arXiv:2603.10366v1 [math.AC] 11 Mar 2026

$\mathbb{P}^n$ 中解析扩张度至多为 n的曲线

MARC CHARDIN 与 CLARE D'CRUZ

Contents

1. 引言。2. 主要结 1
果 3. $\mathbb{P}^4$中的例子 2
参考文献 6
13

Abstract. 我们研究 $\mathbb{P}^n$ 中的一维闭子概形 X，它们在任意点处局部由至多 n 个方程定义，且 $I_{\mathfrak{m}}$ 的解析扩张度至多为 n，其中 $I \subseteq \Bbbk[x_0,\dots,x_n]$是 X的定义理想，且 $\mathfrak{m} = (x_0,\dots,x_n)$。在此情形下，我们证明：在温和条件下，$I_{\mathfrak{m}}$ 的所有幂都具有正深度，因此除非 I 是完全交，否则 $I_{\mathfrak{m}}$ 的极限深度为1。此外，Rees环的正则度至多为1，且纤维锥是Cohen-Macaulay的。这适用于 $\mathbb{P}^3$中定义单项式曲线的每一个理想。

1. Introduction.

设$(R,\mathfrak{m})$是具有无限剩余域的有限维局部环，I 是 R中的正高度理想。膨胀代数的解析偏差、深度函数以及Castelnuovo-Mumford正则性，即Rees代数 $\mathcal{R}_I := \oplus_{t\geq 0} I^t$、伴随分次环 $\mathcal{G}_I := \mathcal{R}_I/I\mathcal{R}_I$以及纤维锥 $\mathcal{F}_I := \mathcal{R}_I \otimes R/\mathfrak{m}$，在过去几十年中已得到研究。$I$的解析扩张度 $\mathfrak{a}(I) := \dim(\mathcal{F}_I)$在膨胀代数的研究中发挥了重要作用。众所周知，$\mathrm{ht}(I) \leq \mathfrak{a}(I)$，其中$\mathrm{ht}(I)$表示$I$ [22]的高度。受此结果启发，Huneke与Huckaba将 I 的解析偏差定义为 $\mathfrak{ad}(I) := \mathfrak{a}(I) - \mathrm{ht}(I)$ [14]。解析偏差较小的理想受到了特别研究。其中一个显著结果由Cowsik与Nori给出，他们证明：若 $\mathfrak{p}$ 是Cohen-Macaulay整环 R 中的素理想，使得 $R_{\mathfrak{p}}$ 是正则的且$\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$，则 $\mathfrak{p}$ 是完全交当且仅当 $\mathfrak{ad}(\mathfrak{p}) = 0$ [5, 命题 3]。受此结果启发，Huneke与Huckaba研究了解析偏差至多为二的理想 I [14]。对于Cohen-Macaulay局部环 R 中解析偏差为一的理想 I，在对 I的若干温和假设下，他们给出了 $\mathcal{G}_I$ [14, 定理2.9] 与 $\mathcal{R}_I$ 为Cohen-Macaulay的充要条件[15, 定理2.1]。在 [27, 定理 1], 中，Zarzuela对解析偏差为一的一般位置完全交理想，得到了关于Rees代数 $\mathcal{R}_I$ 与伴随分次环 $\mathcal{G}_I$ 的深度的有趣结果。解析偏差为一的理想的膨胀代数 $\mathcal{R}_I$ 与 $\mathcal{G}_I$ 的性质也在 [7], [8], [9], [24] 与 [26]中得到了研究。

对深度函数 $\mathfrak{d}_I(t) := \mathrm{depth}(R/I^t)$ 的研究可追溯至 Burch 的工作，他为诺特局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 中的任意理想 I 给出了如下不等式：$\min_t \mathfrak{d}_I(t) \leq \dim(R) - \mathfrak{a}(I)$

[3]。在 [2], Brodmann 证明了 $\mathfrak{d}_I(t)$ 的渐近值存在，并利用这一结果改进了 Burch 不等式。在 [11], Herzog 和 Hibi 研究了若干源自组合学的理想所对应的 $\mathfrak{d}_I(t)$ 的渐近性质。他们将 $\mathfrak{d}_I(t)$ 的渐近值称为I 的极限深度，并记作 $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{d}_I(t)$。深度函数也已在 [1], [13], [19] 和 [27] 中得到研究。

过去几十年来，膨胀代数的 Castelnuovo-Mumford 正则性一直备受关注。在 [18, 命题 4.1], 中，Johnson 和 Ulrich 证明，对于诺特局部环 R 中任意真理想， $\mathcal{R}_I$ 与 $\mathcal{G}_I$ 的正则度相等。文献 [25], 也研究了 $\mathcal{R}_I$ 与 $\mathcal{G}_I$ 的 Castelnuovo-Mumford 正则度相等的问题。

本文研究 $\mathbb{P}^n$ 中的曲线，其定义理想 $I \subseteq S = \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$ 满足条件 $\mathfrak{ad}(I_{\mathfrak{m}}) \leq 1$。我们首先确定无混合诺特局部环中的理想 I 满足哪些条件时，其约化数至多为 1、深度至少为 2，且 $\mathcal{R}_I$ 的正则度至多为 1（见引理 2.2）。我们将这些结果应用于第 2 节的主要结果（见定理 2.3）。我们证明，若 I 是闭子概形 X 的定义理想，那么在某些假设下，若 $\mathfrak{ad}(I) \leq 1$，则 $\mathfrak{d}_{I_{\mathfrak{m}}}(t) = 1$，因而 $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{d}_{I_{\mathfrak{m}}}(t) = 1$ （见定理 2.3）。这给出了 I 的极限深度的精确值。此外，$\operatorname{reg}(R_I)$ 至多为 1，因此我们得出纤维锥 $\mathcal{F}_I$ 是 Cohen-Macaulay 的。由此可估计所有 $t \geq 1$ 时 I^t 的生成元个数。作为推论，我们证明，若 I 是 $\mathbb{P}^3$ 中一条单项式曲线的定义理想，则定理 2.3 的所有条件均成立（见例 2.4）。

在第3节中，我们考虑 $\mathbb{P}^4$中单项式曲线的例子。在例3.1 中，我们给出一类无穷多个曲线的例子，其定义理想由一个 d-序列生成。在例3.2 和例3.3 中，我们证明存在一类无穷多个 $\mathbb{P}^4$ 中解析扩张度为四的单项式曲线，但定理2.3 的条件并非全部得到满足。

致谢：第二作者感谢“巴黎数学科学基金会”（‘The Foundation Sciences Math´ematiques de Paris’）提供的经费支持，感谢朱西厄数学研究所（Institut de Math´ematiques de Jussieu）、法国国家科学研究中心与索邦大学（Sorbonne Universit´e）提供的当地接待，以及来自 INFOSYS 和由 ANRF、印度政府资助的 MATRICS 项目资助 MTR/2023/000661 的部分支持。计算机软件 Macaulay2 [10] 在我们的研究中起到了关键作用。

