frac{\phi(t,t^4\mathrm{M})}{\phi(t,\mathrm{M})}.$$

应用洛必达法则（将M 视为独立变量），得到

$$\lim_{t\to-1}\frac{\phi(t,t^4\mathrm{M})}{\phi(t,\mathrm{M})}=\lim_{t\to-1}\frac{\frac{\partial\phi(t,t^4\mathrm{M})}{\partial t}}{\frac{\partial\phi(t,\mathrm{M})}{\partial t}}.$$

Now

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to-1}\frac{\partial\phi(t,\mathrm{M})}{\partial t}\\
&=\lim_{t\to-1}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\left(\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+2}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+2}-\mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-2}-\mathrm{M}^{p-q}t^{6(p-q)-2}\right)\\
&\qquad\left(\mathrm{M}^{a+b}t^{2(a+b)+2}+\mathrm{M}^{-a-b}t^{-2(a+b)+2}-\mathrm{M}^{b-a}t^{2(b-a)-2}-\mathrm{M}^{a-b}t^{2(a-b)-2}\right)\\
&\qquad-\left(\mathrm{M}^{p+q}t^{2(p+q)+2}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-2(p+q)+2}-\mathrm{M}^{q-p}t^{2(q-p)-2}-\mathrm{M}^{p-q}t^{2(p-q)-2}\right)\\
&\qquad\left(\mathrm{M}^{a+b}t^{6(a+b)+2}+\mathrm{M}^{-a-b}t^{-6(a+b)+2}-\mathrm{M}^{b-a}t^{6(b-a)-2}-\mathrm{M}^{a-b}t^{6(a-b)-2}\right)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to -1}\Big\{\Big[(6p+6q+2)\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+1}+(-6p-6q+2)\mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+1}\\
&\qquad -(6q-6p-2)\mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-3}-(6p-6q-2)\mathrm{M}^{p-q}t^{6(p-q)-3}\Big]\\
&\qquad \Big(\mathrm{M}^{a+b}t^{2(a+b)+2}+\mathrm{M}^{-a-b}t^{-2(a+b)+2}-\mathrm{M}^{b-a}t^{2(b-a)-2}-\mathrm{M}^{a-b}t^{2(a-b)-2}\Big)\\
&\quad +\Big(\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+2}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+2}-\mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-2}-\mathrm{M}^{p-q}t^{6(p-q)-2}\Big)\\
&\qquad \Big[(2a+2b+2)\mathrm{M}^{a+b}t^{2(a+b)+1}+(-2a-2b+2)\mathrm{M}^{-a-b}t^{-2(a+b)+1}\\
&\qquad\quad -(2b-2a-2)\mathrm{M}^{b-a}t^{2(b-a)-3}-(2a-2b-2)\mathrm{M}^{a-b}t^{2(a-b)-3}\Big]\\
&\quad -\Big[(2p+2q+2)\mathrm{M}^{p+q}t^{2(p+q)+1}+(-2p-2q+2)\mathrm{M}^{-p-q}t^{-2(p+q)+1}\\
&\qquad\quad -(2q-2p-2)\mathrm{M}^{q-p}t^{2(q-p)-3}-(2p-2q-2)\mathrm{M}^{p-q}t^{2(p-q)-3}\Big]\\
&\qquad\quad \Big(\mathrm{M}^{a+b}t^{6(a+b)+2}+\mathrm{M}^{-a-b}t^{-6(a+b)+2}-\mathrm{M}^{b-a}t^{6(b-a)-2}-\mathrm{M}^{a-b}t^{6(a-b)-2}\Big)\\
&\qquad -\Big(\mathrm{M}^{p+q}t^{2(p+q)+2}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-2(p+q)+2}-\mathrm{M}^{q-p}t^{2(q-p)-2}-\mathrm{M}^{p-q}t^{2(p-q)-2}\Big)\\
&\qquad\quad \Big[(6a+6b+2)\mathrm{M}^{a+b}t^{6(a+b)+1}+(-6a-6b+2)\mathrm{M}^{-a-b}t^{-6(a+b)+1}\\
&\qquad\quad\quad -(6b-6a-2)\mathrm{M}^{b-a}t^{6(b-a)-3}-(6a-6b-2)\mathrm{M}^{a-b}t^{6(a-b)-3}\Big]\Big\}\\
&= \big[-(6p+6q+2)\mathrm{M}^{p+q}-(-6p-6q+2)\mathrm{M}^{-p-q}+(6q-6p-2)\mathrm{M}^{q-p}+(6p-6q-2)\mathrm{M}^{p-q}\big]\\
&\quad \big(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}\big)+\big(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}\big)\\
&\quad \big[-(2a+2b+2)\mathrm{M}^{a+b}-(-2a-2b+2)\mathrm{M}^{-a-b}+(2b-2a-2)\mathrm{M}^{b-a}+(2a-2b-2)\mathrm{M}^{a-b}\big]\\
&- \big[-(2p+2q+2)\mathrm{M}^{p+q}-(-2p-2q+2)\mathrm{M}^{-p-q}+(2q-2p-2)\mathrm{M}^{q-p}+(2p-2q-2)\mathrm{M}^{p-q}\big]\\
&\quad \big(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}\big)-\big(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}\big)\\
&\quad \big[-(6a+6b+2)\mathrm{M}^{a+b}-(-6a-6b+2)\mathrm{M}^{-a-b}+(6b-6a-2)\mathrm{M}^{b-a}+(6a-6b-2)\mathrm{M}^{a-b}\big]\\
&= \big(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}\big)\\
&\quad \big[-(4p+4q)\mathrm{M}^{p+q}+(4p+4q)\mathrm{M}^{-p-q}+(4q-4p)\mathrm{M}^{q-p}+(4p-4q)\mathrm{M}^{p-q}\big]\\
&+ \big(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}\big)\\
&\quad \big[(4a+4b)\mathrm{M}^{a+b}+(-4a-4b)\mathrm{M}^{-a-b}-(4b-4a)\mathrm{M}^{b-a}-(4a-4b)\mathrm{M}^{a-b}\big]
\end{aligned}
$$

它非零。事实上，当 $p>0$ 因此 $a>0$时，我们可以假设 $p>a$。该多项式的最高次数项为 $-4(p+q-a-b)\mathrm{M}^{p+q+a+b}$，由（ $p+q\neq a+b$ 5.3）可知它非零。类似地，当 $p<0$ 因此 $a<0$时，我们可以假设 $p<a$；该多项式的最高次数项为 $-4(q-p-b+a)\mathrm{M}^{q-p+b-a}$，由（ $q-p\neq b-a$ 5.4）可知它非零。

另一方面，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to -1}\frac{\partial\phi(t,t^4\mathrm{M})}{\partial t}\\
&= \lim_{t\to -1}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Big(\mathrm{M}^{p+q}t^{10(p+q)+2}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-10(p+q)+2}-\mathrm{M}^{q-p}t^{10(q-p)-2}-\mathrm{M}^{p-q}t^{10(p-q)-2}\Big)\\
&\qquad \Big(\mathrm{M}^{a+b}t^{6(a+b)+2}+\mathrm{M}^{-a-b}t^{-6(a+b)+2}-\mathrm{M}^{b-a}t^{6(b-a)-2}-\mathrm{M}^{a-b}t^{6(a-b)-2}\Big)\\
&\quad -\Big(\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+2}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+2}-\mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-2}-\mathrm{M}^{p-q}t^{6(p-q)-2}\Big)\\
&\qquad \Big(\mathrm{M}^{a+b}t^{10(a+b)+2}+\mathrm{M}^{-a-b}t^{-10(a+b)+2}-\mathrm{M}^{b-a}t^{10(b-a)-2}-\mathrm{M}^{a-b}t^{10(a-b)-2}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to -1}\Big\{\Big[(10p+10q+2)\mathrm{M}^{p+q}t^{10(p+q)+1}+(-10p-10q+2)\mathrm{M}^{-p-q}t^{-10(p+q)+1}\\
&\quad -(10q-10p-2)\mathrm{M}^{q-p}t^{10(q-p)-3}-(10p-10q-2)\mathrm{M}^{p-q}t^{10(p-q)-3}\Big]\\
&\quad \Big(\mathrm{M}^{a+b}t^{6(a+b)+2}+\mathrm{M}^{-a-b}t^{-6(a+b)+2}-\mathrm{M}^{b-a}t^{6(b-a)-2}-\mathrm{M}^{a-b}t^{6(a-b)-2}\Big)\\
&\quad +\Big(\mathrm{M}^{p+q}t^{10(p+q)+2}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-10(p+q)+2}-\mathrm{M}^{q-p}t^{10(q-p)-2}-\mathrm{M}^{p-q}t^{10(p-q)-2}\Big)\\
&\quad \Big[(6a+6b+2)\mathrm{M}^{a+b}t^{6(a+b)+1}+(-6a-6b+2)\mathrm{M}^{-a-b}t^{-6(a+b)+1}\\
&\quad -(6b-6a-2)\mathrm{M}^{b-a}t^{6(b-a)-3}-(6a-6b-2)\mathrm{M}^{a-b}t^{6(a-b)-3}\Big]\\
&\quad -\Big[(6p+6q+2)\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+1}+(-6p-6q+2)\mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+1}\\
&\quad -(6q-6p-2)\mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-3}-(6p-6q-2)\mathrm{M}^{p-q}t^{6(p-q)-3}\Big]\\
&\quad \Big(\mathrm{M}^{a+b}t^{10(a+b)+2}+\mathrm{M}^{-a-b}t^{-10(a+b)+2}-\mathrm{M}^{b-a}t^{10(b-a)-2}-\mathrm{M}^{a-b}t^{10(a-b)-2}\Big)\\
&\quad -\Big(\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+2}+\mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+2}-\mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-2}-\mathrm{M}^{p-q}t^{6(p-q)-2}\Big)\\
&\quad \Big[(10a+10b+2)\mathrm{M}^{a+b}t^{10(a+b)+1}+(-10a-10b+2)\mathrm{M}^{-a-b}t^{-10(a+b)+1}\\
&\quad -(10b-10a-2)\mathrm{M}^{b-a}t^{10(b-a)-3}-(10a-10b-2)\mathrm{M}^{a-b}t^{10(a-b)-3}\Big]\Big\}\\
&= \big[-(10p+10q+2)\mathrm{M}^{p+q}-(-10p-10q+2)\mathrm{M}^{-p-q}+(10q-10p-2)\mathrm{M}^{q-p}+(10p-10q-2)\mathrm{M}^{p-q}\big]\\
&\big(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}\big)+\big(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}\big)\big[-(6a+6b+2)\mathrm{M}^{a+b}-(\\
&-6a-6b+2)\mathrm{M}^{-a-b}+(6b-6a-2)\mathrm{M}^{b-a}+(6a-6b-2)\mathrm{M}^{a-b}\big]+\big[-(6p+6q+2)\mathrm{M}^{p+q}-(\\
&-6p-6q+2)\mathrm{M}^{-p-q}+(6q-6p-2)\mathrm{M}^{q-p}+(6p-6q-2)\mathrm{M}^{p-q}\big]\big(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}\big)-\\
&(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})\big[-(10a+10b+2)\mathrm{M}^{a+b}-(-10a-10b+2)\mathrm{M}^{-a-b}+(10b-10a-2)\\
&\mathrm{M}^{b-a}+(10a-10b-2)\mathrm{M}^{a-b}\big]=\big(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b}\big)\big[-(4p+4q)\mathrm{M}^{p+q}+(4p+4q)\mathrm{M}\\
&{}^{-p-q}+(4q-4p)\mathrm{M}^{q-p}+(4p-4q)\mathrm{M}^{p-q}\big]+\big(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}\big)\big[(4a+4b)\mathrm{M}^{a+b}+(\\
&-4a-4b)\mathrm{M}^{-a-b}-(4b-4a)\mathrm{M}^{b-a}-(4a-4b)\mathrm{M}^{a-b}\big]=\lim_{t\to -1}\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\mathrm{M}).
\end{aligned}
$$

因此引理5.2 成立。 □

现在我们来计算

$$\lim_{t\to -1}\frac{f^{-1}(t,t^{4\mathrm{M}})}{(t^2-t^{-2})g(t,\mathrm{M})}.$$

应用引理 5.2 以及事实 $f(-1,\ \mathrm{M})=0$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to -1} f(t,t^{4\mathrm{M}})(t^2-t^{-2})g(t,\mathrm{M})\\
&= \lim_{t\to -1} f(t,t^{4\mathrm{M}})(t^2-t^{-2})\left[\mathrm{M}^{ab}t^{-2ab}\delta(a,b,n)+f^{-1}(t,t^{4\mathrm{M}})\left(\frac{\mathrm{M}^{-ab}t^{-6ab}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+2)}{\delta(a,b,n+4)}\right.\right.\\
&\left.\left.+\ \mathrm{M}^{ab}t^{10ab}\delta(p,q,n+4)\right)-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\frac{\mathrm{M}^{-ab}t^{-2ab}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n)}{\delta(a,b,n+2)}+\mathrm{M}^{ab}t^{6ab}\delta(p,q,n+2)\right)\right]\\
&= \lim_{t\to -1}(t^2-t^{-2})\left[\left(\frac{\mathrm{M}^{-ab}t^{-6ab}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+2)}{\delta(a,b,n+4)}+\mathrm{M}^{ab}t^{10ab}\delta(p,q,n+4)\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$-\mathrm{M}^{-2ab}t^{-4ab}\left(\frac{\mathrm{M}^{-ab}t^{-2ab}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n)}{\delta(a,b,n+2)}+\mathrm{M}^{ab}t^{6ab}\delta(p,q,n+2)\right)\Bigg]$$
$$=(1+\mathrm{M}^{-2ab})(\mathrm{M}^{-ab}+\mathrm{M}^{ab})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}).$$