2. Main result

在本节中，在某些假设下，我们证明 $\mathbb{P}^n$ 中某些一维闭子概形的膨胀代数具有良好的性质。

设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个交换环， $S = \oplus_{n\geq 0} S_n$ 是一个有限生成标准分次环，且其系数环为 $S_0 = R$。令 S_+ 表示由 S 中所有正次数齐次元素生成的理想，并令 M 为一个分次 S 模。设 $a(M) := \sup\{n | M_n \neq 0\}$。对于 $i \geq 0$，令$a_i(S) := a(H^i_{S_+}(S))$，其中 $H^i_{S_+}(S)$ 是关于 S_+的第 i 个局部上同调函子。 S 的 Castelnuovo-Mumford 正则度定义为 $\operatorname{reg}(S) := \max\{a_i(S) + i : i \geq 0\}$。

我们回顾 Herzog、Simis 和 Vasconcelos [12] 所定义的逼近复形的相关结果。这些复形由理想的一组有限生成元定义，其同调

在同构意义下独立于生成元的选取。它们根据由给定生成元构造的 Koszul 环或 Koszul 同调的信息，提供有关 $\mathcal{R}_I$ and$\mathcal{G}_I$ 的信息。

在下面的命题中，关于这些复形的无环性，复形 $C_\bullet$ 分解模 M，如果 $H_0(C_\bullet)$同构于 M，且对 $i \neq 0$ 有 $H_i(C_\bullet) = 0$ （等价地，存在从 C_0 到 M 的映射，该映射是从 $C_\bullet$ 到在同调度0处约化为 M 的复形的拟同构）。

命题 2.1. 设 R 是诺特局部环， I 是一个 R-理想。下列条件等价：

(i) $\mathcal{Z}$-复形分解 $\mathcal{R}_I$，(ii) $\mathcal{M}$-复形分解 $\mathcal{G}_I$，(iii) $\mathcal{M}$-复形仅有第0次同调，(iv) 正则度$(\mathcal{R}_I) = 0$，(v) 正则度$(\mathcal{G}_I) = 0$。若进一步 R 具有无限剩余域，则它们也等价于：(vi) I 由一个 d-序列生成。

回忆一下， $I\mathcal{R}_I = (\mathcal{R}_I)_+(-1) \subset \mathcal{R}_I$ 以及 $\mathcal{R}_I/I\mathcal{R}_I = R/I \oplus_R I/I^2 \oplus_R \cdots$。

证明。 将 $(R、\ \mathfrak{m}、\ k)$ 替换为 $(R(U)\ \mathfrak{m}R(U)\ k(U))$（其中 U是不定元），如 [20,第 17],页所述，性质 (i) 至 (v) 保持不变。因此，我们可以假设剩余域是无限的。

根据 [18, 4.1], (iv) 和 (v) 等价。根据 [12, 12.9], (i)、(iii) 和 (vi) 等价。蕴含关系 (ii)⇒(iii) 是显然的，反向蕴含成立，因为 (i) 由 (iii) 推出，并表明 $\mathrm{Sym}_R(I/I^2) = \mathcal{R}_I/I\mathcal{R}_I$ 根据 [12, 3.1]。最后，根据 [12, 12.7、12.8 和 12.10], (v) 和 (vi) 等价。□

引理 2.2. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为诺特无混合局部环，且 $J \subset \mathfrak{m}$ 是由$r+1$ 个元素生成的理想，使得深度 $J \geq r \geq 1$。假设 $\dim R \geq r+1$， R 满足 S_{r+1}，且对所有满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(J)$ 的 $\mathfrak{p} \supset J$， $J_\mathfrak{p}$ 为线性型。则，

(a) J 为线性型，且 $\mathrm{reg}(\mathcal{R}_J) = 0$。

(b) 设 $I := J^{sat} = \cup_i (J :\ \mathfrak{m}^i)$。若深度 $R \geq r+2$，则 $H^0_\mathfrak{m}(\mathrm{Sym}_R(J)) = 0$，

$$H^1_\mathfrak{m}(\mathrm{Sym}_R(J)) \simeq (I/J) \otimes_R S\{-1\},$$

$IJ = I^2$，对任意 t，$\mathrm{depth}_\mathfrak{m}(I^t) \geq 2$，且除非 $I = J$，否则 $\mathrm{reg}(\mathcal{R}_I) = 1$。

证明。注意，若 $\mathrm{depth}\ J > r$，则 J 为完全交理想，从而 (a) 与 (b) 成立。否则，深度 $J = r$，因而 J的高度为 r或 $r+1$。由于深度 $J \geq r$，对 $i \geq 2$ 有 $H_i = 0$。考虑 J 的 $r+1$ 个生成元上的逼近复形：

$$\mathcal{Z}_\bullet \qquad 0 \to Z_r \otimes_R S\{-r\} \to \cdots \to Z_1 \otimes_R S\{-1\} \to Z_0 \otimes_R S \to 0$$

其中 $S :\ = R[T_1, \ldots, T_{r+1}]$ 且

$$0 \to H_1 \otimes_R S\{-1\} \to H_0 \otimes_R S \to 0$$

其第 0 阶同调分别为 $\mathrm{Sym}_R(J)$ 和 $\mathrm{Sym}_R(J/J^2)$。

回想一下，其中第一个是无环的，因为 J 是一个几乎完全交。

设 $\mathfrak{p}$ 是 J的一个极小素理想。若 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = r$，则 $J_{\mathfrak{p}}$ 是线性型的，因此根据命题 2.1$(i) \Rightarrow (iii)$，第二个复形在 $\mathfrak{p}$处局部无环。若 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = r+1$，则在 $\mathfrak{p}$处局部地， $R_{\mathfrak{p}}$ 是 Cohen-Macaulay 的，因此 $J_{\mathfrak{p}}$ 是一个完全交。

对于 (a)，根据命题 2.1，只需证明 H_1 在任意非极小素理想 $\mathfrak{p} \supset J$ 处的局部深度为正，因为这意味着 $\mathcal{M}$-复形只有第 0 个同调。这样的素理想高度至少为 $r+1$。因此，由于 R 满足 S_{r+1}，B_1 和 Z_1 在 $\mathfrak{p}$处的局部深度至少为 2，所以 H_1 的深度确实为正。

注意，对于所有 $i>0$，$\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(B_i) = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R) - r + i$，因此，对于所有 $i \geq 2$，$\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(Z_i) = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R) - r + i$。

对于 (b)，我们比较由双复形 $\mathcal{C}^{\bullet}_{\mathfrak{m}} \mathcal{Z}_{\bullet}$ 得到的两个谱序列。 $\mathcal{Z}_{\bullet}$ 的无环性意味着，总同调就是支撑在 $\mathfrak{m}$ 中的 $H_0(\mathcal{Z}_{\bullet}) = \mathrm{Sym}_R(J)$ 的局部上同调。另一方面，首项为 ${}^1E^p_q = H^p_{\mathfrak{m}}(\mathcal{Z}_q) = H^p_{\mathfrak{m}}(Z_q) \otimes_R S\{-q\}$ 的谱序列表明：

$$H^1_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Sym}_R(J)) \simeq {}^{\infty}E^2_1 = {}^1E^2_1 = H^2_{\mathfrak{m}}(Z_1) \otimes_R S\{-1\} \simeq H^1_{\mathfrak{m}}(J) \otimes_R S\{-1\} \simeq (I/J) \otimes_R S\{-1\}.$$

事实上，对于所有 p，都有 ${}^1E^p_p = 0$；而对于 $p \neq 1$，有 ${}^1E^{p+1}_p = 0$，因为对于 $i \geq 2$，$\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(Z_i) \geq i+2$；由于 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(Z_0) \geq r+2 \geq 3$，故 ${}^1E^2_0 = 0$，因此 ${}^{\infty}E^2_1 = {}^1E^2_1$，且对于 $p \neq 1$，有 ${}^{\infty}E^{p+1}_p = 0$。这表明 $H^1_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Sym}_R(J)) \simeq {}^{\infty}E^2_1 = {}^1E^2_1$；此外， $H^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Sym}_R(J)) = 0$，因为对于所有 p，都有 ${}^1E^p_p = 0$。

由于 $\mathrm{Sym}_R(J) = \mathcal{R}_J$由 (a) 可知，因此通过将 $a \otimes T^{\alpha}$ 的类映射到 $a\phi(T^{\alpha})$ 的映射，有 $(I/J) \otimes_R S_{t-1} \simeq (J^t)^{sat}/J^t$，其中 $\phi\colon S \to \mathcal{R}_J$ 是由 J 的给定生成元定义的映射。因此，对于任意 t，都有 $(I^t)^{sat} = (J^t)^{sat} = IJ^{t-1} \subseteq I^t$，这表明 I^t 是饱和的，且等于 IJ^{t-1}。正合列

$$0 \to \mathcal{R}_J \to \oplus_t (J^t)^{sat} \to H^1_{\mathfrak{m}}(\mathcal{R}_J) \to 0$$

给出正合列：

$$0 \to \mathcal{R}_J \to \mathcal{R}_I \to (I/J) \otimes_R S\{-1\} \to 0,$$

这证明 $\mathrm{reg}(\mathcal{R}_I) \leq 1$。除非 $I = J$，否则等号成立；因为写作 $S_+ = (T_1, \ldots, T_{r+1})$ 时，有一个正合列

$$H^{r+1}_{S_+}(\mathcal{R}_J) \to H^{r+1}_{S_+}(\mathcal{R}_I) \to (I/J) \otimes_R H^{r+1}_{S_+}(S)\{-1\} \to 0$$

并且 $H^{r+1}_{S_+}(\mathcal{R}_J)_{-r} = 0$，因为 $\mathrm{reg}(\mathcal{R}_J) = 0$，这表明

$$H^{r+1}_{S_+}(\mathcal{R}_I)_{-r} = (I/J) \otimes_R H^{r+1}_{S_+}(S)_{-r-1} = I/J.$$

□

现在我们证明本文的主要结果。设 I 是局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 中的一个理想。令 $\mu(I)$ 表示 I 的最小生成元个数。若对某个 $n \geq 0$，有 $JI^n = I^{n+1}$，则称理想 $J \subseteq I$ 是 I 的约化。若在 I 的所有约化中， J 关于包含关系是极小的，则称约化 J 是 I 的一个最小约化。若 J 是 I 的一个约化，则约化

数定义为 I 关于 J 的约化数，记作 $\mathfrak{r}_J(I) = \min\{n \geq 0 | JI^n = I^{n+1}\}$。$I$ 的约化数定义为 $\mathfrak{r}(I) = \min\{r_J(I) | J$ 是 $I\}$ 的一个约化。

定理 2.3. 设 X 是 $\mathbb{P}^n$ 中的一个维数 1 闭子概形，在任一点处局部由至多 n 个方程定义。设 $I \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ 是 X 的定义理想，并令 $\mathfrak{m} := (X_0, \ldots, X_n)$。假设对于 I的任意极小素理想，$I_\mathfrak{p}$ 都是完全交。若 $\mathfrak{a}(I_\mathfrak{m})$在 $R_\mathfrak{m}$ 中的解析扩张度至多为 n，则：

(1) 对所有 t，$\operatorname{depth}(R/I^t) > 0$。(2) $\operatorname{reg}(\mathcal{R}_I) \leq 1$。特别地，约化数 $\mathfrak{r}(I_\mathfrak{m})$至多为 1，且 Rees 代数由线性方程和二次方程定义。(3) $\mathcal{F}_I$ 是 Cohen-Macaulay。(4) 置 $a = \mathfrak{a}(I_\mathfrak{m})$。则 I^t 由 $\binom{t+a-1}{a-1} + (\mu(I) - a)\binom{t+a-2}{a-1}$ 个元素极小生成。

证明。结论在 $\mathfrak{m}$ 处是局部的，因此我们可以将 R 和 I 在 $\mathfrak{m}$ 处局部化。我们还可以假设 k 是无限的。令 $\mathfrak{p}_i$ 为 $i = 1, \ldots, m$ 中有限个维数 1 的素理想，在这些素理想处，$I_{\mathfrak{p}_i} \subset R_{\mathfrak{p}_i}$ 不是完全交——它们全都属于维数 1 的伴随素理想。根据假设，$I_{\mathfrak{p}_i} \subseteq R_{\mathfrak{p}_i}$ 由 n 个元素生成。因此，生成元的 k-一般线性组合生成一个理想 J，使得对所有 i，都有 $J_{\mathfrak{p}_i} = I_{\mathfrak{p}_i}$；我们还可以进一步假设，这些 n 个一般元素生成 $I_\mathfrak{m}$ [22, 的一个约化（定理 1，第 150] 页）。在这种情况下，由于 J 是 $I_\mathfrak{m}$ 的一个约化，J 和 $I_\mathfrak{m}$ 在 $I_\mathfrak{m}$ 为完全交的任意素理想处局部重合。由此可得 $I_\mathfrak{m} = J^{sat}$，因为 $\mathfrak{m}$ 不是 $I_\mathfrak{m}$ 的伴随素理想，并且 J 和 $I_\mathfrak{m}$ 在去心谱上重合。

现在 (1) 和 （2）由引理 2.2 应用于 $J \subset R_\mathfrak{m}$，其 $r =$ 解析扩张度为 $I_\mathfrak{m}$。

（3）由于 $I_\mathfrak{m}$ 的约化数至多为 1，且解析偏差至多为 1，$\mathcal{F}_{I_\mathfrak{m}}$ 是 Cohen-Macaulay 的（由 [23, 推论 (1a)], [4, 定理 4.2]）。因此，$\mathcal{F}_I$ 是 Cohen-Macaulay 的，因为 I是齐次的。

（4）由于 $\mathcal{F}_{I_\mathfrak{m}}$ 是 Cohen-Macaulay 的（[4, 定理 5.7]），且 I 是一个齐次理想，

$$\mu(I^t) = \mu(I^t_\mathfrak{m}) = \binom{t+a-1}{a-1} + (\mu(I) - a)\binom{t+a-2}{a-1}.$$

□

例 2.4。根据 Gimenez、Morales 和 Simis 的一个结果 [6], ，在 $\mathbb{P}^3$ 中，单项式曲线的理想在 $R := k[X_0, \ldots, X_3]$ 于其唯一的齐次极大理想处局部化后，其解析扩张度至多为 3。因此，根据上述结果，如果 $I \subset R$ 是其定义理想：

(1) 深度$(R/I^t) > 0$ 对所有 t,

(2) $\mathcal{R}_I$ 的正则度为1，除非 I 由至多3个元素生成，此时正则度$(\mathcal{R}_I) = 0$。

T后一条件成立当且仅当 I 是完美的。

(3) $\mathcal{F}_I$ 是 Cohen-Macaulay，且对所有 $t \geq 1$，$\mu(I^t) = (\mu(I) - 2)\binom{t+2}{2} - (\mu(I) - 3)(t+1)$.