因此

$$\lim_{t\to-1}\frac{f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})}{(t^2-t^{-2})g(t,\mathrm{M})}=\frac{1}{(1+\mathrm{M}^{-2ab})(\mathrm{M}^{-ab}+\mathrm{M}^{ab})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})}.$$

因此,

$$\alpha(-1,\mathrm{M},\mathrm{L})=a(\mathrm{M})(\mathrm{L}-1)(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab})(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab})(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4ab})$$

其中

$$a(\mathrm{M})=\frac{\mathrm{M}^{3ab}(\mathrm{M}-\mathrm{M}^{-1})}{(1+\mathrm{M}^{-2ab})(\mathrm{M}^{-ab}+\mathrm{M}^{ab})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})(\mathrm{M}^{a+b}+\mathrm{M}^{-a-b}-\mathrm{M}^{b-a}-\mathrm{M}^{a-b})}$$

是 M 的良定义非零函数。显然，$(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2ab})$ 是 $\alpha(-1,\mathrm{M},\mathrm{L})$ 的一个重复因子；删去该因子后，$\alpha(-1,\mathrm{M},\mathrm{L})$ 等于 A-多项式 $T(p,q)\#T(a,b)$（见引理 2.1 (ii)），相差一个仅依赖于 M 的非零因子。

现在我们证明，7 是所有非零湮灭子中 L-次数的最小值，其中湮灭子作用于$J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)$。因此，设

$$D_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+6)+D_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+5)+D_4J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+4)+D_3J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+3)$$
$$+D_2J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+2)+D_1J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}=0$$

对于某个 $D_i\in\mathbb{Q}(t,\mathrm{M})$，$i=0,1,\ldots,6$。我们需要证明所有 D_i 都必须为零。

请注意，在第3节中，对

$$D_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+6)+D_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+5)+D_4J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+4)+D_3J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+3)$$
$$+D_2J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+2)+D_1J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}$$
$$=E_6J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n+1)+E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,b)}}(n)+E_4J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+E_3J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+E_2J_{\mathrm{T(a,b)}}(n+1)$$
$$+E_1J_{\mathrm{T(a,b)}}(n)+E_0$$

在 $pq=ab$时仍然成立，引理3.1也同样成立；也就是说，我们必须有 $E_i=0$ 对所有 $i=0$、1、.....、6 均成立。然而，当 $pq=ab$时，对于断言 $E_i=0$ 对所有 i 均成立 $D_i=0$ 对所有 i 均成立的论证需要做一些修改，因为在 $t=-1$ 处对系数进行特化会使某些方程线性相关。

将 $pq=ab$ 代入方程组 $E_i=0$、$i=0$、1、.....、6（在第 3 节中得到），并化简 $E_1=0$与 $E_0=0$（如第 3 节所述），我们得到

$$E_6=\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-8ab(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-8ab(n+2)}[n+1]+D_1=0,$$
$$E_5=\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-8ab(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-8ab(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]t^{-8ab(n+1)}[n]+D_0=0,$$
$$E_4=\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-8ab(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-6ab(n+2)}\delta(a,b,n+1)+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-6ab(n+4)}\delta(a,b,n+3)t^{-4ab(n+2)}$$
$$=\left(\frac{t^{-14abn-44ab}\delta(a,b,n+1)+t^{-10abn-32ab}\delta(a,b,n+3)}{[n+5]}\right)D_5+\frac{t^{-6ab(n+2)}\delta(a,b,n+1)}{[n+3]}D_3=0,$$
$$E_3=\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-8ab(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-8ab(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right]t^{-6ab(n+1)}\delta(a,b,n)$$
$$+\left[\left(\frac{D_6}{[n+6]}t^{-8ab(n+5)}+\frac{D_4}{[n+4]}\right)t^{-6ab(n+3)}\delta(a,b,n+2)\right.$$
$$\left.+\frac{D_6}{[n+6]}t^{-6ab(n+5)}\delta(a,b,n+4)t^{-4ab(n+3)}\right]t^{-4ab(n+1)}$$

$$= \left(\frac{t^{-22abn-70ab}\delta(a,b,n) + t^{-18abn-62ab}\delta(a,b,n+2) + t^{-14abn-46ab}\delta(a,b,n+4)}{[n+6]} \right) D_6$$
$$+ \left(\frac{t^{-14abn-30ab}\delta(a,b,n) + t^{-10abn-22ab}\delta(a,b,n+2)}{[n+4]} \right) D_4 + \frac{t^{-6ab(n+1)}\delta(a,b,n)}{[n+2]} D_2 = 0,$$

$$E_2 = \left(\frac{D_5}{[n+5]} t^{-8ab(n+4)} + \frac{D_3}{[n+3]} \right) t^{-6ab(n+2)}\delta(p,q,n+1) + \frac{D_5}{[n+5]} t^{-6ab(n+4)}\delta(p,q,n+3) t^{-4ab(n+2)}$$
$$= \left(\frac{t^{-14abn-44ab}\delta(p,q,n+1) + t^{-10abn-32ab}\delta(p,q,n+3)}{[n+5]} \right) D_5 + \frac{t^{-6ab(n+2)}\delta(p,q,n+1)}{[n+3]} D_3 = 0,$$

$$E_1 = \left[\left(\frac{D_6}{[n+6]} t^{-8ab(n+5)} + \frac{D_4}{[n+4]} \right) t^{-8ab(n+3)} + \frac{D_2}{[n+2]} \right] t^{-6ab(n+1)}\delta(p,q,n)$$
$$+ \left[\left(\frac{D_6}{[n+6]} t^{-8ab(n+5)} + \frac{D_4}{[n+4]} \right) t^{-6ab(n+3)}\delta(p,q,n+2) + \frac{D_6}{[n+6]} t^{-6ab(n+5)}\delta(p,q,n+4) t^{-4ab(n+3)} \right] t^{-4ab(n+1)} = 0$$
$$\longrightarrow (\mathrm{M}^{-8ab} + \mathrm{M}^{-6ab} + \mathrm{M}^{-4ab}) D_6 + (\mathrm{M}^{-4ab} + \mathrm{M}^{-2ab}) D_4 + D_2 = 0.$$

$$E_0 = \left[\left(\frac{D_6}{[n+6]} t^{-8ab(n+5)} + \frac{D_4}{[n+4]} \right) t^{-8ab(n+3)} + \frac{D_2}{[n+2]} \right] t^{-4ab(n+1)}\delta(p,q,n)\delta(a,b,n)$$
$$+ \left[\left(\frac{D_6}{[n+6]} t^{-8ab(n+5)} + \frac{D_4}{[n+4]} \right) t^{-6ab(n+3)}\delta(a,b,n+2) \right.$$
$$\left. + \frac{D_6}{[n+6]} t^{-6ab(n+5)}\delta(a,b,n+4) t^{-4ab(n+3)} \right] t^{-2ab(n+1)}\delta(p,q,n)$$
$$+ \left[\left(\frac{D_6}{[n+6]} t^{-8ab(n+5)} + \frac{D_4}{[n+4]} \right) t^{-6ab(n+3)}\delta(p,q,n+2) \right.$$
$$\left. + \frac{D_6}{[n+6]} t^{-6ab(n+5)}\delta(p,q,n+4) t^{-4ab(n+3)} \right] t^{-2ab(n+1)}\delta(a,b,n)$$
$$+ \left(\frac{D_6}{[n+6]} t^{-8ab(n+5)} + \frac{D_4}{[n+4]} \right) t^{-4ab(n+3)}\delta(p,q,n+2)\delta(a,b,n+2)$$
$$+ \left(\frac{D_5}{[n+5]} t^{-8ab(n+4)} + \frac{D_3}{[n+3]} \right) t^{-4ab(n+2)}\delta(p,q,n+1)\delta(a,b,n+1)$$
$$+ \frac{D_6}{[n+6]} t^{-6ab(n+5)}\delta(a,b,n+4) t^{-2ab(n+3)}\delta(p,q,n+2) + \frac{D_6}{[n+6]} t^{-6ab(n+5)}\delta(p,q,n+4) t^{-2ab(n+3)}\delta(a,b,n+2)$$
$$+ \frac{D_6}{[n+6]} t^{-4ab(n+5)}\delta(p,q,n+4)\delta(a,b,n+4) + \frac{D_5}{[n+5]} t^{-6ab(n+4)}\delta(a,b,n+3) t^{-2ab(n+2)}\delta(p,q,n+1)$$
$$+ \frac{D_5}{[n+5]} t^{-6ab(n+4)}\delta(p,q,n+3) t^{-2ab(n+2)}\delta(a,b,n+1) + \frac{D_5}{[n+5]} t^{-4ab(n+4)}\delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+3) = 0$$
$$\longrightarrow (\mathrm{M}^{-8ab} + 2\mathrm{M}^{-6ab} + 3\mathrm{M}^{-4ab} + 2\mathrm{M}^{-2ab} + 1) D_6 + (\mathrm{M}^{-4ab} + 2\mathrm{M}^{-2ab} + 1) D_5$$
$$+ (\mathrm{M}^{-4ab} + 2\mathrm{M}^{-2ab} + 1) D_4 + D_3 + D_2 = 0.$$

The determinant of the coefficient matrix for the system $E_4 = 0$ and $E_2 = 0$ (in variables D_5 and D_3) is

$$\frac{\left(t^{-14abn-44ab}\delta(a,b,n+1) + t^{-10abn-32ab}\delta(a,b,n+3)\right) t^{-6ab(n+2)}\delta(p,q,n+1)}{[n+5][n+3]}$$
$$- \frac{\left(t^{-14abn-44ab}\delta(p,q,n+1) + t^{-10abn-32ab}\delta(p,q,n+3)\right) t^{-6ab(n+2)}\delta(a,b,n+1)}{[n+5][n+3]}$$
$$= \frac{t^{-16abn-44ab}\left(\delta(a,b,n+3)\delta(p,q,n+1) - \delta(p,q,n+3)\delta(a,b,n+1)\right)}{[n+5][n+3]},$$

由引理 5.1 （其中我们将 n 替换为 $n+1$）可知其非零。由此可得 $D_3 = D_5 = 0$。将这些代入 $E_6 = 0$，我们得到 $D_1 = 0$。

根据化简后的 $E_1=0$，我们得到 $D_2=-(\mathrm{M}^{-8ab}+\mathrm{M}^{-6ab}+\mathrm{M}^{-4ab})D_6-(\mathrm{M}^{-4ab}+\mathrm{M}^{-2ab})D_4$。将其代入 $E_3=0$ 和化简后的 $E_0=0$，我们得到

$$\left(\frac{t^{-22abn-70ab}\delta(a,b,n)+t^{-18abn-62ab}\delta(a,b,n+2)+t^{-14abn-46ab}\delta(a,b,n+4)}{[n+6]}\right.$$
$$\left.-\frac{t^{-6ab(n+1)}\delta(a,b,n)\left(\mathrm{M}^{-8ab}+\mathrm{M}^{-6ab}+\mathrm{M}^{-4ab}\right)}{[n+2]}\right)D_6$$
$$+\left(\frac{t^{-14abn-30ab}\delta(a,b,n)+t^{-10abn-22ab}\delta(a,b,n+2)}{[n+4]}-\frac{t^{-6ab(n+1)}\delta(a,b,n)\left(\mathrm{M}^{-4ab}+\mathrm{M}^{-2ab}\right)}{[n+2]}\right)D_4=0$$

and

$$\left(\mathrm{M}^{-6ab}+2\mathrm{M}^{-4ab}+2\mathrm{M}^{-2ab}+1\right)D_6+\left(\mathrm{M}^{-2ab}+1\right)D_4=0.$$