3. Examples in $\mathbb{P}^4$

在 $\mathbb{P}^4_k$ 的仿射图 $X_0 = 1$ 上，由 $x_0 = 1$、$x_1 = w^{a_1}$、$x_2 = w^{a_2}$、$x_3 = w^{a_3}$ 和 $x_4 = w^{a_4}$ 参数化的单项式曲线将被称为"次数为 (a_1, a_2, a_3, a_4) 的单项式曲线"。我们将这条曲线记为 $\mathcal{C}(a_1, a_2, a_3, a_4)$。在本节中，我们考虑单项式曲线 $\mathcal{C}(1, 2, 3, 3a + i)$，其中 $i = 0$，1，2。我们证明：若 $i = 0$，则定理 2.3 的全部假设均得到满足；若 $i = 1$，2，则定理 2.3 的假设中至少有一条得不到满足。

例 3.1. 设 $a \geq 3$ 且令 $\mathfrak{p}_a \subseteq R := k[x_0, \ldots, x_4]$ 为单项式曲线 $\mathcal{C}(1,2, 3, 3a)$ 和 $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_4)$ 的定义理想。那么

(1) $\mathfrak{p}_a = (g_1, g_2, g_4, g_3)$，其中 $g_1 = x_2^2 - x_1x_3$，$g_2 = x_1x_2 - x_0x_3$，$g_3 = x_3^a - x_0^{a-1}x_4$ 和 $g_4 = x_1^2 - x_0x_2$。(2) 令 $I = (\mathfrak{p}_a)_{\mathfrak{m}}$。那么 (a) I 由一个 d-序列生成，且 $\mathfrak{r}(I) = 0$；(b) $\mathcal{R}_I \cong \mathrm{Sym}_R(I)$，$\mathcal{R}_I$ 是 Cohen-Macaulay，且 $\mathrm{reg}(\mathcal{R}_I) = 0$；(c) $\mathcal{F}_I \cong k[u_1, \ldots, u_4]$，其中 $u_1, \ldots, u_4$ 为变量，且对所有 $t \geq 1$，$\mu(\mathfrak{p}_a^t) = \binom{t+3}{3}$。

证明。(1)：令 $I_a = (g_1, g_2, g_3, g_4)$。可以验证，$I_a \subseteq \mathfrak{p}_a$，$x_0, x_4$ 是 R/I_a 的参数系，并且 $I_a + (x_0, x_4) = (x_0, x_1^2, x_1x_2, x_2^2 - x_1x_3, x_3^a, x_4)$。采用关于 $x_0 > \cdots > x_4$ 的分次反字典序，可得 $I_a + (x_0, x_4)$ 的初始理想为 $(x_0, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^a, x_4)$。此外，$(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^a) = (x_1, x_2^2, x_3^a) \cap (x_1^2, x_2, x_3^a)$。因此，我们有正合列

$$0 \longrightarrow \frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^a)} \longrightarrow \frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1, x_2^2, x_3^a)} \oplus \frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1^2, x_2, x_3^a)} \longrightarrow \frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)} \longrightarrow 0,$$

这意味着

$$\begin{aligned} \ell\left(\frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^a)}\right) &= \ell\left(\frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1, x_2^2, x_3^a)}\right) + \ell\left(\frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1^2, x_2, x_3^a)}\right) - \ell\left(\frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)}\right) \\ &= 2a + 2a - a \\ &= 3a. \end{aligned} \tag{3.1}$$

令 $\mathfrak{m}=(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$。那么

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad 3a &= e((x_0,x_4);R/\mathfrak{p}_a)\\
&= e((x_0,x_4);R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}_aR_{\mathfrak{m}}) && [21,\text{定理 }15,\text{第 }333]\text{页}\\
&\le \ell\left(\frac{R_{\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{p}_a+(x_0,x_4))R_{\mathfrak{m}}}\right)\\
&\le \ell\left(\frac{R}{I_a+(x_0,x_4)}\right)\\
&= \ell\left(\frac{R}{(x_0,x_1^2,x_1x_2,x_2^2,x_3^a,x_4)}\right)\\
&= \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2,x_1x_2,x_2^2,x_3^a)}\right)\\
&= 3a && [\text{来自（3.1）}].
\end{aligned}
$$

因此 $I_a+(x_0,x_4)=\mathfrak{p}_a+(x_0,x_4)$，这意味着 $\mathfrak{p}_a+(x_0)\subseteq I_a+(x_0,x_4)$。设 $\alpha\in\mathfrak{p}_a+(x_0)$。那么 $\alpha=\beta+x_4r$，其中 $\beta\in I_a+(x_0)$ 且 $r\in R$。这意味着 $x_4r=\alpha-\beta\in\mathfrak{p}_a+(x_0)$，因为 $I_a\subseteq\mathfrak{p}_a$。因此 $r\in\mathfrak{p}_a+(x_0):(x_4)$。由 (3.2)，$x_4$ 是 $R/\mathfrak{p}_a+(x_0)$ 上的正则元，这意味着 $(\mathfrak{p}_a+x_0):(x_4)=\mathfrak{p}_a+(x_0)$。这意味着 $r\in\mathfrak{p}_a+(x_0)$，进而 $\mathfrak{p}_a+(x_0)\subseteq I_a+(x_0)+x_4(p_a+(x_0))\subseteq I_a+(x_0)+\mathfrak{m}(p_a+(x_0))\subseteq\mathfrak{p}_a+(x_0)$。由分次中山引理，$\mathfrak{p}_a+(x_0)=I_a+(x_0)$。这意味着 $\mathfrak{p}_a\subseteq I_a+(x_0)$。设 $f\in\mathfrak{p}_a$。那么 $f=g+x_0h$，其中 $g\in I_a$ 且 $h\in R$。这意味着 $x_0h=f-g\in\mathfrak{p}_a$，因为 $I_a\subseteq\mathfrak{p}_a$。由 (3.2)，由于 x_0 是 $R/\mathfrak{p}_a$ 上的非零因子。因此 $h\in\mathfrak{p}_a:(x_0)=\mathfrak{p}_a$。由此得到 $\mathfrak{p}_a\subseteq I_a+x_0\mathfrak{p}_a\subseteq I_a+\mathfrak{m}\mathfrak{p}_a\subseteq\mathfrak{p}_a$。由分次中山引理，$\mathfrak{p}_a=I_a$。这就证明了 (1)。

(2a)：对于所有 $2\le i\le k\le 4$，g_1，g_i 构成一个正则序列。因此

$$((g_1):g_ig_k) \;=\; ((g_1):g_i):g_k)=((g_1):g_k).$$

我们还有

$$
\begin{aligned}
(g_1,g_2):(g_3^2) &= ((g_1,g_2):g_3)=((g_1,g_2,x_3g_4):g_3)=(g_1,g_2,x_3g_4),\\
(g_1,g_2):(g_3g_4) &= (((g_1,g_2):g_3):g_4)=(g_1,g_2,x_3g_4):(g_4)=(x_2,x_3),\\
(g_1,g_2):g_4 &= (x_2,x_3)=(g_1,g_2):g_4^2.
\end{aligned}
$$