这两个方程的系数矩阵的行列式为

$$\left(\frac{t^{-22abn-70ab}\delta(a,b,n)+t^{-18abn-62ab}\delta(a,b,n+2)+t^{-14abn-46ab}\delta(a,b,n+4)}{[n+6]}\right.$$
$$\left.-\frac{t^{-6ab(n+1)}\delta(a,b,n)\left(\mathrm{M}^{-8ab}+\mathrm{M}^{-6ab}+\mathrm{M}^{-4ab}\right)}{[n+2]}\right)\left(\mathrm{M}^{-2ab}+1\right)$$
$$-\left(\frac{t^{-14abn-30ab}\delta(a,b,n)+t^{-10abn-22ab}\delta(a,b,n+2)}{[n+4]}-\frac{t^{-6ab(n+1)}\delta(a,b,n)\left(\mathrm{M}^{-4ab}+\mathrm{M}^{-2ab}\right)}{[n+2]}\right)$$
$$\left(\mathrm{M}^{-6ab}+2\mathrm{M}^{-4ab}+2\mathrm{M}^{-2ab}+1\right)$$
$$=\frac{\left(t^{-22abn-70ab}\delta(a,b,n)+t^{-18abn-62ab}\delta(a,b,n+2)+t^{-14abn-46ab}\delta(a,b,n+4)\right)\left(\mathrm{M}^{-2ab}+1\right)}{[n+6]}$$
$$-\frac{\left(t^{-14abn-30ab}\delta(a,b,n)+t^{-10abn-22ab}\delta(a,b,n+2)\right)\left(\mathrm{M}^{-6ab}+2\mathrm{M}^{-4ab}+2\mathrm{M}^{-2ab}+1\right)}{[n+4]}$$
$$+\frac{t^{-6ab(n+1)}\delta(a,b,n)\left(\mathrm{M}^{-8ab}+2\mathrm{M}^{-6ab}+2\mathrm{M}^{-4ab}+\mathrm{M}^{-2ab}\right)}{[n+2]}.$$

引理5.3。前述行列式函数非零。

证明。该函数可表示为分式 $\phi(t,\mathrm{M})\ \psi(t,\mathrm{M})$，其中

$$\phi(t,\mathrm{M})=(t^2-t^{-2})^3\Big[[n+4][n+2]\left(t^{-22abn-70ab}\delta(a,b,n)+t^{-18abn-62ab}\delta(a,b,n+2)+t^{-14abn-46ab}\delta(a,b,n+4)\right)\left(\mathrm{M}^{-2ab}+1\right)-[n+6][n+2]\left(t^{-14abn-30ab}\delta(a,b,n)+t^{-10abn-22ab}\delta(a,b,n+2)\right)\left(\mathrm{M}^{-6ab}+2\mathrm{M}^{-4ab}+2\mathrm{M}^{-2ab}+1\right)+[n+6][n+4]t^{-6ab(n+1)}\delta(a,b,n)\left(\mathrm{M}^{-8ab}+2\mathrm{M}^{-6ab}+2\mathrm{M}^{-4ab}+\mathrm{M}^{-2ab}\right)\Big]$$

and

$$\psi(t,\mathrm{M})=(t^2-t^{-2})^3[n+6][n+4][n+2].$$

由于 $\psi(t,\mathrm{M})$ 非零，因此只需证明 $\phi(t,\mathrm{M})$ 非零（尽管 $\phi(-1,\mathrm{M})=0$）。考察劳朗多项式 $\phi(t,t^{2n})$ 的次数即可看出这一点。

事实上，当 $a>0$ 时，$\phi(t,\mathrm{M})$ 的表达式中的第一个乘积（在将 M 替换为 t^{2n} 之后）的最低次数为 $-(4+26ab+2a+2b)n-10-70ab-2a-2b$，第二个乘积的最低次数为 $-(4+26ab+2a+2b)n-14-30ab-2a-2b$，第三个乘积的最低次数为 $-(4+22ab+2a+2b)n-18-2a-2b$。因此，$\phi(t,t^{2n})$ 的最低次数为 $-(4+26ab+2a+2b)n-10-70ab-2a-2b<0$。

类似地，当 $a<0$ 时， $\phi(t,t^{2n})$ 的第一个乘积的最高次数为 $-(4+26ab+2a-2b)n-14-70ab-2a+2b$，第二个乘积的最高次数为 $-(4+26ab+2a-2b)n-18-30ab-2a+2b$，第三个乘积的最高次数为 $-(4+22ab+2a-2b)n-22-2a+2b$。因此， $\phi(t,t^{2n})$ 的最高次数为 $-(4+26ab+2a-2b)n-14-70ab-2a+2b>0$。□

由引理5.3，可得 $D_6=D_4=0$，进而推出 $D_2=0$。再由 $E_5=0$，可得$D_0=0$。

6. Case $|p|>q>2$, $|a|>b=2$, $pq\neq 2a$, p,a have the same sign

该过程与第3节类似；唯一的区别在于使用了另一组公式。应用（2.3）、（2.7）和（2.6），可得

$$\begin{aligned}
&[n+2]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+2)=J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n+2)\\
&=\left(t^{-4pq(n+1)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\right)\\
&\quad\left(t^{-8a(n+1)}J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)-t^{-6a(n+1)}[2n+1]+t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\
&=t^{-(4pq+8a)(n+1)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&\quad+\left(t^{-(4pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(4pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&\quad+t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)+\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]\right.\\
&\quad\left.-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\\
&=t^{-(4pq+8a)(n+1)}[n]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)+\left(t^{-(4pq+2a)(n+1)}[2n+3]\right.\\
&\quad\left.-t^{-(4pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&\quad+\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)
\end{aligned}\tag{6.1}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2(pq+2a)}t^{-(4pq+8a)}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)\\
&=\left(t^{-(4pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(4pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&\quad+t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&\quad+\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n).
\end{aligned}\tag{6.2}$$

函数

$$\begin{aligned}
f(t,\mathrm{M})&=t^{-(4pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(4pq+6a)(n+1)}[2n+1]\\
&=\mathrm{M}^{-2pq-a}t^{-4pq-2a}\frac{\mathrm{M}^2t^6-\mathrm{M}^{-2}t^{-6}}{t^2-t^{-2}}-\mathrm{M}^{-2pq-3a}t^{-4pq-6a}\frac{\mathrm{M}^2t^2-\mathrm{M}^{-2}t^{-2}}{t^2-t^{-2}}
\end{aligned}$$

不为零，因为

$$\lim_{t\to-1}(t^2-t^{-2})f(t,\mathrm{M})=(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(\mathrm{M}^{-2pq-a}-\mathrm{M}^{-2pq-3a})\neq 0.\tag{6.3}$$

将算子 $(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq})f^{-1}(t,\mathrm{M})$从左侧作用于(6.2)的两边，然后应用(2.9)、(1.2)（将M 视为 t^{2n}），(2.7)和(2.6)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2(pq+2a)}t^{-(4pq+8a)}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&=\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&\quad+\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\\
&=\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n+2)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}f^{-1}(t,\mathrm{M})t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&\quad+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(t^{-(2pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(2pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\\
&=\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\\
&\quad\left(t^{-8a(n+1)}J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)-t^{-6a(n+1)}[2n+1]+t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}f^{-1}(t,\mathrm{M})t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&\quad+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(t^{-(2pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(2pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\\
&=\left(f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-8a}t^{-6pq-32a}\delta(p,q,n+2)-\mathrm{M}^{-3pq-4a}t^{-6pq-8a}f^{-1}(t,\mathrm{M})\delta(p,q,n)\right)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&\quad+\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)-f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-7a}t^{-6pq-30a}\delta(p,q,n+2)[2n+1]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-5a}t^{-6pq-26a}\delta(p,q,n+2)[2n+3]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-pq-a}t^{-6pq-6a}[2n+7]-\mathrm{M}^{-pq-3a}t^{-6pq-18a}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-pq-a}t^{-2pq-2a}[2n+3]-\mathrm{M}^{-pq-3a}t^{-2pq-6a}[2n+1]\right)\delta(p,q,n).
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

该函数

$$g(t,\mathrm{M})=f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-8a}t^{-6pq-32a}\delta(p,q,n+2)-\mathrm{M}^{-3pq-4a}t^{-6pq-8a}f^{-1}(t,\mathrm{M})\delta(p,q,n)$$

非零，因为由（6.3）和（2.8）可知

$$g(-1,\mathrm{M})=\frac{(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})(\mathrm{M}^{-pq-8a}-\mathrm{M}^{-3pq-4a})}{(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(\mathrm{M}^{-2pq-a}-\mathrm{M}^{-2pq-3a})}\neq 0 \tag{6.5}$$

因为 $pq\neq 2a$。

因此，我们可以从左侧将算子 $(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a})g^{-1}(t,\mathrm{M})$ 作用于 (6.4) 的两边，然后应用 (2.5) 和 (1.2)，得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}\right)g^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2(pq+2a)}t^{-(4pq+8a)}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&=\left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}\right)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)+\left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}\right)g^{-1}(t,\mathrm{M})\Big[\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)\\
&\quad-f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-7a}t^{-6pq-30a}\delta(p,q,n+2)[2n+1]+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-5a}t^{-6pq-26a}\delta(p,q,n+2)[2n+3]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-pq-a}t^{-6pq-6a}[2n+7]-\mathrm{M}^{-pq-3a}t^{-6pq-18a}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-pq-a}t^{-2pq-2a}[2n+3]-\mathrm{M}^{-pq-3a}t^{-2pq-6a}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\Big]\\
&=\mathrm{M}^{-a}[2n+1]+g^{-1}(t,t^2\mathrm{M})\Big[\mathrm{M}^{-pq}t^{-4pq}\delta(p,q,n+1)-f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-7a}t^{-8pq-44a}\delta(p,q,n+3)[2n+3]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-5a}t^{-8pq-36a}\delta(p,q,n+3)[2n+5]+f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-pq-a}t^{-8pq-8a}[2n+9]\right.\\
&\quad\left.-\mathrm{M}^{-pq-3a}t^{-8pq-24a}[2n+7]\right)\delta(p,q,n+3)-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-8pq}f^{-1}(t,t^2\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-pq-a}t^{-4pq-4a}[2n+5]\right.\\
&\quad\left.-\mathrm{M}^{-pq-3a}t^{-4pq-12a}[2n+3]\right)\delta(p,q,n+1)\Big]+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}g^{-1}(t,\mathrm{M})\Big[\mathrm{M}^{-pq}t^{-2pq}\delta(p,q,n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-7a}t^{-6pq-30a}\delta(p,q,n+2)[2n+1]+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-pq-5a}t^{-6pq-26a}\delta(p,q,n+2)[2n+3]\\
&+ f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-pq-a}t^{-6pq-6a}[2n+7]-\mathrm{M}^{-pq-3a}t^{-6pq-18a}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&- \mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-pq-a}t^{-2pq-2a}[2n+3]-\mathrm{M}^{-pq-3a}t^{-2pq-6a}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\Big].
\end{aligned}
$$

令 $h(t,\mathrm{M})$ 表示最后一个等式右边的函数。于是 $h(t,\mathrm{M})\neq 0$。事实上，结合 (6.5) 和 (6.3)，可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to -1}(t^2-t^{-2})h(t,\mathrm{M})\\
&=\mathrm{M}^{-a}(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})+\frac{\left(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2}\right)\left(\mathrm{M}^{-2pq-a}-\mathrm{M}^{-2pq-3a}\right)}{\left(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}\right)\left(\mathrm{M}^{-pq-8a}-\mathrm{M}^{-3pq-4a}\right)}\\
&\quad\left(\mathrm{M}^{-pq}+\frac{-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a}-\mathrm{M}^{-3pq-a}+\mathrm{M}^{-3pq-3a}}{\mathrm{M}^{-2pq-a}-\mathrm{M}^{-2pq-3a}}\right)\\
&\quad\left(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q}\right)\left(1+\mathrm{M}^{-2a}\right)\\
&=\mathrm{M}^{-a}(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})+\frac{(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})(1+\mathrm{M}^{-2a})}{\mathrm{M}^{-pq-8a}-\mathrm{M}^{-3pq-4a}}\\
&=\frac{(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(-\mathrm{M}^{-3pq-5a}+\mathrm{M}^{-pq-a})}{\mathrm{M}^{-pq-8a}-\mathrm{M}^{-3pq-4a}},
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

它是关于M 的良定义非零函数，因为 $pq\neq 2a$ 和 $pq\neq -2a$。因此，

$$
\begin{aligned}
\alpha(t,\mathrm{M},\mathrm{L})=(\mathrm{L}-1)\frac{1}{(t^2-t^{-2})h(t,\mathrm{M})}\left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}\right)g^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}t^{-4pq}\right)\\
f^{-1}(t,\mathrm{M})\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2(pq+2a)}t^{-(4pq+8a)}[n]\right)
\end{aligned}
$$

是$J_{\mathrm{T(p,q)}\#T(a,\ 2)}(n)$ 的L-次数为 6。此外，利用 (6.5)、(6.6)、(6.3)、(1.1) 和引理2.1(iv)，我们有

$$
\begin{aligned}
\alpha(-1,\mathrm{M},\mathrm{L})\ =&a(\mathrm{M})(\mathrm{L}-1)\left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}\right)\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2pq}\right)\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-2(pq+2a)}\right)\\
=&a(\mathrm{M})\mathrm{M}^{-4pq-6a}A_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(\mathrm{M},\mathrm{L})
\end{aligned}
$$

其中

$$
a(\mathrm{M})=\frac{1}{(-\mathrm{M}^{-3pq-5a}+\mathrm{M}^{-pq-a})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{-1})}
$$