由 [17], g_1,g_2,g_3,g_4 是一个 d-序列，因此它们解析无关（[17, 定理 2.2]）。因此 $\mathfrak{r}(I)=0$。

(2b)：由于 I 由一个 d-序列生成，$\mathcal{R}_I\cong\mathrm{Sym}_R(I)$（[16, 定理 3.1]）且 $\mathrm{reg}(\mathcal{R}_I)=0$([25,推论 1.2])。

(2c)：由 [17, 定理 2.2]，$\mathcal{F}_I\cong\mathcal{R}_I/\mathfrak{m}\mathcal{R}_I=k[x_0,\dots,x_4,u_1,\dots,u_4]/\mathfrak{m}\cong k[u_1,\dots,u_4]$。由此可得 $\mathrm{reg}(\mathcal{F}_I)=0$ 且 $\mu(\mathfrak{p}_a^t)=\mu(I^t)=\binom{t+3}{3}$。

□

下一个例子是 $\mathbb{P}^4$ 中解析扩张度为 4 的曲线。不过，定理 2.3 中的一些假设并不成立。

例3.2. 设 $a \geq 3$，且令 $\mathfrak{p}_a \subseteq R := k[x_0, \ldots, x_4]$ 为单项式曲线 $\mathcal{C}(1,2,3,3a+1)$ 的定义理想。那么

(1) $\mathfrak{p}_a = (g_1, \ldots g_6)$ where $g_1 = x_2^2 - x_1x_3$, $g_2 = x_1x_2 - x_0x_3$, $g_3 = x_1^2 - x_0x_2$, $g_4 = x_3^{a+1} - x_0^{a-1}x_2x_4$, $g_5 = x_2x_3^a - x_0^{a-1}x_1x_4$ and $g_6 = x_1x_3^a - x_0^a x_4$.
(2) Put $I = (\mathfrak{p}_a)_{\mathfrak{m}}$. Then:
   (a) $\mathfrak{a}(I) = 4$.
   (b) $\mathfrak{r}(I) = 2$.
   (c) $\mu(\mathfrak{p}_a^t) = \binom{t+3}{3} + 2\binom{t+2}{3} + \binom{t+1}{3}$.
(3) $\operatorname{reg}(\mathcal{R}_I) \geq 2$.

证明。(1): 令 $I_a = (g_1, \ldots, g_6)$。可以验证，$I_a \subseteq \mathfrak{p}_a$。注意，$x_0, x_4$ 是 R/I_a 的参数系，而 $I_a + (x_0, x_4) = (x_0, x_1^2, x_1x_2, x_2^2 - x_1x_3, x_3^{a+1}, x_1x_3^a, x_2x_3^a, x_4)$。采用分次反字典序，我们得到 I_a 的首理想为 $(x_0, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^{a+1}, x_1x_3^a, x_2x_3^a, x_4)$。此外，$(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^{a+1}, x_1x_3^a, x_2x_3^a) = (x_1, x_2^2, x_3^a) \cap (x_1^2, x_2, x_3^a) \cap (x_1, x_2, x_3^{a+1})$。因此，由正合列

(3.3)
$$0 \to \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^{a+1}, x_1x_3^a, x_2x_3^a)} \to \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^a)} \oplus \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^{a+1})} \to \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)} \to 0$$

(3.4)
$$0 \to \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^a)} \to \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2^2, x_3^a)} \oplus \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_2, x_3^a)} \to \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)} \to 0$$

我们得到

(3.5)
$$\begin{aligned}
&\ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^{a+1}, x_1x_3^a, x_2x_3^a)}\right) \\
&= \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^a)}\right) + \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^{a+1})}\right) - \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)}\right) && \text{[from 3.3]} \\
&= \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2^2, x_3^a)}\right) + \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_2, x_3^a)}\right) - \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)}\right) \\
&+ \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^{a+1})}\right) - \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)}\right) && \text{[from 3.4]} \\
&= 2a + 2a - a + (a+1) - a \\
&= 3a + 1.
\end{aligned}$$

令 $\mathfrak{m}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$。则

$$
\begin{aligned}
3a+1 &= e((x_0,x_4);R/\mathfrak{p}_a) \\
&= e((x_0,x_4);R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}_aR_{\mathfrak{m}}) && \text{[21, Theorem 15, page 333]} \\
&\le \ell\left(\frac{R_m}{(\mathfrak{p}_a+(x_0,x_4))R_{\mathfrak{m}}}\right) \\
&\le \ell\left(\frac{R}{I_a+(x_0,x_4)}\right) \\
&= \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2,x_1x_2,x_2^2,x_3^{a+1},x_1x_3^a,x_2x_3^a)}\right) \\
&= 3a+1 && \text{[由（3.5）].}
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

因此 $I_a+(x_0,\ x_4)=\mathfrak{p}_a+(x_0,\ x_4)$。其余证明与例 3.1（1）中的证明类似。这就证明了（1）。

（2）令 $\mathfrak{q}=(g_1,\ g_2,\ g_3+g_4,\ g_6)$ S 且 $J=\mathfrak{q}R$。我们断言 J 是 $I=(g_1,\ g_2,\ g_3+g_4,\ g_6,\ g_3,\ g_5)$ 的最小约化。我们有如下关系：

$$
g_3^2 = g_1g_6-g_2g_5+g_3(g_3+g_4) \tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
g_5^2 = {} & -x_0^{a-2}x_3^{a-1}x_4g_1(g_4+g_3)+(x_0^{a-2}x_3^{a-1}x_4+x_3^{a-1})g_1g_4+x_0^{a-2}x_3^{a-1}x_4g_2^2 \\
& -x_0^{a-2}x_4(g_3+g_4)g_6+(x_0^{a-2}x_4+1)g_4g_6.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

(2a) 由关系 (3.7) 和 (3.8) 可得 $(g_4,g_5)^3\subseteq JI^2$，进而得到 $JI^2=I^3$。这意味着 $\mathfrak{a}(I)\le 4$。由于 $\mathrm{ht}(I)=3$，我们有 $\mathfrak{a}(I)\ge 3$。若 $\mathfrak{a}(I)=3$，则 $\mathrm{ht}(I)=\mathfrak{a}(I)$，因此根据定理 1.3]，$I$ 由一个正则序列生成，这与 I 由 6 个元素最小生成矛盾。因此 $\mathfrak{a}(I)=4$ 且 $\mathfrak{r}(I)\le 2$。

(2b) 如果 $\mathfrak{r}(I)=1$，那么根据推论 5.8]，$\mu(I^2)=\mu(JI)=18$。我们断言 $\mu(I^2)=19$。由于 g_1，....., g_6 是 I 的极小生成集，故 $\mu(I^2)\le\binom{7}{2}=21$。(3.7) 和 (3.8) 中的关系表明 $\mu(I^2)\le 19$。要证明该断言，只需证明 $g_2g_6-g_3g_5\notin JI$。我们写作

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{qp}_a = {} & (g_1^2,g_1g_2,g_2^2-g_1g_3,g_2^2,g_2g_3,g_1g_6-g_2g_5+g_3(g_4+g_3),g_1g_4,g_2g_4, \\
& g_3g_4,g_1g_5+g_2g_4,g_2g_5,g_2g_6,g_3g_6g_3g_5-g_2g_6,g_4^2,g_4g_5+g_3g_5-g_2g_6, \\
& g_4g_6,g_5g_6-x_3^{a-1}g_2g_4,g_6^2-x_3^{a-1}g_3g_4).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