是M中的良定义非零函数。

现在我们继续证明，在 $J_{\mathrm{T(p,q)}\#T(a,2)}(n)$ 的所有非零湮灭子中，6 是最小的L-次数。设 $D_5\mathrm{L}^5+D_4\mathrm{L}^4+D_3\mathrm{L}^3+D_2\mathrm{L}^2+D_1\mathrm{L}+D_0$ 是 $J_{\mathrm{T(p,q)}\#T(a,2)}(n)$ 的一个湮灭子，其中 $D_0,\dots,D_5\in\mathbb{Q}(t,\mathrm{M})$，也就是说，

$$
\begin{aligned}
&D_5J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+5)+D_4J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+4)+D_3J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+3)\\
&+D_2J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+2)+D_1J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n)=0.
\end{aligned}
$$

我们希望证明，对于所有 i，$D_i=0$。

反复应用 (6.1)、(2.7)、(2.6) 和 (2.4)，可得

$$
\begin{aligned}
&D_5J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+5)+D_4J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+4)+D_3J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+3)\\
&+D_2J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+2)+D_1J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&=\frac{D_5}{[n+5]}\Big[t^{-(4pq+8a)(n+4)}[n+3]J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n+3)+\Big(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]\\
&\quad-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\Big)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+3)+t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n+3)\\
&\quad+\left(t^{-(2pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(2pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)\delta(p,q,n+3)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{D_4}{[n+4]}\Big[t^{-(4pq+8a)(n+3)}[n+2]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+2)+\Big(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]\\
&\qquad -t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\Big)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2)+t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n+2)\\
&\qquad +\Big(t^{-(2pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(2pq+6a)(n+3)}[2n+5]\Big)\delta(p,q,n+2)\Big]\\
&+D_3J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+3)+D_2J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+2)+D_1J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)\\
=&\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}[n+3]+D_3\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+3)\\
&+\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}[n+2]+D_2\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+2)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\Big(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\Big)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+3)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n+3)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}\Big(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\Big)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+2)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n+2)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\Big(t^{-(2pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(2pq+6a)(n+4)}[2n+7]\Big)\delta(p,q,n+3)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}\Big(t^{-(2pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(2pq+6a)(n+3)}[2n+5]\Big)\delta(p,q,n+2)\\
&+D_1J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)\\
=&\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\Big[t^{-(4pq+8a)(n+2)}[n+1]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+1)\\
&\quad+\Big(t^{-(4pq+2a)(n+2)}[2n+5]-t^{-(4pq+6a)(n+2)}[2n+3]\Big)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+t^{-(2pq+8a)(n+2)}\delta(p,q,n+1)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n+1)\\
&\quad+\Big(t^{-(2pq+2a)(n+2)}[2n+5]\ -\ t^{-(2pq+6a)(n+2)}[2n+3]\Big)\delta(p,q,n+1)\Big]\\
&+\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)\Big[t^{-(4pq+8a)(n+1)}[n]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)\\
&\quad+\Big(t^{-(4pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(4pq+6a)(n+1)}[2n+1]\Big)J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&\quad+t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)+\Big(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]\ -\ t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\Big)\delta(p,q,n)\Big]\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\Big(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\Big)\Big(t^{-4pq(n+2)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)\Big)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\Big(t^{-8a(n+2)}J_{\mathrm{T(a,2)}}(n+1)-t^{-6a(n+2)}[2n+3]+t^{-2a(n+2)}[2n+5]\Big)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}\Big(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\Big)\Big(t^{-4pq(n+1)}J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\Big)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\Big(t^{-8a(n+1)}J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)-t^{-6a(n+1)}[2n+1]+t^{-2a(n+1)}[2n+3]\Big)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\Big(t^{-(2pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(2pq+6a)(n+4)}[2n+7]\Big)\delta(p,q,n+3)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}\Big(t^{-(2pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(2pq+6a)(n+3)}[2n+5]\Big)\delta(p,q,n+2)\\
&+D_1J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+1)+D_0J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(4pq+8a)(n+2)}[n+1]+D_1\right]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(4pq+8a)(n+1)}[n]+D_0\right]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\left(t^{-(4pq+2a)(n+2)}[2n+5]-t^{-(4pq+6a)(n+2)}[2n+3]\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)t^{-4pq(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)\left(t^{-(4pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(4pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)t^{-4pq(n+1)}\right]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+8a)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-8a(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(a,2))}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)t^{-8a(n+1)}\right]J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&+\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\left(t^{-(2pq+2a)(n+2)}[2n+5]-t^{-(2pq+6a)(n+2)}[2n+3]\right)\delta(p,q,n+1)\\
&+\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\left(-t^{-6a(n+2)}[2n+3]+t^{-2a(n+2)}[2n+5]\right)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\left(-t^{-6a(n+1)}[2n+1]+t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(2pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(2pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)\delta(p,q,n+3)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(2pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(2pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&= \left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(4pq+8a)(n+2)}[n+1]+D_1\right]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(4pq+8a)(n+1)}[n]+D_0\right]J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)\\
&+\left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\left(t^{-(4pq+2a)(n+2)}[2n+5]-t^{-(4pq+6a)(n+2)}[2n+3]\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)t^{-4pq(n+2)}\right]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)\\
&+\left[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)\left(t^{-(4pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(4pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)t^{-4pq(n+1)}\Bigg]J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)\\
&+\Bigg\{\Bigg[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+8a)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\\
&\quad+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-8a(n+2)}\Bigg]\left(-t^{-2a(2n+1)}\right)\\
&+\Bigg[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)\\
&\quad+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)t^{-8a(n+1)}\Bigg]\Bigg\}J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&+\Bigg[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+8a)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\\
&\quad+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-8a(n+2)}\Bigg]t^{-2an}[2n+1]\\
&+\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\left(t^{-(2pq+2a)(n+2)}[2n+5]-t^{-(2pq+6a)(n+2)}[2n+3]\right)\delta(p,q,n+1)\\
&+\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\left(-t^{-6a(n+2)}[2n+3]+t^{-2a(n+2)}[2n+5]\right)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\left(-t^{-6a(n+1)}[2n+1]+t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(2pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(2pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)\delta(p,q,n+3)\\
&+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(2pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(2pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&=E_5J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n+1)+E_4J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)+E_3J_{\mathrm{T(p,q)}}(n+1)+E_2J_{\mathrm{T(p,q)}}(n)+E_1J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)+E_0\cdot\#
\end{aligned}
$$

引理6.1。方程

$$E_5J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+1)+E_4J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n)+E_3J_{T(p,q)}(n+1)+E_2J_{T(p,q)}(n)+E_1J_{T(a,2)}(n)+E_0=0$$

推出 $E_i=0$ 对所有 i均成立。

这个引理的证明与引理3.5的证明完全相似。

现在，与第 3节中的做法类似，我们证明这个由 6 个齐次线性方程组成的方程组 $E_i=0$，$i=0$，1，……，5，含有 6 个变量 D_0，D_1，……，D_5，只有平凡解： $D_i=0$对所有 i均成立。

$$
\begin{aligned}
&E_5=\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(4pq+8a)(n+2)}[n+1]+D_1=0\\
&\longrightarrow\quad \mathrm{M}^{-4pq-8a}D_5+\mathrm{M}^{-2pq-4a}D_3+D_1=0,\\
&E_4=\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(4pq+8a)(n+1)}[n]+D_0=0\\
&\longrightarrow\quad \mathrm{M}^{-4pq-8a}D_4+\mathrm{M}^{-2pq-4a}D_2+D_0=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\left(t^{-(4pq+2a)(n+2)}[2n+5]-t^{-(4pq+6a)(n+2)}[2n+3]\right)\\
&\quad+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)t^{-4pq(n+2)}=0\\
&\longrightarrow\quad \left(\mathrm{M}^{-2pq-4a}+\mathrm{M}^{-2pq}\right)D_5+D_3=0,\\
E_2 &= \left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)\left(t^{-(4pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(4pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\\
&\quad+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)t^{-4pq(n+1)}=0\\
&\longrightarrow\quad \left(\mathrm{M}^{-2pq-4a}+\mathrm{M}^{-2pq}\right)D_4+D_2=0,\\
E_1 &= \left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+8a)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-8a(n+2)}\right]\left(-t^{-2a(2n+1)}\right)\\
&\quad+\left[\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(2pq+8a)(n+1)}\delta(p,q,n)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)t^{-8a(n+1)}\right]=0\\
&\longrightarrow\quad \left(-\mathrm{M}^{-2pq-6a}-\mathrm{M}^{-6a}\right)D_5+\left(\mathrm{M}^{-2pq-4a}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_4-\mathrm{M}^{-2a}D_3+D_2=0,\\
E_0 &= \left[\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)t^{-(2pq+8a)(n+2)}\delta(p,q,n+1)\right.\\
&\quad\left.+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)t^{-8a(n+2)}\right]t^{-2an}[2n+1]\\
&\quad+\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(4pq+8a)(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\left(t^{-(2pq+2a)(n+2)}[2n+5]-t^{-(2pq+6a)(n+2)}[2n+3]\right)\delta(p,q,n+1)\\
&\quad+\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(4pq+8a)(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)\left(t^{-(2pq+2a)(n+1)}[2n+3]-t^{-(2pq+6a)(n+1)}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\\
&\quad+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(4pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)t^{-2pq(n+2)}\delta(p,q,n+1)\\
&\quad+\frac{D_5}{[n+5]}t^{-(2pq+8a)(n+4)}\delta(p,q,n+3)\left(-t^{-6a(n+2)}[2n+3]+t^{-2a(n+2)}[2n+5]\right)\\
&\quad+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(4pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(4pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)t^{-2pq(n+1)}\delta(p,q,n)\\
&\quad+\frac{D_4}{[n+4]}t^{-(2pq+8a)(n+3)}\delta(p,q,n+2)\left(-t^{-6a(n+1)}[2n+1]+t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\
&\quad+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-(2pq+2a)(n+4)}[2n+9]-t^{-(2pq+6a)(n+4)}[2n+7]\right)\delta(p,q,n+3)\\
&\quad+\frac{D_4}{[n+4]}\left(t^{-(2pq+2a)(n+3)}[2n+7]-t^{-(2pq+6a)(n+3)}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)=0\\
&\longrightarrow\quad (\mathrm{M}^{-3pq-9a}+\mathrm{M}^{-pq-9a}+\mathrm{M}^{-3pq-5a}-\mathrm{M}^{-3pq-7a}+\mathrm{M}^{-3pq-a}-\mathrm{M}^{-3pq-3a}-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}\\
&\quad+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_5+(\mathrm{M}^{-3pq-5a}-\mathrm{M}^{-3pq-7a}+\mathrm{M}^{-3pq-a}-\mathrm{M}^{-3pq-3a}-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}\\
&\quad+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_4+(\mathrm{M}^{-pq-5a}+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_3+(\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_2=0.
\end{aligned}
$$

也就是说，线性方程组可化简为 $\mathbb{Z}[\mathrm{M}^{\pm1}]$ 上的下列方程组:

$$\mathrm{M}^{-4pq-8a}D_5+\mathrm{M}^{-2pq-4a}D_3+D_1=0,$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}^{-4pq-8a}D_4+\mathrm{M}^{-2pq-4a}D_2+D_0=0,\\
&\left(\mathrm{M}^{-2pq-4a}+\mathrm{M}^{-2pq}\right)D_5+D_3=0,\\
&\left(\mathrm{M}^{-2pq-4a}+\mathrm{M}^{-2pq}\right)D_4+D_2=0,\\
&\left(-\mathrm{M}^{-2pq-6a}-\mathrm{M}^{-6a}\right)D_5+\left(\mathrm{M}^{-2pq-4a}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_4-\mathrm{M}^{-2a}D_3+D_2=0,\\
&(\mathrm{M}^{-3pq-9a}+\mathrm{M}^{-pq-9a}+\mathrm{M}^{-3pq-5a}-\mathrm{M}^{-3pq-7a}+\mathrm{M}^{-3pq-a}-\mathrm{M}^{-3pq-3a}-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}\\
&+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_5+(\mathrm{M}^{-3pq-5a}-\mathrm{M}^{-3pq-7a}+\mathrm{M}^{-3pq-a}-\mathrm{M}^{-3pq-3a}-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}\\
&+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_4+(\mathrm{M}^{-pq-5a}+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_3+(\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_2=0.
\end{aligned}
$$

由第三和第四个方程可得 $D_3=-\left(\mathrm{M}^{-2pq-4a}+\mathrm{M}^{-2pq}\right)D_5$和 $D_2=-\left(\mathrm{M}^{-2pq-4a}+\mathrm{M}^{-2pq}\right)D_4$将它们代入第五和第六个方程，可得

$$
\begin{aligned}
&\left(-\mathrm{M}^{-6a}+\mathrm{M}^{-2pq-2a}\right)D_5+\left(\mathrm{M}^{-4a}-\mathrm{M}^{-2pq}\right)D_4=0,\\
&(\mathrm{M}^{-pq-9a}-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}-\mathrm{M}^{-pq-3a}+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-3pq-5a})D_5\\
&+(-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})D_4=0.
\end{aligned}
$$

这两个方程的行列式为

$$
\begin{aligned}
&\left(-\mathrm{M}^{-6a}+\mathrm{M}^{-2pq-2a}\right)(-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-pq-3a})\\
&-\left(\mathrm{M}^{-4a}-\mathrm{M}^{-2pq}\right)(\mathrm{M}^{-pq-9a}-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-5a}-\mathrm{M}^{-pq-3a}+\mathrm{M}^{-pq-a}-\mathrm{M}^{-3pq-5a})\\
&=\mathrm{M}^{-pq-13a}-\mathrm{M}^{-pq-11a}-\mathrm{M}^{-pq-7a}+\mathrm{M}^{-pq-9a}-\mathrm{M}^{-3pq-9a}+\mathrm{M}^{-3pq-7a}+\mathrm{M}^{-3pq-3a}-\mathrm{M}^{-3pq-5a}\\
&-\mathrm{M}^{-pq-13a}+\mathrm{M}^{-pq-11a}-\mathrm{M}^{-pq-9a}+\mathrm{M}^{-pq-7a}-\mathrm{M}^{-pq-5a}+\mathrm{M}^{-3pq-9a}\\
&+\mathrm{M}^{-3pq-9a}-\mathrm{M}^{-3pq-7a}+\mathrm{M}^{-3pq-5a}-\mathrm{M}^{-3pq-3a}+\mathrm{M}^{-3pq-a}-\mathrm{M}^{-5pq-5a}\\
&=-\mathrm{M}^{-pq-5a}+\mathrm{M}^{-3pq-9a}+\mathrm{M}^{-3pq-a}-\mathrm{M}^{-5pq-5a}=(\mathrm{M}^{-4a}-\mathrm{M}^{-2pq})(\mathrm{M}^{-3pq-5a}-\mathrm{M}^{-pq-a})
\end{aligned}
$$

由于 $pq\neq 2a$ 和 $pq\neq -2a$，它非零。因此， $D_5=D_4=0$，从而 $D_3=D_2=0$。再由前两个方程可得 $D_1=D_0=0$。

7. Case $|p|>q>2,\ |a|>b=2,\ pq=2a$

本节的处理方式与第5节类似。第6.4式（6 ）在$pq=2a$时仍然成立，从而得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4a}t^{-8a}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-8a}t^{-16a}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)\\
&=\left(f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-10a}t^{-44a}\delta(p,q,n+2)-\mathrm{M}^{-10a}t^{-20a}f^{-1}(t,\mathrm{M})\delta(p,q,n)\right)J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)\\
&\quad+\mathrm{M}^{-2a}t^{-4a}\delta(p,q,n)-f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-9a}t^{-42a}\delta(p,q,n+2)[2n+1]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-7a}t^{-38a}\delta(p,q,n+2)[2n+3]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-18a}[2n+7]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-30a}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-4a}t^{-8a}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-6a}[2n+3]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-10a}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f(t,\mathrm{M})&=\mathrm{M}^{-5a}t^{-10a}\frac{\mathrm{M}^2t^6-\mathrm{M}^{-2}t^{-6}}{t^2-t^{-2}}-\mathrm{M}^{-7a}t^{-14a}\frac{\mathrm{M}^2t^2-\mathrm{M}^{-2}t^{-2}}{t^2-t^{-2}}\\
&=\frac{\mathrm{M}^{-5a+2}t^{-10a+6}-\mathrm{M}^{-5a-2}t^{-10a-6}-\mathrm{M}^{-7a+2}t^{-14a+2}+\mathrm{M}^{-7a-2}t^{-14a-2}}{t^2-t^{-2}}
\end{aligned}
$$

它非零，因为

$$
\lim_{t\to -1}(t^2-t^{-2})f(t,\mathrm{M})=(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(\mathrm{M}^{-5a}-\mathrm{M}^{-7a})\neq 0.
$$

函数 $g(t,\mathrm{M}) = f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-10a}t^{-44a}\delta(p,q,n+2) - \mathrm{M}^{-10a}t^{-20a}f^{-1}(t,\mathrm{M})\delta(p,q,n)$ 是 $J_{\mathrm{T(a,2)}}(n)$ 的系数，且非零（但 $g(-1,\mathrm{M}) = 0$，参见 (6.5)）。事实上

$$\begin{aligned} & g(t,\mathrm{M}) \\ &= \frac{\mathrm{M}^{-10a}t^{-44a}\left(\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+2} + \mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+2} - \mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-2} - \mathrm{M}^{p-q}t^{-6(q-p)-2}\right)}{\mathrm{M}^{-5a+2}t^{-30a+14} - \mathrm{M}^{-5a-2}t^{-30a-14} - \mathrm{M}^{-7a+2}t^{-42a+10} + \mathrm{M}^{-7a-2}t^{-42a-10}} \\ &\quad - \frac{\mathrm{M}^{-10a}t^{-20a}\left(\mathrm{M}^{p+q}t^{2(p+q)+2} + \mathrm{M}^{-p-q}t^{-2(p+q)+2} - \mathrm{M}^{q-p}t^{2(q-p)-2} - \mathrm{M}^{p-q}t^{-2(q-p)-2}\right)}{\mathrm{M}^{-5a+2}t^{-10a+6} - \mathrm{M}^{-5a-2}t^{-10a-6} - \mathrm{M}^{-7a+2}t^{-14a+2} + \mathrm{M}^{-7a-2}t^{-14a-2}} \end{aligned}$$

由此我们可以将 $g(t,\mathrm{M})$表示为分数

$$g(t,\mathrm{M}) = \frac{\phi(t,\mathrm{M})}{\psi(t,\mathrm{M})}, \tag{7.2}$$

其中

$$\begin{aligned} \phi(t,\mathrm{M}) = {} & \mathrm{M}^{-10a}t^{-44a}\left(\mathrm{M}^{p+q}t^{6(p+q)+2} + \mathrm{M}^{-p-q}t^{-6(p+q)+2} - \mathrm{M}^{q-p}t^{6(q-p)-2} - \mathrm{M}^{p-q}t^{-6(q-p)-2}\right) \\ & \left(\mathrm{M}^{-5a+2}t^{-10a+6} - \mathrm{M}^{-5a-2}t^{-10a-6} - \mathrm{M}^{-7a+2}t^{-14a+2} + \mathrm{M}^{-7a-2}t^{-14a-2}\right) \\ & - \mathrm{M}^{-10a}t^{-20a}\left(\mathrm{M}^{p+q}t^{2(p+q)+2} + \mathrm{M}^{-p-q}t^{-2(p+q)+2} - \mathrm{M}^{q-p}t^{2(q-p)-2} - \mathrm{M}^{p-q}t^{-2(q-p)-2}\right) \\ & \left(\mathrm{M}^{-5a+2}t^{-30a+14} - \mathrm{M}^{-5a-2}t^{-30a-14} - \mathrm{M}^{-7a+2}t^{-42a+10} + \mathrm{M}^{-7a-2}t^{-42a-10}\right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \psi(t,\mathrm{M}) = {} & \left(\mathrm{M}^{-5a+2}t^{-30a+14} - \mathrm{M}^{-5a-2}t^{-30a-14} - \mathrm{M}^{-7a+2}t^{-42a+10} + \mathrm{M}^{-7a-2}t^{-42a-10}\right) \\ & \left(\mathrm{M}^{-5a+2}t^{-10a+6} - \mathrm{M}^{-5a-2}t^{-10a-6} - \mathrm{M}^{-7a+2}t^{-14a+2} + \mathrm{M}^{-7a-2}t^{-14a-2}\right) \end{aligned}$$

注意，$\phi(-1,\mathrm{M}) = 0$ 且 $\psi(-1,\mathrm{M}) \neq 0$。因此，为了证明 $g(t,\mathrm{M}) \neq 0$，我们只需证明$\phi(t,\mathrm{M}) \neq 0$。这可以通过考虑劳朗多项式 $\phi(t,t^{2n})$的次数来证明。

当 $a > 0$ （从而 $a > p > q > 2$）时，$\phi(t,t^{2n})$的第一个乘积项具有最低次数：$-20an-44a-2(p+q)n-6(p+q)+2-14an-4n-14a-2 = -34an-2(p+q)n-4n-58a-6(p+q)$。第二个乘积项的最低次数为：$-20an-20a-2(p+q)n-2(p+q)+2-14an-4n-42a-10 = -34an-2(p+q)n-4n-62a-2(p+q)-8$。这些次数之差为：

$$-4(p+q)+4a+8 = 4(a+2-p-q) = 4(a+2-p-\frac{2a}{p}) = \frac{4(ap+2p-p^2-2a)}{p} = \frac{4(a-p)(p-2)}{p} > 0.$$

同样，当 $a < 0$ （因此 $a < p < -q < -2$）时，$\phi(t,t^{2n})$ 的第一项乘积具有最高次数：$-20an-44a+2(q-p)n+6(q-p)-2-14an+4n-14a+2 = -34an+2(q-p)n+4n-58a+6(q-p)$。第二项乘积具有最高次数：$-20an-20a+2(q-p)n+2(q-p)-2-14an+4n-42a+10 = -34an+2(q-p)n+4n-62a+2(q-p)+8$。两者之差为：

$$4(q-p)+4a-8 = 4(q-p+a-2) = 4(\frac{2a}{p}-p+a-2) = \frac{4(2a-p^2+ap-2p)}{p} = \frac{4(a-p)(p+2)}{p} < 0.$$

因此，$\phi(t,\mathrm{M}) \neq 0$，这意味着 $g(t,\mathrm{M}) \neq 0$。

因此，我们可以继续从左侧将算子 $\left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}\right)g^{-1}(t,\mathrm{M})$ 作用于 (7.1)，得到

$$\begin{aligned} & \left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}\right)g^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4a}t^{-8a}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-8a}t^{-16a}[n]\right)J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n) \\ &= \mathrm{M}^{-a}[2n+1] + g^{-1}(t,t^2\mathrm{M})\left[\mathrm{M}^{-2a}t^{-8a}\delta(p,q,n+1) - f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\mathrm{M}^{-9a}t^{-60a}\delta(p,q,n+3)[2n+3]\right. \\ &\quad + f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\mathrm{M}^{-7a}t^{-52a}\delta(p,q,n+3)[2n+5] + f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-24a}[2n+9]\right. \\ &\quad \left.-\mathrm{M}^{-5a}t^{-40a}[2n+7]\right)\delta(p,q,n+3) - \mathrm{M}^{-4a}t^{-16a}f^{-1}(t,t^2\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-12a}[2n+5]\right. \\ &\quad \left.\left.-\mathrm{M}^{-5a}t^{-20a}[2n+3]\right)\delta(p,q,n+1)\right] + \mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}g^{-1}(t,\mathrm{M})\left[\mathrm{M}^{-2a}t^{-4a}\delta(p,q,n)\right. \\ &\quad \left. - f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-9a}t^{-42a}\delta(p,q,n+2)[2n+1] + f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-7a}t^{-38a}\delta(p,q,n+2)[2n+3]\right. \end{aligned}$$

$$+ f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-18a}[2n+7]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-30a}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)$$
$$-\mathrm{M}^{-4a}t^{-8a}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-6a}[2n+3]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-10a}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\Big].$$

令 $h(t,\mathrm{M})$ 为最后一个等式右侧的函数。则 $h(t,\mathrm{M})\neq 0$ 因为 $\lim_{t\to-1}(t^2-t^{-2})h(t,\mathrm{M})=\infty$ (参见 (6.6))。因此,

$$\begin{aligned}
&\alpha(t,\mathrm{M},\mathrm{L})\\
&=(\mathrm{L}-1)\frac{h^{-1}(t,\mathrm{M})}{t^2-t^{-2}}\left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}\right)g^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4a}t^{-8a}\right)f^{-1}(t,\mathrm{M})\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-8a}t^{-16a}[n]\right)\\
&=(\mathrm{L}-1)\frac{h^{-1}(t,\mathrm{M})g^{-1}(t,t^2\mathrm{M})}{t^2-t^{-2}}\left(\mathrm{L}+\frac{g^{-1}(t,\mathrm{M})}{g^{-1}(t,t^2\mathrm{M})}\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}\right)\left(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4a}t^{-8a}\right)\\
&\quad f^{-1}(t,\mathrm{M})\left([n+2]\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-8a}t^{-16a}[n]\right)
\end{aligned}$$

是一个湮灭子 $J_{\mathrm{T(p,q)}\#\mathrm{T(a,2)}}(n)$的算子。为了在 $t=-1$ 处计算 $\alpha(t,\mathrm{M},\mathrm{L})$，我们需要以下引理。