考虑多项式环 $S=\mathbb{k}[x_0,\dots,x_4]$。我们在 S 上取分次反字典序，且 $x_0>x_1>x_2>x_3>x_4$。计算 (3.9) 中所列生成元的 S-多项式后，我们得出它是一个 Gr¨obner 基，属于 $\mathfrak{qp}_a$。令 $LI(\mathfrak{qp}_a)$ 表示 $\mathfrak{qp}_a$的初始理想。于是

$$
\begin{aligned}
LI(\mathfrak{qp}_a) = {} & (x_2^4,x_1x_2^3,x_0x_2^3,x_1^2x_2^2,x_1^3x_2,x_1^4,x_2^2x_3^{a+1},x_1x_2x_3^{a+1},x_1^2x_3^{a+1},x_2^3x_3^a,x_1x_2^2x_3^a, \\
& x_1^2x_2x_3^a,x_1^3x_3^a,x_0^2x_2^2x_3^a,x_3^{2a+2},x_2x_3^{2a+1},x_1x_3^{2a+1},x_0x_3^{2a+1},x_0x_2x_3^{2a}).
\end{aligned}
$$

由于

$$
g_2g_6-g_3g_5=x_0x_2^2x_3^a-x_0x_1x_3^{a+1}+x_0^{a-1}x_1^3x_4-2x_0^ax_1x_2x_4+x_0^{a+1}x_3x_4,
$$

$g_2g_6 - g_3g_5$的首项为 $x_0x_2^2x_3^a \notin LI(\mathfrak{qp}_a)$。因此 $g_2g_6 - g_3g_5 \notin \mathfrak{qp}_a$。我们断言 $g_2g_6 - g_3g_5 \notin JI = \mathfrak{qp}_a S_{\mathfrak{m}}$。假设 $g_2g_6 - g_3g_5 \in JI$。那么存在一个元素 $\alpha \in \mathfrak{m} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$，使得 $(1-\alpha)(g_2g_6 - g_3g_5) \in \mathfrak{qp}_a$。注意，对于 $i = 0$、1、2、3，$x_i(g_2g_6 - g_3g_5)$ 的首项为 $x_i(x_0x_2^2x_3^a) \in LI(\mathfrak{qp}_a)$。因此，我们只需考虑 $\alpha = \alpha_1x_4 + \cdots + \alpha_bx_4^b$，其中 $b > 0$ 且 $\alpha_i \in k$。那么 $(1-\alpha)(g_2g_6 - g_3g_5)$ 的首项为 $a_bx_0x_2^2x_3^ax_4^b \notin LI(\mathfrak{qp}_a)$。但是 $(1-\alpha)(g_2g_6 - g_3g_5) \in \mathfrak{qp}_a$ 意味着 $-\alpha(g_2g_6 - g_3g_5) = (1-\alpha)(g_2g_6 - g_3g_5) - (g_2g_6 - g_3g_5) \in \mathfrak{qp}_a$，这将导致矛盾。因此 $g_2g_6 - g_3g_5 \notin JI$。这意味着 $\mu(I^2) \geq 19$，从而$\mathfrak{r}(I) = 2$。

（2c）由于 J 是 I 的最小约化，且 $\mathfrak{r}(I) = 2$,

$$\frac{\mathcal{F}_I}{J\mathcal{F}_I} = \frac{R}{\mathfrak{m}} \oplus \frac{I}{J + \mathfrak{m}I} \oplus \frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}. \tag{3.10}$$

由于 J 是 I的最小约化，$J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$，并且我们有正合列

$$0 \longrightarrow \frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} \cong \frac{J}{\mathfrak{m}J} \longrightarrow \frac{I}{\mathfrak{m}I} \longrightarrow \frac{I}{J + \mathfrak{m}I} \longrightarrow 0. \tag{3.11}$$

由（3.10）和（3.11）可得

$$\begin{aligned} \ell\left(\frac{\mathcal{F}_I}{J\mathcal{F}_I}\right) &= \ell\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right) + \ell\left(\frac{I}{J + \mathfrak{m}I}\right) + \ell\left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) \\ &= \ell\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right) + \ell\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right) - \ell\left(\frac{J}{\mathfrak{m}J}\right) + \ell\left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) \\ &= 1 + (6-4) + 1 \\ &= 4. \end{aligned} \tag{3.12}$$

令 $\mathcal{F}_I = R/\mathfrak{m}[u_1, \ldots, u_6]/K$。由关系（3.7）和（3.8）可得 $u_5^2 - u_1u_4 + u_2u_6 - u_3u_5$, $u_6^2 - u_5u_4 \in K$。因此，由（3.12）可得

$$4 = \ell\left(\frac{\mathcal{F}_I}{J\mathcal{F}_I}\right) = \ell\left(\frac{R/\mathfrak{m}R[u_1, \ldots, u_6]}{K + (u_1, u_2, \ldots, u_4)}\right) \leq \ell\left(\frac{R/\mathfrak{m}R[u_1, \ldots, u_6]}{(u_5^2, u_6^2) + (u_1, u_2, \ldots, u_4)}\right) = 4. \tag{3.13}$$

因此，（3.13）中等号成立，这意味着 $K = (u_5^2 - u_1u_4 + u_2u_6 - u_3u_5,\ u_6^2 - u_5u_4)$，且 $\mathcal{F}_I$ 的希尔伯特级数为

$$H(\mathcal{F}_I, u) = \frac{(1-u^2)^2}{(1-u)^6} = \frac{1 + 2u + u^2}{(1-u)^4}.$$

We 比较次数为 t 的项，并利用 $\mathfrak{p}_a$ 是齐次理想这一事实 ，

$$\mu(\mathfrak{p}_a^t) = \mu(I^t) = \binom{t+3}{3} + 2\binom{t+2}{3} + \binom{t+1}{3}.$$

(3) 对于所有 $i \geq 0$，Rees 代数的第 i 个 a-不变量为 $a_i(\mathcal{R}_I) = \max^{\{n | [H^i_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_n \neq 0\}}$，且 $\operatorname{reg}(\mathcal{R}_I) = \max\{a_i + i | i \geq 0\}$。令 $J^{[k]} = (g_1^k, g_2^k, (g_3 + g_4)^k, g_6^k)$。那么

$$[H^4_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_n = \varinjlim_k \frac{I^{4k+n}}{J^{[k]}I^{3k+n}}.$$

由于 $JI^2 = I^3$，对于所有 $n \geq -1$，对于所有 $k \geq 1$,

$$J^{[k]}I^{3k+n} = J^{[k]}J^{3(k-1)}I^{n+3} = J^{k+3(k-1)}I^{n+3} = J^{4k-3}I^{n+3} = I^{4k+n}$$

这意味着，对于所有 $n \geq -1$, $[H^4_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_n = 0$。我们断言

$$[H^4_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_{-2} = \frac{I^{4k-2}}{J^{[k]}I^{3k-2}} = \left(\frac{\mathcal{F}_I}{J^{[k]}\mathcal{F}_I}\right)_{4k-2} \neq 0.$$