引理7.1。$\lim_{t\to-1}\dfrac{g^{-1}(t,M)}{g^{-1}(t,t^2M)}=1.$

证明。 证明与引理 5.2 中的证明类似。由（7.2）及其后的注释，我们有

$$\lim_{t\to-1}\frac{g^{-1}(t,\mathrm{M})}{g^{-1}(t,t^2\mathrm{M})}=\lim_{t\to-1}\frac{\psi(t,\mathrm{M})\phi(t,t^2\mathrm{M})}{\phi(t,\mathrm{M})\psi(t,t^2\mathrm{M})}=\lim_{t\to-1}\frac{\psi(t,\mathrm{M})}{\psi(t,t^2\mathrm{M})}\lim_{t\to-1}\frac{\phi(t,t^2\mathrm{M})}{\phi(t,\mathrm{M})}=\lim_{t\to-1}\frac{\phi(t,t^2\mathrm{M})}{\phi(t,\mathrm{M})}.$$

应用洛必达法则（将M 视为独立变量），我们有

$$\lim_{t\to-1}\frac{\phi(t,t^2\mathrm{M})}{\phi(t,\mathrm{M})}=\lim_{t\to-1}\frac{\dfrac{\partial\phi(t,t^2\mathrm{M})}{\partial t}}{\dfrac{\partial\phi(t,\mathrm{M})}{\partial t}}.$$

现在可以验证

$$\lim_{t\to-1}\frac{\partial\phi(t,\mathrm{M})}{\partial t}=\lim_{t\to-1}\frac{\partial\phi(t,t^2\mathrm{M})}{\partial t}\neq 0.$$

因此该引理成立。□

应用引理 7.1 以及 $g(-1,\mathrm{M})=0$这一事实，我们可以求得 $\lim_{t\to-1}h^{-1}(t,\mathrm{M})g^{-1}(t,t^2\mathrm{M})\,t^2-t^{-2}$。

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to-1}(t^2-t^{-2})g(t,t^2\mathrm{M})h(t,\mathrm{M})\\
&=\lim_{t\to-1}\Big\{(t^2-t^{-2})g(t,t^2\mathrm{M})\mathrm{M}^{-a}[2n+1]+(t^2-t^{-2})\Big[\mathrm{M}^{-2a}t^{-8a}\delta(p,q,n+1)\\
&\quad-f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\mathrm{M}^{-9a}t^{-60a}\delta(p,q,n+3)[2n+3]+f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\mathrm{M}^{-7a}t^{-52a}\delta(p,q,n+3)[2n+5]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-24a}[2n+9]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-40a}[2n+7]\right)\delta(p,q,n+3)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-4a}t^{-16a}f^{-1}(t,t^2\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-12a}[2n+5]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-20a}[2n+3]\right)\delta(p,q,n+1)\Big]\\
&\quad+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}(t^2-t^{-2})\frac{g(t,t^2\mathrm{M})}{g(t,\mathrm{M})}\Big[\mathrm{M}^{-2a}t^{-4a}\delta(p,q,n)\\
&\quad-f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-9a}t^{-42a}\delta(p,q,n+2)[2n+1]+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-7a}t^{-38a}\delta(p,q,n+2)[2n+3]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-18a}[2n+7]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-30a}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&\quad-\mathrm{M}^{-4a}t^{-8a}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-6a}[2n+3]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-10a}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\Big]\Big\}\\
&=\lim_{t\to-1}\Big\{(t^2-t^{-2})\Big[\mathrm{M}^{-2a}t^{-8a}\delta(p,q,n+1)-f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\mathrm{M}^{-9a}t^{-60a}\delta(p,q,n+3)[2n+3]\\
&\quad+f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\mathrm{M}^{-7a}t^{-52a}\delta(p,q,n+3)[2n+5]+f^{-1}(t,t^6\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-24a}[2n+9]\right.\\
&\quad\left.-\mathrm{M}^{-5a}t^{-40a}[2n+7]\right)\delta(p,q,n+3)-\mathrm{M}^{-4a}t^{-16a}f^{-1}(t,t^2\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-12a}[2n+5]\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{M}^{-5a}t^{-20a}[2n+3])\,\delta(p,q,n+1)\Big]+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a}(t^2-t^{-2})\Big[\mathrm{M}^{-2a}t^{-4a}\delta(p,q,n)\\
&-f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-9a}t^{-42a}\delta(p,q,n+2)[2n+1]+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\mathrm{M}^{-7a}t^{-38a}\delta(p,q,n+2)[2n+3]\\
&+f^{-1}(t,t^4\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-18a}[2n+7]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-30a}[2n+5]\right)\delta(p,q,n+2)\\
&-\mathrm{M}^{-4a}t^{-8a}f^{-1}(t,\mathrm{M})\left(\mathrm{M}^{-3a}t^{-6a}[2n+3]-\mathrm{M}^{-5a}t^{-10a}[2n+1]\right)\delta(p,q,n)\Big]\Big\}\\
=&(1+\mathrm{M}^{-2a})\left(\mathrm{M}^{-2a}+\frac{\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a}}{\mathrm{M}^{-5a}-\mathrm{M}^{-7a}}\right)(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})\\
=&\frac{(1+\mathrm{M}^{-2a})(\mathrm{M}^{-7a}-\mathrm{M}^{-9a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})}{\mathrm{M}^{-5a}-\mathrm{M}^{-7a}}
\end{aligned}
$$

因此，

$$\alpha(-1,\mathrm{M},\mathrm{L})=a(\mathrm{M})(\mathrm{L}-1)(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a})(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-4a})(\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^{-8a})$$

其中

$$a(\mathrm{M})=\frac{1}{(1+\mathrm{M}^{-2a})(\mathrm{M}^{-7a}-\mathrm{M}^{-9a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})(\mathrm{M}^{p+q}+\mathrm{M}^{-p-q}-\mathrm{M}^{q-p}-\mathrm{M}^{p-q})(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{-1})}$$

是一个定义良好且非零的函数。显然， $\alpha(-1,\ \mathrm{M},\ \mathrm{L})$ 含有重复因子 $\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}$；去掉此因子后，所得结果与 $T(p,\ q)\#T(a,\ 2)$ 的 A-多项式仅相差一个只依赖于M的非零因子（其中 $pq=2a$）。

现在我们证明，在 $J_{\mathrm{T(p,q)\#T(a,2)}}(n)$ 的所有非零湮灭子中，6 是最小的L次数。因此，设

$$
\begin{aligned}
&D_5J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+5)+D_4J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+4)+D_3J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+3)\\
&+D_2J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+2)+D_1J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+1)+D_0J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n)=0
\end{aligned}
$$

对于某个 $D_i\in\mathbb{Q}(t,\ \mathrm{M})$， $i=0,\ 1,\ \ldots,\ 5$，我们要证明所有 D_i 都必须为零。

注意，在第6 节中，对

$$
\begin{aligned}
&D_5J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+5)+D_4J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+4)+D_3J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+3)\\
&+D_2J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+2)+D_1J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+1)+D_0J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n)\\
&=E_5J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n+1)+E_4J_{T(p,q)\#T(a,2)}(n)+E_3J_{(p,q)}(n+1)+E_2J_{T(p,q)}(n)+E_1J_{T(a,2)}(n)\\
&+E_0
\end{aligned}
$$

在 $pq=2a$时仍然成立。根据引理6.1， $E_i=0$对所有 $i=0$（1，.....，5）均成立。但当 $pq=2a$时，对于说明 $E_i=0$ 对所有 i 成立意味着 $D_i=0$ 对所有 i 成立的论证，需要作一些修改。

将 $pq=2a$ 代入系统 $E_i=0$， $i=0$、1、.....、5（在第 6节中得到），并化简 $E_2=0$，$E_1=0$ 以及 $E_0=0$ （如第 6节所示），得到

$$
\begin{aligned}
E_5=&(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-16a(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]})t^{-16(n+2)}[n+1]+D_1=0,\\
E_4=&\left(\frac{D_4}{[n+4]}t^{-16a(n+3)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-16a(n+1)}[n]+D_0=0,\\
E_3=&\left(\frac{D_5}{[n+5]}t^{-16a(n+4)}+\frac{D_3}{[n+3]}\right)\left(t^{-10a(n+2)}[2n+5]-t^{-14a(n+2)}[2n+3]\right)\\
&+\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-10a(n+4)}[2n+9]-t^{-14a(n+4)}[2n+7]\right)t^{-8a(n+2)}\\
=&\frac{D_5}{[n+5]}\left(t^{-18an-56a}[2n+9]-t^{-22an-72a}[2n+7]+t^{-26an-84a}[2n+5]-t^{-30an-92a}[2n+3]\right)\\
&+\frac{D_3}{[n+3]}\left(t^{-10an-20a}[2n+5]-t^{-14an-28a}[2n+3]\right)=0,\\
E_2=0\longrightarrow&\left(\mathrm{M}^{-8a}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_4+D_2=0,\\
E_1=0\longrightarrow&\left(-\mathrm{M}^{-10a}-\mathrm{M}^{-6a}\right)D_5+\left(\mathrm{M}^{-8a}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_4-\mathrm{M}^{-2a}D_3+D_2=0,
\end{aligned}
$$

$$E_0=0\longrightarrow(\mathrm{M}^{-15a}+2\mathrm{M}^{-11a}-\mathrm{M}^{-13a}+2\mathrm{M}^{-7a}-2\mathrm{M}^{-9a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})D_5+(\mathrm{M}^{-11a}-\mathrm{M}^{-13a}+2\mathrm{M}^{-7a}$$
$$-2\mathrm{M}^{-9a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})D_4+(\mathrm{M}^{-7a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})D_3+(\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})D_2=0.$$

由 $E_3=0$，我们得到

$$D_3=-\frac{[n+3]\left(t^{-8an-36a}[2n+9]-t^{-12an-52a}[2n+7]+t^{-16an-64a}[2n+5]-t^{-20an-72a}[2n+3]\right)D_5}{[n+5]\left([2n+5]-t^{-4an-8a}[2n+3]\right)}.$$

由 $E_2=0$ 的简化形式可得

$$D_2=-\left(\mathrm{M}^{-8a}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_4.$$

将 D_3 和 D_2 代入简化后的 $E_1=0$ 和 $E_0=0$，可得

$$\left(-\mathrm{M}^{-10a}-\mathrm{M}^{-6a}\right)D_5+\left(\mathrm{M}^{-8a}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_4$$
$$+\mathrm{M}^{-2a}\frac{[n+3]\left(t^{-8an-36a}[2n+9]-t^{-12an-52a}[2n+7]+t^{-16an-64a}[2n+5]-t^{-20an-72a}[2n+3]\right)D_5}{[n+5]\left([2n+5]-t^{-4an-8a}[2n+3]\right)}$$
$$-\left(\mathrm{M}^{-8a}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_4=0,$$

and

$$(\mathrm{M}^{-15a}+2\mathrm{M}^{-11a}-\mathrm{M}^{-13a}+2\mathrm{M}^{-7a}-2\mathrm{M}^{-9a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})D_5+(\mathrm{M}^{-11a}-\mathrm{M}^{-13a}+2\mathrm{M}^{-7a}$$
$$-2\mathrm{M}^{-9a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})D_4-(\mathrm{M}^{-7a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})$$
$$\frac{[n+3]\left(t^{-8an-36a}[2n+9]-t^{-12an-52a}[2n+7]+t^{-16an-64a}[2n+5]-t^{-20an-72a}[2n+3]\right)D_5}{[n+5]\left([2n+5]-t^{-4an-8a}[2n+3]\right)}$$
$$-(\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})\left(\mathrm{M}^{-8a}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_4=0.$$

也就是说，我们有以下两个方程：

$$\left(-\mathrm{M}^{-10a}-\mathrm{M}^{-6a}+\frac{[n+3]\left(t^{-12an-36a}[2n+9]-t^{-16an-52a}[2n+7]+t^{-20an-64a}[2n+5]-t^{-24an-72a}[2n+3]\right)}{[n+5]\left([2n+5]-t^{-4an-8a}[2n+3]\right)}\right)D_5=0,$$

$$\Big[\mathrm{M}^{-15a}+2\mathrm{M}^{-11a}-\mathrm{M}^{-13a}+2\mathrm{M}^{-7a}-2\mathrm{M}^{-9a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a}$$
$$-(\mathrm{M}^{-7a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a})\frac{[n+3]\left(t^{-8an-36a}[2n+9]-t^{-12an-52a}[2n+7]+t^{-16an-64a}[2n+5]-t^{-20an-72a}[2n+3]\right)}{[n+5]\left([2n+5]-t^{-4an-8a}[2n+3]\right)}\Big]D_5$$
$$+\left(-\mathrm{M}^{-9a}+\mathrm{M}^{-7a}+\mathrm{M}^{-3a}-\mathrm{M}^{-5a}\right)D_4=0.$$

只需证明第一个方程中 D_5 的系数非零。这样，根据 $D_5=0$ 和第二个方程可得 $D_4=0$，因为 D_4 的系数显然非零。进而得到 $D_3=D_2=0$，再由 $E_1=0$ 和 $E_2=0$，可得 $D_1=D_0=0$。

事实上，

$$-\mathrm{M}^{-10a}-\mathrm{M}^{-6a}+\frac{[n+3]\left(t^{-12an-36a}[2n+9]-t^{-16an-52a}[2n+7]+t^{-20an-64a}[2n+5]-t^{-24an-72a}[2n+3]\right)}{[n+5]\left([2n+5]-t^{-4an-8a}[2n+3]\right)}$$
$$=\Big[(-\mathrm{M}^{-10a}-\mathrm{M}^{-6a})[n+5]\left([2n+5]-t^{-4an-8a}[2n+3]\right)$$
$$+[n+3]\left(t^{-12an-36a}[2n+9]-t^{-16an-52a}[2n+7]+t^{-20an-64a}[2n+5]-t^{-24an-72a}[2n+3]\right)\Big]$$
$$\Big/\Big[[n+5]\left([2n+5]-t^{-4an-8a}[2n+3]\right)\Big]\neq 0$$

因为很容易看出，t（将M 视为 t^{2n}）中（分子乘以 $(t^2-t^{-2})^2$）的最低次数为 $-24an-6n-72a-12<0$。

8. Case $|p|>q=2$, $|a|>b=2$, $p\neq a$ and p,a have the same sign

该过程与第 3 节的过程类似；唯一的区别在于所应用的公式组不同。应用（2.3）和（2.4），可得

$$\begin{aligned}
&[n+1]J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+1)=J_{T(p,2)}(n+1)J_{T(a,2)}(n+1)\\
&=\left(-t^{-4pn-2p}J_{T(p,2)}(n)+t^{-2pn}[2n+1]\right)\left(-t^{-4an-2a}J_{T(a,2)}(n)+t^{-2an}[2n+1]\right)\\
&=t^{-4(p+a)n-2(p+a)}J_{T(p,2)}(n)J_{T(a,2)}(n)-t^{-(4p+2a)n-2p}[2n+1]J_{T(p,2)}(n)\\
&\quad-t^{-(4a+2p)n-2a}[2n+1]J_{T(a,2)}(n)+t^{-2(p+a)n}[2n+1]^2\\
&=t^{-4(p+a)n-2(p+a)}[n]J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)-t^{-(4p+2a)n-2p}[2n+1]J_{T(p,2)}(n)\\
&\quad-t^{-(4a+2p)n-2a}[2n+1]J_{T(a,2)}(n)+t^{-2(p+a)n}[2n+1]^2
\end{aligned}\tag{8.1}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\left([n+1]\mathrm{L}-\mathrm{M}^{-2(p+a)}t^{-2(p+a)}[n]\right)J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\
&=-\mathrm{M}^{-2p-a}t^{-2p}[2n+1]J_{T(p,2)}(n)-\mathrm{M}^{-2a-p}t^{-2a}[2n+1]J_{T(a,2)}(n)+\mathrm{M}^{-(p+a)}[2n+1]^2.
\end{aligned}$$

从等式两边左乘算子 $-(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p}t^{-2p})\frac{\mathrm{M}^{2p+a}t^{2p}}{[2n+1]}$，然后应用（2.5）、（1.2）和（2.4），可得

$$\begin{aligned}
&-(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p}t^{-2p})\frac{\mathrm{M}^{2p+a}t^{2p}}{[2n+1]}\left([n+1]\mathrm{L}-\mathrm{M}^{-2(p+a)}t^{-2(p+a)}[n]\right)J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\
&=(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p}t^{-2p})\left(J_{T(p,2)}(n)+\mathrm{M}^{p-a}t^{2p-2a}J_{T(a,2)}(n)-\mathrm{M}^{p}t^{2p}[2n+1]\right)\\
&=\mathrm{M}^{-p}[2n+1]+\mathrm{M}^{p-a}t^{4p-4a}J_{T(a,2)}(n+1)-\mathrm{M}^{p}t^{4p}[2n+3]\\
&\quad+\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}J_{T(a,2)}(n)-\mathrm{M}^{-p}[2n+1]\\
&=\mathrm{M}^{p-a}t^{4p-4a}\left(-t^{-4an-2a}J_{T(a,2)}(n)+t^{-2an}[2n+1]\right)-\mathrm{M}^{p}t^{4p}[2n+3]+\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}J_{T(a,2)}(n)\\
&=(\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{4p-6a})J_{T(a,2)}(n)+\mathrm{M}^{p-2a}t^{4p-4a}[2n+1]-\mathrm{M}^{p}t^{4p}[2n+3].
\end{aligned}\tag{8.2}$$

函数 $\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{4p-6a}$ 非零，因为 $p\neq a$。因此，我们可以从左侧应用算子

$$(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a})\frac{1}{(\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{4p-6a})}$$

对前一个等式进行……，得到

$$\begin{aligned}
&-(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a})\frac{1}{(\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{4p-6a})}(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p}t^{-2p})\frac{\mathrm{M}^{2p+a}t^{2p}}{[2n+1]}\\
&\left([n+1]\mathrm{L}-\mathrm{M}^{-2(p+a)}t^{-2p-2a}[n]\right)J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\
&=(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a})\left(J_{T(a,2)}(n)+\frac{\mathrm{M}^{p-2a}t^{4p-4a}[2n+1]-\mathrm{M}^{p}t^{4p}[2n+3]}{\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{4p-6a}}\right)\\
&=\mathrm{M}^{-a}[2n+1]+\frac{\mathrm{M}^{p-2a}t^{6p-8a}[2n+3]-\mathrm{M}^{p}t^{6p}[2n+5]}{\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2p-4a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{6p-12a}}\\
&\quad+\frac{\mathrm{M}^{p-4a}t^{4p-6a}[2n+1]-\mathrm{M}^{p-2a}t^{4p-2a}[2n+3]}{\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{4p-6a}}\\
&=\mathrm{M}^{-a}\frac{\mathrm{M}^{2}t^{2}-\mathrm{M}^{-2}t^{-2}}{t^{2}-t^{-2}}+\frac{\mathrm{M}^{p-2a}t^{6p-8a}(\mathrm{M}^{2}t^{6}-\mathrm{M}^{-2}t^{-6})-\mathrm{M}^{p}t^{6p}(\mathrm{M}^{2}t^{10}-\mathrm{M}^{-2}t^{-10})}{(t^{2}-t^{-2})(\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2p-4a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{6p-12a})}\\
&\quad+\frac{\mathrm{M}^{p-4a}t^{4p-6a}(\mathrm{M}^{2}t^{2}-\mathrm{M}^{-2}t^{-2})-\mathrm{M}^{p-2a}t^{4p-2a}(\mathrm{M}^{2}t^{6}-\mathrm{M}^{-2}t^{-6})}{(t^{2}-t^{-2})(\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{4p-6a})}.
\end{aligned}$$

令 $g(t,\ M)$ 为上一个等式右端的函数。则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to -1}(t^2-t^{-1})g(t,\mathrm{M}) &= \mathrm{M}^{-a}(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})+\frac{\mathrm{M}^{p-2a}(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})-\mathrm{M}^{p}(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})}{\mathrm{M}^{-p-a}-\mathrm{M}^{p-3a}}\\ &\quad+\frac{\mathrm{M}^{p-4a}(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})-\mathrm{M}^{p-2a}(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})}{\mathrm{M}^{-p-a}-\mathrm{M}^{p-3a}}\\ &= \frac{(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(\mathrm{M}^{-p-2a}-\mathrm{M}^{p})}{\mathrm{M}^{-p-a}-\mathrm{M}^{p-3a}}\end{aligned}$$

是一个定义良好的非零函数。在M上。特别地，$(t^2-t^{-2})g(t,\ \mathrm{M})$是一个非零函数。因此

$$\alpha(t,\mathrm{M},\mathrm{L})=(\mathrm{L}-1)\frac{1}{(t^2-t^{-2})g(t,\mathrm{M})}(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a}t^{-2a})\frac{1}{(\mathrm{M}^{-p-a}t^{-2a}-\mathrm{M}^{p-3a}t^{4p-6a})}$$
$$(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p}t^{-2p})\frac{\mathrm{M}^{2p+a}t^{2p}}{[2n+1]}\left([n+1]\mathrm{L}-\mathrm{M}^{-2(p+a)}t^{-2p-2a}[n]\right)$$

是$J_{T(p,\ 2)\#T(a,\ 2)}(n)$的湮灭子。此外

$$\alpha(-1,\ \mathrm{M},\ \mathrm{L})\ =a(\mathrm{M})(\mathrm{L}-1)(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2a})(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p})(\mathrm{L}-\mathrm{M}^{-2p-2a})=a(\mathrm{M})\mathrm{M}^{-4p-4a}A_{T(p,2)\#T(a,2)}(\mathrm{M},\mathrm{L})$$

其中

$$a(\mathrm{M})=\frac{\mathrm{M}^{2p+a}}{(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{-1})(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(\mathrm{M}^{-p-2a}-\mathrm{M}^{p})}=\frac{\mathrm{M}^{p+a}}{(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{-1})(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(\mathrm{M}^{-2p-2a}-1)}$$

是 M 的一个定义良好的非零函数。

现在我们验证，4 是 $J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n)$ 的所有非零湮灭子的最小 L 次数。因此，设 $D_3J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+3)+D_2J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+2)+D_1J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+1)+D_0J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\ =0$，其中 $D_i\in\mathbb{Q}(t,\mathrm{M})$，$i=0,\ 1,\ 2$，我们需要证明，对于 $i=0,\ 1,\ 2$，有 $D_i=0$。

应用（8.1）、（2.6）和（2.4），我们得到

$$\begin{aligned}&D_3J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+3)+D_2J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+2)+D_1J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+1)+D_0J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\ &=\frac{D_3}{[n+3]}\Big(t^{-4(p+a)(n+2)-2(p+a)}[n+2]J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+2)-t^{-(4p+2a)(n+2)-2p}[2n+5]J_{T(p,2)}(n+2)\\ &\qquad -t^{-(4a+2p)(n+2)-2a}[2n+5]J_{T(a,2)}(n+2)+t^{-2(p+a)(n+2)}[2n+5]^2\Big)\\ &\quad+D_2J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+2)+D_1J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+1)+D_0J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\ &=\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)\Big(t^{-4(p+a)(n+1)-2(p+a)}[n+1]J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+1)\\ &\quad -t^{-(4p+2a)(n+1)-2p}[2n+3]J_{T(p,2)}(n+1)-t^{-(4a+2p)(n+1)-2a}[2n+3]J_{T(a,2)}(n+1)+t^{-2(p+a)(n+1)}[2n+3]^2\Big)\\ &\quad-\frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4p+2a)(n+2)-2p}[2n+5]\left(-t^{-8p(n+1)}J_{T(p,2)}(n)-t^{-6p(n+1)}[2n+1]+t^{-2p(n+1)}[2n+3]\right)\\ &\quad-\frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4a+2p)(n+2)-2a}[2n+5]\left(-t^{-8a(n+1)}J_{T(a,2)}(n)-t^{-6a(n+1)}[2n+1]+t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\ &\quad+\frac{D_3}{[n+3]}t^{-2(p+a)(n+2)}[2n+5]^2+D_1J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n+1)+D_0J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\ &=\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)}+\frac{D_1}{[n+1]}\right)\Big(t^{-4(p+a)n-2(p+a)}[n]J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\ &\quad -t^{-(4p+2a)n-2p}[2n+1]J_{T(p,2)}(n)-t^{-(4a+2p)n-2a}[2n+1]J_{T(a,2)}(n)+t^{-2(p+a)n}[2n+1]^2\Big)\\ &\quad-\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(4p+2a)(n+1)-2p}[2n+3]\left(-t^{-4pn-2p}J_{(p,2)}(n)+t^{-2pn}[2n+1]\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}\right) t^{-(4a+2p)(n+1)-2a}[2n+3]\left(-t^{-4an-2a}J_{(a,2)}(n) + t^{-2an}[2n+1]\right)\\
&+ \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}\right) t^{-2(p+a)(n+1)}[2n+3]^2\\
&- \frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4p+2a)(n+2)-2p}[2n+5]\left(-t^{-8p(n+1)}J_{T(p,2)}(n) - t^{-6p(n+1)}[2n+1] + t^{-2p(n+1)}[2n+3]\right)\\
&- \frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4a+2p)(n+2)-2a}[2n+5]\left(-t^{-8a(n+1)}J_{T(a,2)}(n) - t^{-6a(n+1)}[2n+1] + t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\
&+ \frac{D_3}{[n+3]}t^{-2(p+a)(n+2)}[2n+5]^2 + D_0 J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\
=& \left[\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)} + \frac{D_1}{[n+1]}\right) t^{-4(p+a)n-2(p+a)}[n] + D_0\right] J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n)\\
&+ \left[-\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)} + \frac{D_1}{[n+1]}\right) t^{-(4p+2a)n-2p}[2n+1]\right.\\
&\quad + \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}\right) t^{-(4p+2a)(n+1)-2p}[2n+3]t^{-4pn-2p}\\
&\quad \left. + \frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4p+2a)(n+2)-2p}[2n+5]t^{-8p(n+1)}\right] J_{T(p,2)}(n)\\
&+ \left[-\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)} + \frac{D_1}{[n+1]}\right) t^{-(4a+2p)n-2a}[2n+1]\right.\\
&\quad + \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}\right) t^{-(4a+2p)(n+1)-2a}[2n+3]t^{-4an-2a}\\
&\quad \left. + \frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4a+2p)(n+2)-2a}[2n+5]t^{-8a(n+1)}\right] J_{T(a,2)}(n)\\
&+ \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)} + \frac{D_1}{[n+1]}\right) t^{-2(p+a)n}[2n+1]^2\\
&- \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}\right) t^{-(4p+2a)(n+1)-2p}[2n+3]t^{-2pn}[2n+1]\\
&- \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}\right) t^{-(4a+2p)(n+1)-2a}[2n+3]t^{-2an}[2n+1]\\
&+ \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}\right) t^{-2(p+a)(n+1)}[2n+3]^2\\
&- \frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4p+2a)(n+2)-2p}[2n+5]\left(-t^{-6p(n+1)}[2n+1] + t^{-2p(n+1)}[2n+3]\right)\\
&- \frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4a+2p)(n+2)-2a}[2n+5]\left(-t^{-6a(n+1)}[2n+1] + t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\
&+ \frac{D_3}{[n+3]}t^{-2(p+a)(n+2)}[2n+5]^2\\
=& E_3 J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n) + E_2 J_{T(p,2)}(n) + E_1 J_{T(a,2)}(n) + E_0.
\end{aligned}
$$

引理 8.1。 方程 $E_3 J_{T(p,2)\#T(a,2)}(n) + E_2 J_{T(p,2)}(n) + E_1 J_{T(a,2)}(n) + E_0 = 0$意味着 $E_i = 0$对所有 $i \in \{0,1,2,3\}$.