由于 $\mathcal{F}_I$是 Cohen-Macaulay， g_1^k、 g_2^k、$(g_3+g_4)^k$、 g_6^k在 $\mathcal{F}_I$中构成一个正则序列，因此 $\mathcal{F}_I/J^{[k]}\mathcal{F}_I$的希尔伯特级数为

$$H\left(\frac{\mathcal{F}_I}{J^{[k]}\mathcal{F}_I}, u\right) = H\left(\mathcal{F}_I\right)(1-u^k)^4 = (1+2u+u^2)(1+u+\cdots+u^{k-1})^4. \tag{3.14}$$

由 (3.14) 中的希尔伯特级数可知，对所有 $k \geq 1$,

$$\dim\left(\frac{\mathcal{F}_I}{J^{[k]}\mathcal{F}_I}\right)_{4k-2} = \dim\left(\frac{I^{4k-2}}{J^{[k]}I^{3k-2}}\right) = 1,$$

这意味着$[H^4_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_{4k-2} = 1$。因此 $a_4(\mathcal{R}_I) = -2$，从而 $\operatorname{reg}(\mathcal{R}_I) \geq 2$。 □

例 3.3。设 $a \geq 3$，并令 $\mathfrak{p}_a = \mathcal{I}(1, 2, 3, 3a+2) \subseteq R := k[x_0, \ldots, x_4]$ 为单项式曲线 $\mathcal{C}(1, 2, 3, 3a+2)$ 的定义理想。那么

(1) $\mathfrak{p}_a = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$，其中 $g_1 = x_2x_3^a - x_0^a x_4 + x_2^2 - x_1x_3$、 $g_2 = x_1x_2 - x_0x_3$、 $g_3 = x_1^2 - x_0x_2$、 $g_4 = x_3^{a+1} - x_0^{a-1}x_1x_4$ 且 $g_5 = x_2x_3^a - x_0^a x_4$。(2) 令 $I = (\mathfrak{p}_a)_{\mathfrak{m}}$。(a) 那么 $\mathfrak{a}(I) = 4$ 且 $\mathfrak{r}(I) = 2$。(b) 对所有 $t \geq 0$， $\mu(\mathfrak{p}_a^t) = \binom{t+3}{3} + \binom{t+2}{3} + \binom{t+1}{3}$。(c) $\operatorname{reg}(\mathcal{F}_I) = 2$。(3) $\operatorname{reg}(\mathcal{R}_I) \geq 2$。

证明。（1）令 $I_a = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$。可以验证 $I_a \subseteq \mathfrak{p}_a$。注意， x_0, x_4 是 R/I_a 的参数系，且 $I_a + (x_0, x_4) = (x_0, x_2^2 - x_1x_3, x_1x_2, x_1^2, x_3^{a+1}, x_2x_3^a, x_4)$。采用分次反字典序，可得 $I_a + (x_0, x_4)$ 的首理想为 $(x_0, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_2x_3^a, x_3^{a+1}, x_4)$。此外，$(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_2x_3^a, x_3^{a+1}) = (x_1, x_2^2, x_3^a) \cap (x_1^2, x_2, x_3^{a+1})$。因此，由正合列

$$0 \longrightarrow \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_2x_3^a, x_3^{a+1})} \longrightarrow \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2^2, x_3^a)} \oplus \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_2, x_3^{a+1})} \longrightarrow \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)} \longrightarrow 0$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_2x_3^a, x_3^{a+1})}\right) \\ = \;& \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2^2, x_3^a)}\right) + \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2, x_2, x_3^{a+1})}\right) - \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1, x_2, x_3^a)}\right) \\ = \;& 2a + 2(a+1) - a = 3a+2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

令 $\mathfrak{m}=(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$。则

$$
\begin{aligned}
3a+2 &= e((x_0,x_4);R/\mathfrak{p}_a) \\
&= e((x_0,x_4);R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}_aR_{\mathfrak{m}}) && \text{[21, Theorem 15, page 333]} \\
&\leq \ell\left(\frac{R_{\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{p}_a+(x_0,x_4))R_{\mathfrak{m}}}\right) \\
&\leq \ell\left(\frac{R}{I_a+(x_0,x_4)}\right) \\
&= \ell\left(\frac{R}{(x_0,x_1^2,x_1x_2,x_2^2,x_2x_3^a,x_3^{a+1},x_4)}\right) \\
&= \ell\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1^2,x_1x_2,x_2^2,x_2x_3^a,x_3^{a+1})}\right) \\
&= 3a+2 && \text{[来自（3.15）]}.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

因此 $I_a+(x_0,x_4)=\mathfrak{p}_a+(x_0,x_4)$。证明的其余部分与例 3.1(1) 中的证明类似。这就证明了（1）。

(2a) 令 $I=(\mathfrak{p}_a)\mathfrak{m}$。我们断言 $J=(g_1,g_2,g_3,g_4)$ 是 I的一个最小约化。关系式

$$
\begin{aligned}
0 = {} & x_0^{a-2}x_3^{a-1}x_4g_2^3 - x_0^{a-3}x_1x_3^{a-1}x_4g_2^2g_3 + x_0^{a-3}x_2x_3^{a-1}x_4g_2g_3^2 + x_3^{a-1}g_1^2g_4 \\
& -x_0^{a-2}x_4g_3^2g_5 - 2x_3^{a-1}g_1g_4g_5 + x_3^{a-1}g_4g_5^2 - g_3g_4^2 + g_2g_4g_5 - g_1g_5^2 + g_5^3
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

这意味着 $JI^2=I^3$ 和 $\mathfrak{a}(I)\leq 4$。由于 $\mathsf{ht}(I)=3$，我们有 $\mathfrak{a}(I)\geq 3$。如果 $\mathfrak{a}(I)=3$，那么由于 $\mathsf{ht}(I)=3$ 根据 [15, 定理 1.3]，I 由一个正则序列生成，这导致矛盾。因此 $a(I)=4$，并且 J 是 I的一个最小约化。由（3.17）可得 $\mathfrak{r}(I)\leq 2$。

由于 J 是 I的最小约化，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_J &\cong R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}[u_1,u_2,u_3,u_4] \\
\mathcal{F}_I &\cong \frac{R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}[u_1,u_2,u_3,u_4,u_5]}{(f)}
\end{aligned}
$$

其中 $f=u_5^3-u_1u_5^2+u_2u_4u_5-u_3u_4^2$。因此，$\mathcal{F}_I$ 的希尔伯特级数为

$$
H(\mathcal{F}_I,u)=\frac{1+u+u^2}{(1-u)^4} \tag{3.18}
$$

由此得出 $\mathfrak{r}(I)=2$。

(2b) 由于 $\mathfrak{p}_a$ 是齐次理想，由（3.18），对所有 $t\geq 1$

$$
\mu(\mathfrak{p}_a^t)=\mu(I^t)=\binom{t+3}{3}+\binom{t+2}{3}+\binom{t+1}{3}.
$$

(2c) 令 $K=R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$。正合列

$$
0\longrightarrow K[u_1,u_2,u_3,u_4,u_5][-3]\longrightarrow K[u_1,u_2,u_3,u_4,u_5]\longrightarrow \frac{K[u_1,u_2,u_3,u_4,u_5]}{(f)}\longrightarrow 0
$$