该引理可仿照引理3.1证明。现在我们证明 $E_i = 0$ 对所有 $\in \{0,1,2,3\}$ 都蕴含$D_i = 0$ 对所有 $i \in \{0,1,2,3\}$成立。方法与第3节所述的方法类似。

$$E_3 = \left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)} + \frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)} + \frac{D_1}{[n+1]}\right) t^{-4(p+a)n-2(p+a)}[n] + D_0 = 0$$

$$\longrightarrow \ \mathrm{M}^{-6(p+q)}D_3+\mathrm{M}^{-4(p+a)}D_2+\mathrm{M}^{-2(p+a)}D_1+D_0=0,$$

$$\begin{aligned}E_2=&-\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)}+\frac{D_1}{[n+1]}\right)t^{-(4p+2a)n-2p}[2n+1]\\&+\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(4p+2a)(n+1)-2p}[2n+3]t^{-4pn-2p}\\&+\frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4p+2a)(n+2)-2p}[2n+5]t^{-8p(n+1)}\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \ \left(-\mathrm{M}^{-4p-4a}+\mathrm{M}^{-4p-2a}+\mathrm{M}^{-4p}\right)D_3+\left(-\mathrm{M}^{-2p-2a}+\mathrm{M}^{-2p}\right)D_2+D_1=0,$$

$$\begin{aligned}E_1=&-\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)}+\frac{D_1}{[n+1]}\right)t^{-(4a+2p)n-2a}[2n+1]\\&+\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(4a+2p)(n+1)-2a}[2n+3]t^{-4an-2a}\\&+\frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4a+2p)(n+2)-2a}[2n+5]t^{-8a(n+1)}\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \ \left(-\mathrm{M}^{-4a-4p}+\mathrm{M}^{-4a-2p}+\mathrm{M}^{-4a}\right)D_3+\left(-\mathrm{M}^{-2a-2p}+\mathrm{M}^{-2a}\right)D_2+D_1=0,$$

$$\begin{aligned}E_0=&\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-8(p+a)n-16(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}t^{-4(p+a)n-6(p+a)}+\frac{D_1}{[n+1]}\right)t^{-2(p+a)n}[2n+1]^2\\&-\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(4p+2a)(n+1)-2p}[2n+3]t^{-2pn}[2n+1]\\&-\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-(4a+2p)(n+1)-2a}[2n+3]t^{-2an}[2n+1]\\&+\left(\frac{D_3}{[n+3]}t^{-4(p+a)n-10(p+a)}+\frac{D_2}{[n+2]}\right)t^{-2(p+a)(n+1)}[2n+3]^2\\&-\frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4p+2a)(n+2)-2p}[2n+5]\left(-t^{-6p(n+1)}[2n+1]+t^{-2p(n+1)}[2n+3]\right)\\&-\frac{D_3}{[n+3]}t^{-(4a+2p)(n+2)-2a}[2n+5]\left(-t^{-6a(n+1)}[2n+1]+t^{-2a(n+1)}[2n+3]\right)\\&+\frac{D_3}{[n+3]}t^{-2(p+a)(n+2)}[2n+5]^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow \ &\left(\mathrm{M}^{-4p-4a}-\mathrm{M}^{-4p-2a}-\mathrm{M}^{-4a-2p}+\mathrm{M}^{-2p-2a}+\mathrm{M}^{-4p}-\mathrm{M}^{-2p}+\mathrm{M}^{-4a}-\mathrm{M}^{-2a}+1\right)D_3\\&+\left(\mathrm{M}^{-2p-2a}-\mathrm{M}^{-2p}-\mathrm{M}^{-2a}+1\right)D_2+D_1=0\end{aligned}$$

最后三个简化线性方程的行列式为

$$-2\mathrm{M}^{-6p-2a}+\mathrm{M}^{-4p-2a}+2\mathrm{M}^{-6p}-2\mathrm{M}^{-4p}+2\mathrm{M}^{-2p-6a}-2\mathrm{M}^{-6a}+2\mathrm{M}^{-4a}+\mathrm{M}^{-2p}-\mathrm{M}^{-2p-4a}-\mathrm{M}^{-2a}$$

即 由于 $p\neq a$而非零，因此 $D_3=D_2=D_1=0$，然后由 $E_3=0$可得 $D_0=0$.

9. Case $|p|>q=2,\ |a|>b=2,\ p=a$

这种情况可由第8节中已有的结果迅速推出。方程（8.2）在 $p=a$时仍然成立，从而得到

$$\begin{aligned}&-\left(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p}t^{-2p}\right)\frac{\mathrm{M}^{3p}t^{2p}}{[2n+1]}\left([n+1]\mathrm{L}-\mathrm{M}^{-4p}t^{-4p}[n]\right)J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n)\\&=\mathrm{M}^{-p}[2n+1]-\mathrm{M}^{p}t^{4p}[2n+3].\end{aligned}$$

令 $g(t, \mathrm{M})$ 表示最后一个等式右侧的函数，该函数非零。因此

$$\alpha(t,\mathrm{M},\mathrm{L}) = (\mathrm{L}-1)\frac{1}{(t^2-t^{-2})g(t,\mathrm{M},\mathrm{L})}(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p}t^{-2p})\frac{\mathrm{M}^{3p}t^{2p}}{[2n+1]}\left([n+1]\mathrm{L}-\mathrm{M}^{-4p}t^{-4p}[n]\right)$$

是 J_T 的湮灭子$_{(p,\ 2)\#T(p,\ 2)}(n)$。此外

$$\alpha(-1,\mathrm{M},\mathrm{L}) = a(\mathrm{M})(\mathrm{L}-1)(\mathrm{L}+\mathrm{M}^{-2p})(\mathrm{L}-\mathrm{M}^{-4p}) = a(\mathrm{M})\mathrm{M}^{-6p}A_{T(p,2)\#T(p,2)}(\mathrm{M},\mathrm{L})$$

其中

$$a(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M}^{3p}}{(\mathrm{M}^2-\mathrm{M}^{-2})(\mathrm{M}^{-p}-\mathrm{M}^{p})(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{-1})}.$$

剩下要证明的是，如果

$$D_2J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n+2)+D_1J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n+1)+D_0J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n)=0.$$

对于某些 D_0，D_1，$D_2\in\mathbb{Q}(t,\ \mathrm{M})$，那么对所有 i，必有 $D_i=0$。

将 $D_3=0$ 和 $a=p$ 代入第 8 节中的相应计算，可得

$$\begin{aligned}
&D_2J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n+2)+D_1J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n+1)+D_0J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n)\\
&=\left[\left(\frac{D_2}{[n+2]}t^{-8pn-12p}+\frac{D_1}{[n+1]}\right)t^{-8pn-4p}[n]+D_0\right]J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n)\\
&\quad+\left[-\left(\frac{D_2}{[n+2]}t^{-8pn-12p}+\frac{D_1}{[n+1]}\right)2t^{-6pn-2p}[2n+1]+\frac{D_2}{[n+2]}2t^{-6pn-8p}[2n+3]t^{-4pn-2p}\right]J_{T(p,2)}(n)\\
&\quad+\left(\frac{D_2}{[n+2]}t^{-8pn-12p}+\frac{D_1}{[n+1]}\right)t^{-4pn}[2n+1]^2\\
&\quad-\frac{D_2}{[n+2]}2t^{-6pn-8p}[2n+3]t^{-2pn}[2n+1]+\frac{D_2}{[n+2]}t^{-4pn-4p}[2n+3]^2\\
&=E_2J_{T(p,2)\#T(p,2)}(n)+E_1J_{T(p,2)}(n)+E_0.
\end{aligned}$$

引理9.1。 *Th*方程 $E_2J_{T(p,\ 2)\#T(p,\ 2)}(n)+E_1J_{T(p,\ 2)}(n)+E_0=0$意味着对于所有 $i=0$，1、2，都有 $E_i=0$。

该引理可视为引理8.1的一个子情形。

现在我们证明，关于变量 $E_i=0$、 $i=0$、1、2 的线性方程组 D_2、 D_1、 D_0 只有平凡解。再次将 $D_3=0$ 和 $a=p$ 代入第8节中的相关计算，我们得到关于变量 D_2、 D_1、 D_0的如下简化线性方程组：

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^{-8p}D_2+\mathrm{M}^{-4p}D_1+D_0&=0,\\
\left(-\mathrm{M}^{-4p}+\mathrm{M}^{-2p}\right)D_2+D_1&=0,\\
\left(\mathrm{M}^{-4p}-2\mathrm{M}^{-2p}+1\right)D_2+D_1&=0.
\end{aligned}$$

该方程组的行列式为 $-2\mathrm{M}^{-4p}+3\mathrm{M}^{-2p}-1\neq 0$。因此 $D_2=D_1=D_0=0$。

References

[1] **D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. Long, P. Shalen**, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, 《数学发明》118 (1994) 47-84。[2] **N. Druivenga**, *The AJ-conjecture for cables of two bridge knots*, arXiv:1412.1053。[3] **S. Garoufalidis**, *On the characteristic and deformation varieties of a knot*, Casson Fest 论文集, 《几何与拓扑专著》7 (2004) 291-309。[4] **S. Garoufalidis, C. Koutschan**, *Irreducibility of q-difference operator and the knot* 7_4, 《代数与几何拓扑》13 (2013) 3261-3286。[5] **S. Garoufalidis, T. Le**, *The colored Jones function is q-holonomic*, 《几何与拓扑》9 (2005) 1253-1293。[6] **K. Hikami**, *Difference equation of the colored Jones polynomial for torus knot*, Internat. J. Math. 15 (2004) 959-965。[7] **T. Le**, *The colored Jones polynomial and the A-polynomial of knots*, Advances in Math. 207 (2006) 782-804。[8] **T. Le, A. Tran**, *On the AJ-conjecture for knots*, 《印第安纳大学数学杂志》64 (2015) 1103-1151。

[9] **T. Le, X. Zhang**, *Character varieties, A-polynomials, and the AJ-conjecture*, 《代数与几何拓扑》17 (2017) 157-188。[10] **D. Ruppe**, *The AJ-conjecture and cabled knots over the figure eight knot*, Topology and its Applications 188 (2015) 27-50。[11] **D. Ruppe and X. Zhang**, *The AJ-conjecture and cabled knots over torus knots*, 结理论及其分支期刊 24 (2015)。[12] **M. Schilder**, *The A-polynomial and knot volume*, 结理论及其分支期刊 34 (2025)。[13] **T. Takata**, *The colored Jones polynomial and the A-polynomial for twisted knots*, 预印本, math.GT/0401068。[14] **A. Tran**, *Proof of a stronger version of the AJ conjecture for torus knots*, 《代数与几何拓扑》13 (2013), 第1期, 609–624。[15] **A. Tran**, *On the AJ conjecture for cables of the figure eight knot*, 纽约数学杂志 20 (2014) 727-741。[16] **A. Tran**, *On the AJ conjecture for cables of twisted knots*, 基础数学 230 (2015) 291-307。[17] **A. Tran**, *On the AJ conjecture for cabled knots*, arXiv:1412.2731。[18] **V. Turaev**, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, 《数学发明》92 (1988) 527-553。[19] **X. Zhang**, *The C-polynomial of a knot*, Topology Appl 139 (2004), 185-198。

Department of Mathematics、 University at Buffalo、 Buffalo、 NY、 14214-3093、 USA.*Email address*: xinzhang@buffalo.edu