意味着正则度$(\mathcal{F}_I)=2$。

(3) 对所有 $i \geq 0$, I 的 Rees 代数的第 i 个 a-不变量为 $a_i(\mathcal{R}_I) := \max\{n | [H^i_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_n \neq 0\}$ 且正则度$(\mathcal{R}_I) = \max\{a_i + i | i \geq 0\}$。令 $J^{[k]} = (g_1^k, g_2^k, g_3^k, g_4^k)$。则

$$[H^4_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_n = \lim_{\overrightarrow{k}} \frac{I^{4k+n}}{J^{[k]} I^{3k+n}}. \tag{3.19}$$

由于 $JI^2 = I^3$, 对于所有 $n \geq -1$, 对于所有 $k \geq 1$,

$$J^{[k]} I^{3k+n} = J^{[k]} J^{3(k-1)} I^{n+3} = J^{k+3(k-1)} I^{n+3} = J^{4k-3} I^{n+3} = I^{4k+n}$$

这意味着 $[H^4_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_n = 0$ 对于所有 $n \geq -1$。我们声称 $[H^4_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_{-2} \neq 0$。

由于 $\mathcal{F}_I$ 是 Cohen-Macaulay, 且 g_1^k、g_2^k、g_3^k、g_4^k 是 $\mathcal{F}_I$ 中的参数系, 因此也是正则序列。因此, $\mathcal{F}_I / J^{[k]} \mathcal{F}_I$ 的希尔伯特级数为

$$H\left(\frac{\mathcal{F}_I}{J^{[k]} \mathcal{F}_I}, u\right) = H(\mathcal{F}_I)(1 - u^k)^4 = (1 + u + u^2)(1 + u + \cdots + u^{k-1})^4$$

这意味着

$$\dim\left(\frac{\mathcal{F}_I}{J^{[k]} \mathcal{F}_I}\right)_{4k-2} = \dim\left(\frac{I^{4k-2}}{J^{[k]} I^{3k-2}}\right) = 1. \tag{3.20}$$

由（3.19）和（3.20）可得 $\ell\left([H^4_{(\mathcal{R}_I)_+}(\mathcal{R}_I)]_{4k-2}\right) = 1 > 0$。因此我们得出 $a_4(\mathcal{R}_I) = -2$, 这意味着正则度$(\mathcal{R}_I) \geq 2$。□

References

[1] S. Bandari, J. Herzog 和 T. Hibi，深度函数具有任意给定个数严格局部极大值的单项式理想。Ark. Mat. 52 (2014), no. 1, 11-19. 2[2] M. Brodmann，解析扩张度的渐近性质。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 86 (1979) 35-39. 2[3] L. Burch，余维与解析扩张度。Proc. Cambridge Philos. Soc. 72 (1972), 369-373. 2 [4] T. Cortadellas 和 S. Zarzuela，关于滤过的纤维锥的深度。J. Algebra 198 (1997), no. 2, 428-445. 5, 9[5] R. C. Cowsik 和 M. V. Nori，关于膨胀的纤维。J. Indian Math. Soc. 40 (1976), 217-222. 1[6] P. Gimenez, M. Morales 和 A. Simis，射影三维空间中单项式曲线理想的解析扩张度。计算代数几何（尼斯，1992），77-90, Progr. Math., 109, Birkh¨auser Boston, MA 1993. 5[7] S. Goto 和 S. Huckaba，关于与解析偏差为一的理想相关的分次环。Amer. J. Math. 116 (1994), no. 4, 905-919. 1[8] S. Goto, Y. Nakamura 和 K. Nishida，关于与某些解析偏差为一的理想相关的分次环的 Gorenstein 性。Japan. J. Math. (N.S.) 23 (1997), no. 2, 303-318. 1[9] S. Goto 和 Y. Nakamura，关于与解析偏差为一的理想相关的分次环的 Gorenstein 性。Contemp. Math., vol. 159, Amer. Math. Soc, 罗得岛州普罗维登斯, 1994, pp. 51-72. 1[10] D. Grayson 和 M. Stillman，Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：https://www2.macaulay2.com/。2[11] J. Herzog 和 T. Hibi，理想的幂的深度。J. Algebra 291 (2005), no. 2, 534-550. 2[12] J. Herzog, A. Simis 和 W. V. Vasconcelos，Koszul 同调与膨胀环。载于 *Commutativealgebra (Trento, 1981)*, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*第 84 卷，第 79–169 页。Dekker，纽约，1983。2, 3

[13] J. Herzog 和 M. Vladoiu，具有常深度函数的无平方因子单项式理想。J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), no. 9, 1764-1772. 2[14] S. Huckaba 和 C. Huneke，具有较小解析偏差的理想的幂。Amer. J. Math. 114 (1992), no. 2, 367-403. 1[15] S. Huckaba 和 C. Huneke，具有较小解析偏差的理想的 Rees 代数。Trans. Amer. Math. Soc. 339 (1993) no. 1, 373-402. 1, 9, 12[16] C. Huneke，由 d-序列生成的理想的对称代数与 Rees 代数。J. Algebra 62 (1980), no. 2, 268-275. 7[17] C. Huneke，d-序列理论与理想的幂。《数学进展》46 (1982), no. 3, 249-279. 7[18] M. Johnson 和 B. Ulrich，Artin-Nagata性质与 Cohen-Macaulay关联分次环。Compo- sitio Math. 108 (1996), 7-29. 2, 3[19] K. Matsuda, T. Suzuki 和 A. Tsuchiya，单项式理想的非递增深度函数。《格拉斯哥数学杂志》60 (2018), no. 2, 505-511. 2[20] M. Nagata，局部环。《纯粹与应用数学跨学科丛书》第 13 号。John Wiley & Sons，纽约-伦敦，1962。3[21] D. G. Northcott，关于环、模与重数的课程。剑桥大学出版社，伦敦，1968，xiv + 444 页 7, 9, 12[22] D. G. Northcott 和 D. Rees，局部环中理想的约化。Proc. Cambridge Philos. Soc. 50 (1954), 145-158. 1, 5[23] K. Shah，关于理想的纤维锥的 Cohen-Macaulay性。J. Algebra 143 (1991), no. 1, 156-172. 5[24] N. V. Trung，具有较小解析偏差的理想的约化数、a-不变量与 Rees 代数。《交换代数》（A. Simis, N. V. Trung 和 G. Valla 编），世界科学出版社，新加坡，1984。1[25] N. V. Trung，Rees 代数与伴随分次环的 Castelnuovo正则性。《美国数学会汇刊》350 (1998), no. 7, 2813-2832. 2, 7[26] W. V. Vasconcelos, Hilbert函数、解析扩张度与 Koszul 同调，Contemp. Math., vol. 159, Amer. Math. Soc, 罗得岛州普罗维登斯, 1994, pp. 401-422. 1[27] S. Zarzuela，关于解析偏差为一的理想的膨胀代数的深度。《美国数学会会报》123 (1995), no. 12, 3639-3647. 1

Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS & Sorbonne Université, 4, place Jussieu, F–75252 Paris cedex 05, France
Email address: marc.chardin@imj-prg.fr

Chennai Mathematical Institute, Plot H1, SIPCOT IT Park, Chennai 603 103, India
Email address: clare@cmi.ac.in